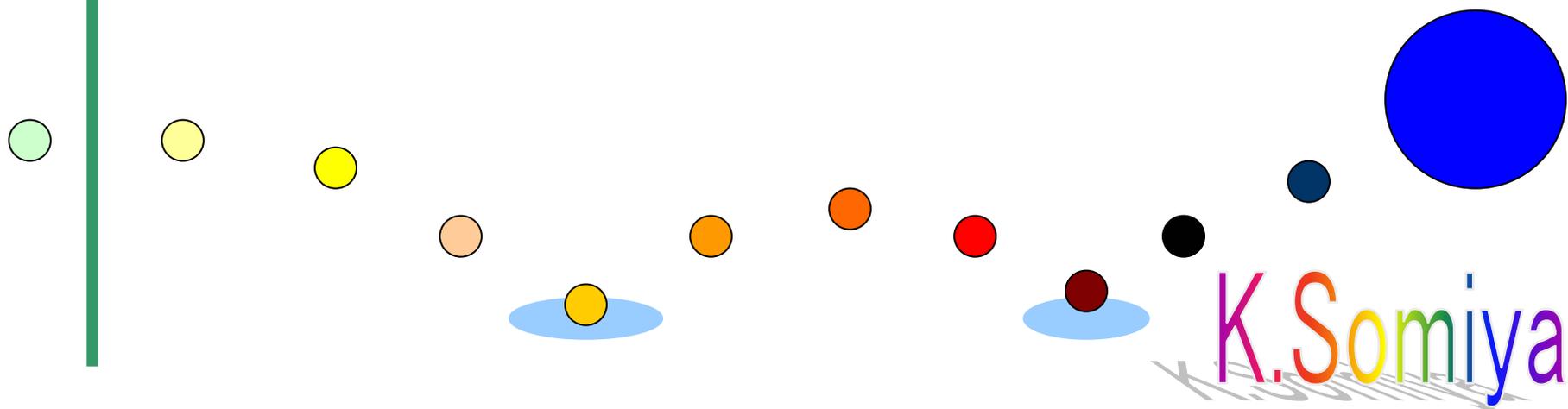


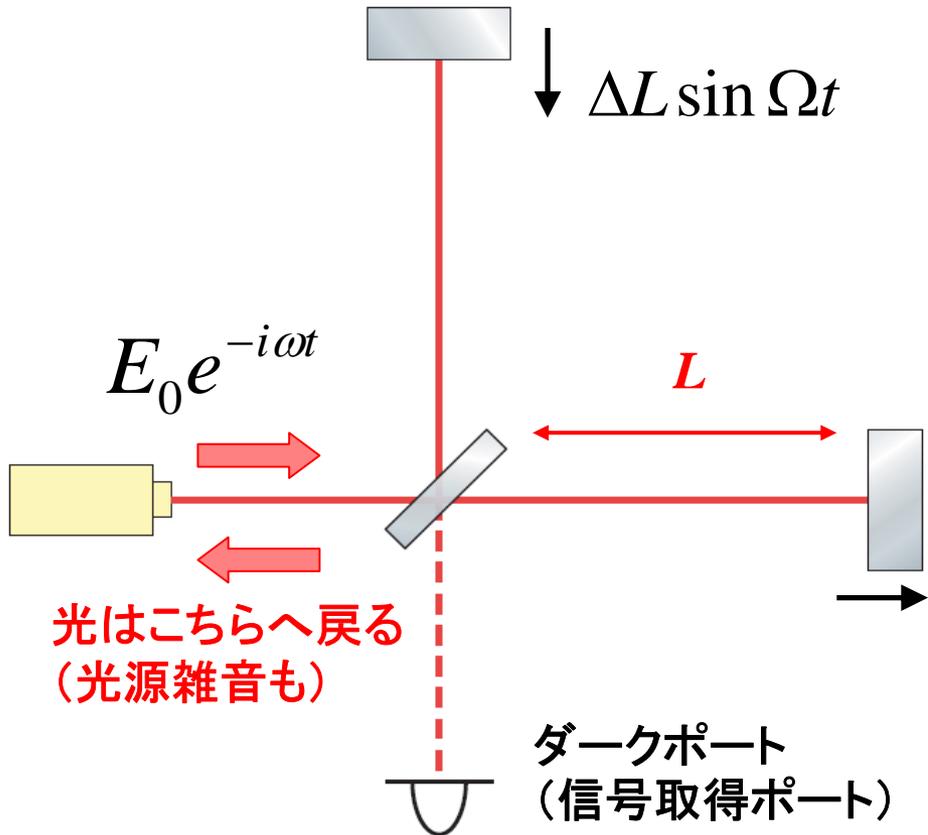
# 参考資料 for AIC講義110705

Jul. 2011

**Kentaro Somiya**  
*Tokyo Inst of Technology*



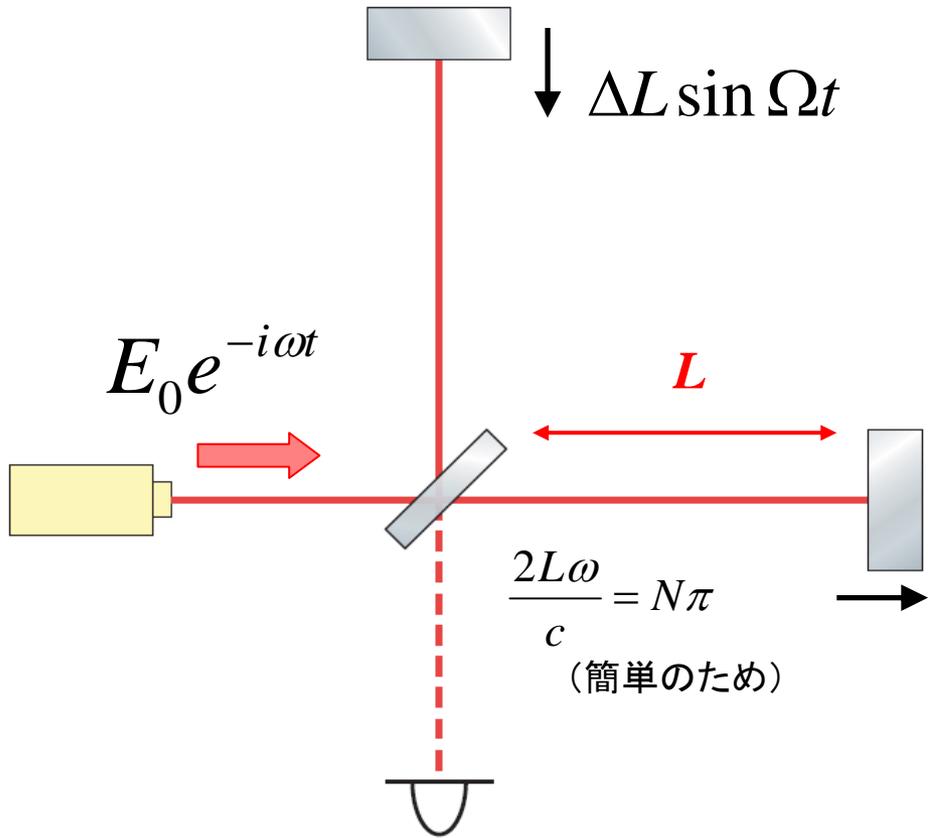
# マイケルソン干渉計



## 重力波検出器のベースデザイン

- 基線長を調整して、光源側に光が全て戻るようにする
- 重力波は光路長を差動に変え、差動信号はダークポートへ
- レーザーの周波数揺らぎは同相なので、信号ポートに現れない

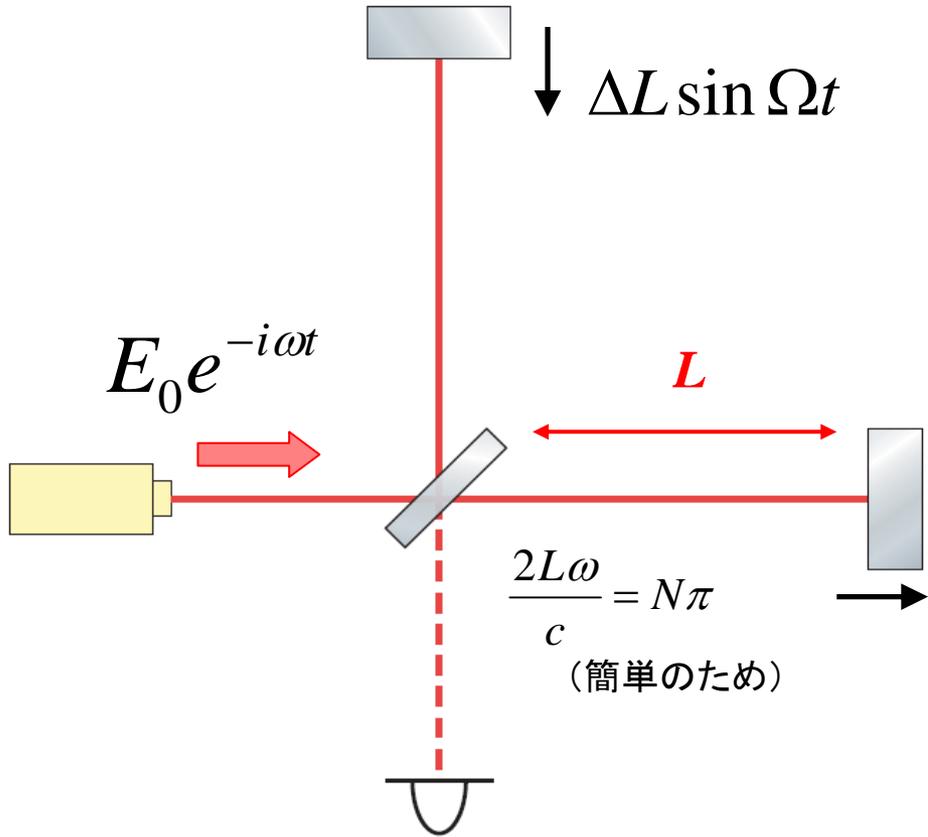
# マイケルソン干渉計



エンド鏡が  $\Delta L$  だけ差動で動く  
→ 位相変調がかかる

$$\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega(t - 2\Delta L \sin \Omega t / c)}$$

# マイケルソン干渉計



エンド鏡が  $\Delta L$  だけ差動で動く  
 → 位相変調がかかる

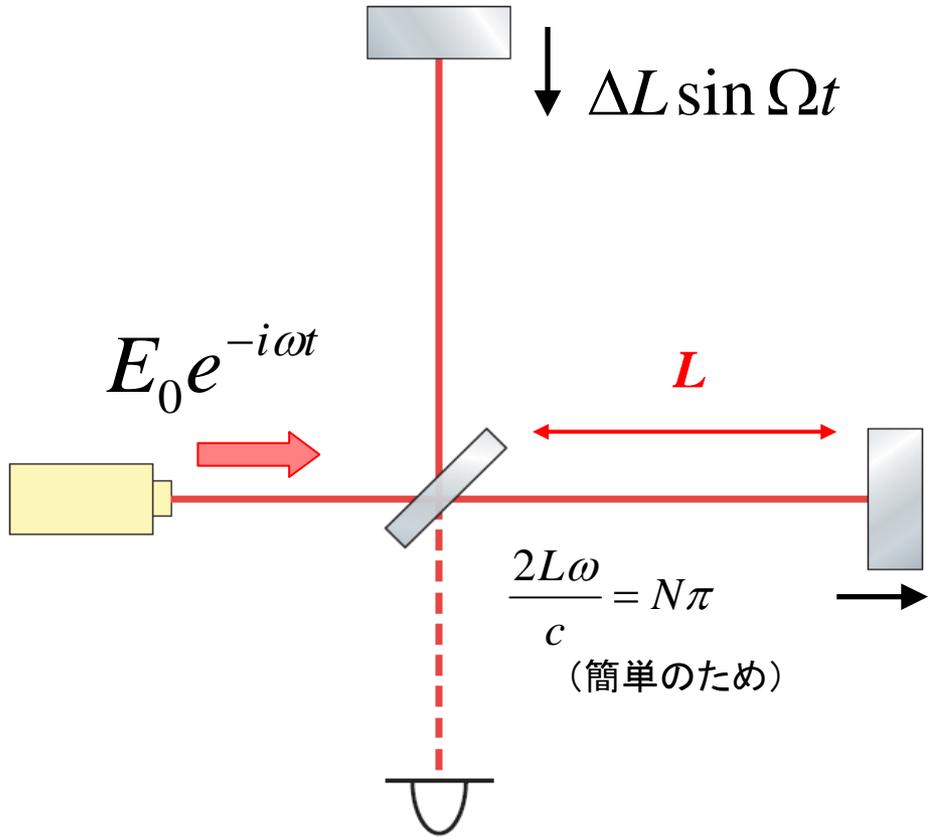
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega(t-2\Delta L \sin \Omega t / c)} \\
 & \cong \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 [J_0(\varepsilon) e^{-i\omega t} \\
 & \quad + J_1(\varepsilon) e^{-i(\omega+\Omega)t} - J_1(\varepsilon) e^{-i(\omega-\Omega)t}]
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{2\Delta L \omega}{c} \ll 1$$

$$J_0(\varepsilon) \approx 1, \quad J_1(\varepsilon) \approx \varepsilon / 2$$

ベッセル関数

# マイケルソン干渉計



エンド鏡が  $\Delta L$  だけ差動で動く  
 → 位相変調がかかる

$$\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega(t-2\Delta L \sin \Omega t / c)}$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 [J_0(\varepsilon) e^{-i\omega t} + J_1(\varepsilon) e^{-i(\omega+\Omega)t} - J_1(\varepsilon) e^{-i(\omega-\Omega)t}]$$

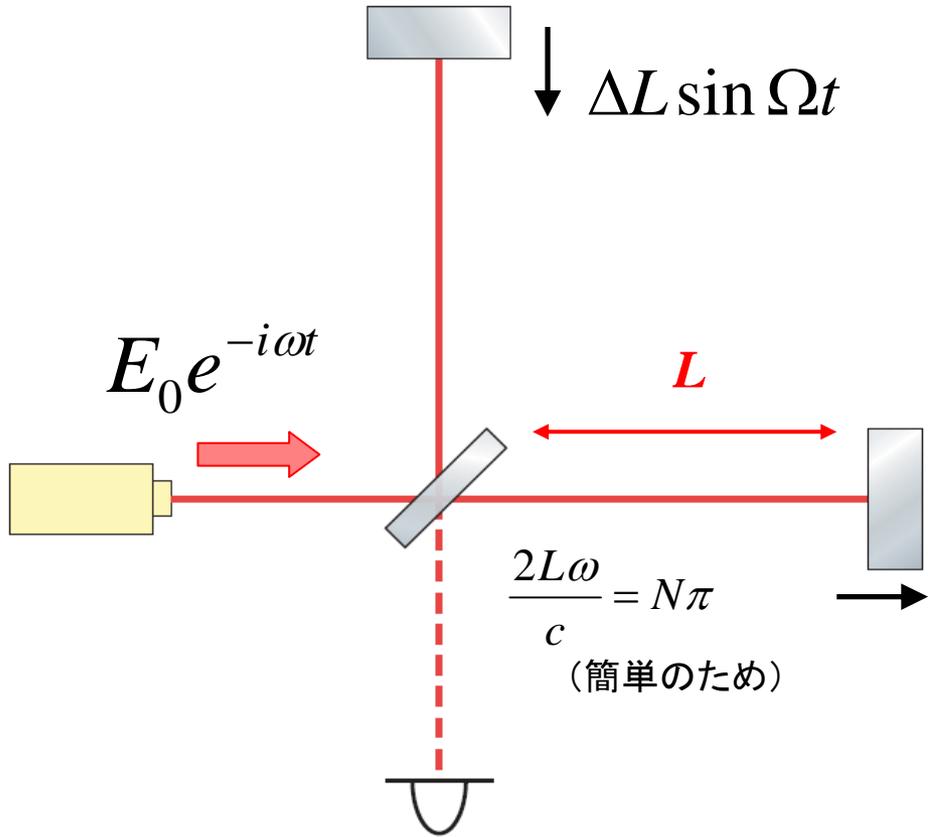
Upper sideband  
 Lower sideband

$$\varepsilon = \frac{2\Delta L \omega}{c} \ll 1$$

$$J_0(\varepsilon) \approx 1, \quad J_1(\varepsilon) \approx \varepsilon / 2$$

ベッセル関数

# マイケルソン干渉計

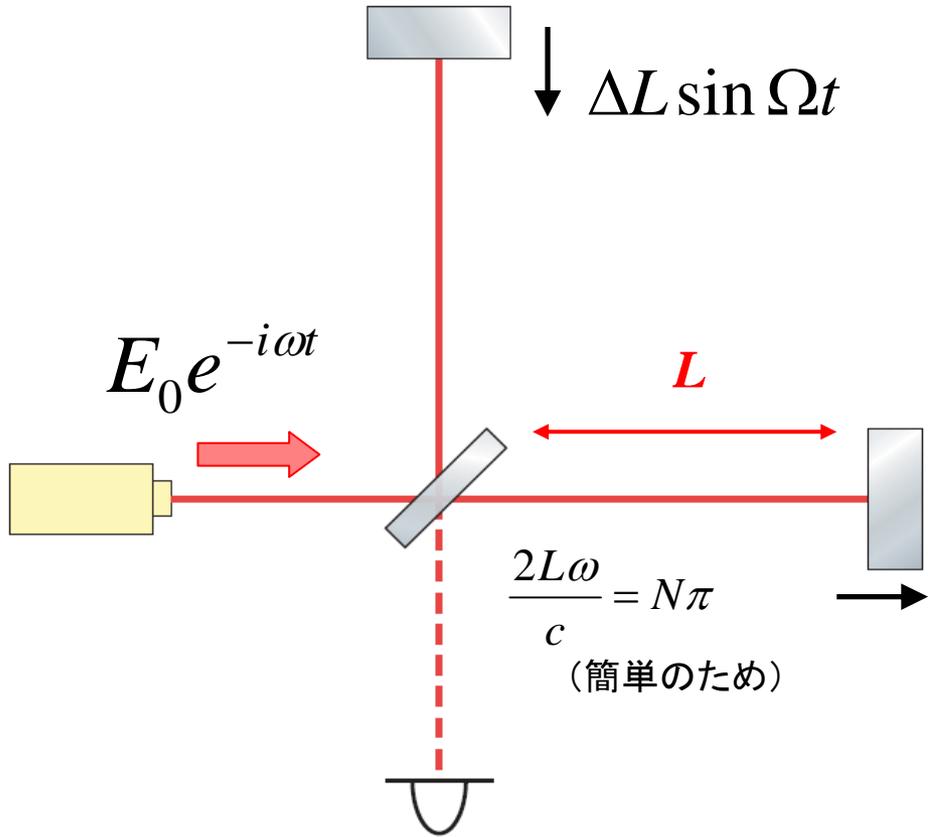


エンド鏡が  $\Delta L$  だけ差動で動く  
 → 位相変調がかかる

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega(t-2\Delta L \sin \Omega t / c)} \\ & \cong \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 [J_0(\varepsilon) e^{-i\omega t} \\ & \quad + J_1(\varepsilon) e^{-i(\omega+\Omega)t} - J_1(\varepsilon) e^{-i(\omega-\Omega)t}] \\ & \cong \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega t} [1 + i\varepsilon \sin \Omega t] \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{2\Delta L \omega}{c} \ll 1$$

# マイケルソン干渉計



エンド鏡が  $\Delta L$  だけ差動で動く  
 → 位相変調がかかる

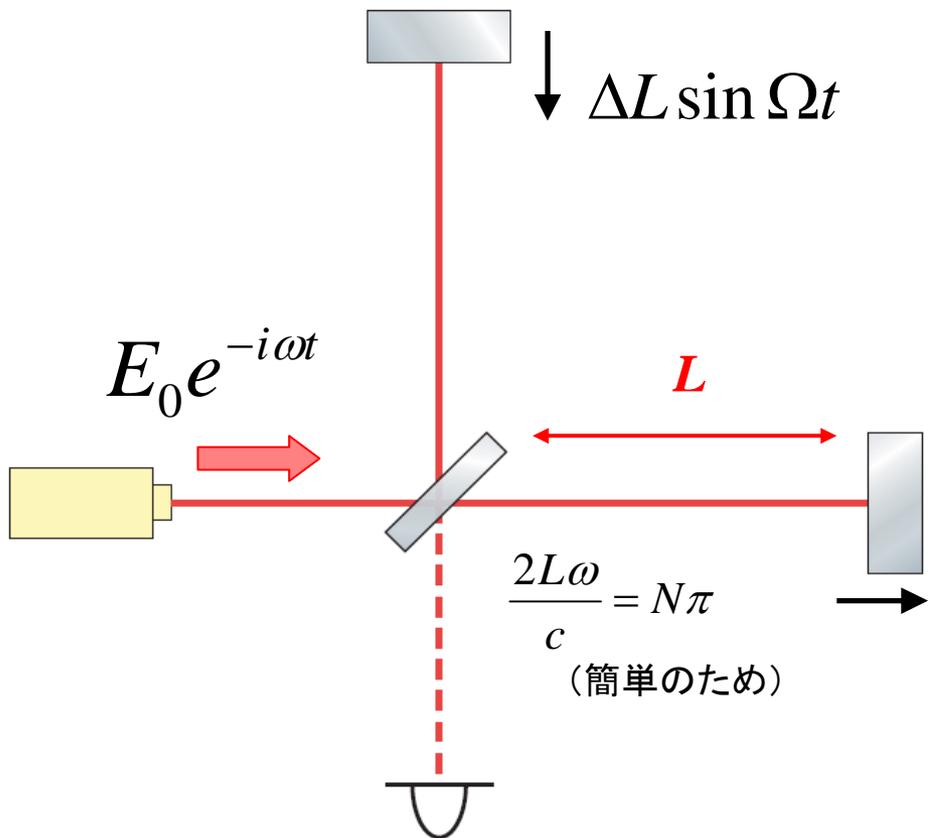
$$(\rightarrow) \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega t} \left[ 1 + i \frac{2\Delta L \omega}{c} \sin \Omega t \right]$$

$$(\uparrow) \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega t} \left[ 1 - i \frac{2\Delta L \omega}{c} \sin \Omega t \right]$$

---


$$(\downarrow) i E_0 e^{-i\omega t} \frac{2\Delta L \omega}{c} \sin \Omega t$$

# マイケルソン干渉計



エンド鏡が  $\Delta L$  だけ差動で動いた場合

$$iE_0 e^{-i\omega t} \frac{2\Delta L \omega}{c} \sin \Omega t$$

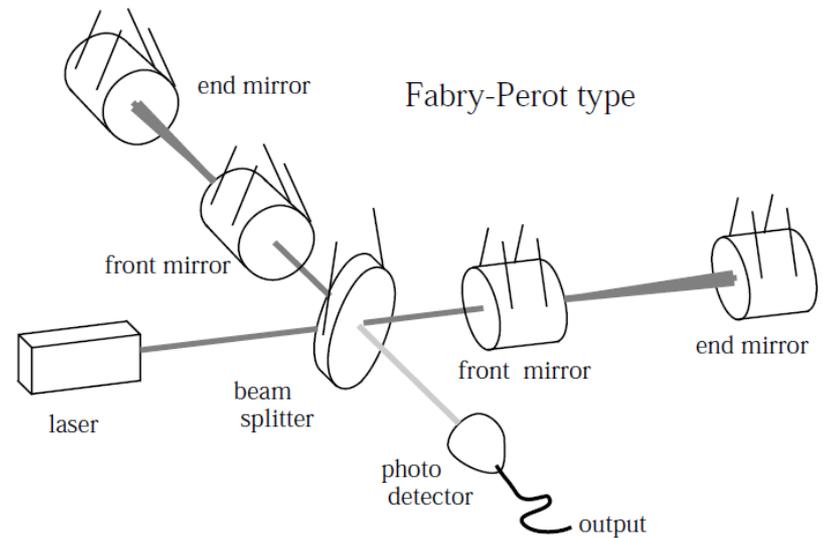
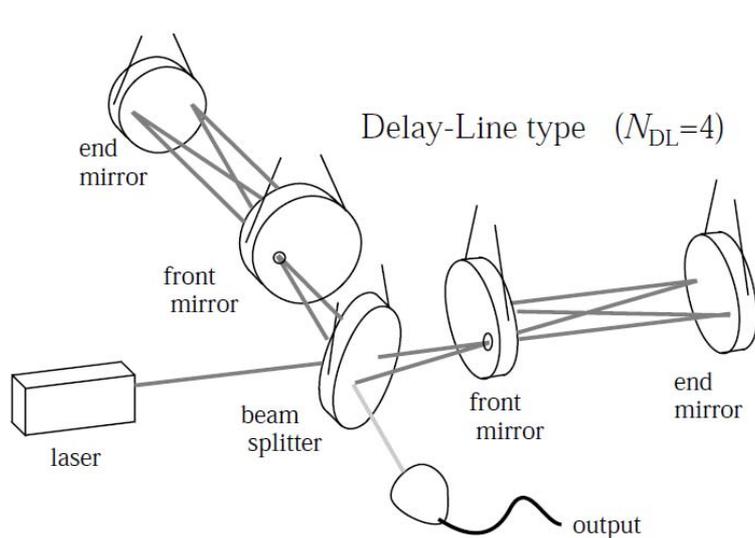
重力波 ( $h(t) = h \cos \Omega t$ ) の場合

$$\begin{aligned}
 \Delta L_{GW} \sin(\Omega t + \phi) &= \int_{t-2L/c}^t \frac{1}{2} h(t') c dt' \\
 &= \frac{hc}{\Omega} \sin\left(\frac{L\Omega}{c}\right) \sin\left(\Omega t - \frac{L\Omega}{c}\right) \\
 &\approx \underline{hL} \sin(\Omega t - \phi') \quad \left[ \frac{L\Omega}{c} \ll 1 \right]
 \end{aligned}$$

重力波信号は基線長  $L$  に比例

1kHzの重力波なら、 $L=75\text{km}$ までは  
基線長が長いほど信号は大きくなる

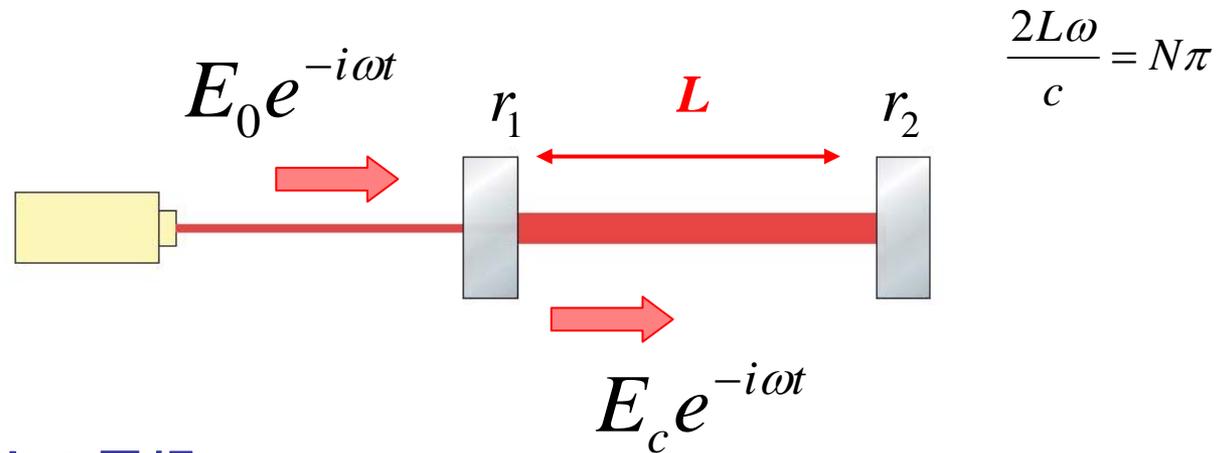
# 基線長を伸ばすには



デレイライン方式：鏡の異なる場所で $n$ 回折り返す  
～ 角度調整が楽だが、大きな鏡が必要

共振器方式：鏡の同じ場所で反射させ、長さを $N\lambda$ に保つ  
～ 調整は大変だが、大型干渉計に適している

# ファブリーペロー共振器



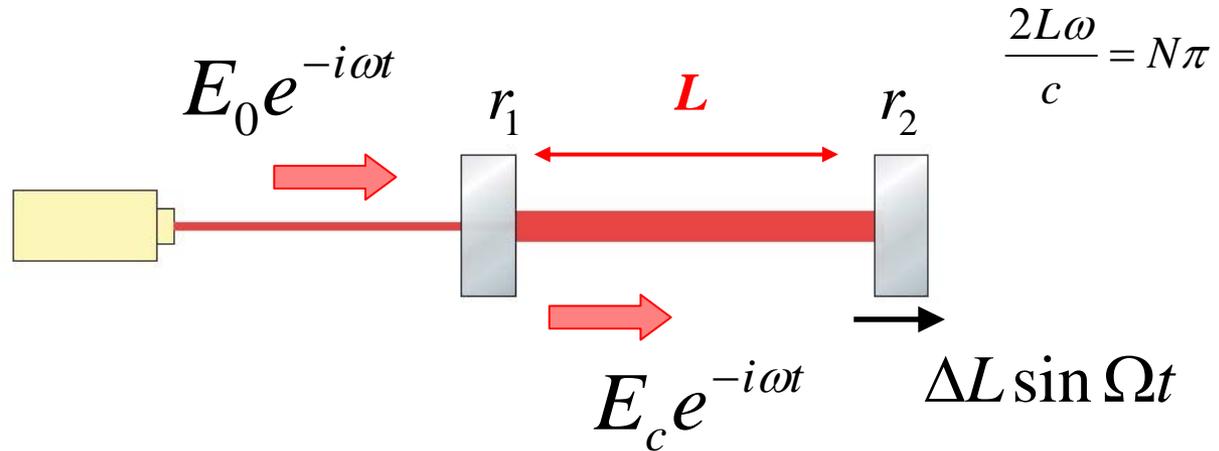
共振器内の電場  $E_c$

$$E_c = t_1 E_0 + r_1 r_2 E_c e^{2i\omega L/c}$$

$$\longrightarrow \frac{E_c}{E_0} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \approx \sqrt{\frac{1 + r_1}{1 - r_1}} \quad (r_2 \approx 1)$$

$r_1=0.99$ として、パワーで200倍ほどUP

# ファブリーペロー共振器



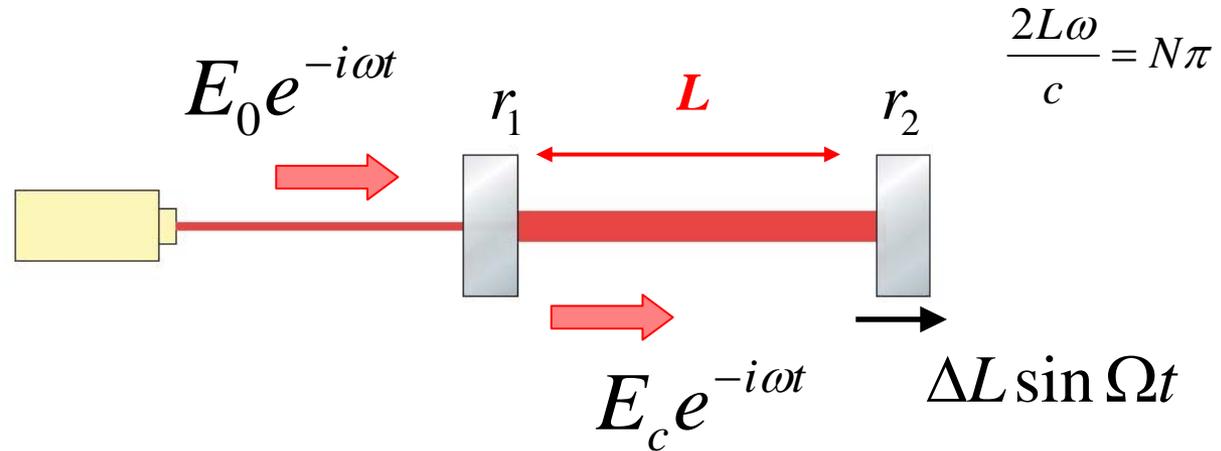
信号も加えた場合

$$\begin{pmatrix} E_c(\omega) \\ E_c(\omega + \Omega) \\ E_c(\omega - \Omega) \end{pmatrix} = r_1 r_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon e^{-i\frac{\Omega L}{c}} & e^{-2i\frac{\Omega L}{c}} & 0 \\ \varepsilon e^{-i\frac{\Omega L}{c}} & 0 & e^{-2i\frac{\Omega L}{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_c(\omega) \\ E_c(\omega + \Omega) \\ E_c(\omega - \Omega) \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} E_0(\omega) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L \omega}{c}$$

- 1段目 : Carrier
- 2段目 : Upper Sideband
- 3段目 : Lower Sideband

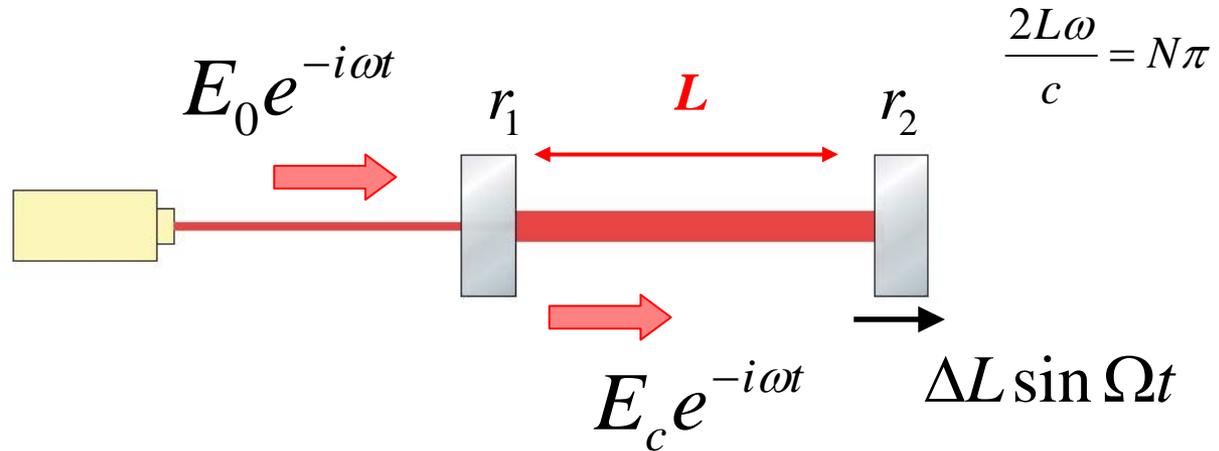
# ファブリーペロー共振器



信号も加えた場合

$$\begin{pmatrix} E_c(\omega) \\ E_c(\omega + \Omega) \\ E_c(\omega - \Omega) \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 - r_1 r_2 & 0 & 0 \\ -r_1 r_2 \varepsilon e^{-i\frac{\Omega L}{c}} & 1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{\Omega L}{c}} & 0 \\ r_1 r_2 \varepsilon e^{-i\frac{\Omega L}{c}} & 0 & 1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{\Omega L}{c}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_0(\omega) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# ファブリーペロー共振器



信号も加えた場合

$$\begin{pmatrix} E_c(\omega) \\ E_c(\omega + \Omega) \\ E_c(\omega - \Omega) \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 - r_1 r_2 & 0 & 0 \\ -r_1 r_2 \varepsilon e^{-i\frac{\Omega L}{c}} & 1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{\Omega L}{c}} & 0 \\ r_1 r_2 \varepsilon e^{-i\frac{\Omega L}{c}} & 0 & 1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{\Omega L}{c}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_0(\omega) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow E_c(\omega \pm \Omega) = \pm \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \frac{r_1 r_2 e^{\mp i\frac{\Omega L}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{\mp 2i\frac{\Omega L}{c}}} \varepsilon E_0(\omega)$$

# ファブリーペロー共振器

$r_2=1$ とする

(i) 共振器ありの場合

$$E_{ref}^{upper} = \varepsilon E_0 \frac{(1+r_1)e^{-i\Omega L/c}}{1-r_1e^{-2i\Omega L/c}}$$

(ii) 共振器なしの場合 ( $r_1=0$ )

$$E_{ref}^{upper} = \varepsilon E_0 e^{-i\Omega L/c}$$

# ファブリーペロー共振器

$r_2=1$ とする

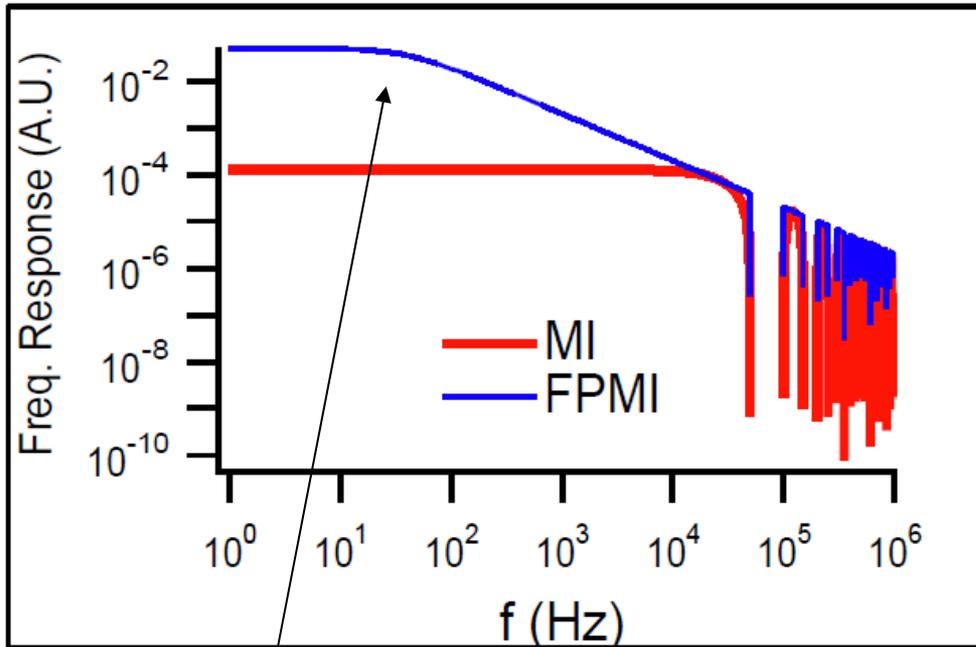
(i) 共振器ありの場合  $E_{ref}^{upper} = \varepsilon E_0 \frac{(1+r_1)e^{-i\Omega L/c}}{1-r_1e^{-2i\Omega L/c}}$

(ii) 共振器なしの場合 ( $r_1=0$ )  $E_{ref}^{upper} = \varepsilon E_0 e^{-i\Omega L/c}$

→ 増幅率 =  $\frac{1+r_1}{1-r_1e^{-2i\Omega L/c}} \approx \frac{2}{1-(1-T/2)(1-2i\Omega L/c)}$   
 $\approx \frac{4/T}{1+i\Omega/\gamma} \quad \left( T = t_1^2, \gamma = \frac{Tc}{4L} \right)$

周波数が高くなると増幅率が下がる  
(信号が共振器内で相殺し始めるため)

# ファブリーペロー共振器



$\Omega = \gamma$  (キャビティポール)

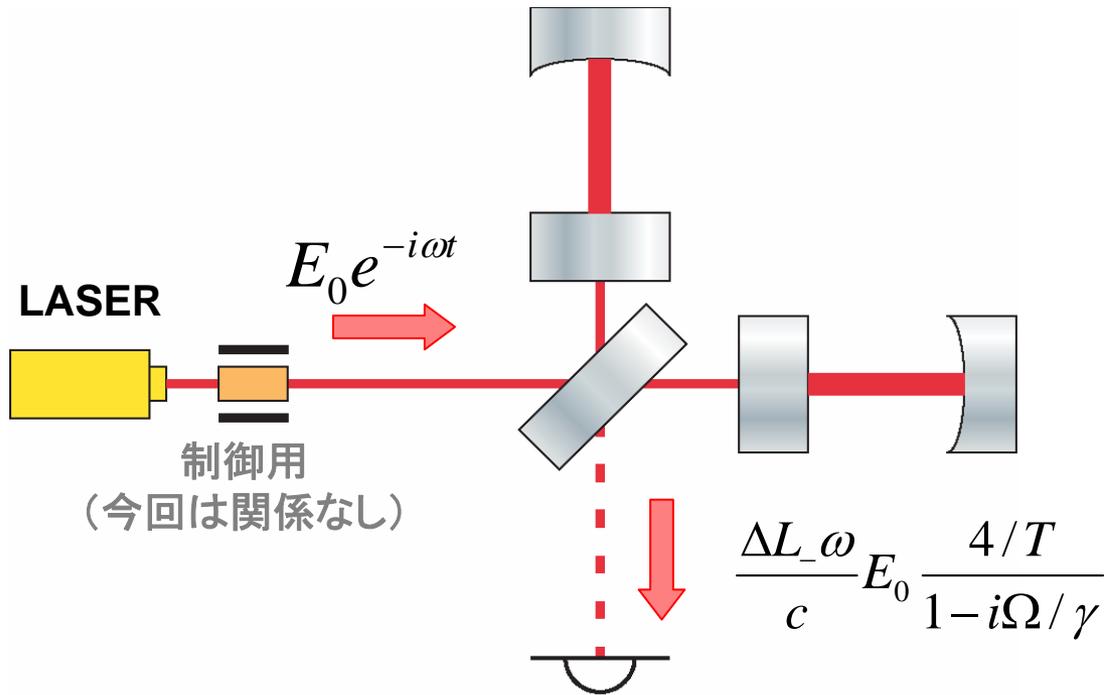
$$\text{増幅率} \approx \frac{4/T}{1 + i\Omega/\gamma}$$

$$\left( T = t_1^2, \gamma = \frac{Tc}{4L} \right)$$

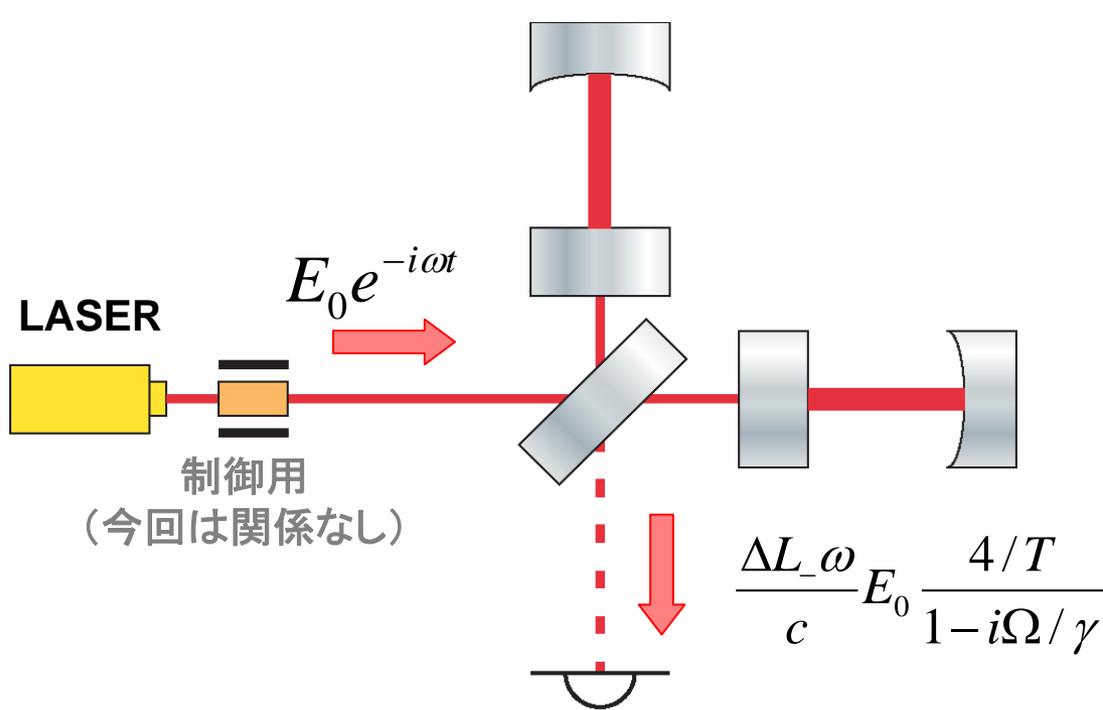
周波数が高くなると増幅率が下がる  
(信号が共振器内で相殺し始めるため)

**T=1%、L=3kmとして、ポール周波数は40Hz程度**

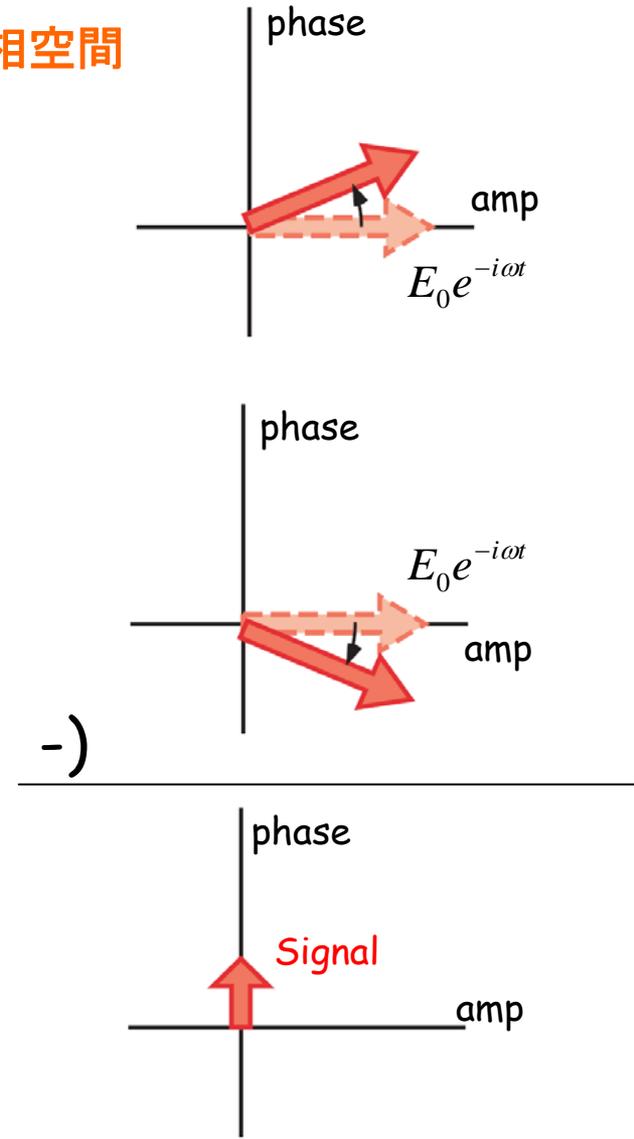
# ファブリーペローマイケルソン干渉計



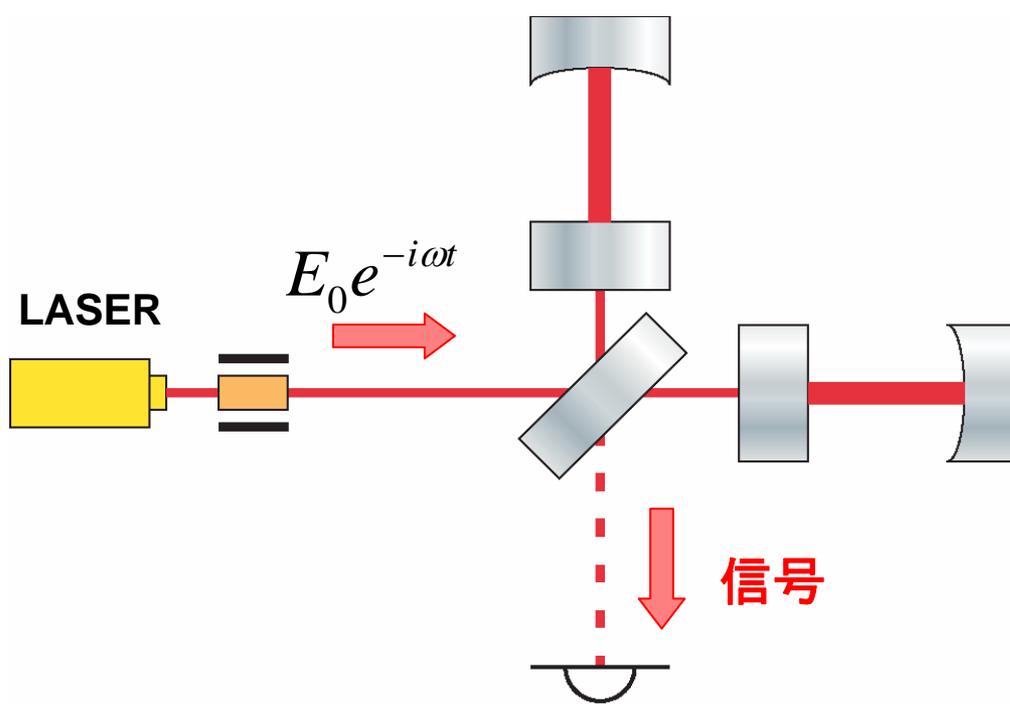
# ファブリーペローマイケルソン干渉計



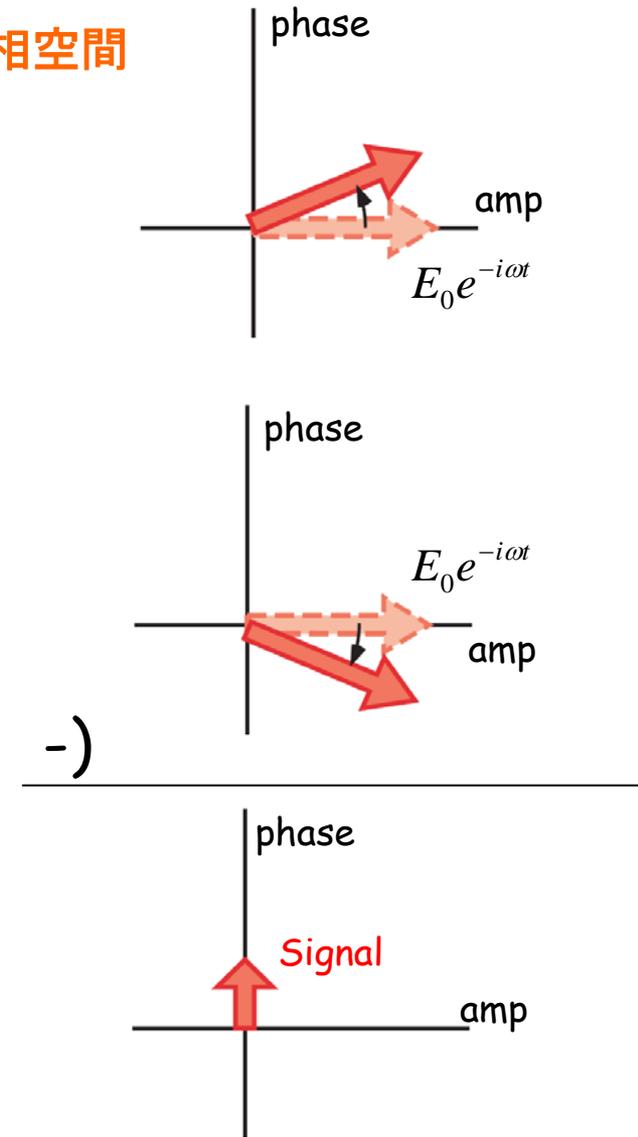
位相空間



# ファブリーペローマイケルソン干渉計



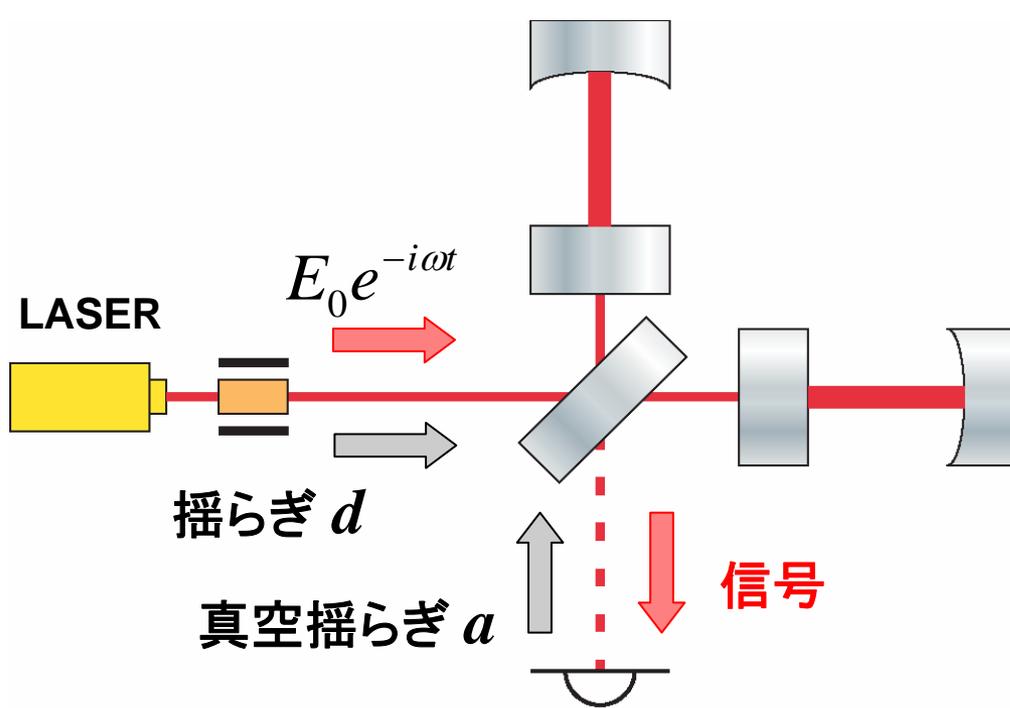
位相空間



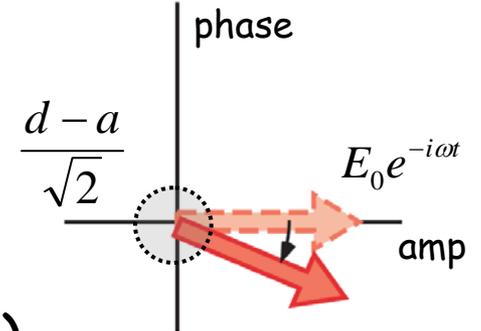
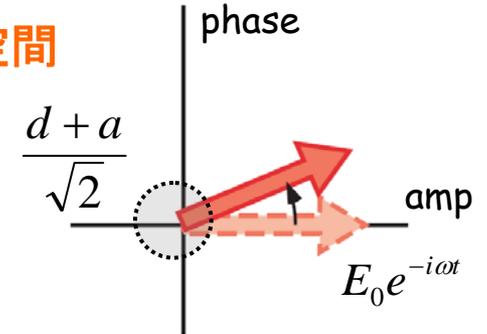
- 信号は増幅した
- レーザー雑音はダークポートには出ない

感度は何で決まっているのか？

# ファブリーペローマイケルソン干渉計

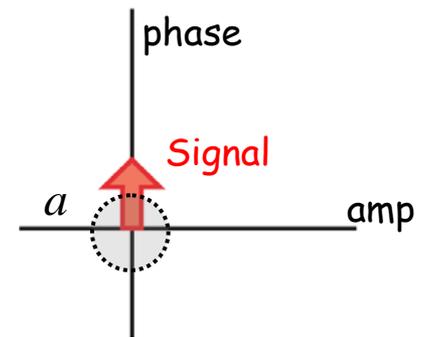


位相空間



-)

- 実はダークポートにも真空場という場が存在
- 真空場は有限の揺らぎを持つ
- 真空揺らぎと信号の比が原理的な感度を決定



# 真空場

量子力学で電場演算子は次のように表される

$$\hat{E}(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{Ac}} \left[ \hat{a}(\omega)e^{-i\omega t} + \hat{a}^+(\omega)e^{i\omega t} \right] \frac{d\omega}{2\pi}$$

消滅演算子                      生成演算子

(Aはレーザーの実効断面積)

レーザーはコヒーレント光であり、その状態は次のように数状態の重ね合わせで表される

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

ちなみに

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \text{そして} \quad [\hat{a}(\omega), \hat{a}^+(\omega')] = 2\pi\delta(\omega - \omega')$$

# 真空場

※簡単のため $\omega \rightarrow 0$ とする

入射電場の期待値は  $\langle \alpha | \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{2} | \alpha \rangle = \alpha \approx E_0 = \sqrt{N}$

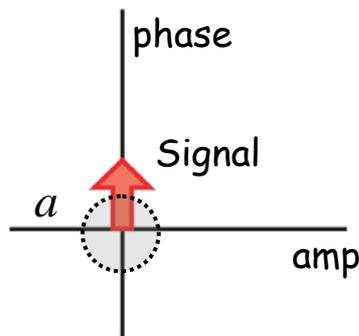
N=光子数

入射電場の揺らぎは  $\langle \alpha | \frac{\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}}{2} | \alpha \rangle - \alpha^2 = \frac{1}{2}$

真空場の期待値は  $\langle 0 | \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{2} | 0 \rangle = 0$

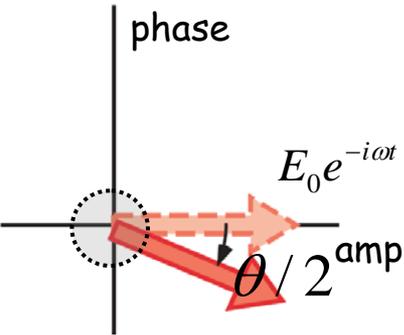
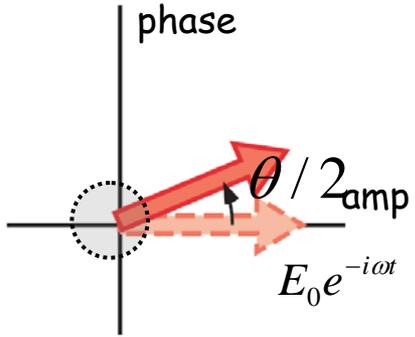
真空場もコヒーレント場

真空場の揺らぎは  $\langle 0 | \frac{\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}}{2} | 0 \rangle - 0 = \frac{1}{2}$

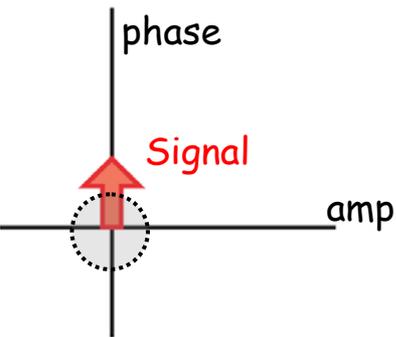


すなわち、ダークポートから光子1/2分の揺らぎが混入してきて、それが原理的な感度限界(ショットノイズ限界)を与える

# ショットノイズ限界



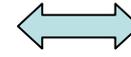
-)



信号

真空場雑音

$$\frac{\Delta L \omega}{c} \frac{4/T}{1 - i\Omega/\gamma} E_0$$



$$\sqrt{\frac{1}{2}}$$

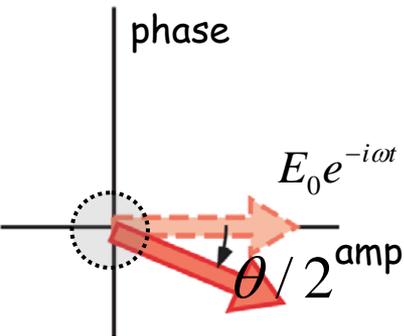
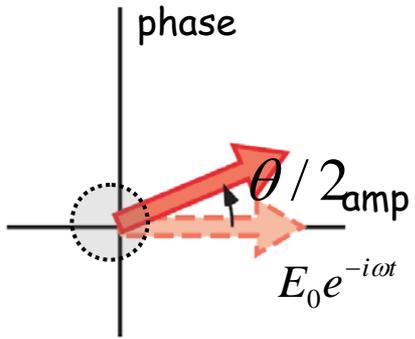
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\theta} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\sqrt{N}}$$

真空場の  
実効的光子数

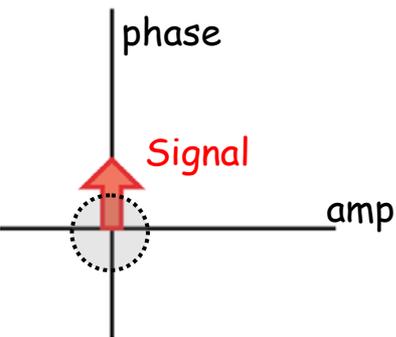
位相空間  
での角度

入射電場  
の光子数

# ショットノイズ限界



-)



信号		真空場雑音
$\frac{\Delta L \omega}{c} \frac{4/T}{1 - i\Omega/\gamma} E_0$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\underbrace{\hspace{10em}}$		真空場の 実効的光子数
$\theta$	$\sqrt{N}$	
位相空間 での角度	入射電場 の光子数	

両辺が等しいときの  $\Delta L$  がショットノイズ限界感度

$$\frac{x_{sh}}{L} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega P_0} (\Omega^2 + \gamma^2)} \quad (P_0 = N\hbar\omega)$$

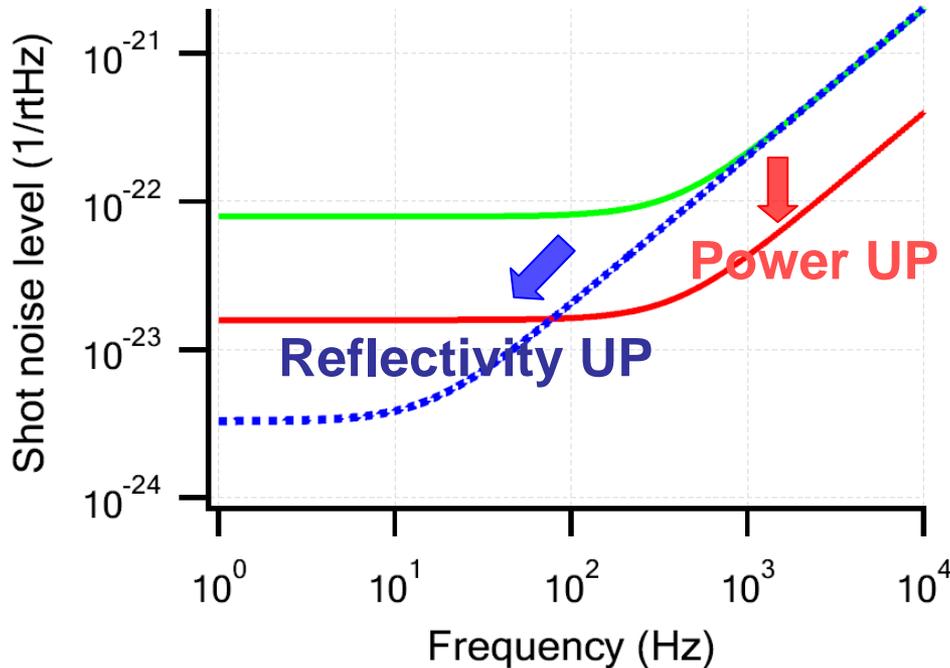
入射パワー

# 感度を向上するには

## ショットノイズ限界感度

$$\frac{x_{sh}}{L} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega P_0} (\Omega^2 + \gamma^2)} \quad (P_0 = N\hbar\omega)$$

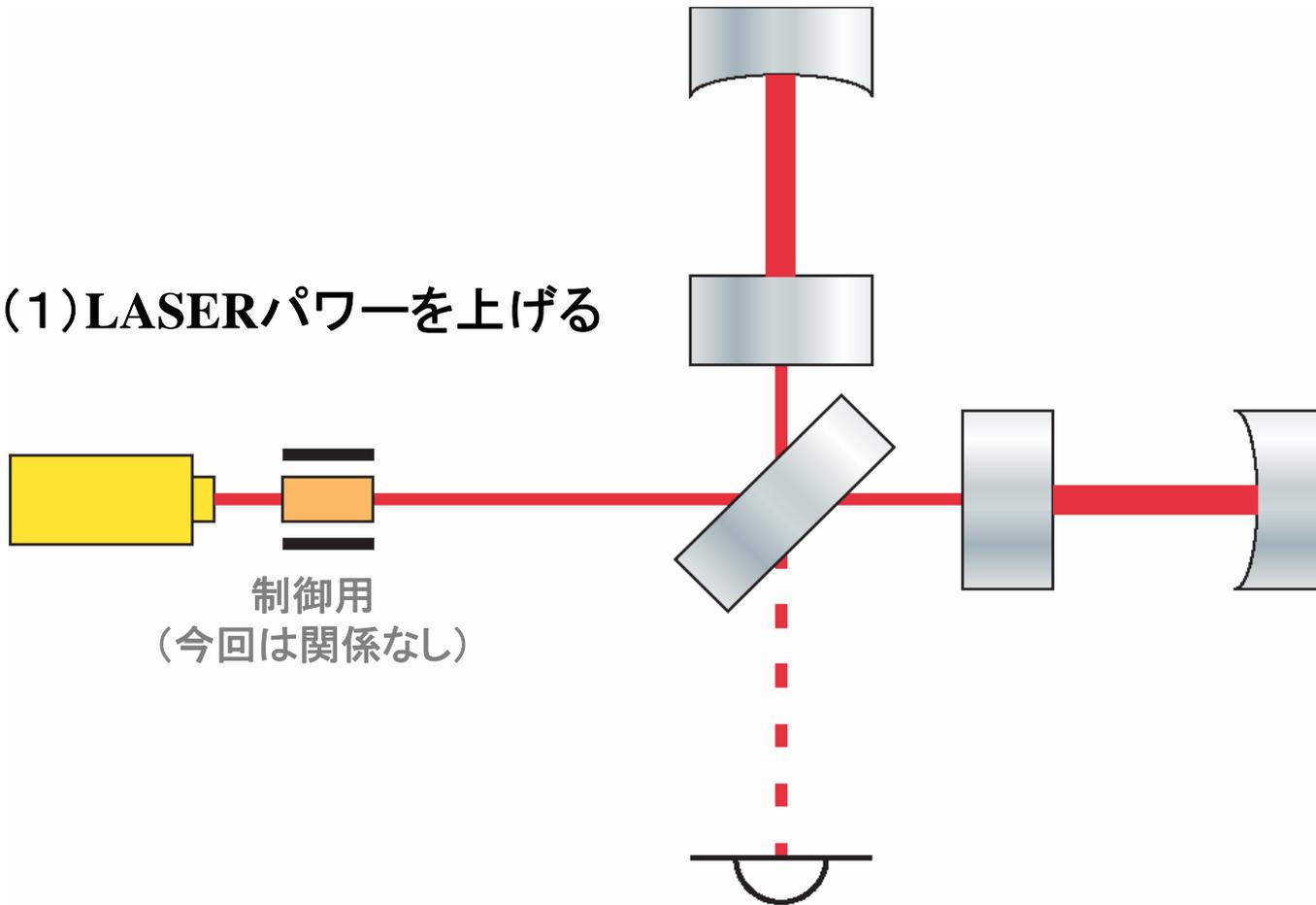
入射パワー



- 入射パワーP<sub>0</sub>を上げると全周波数で感度向上
- キャビティポールγを下げる (=鏡の反射率を上げる)と低周波の感度は上がるが、高周波は上がらない

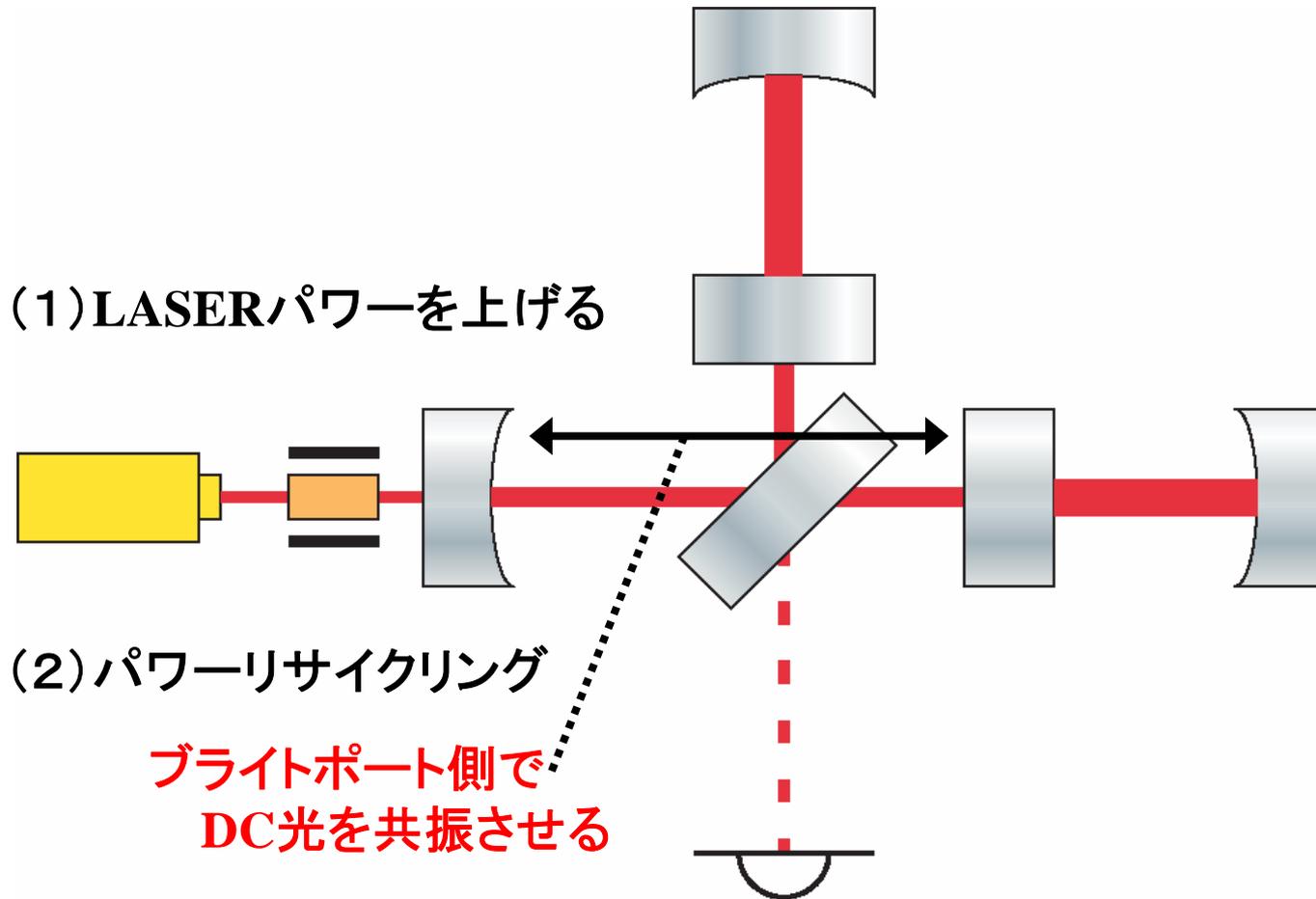
# ショットノイズ感度向上

(1) LASERパワーを上げる

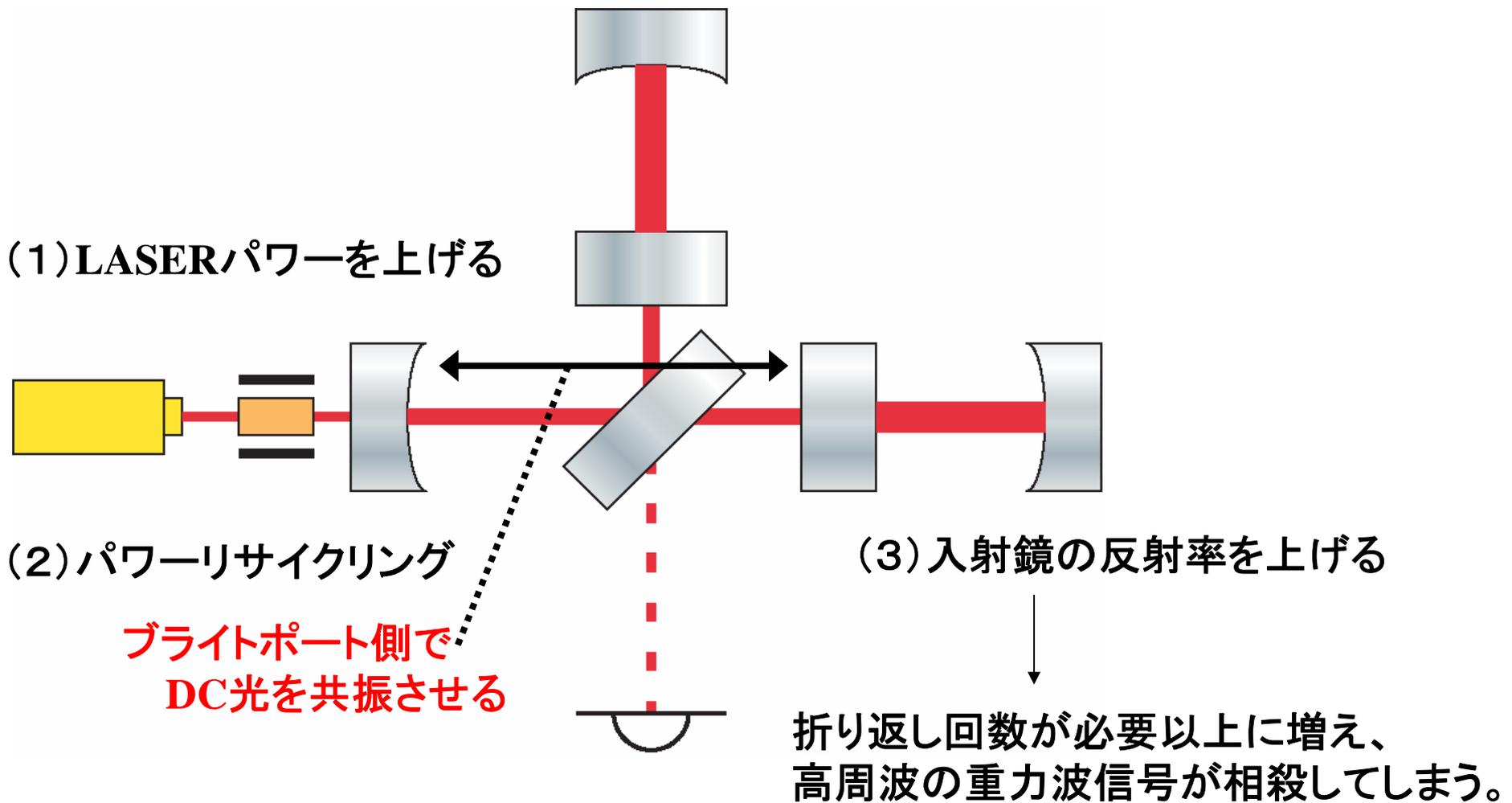


制御用  
(今回は関係なし)

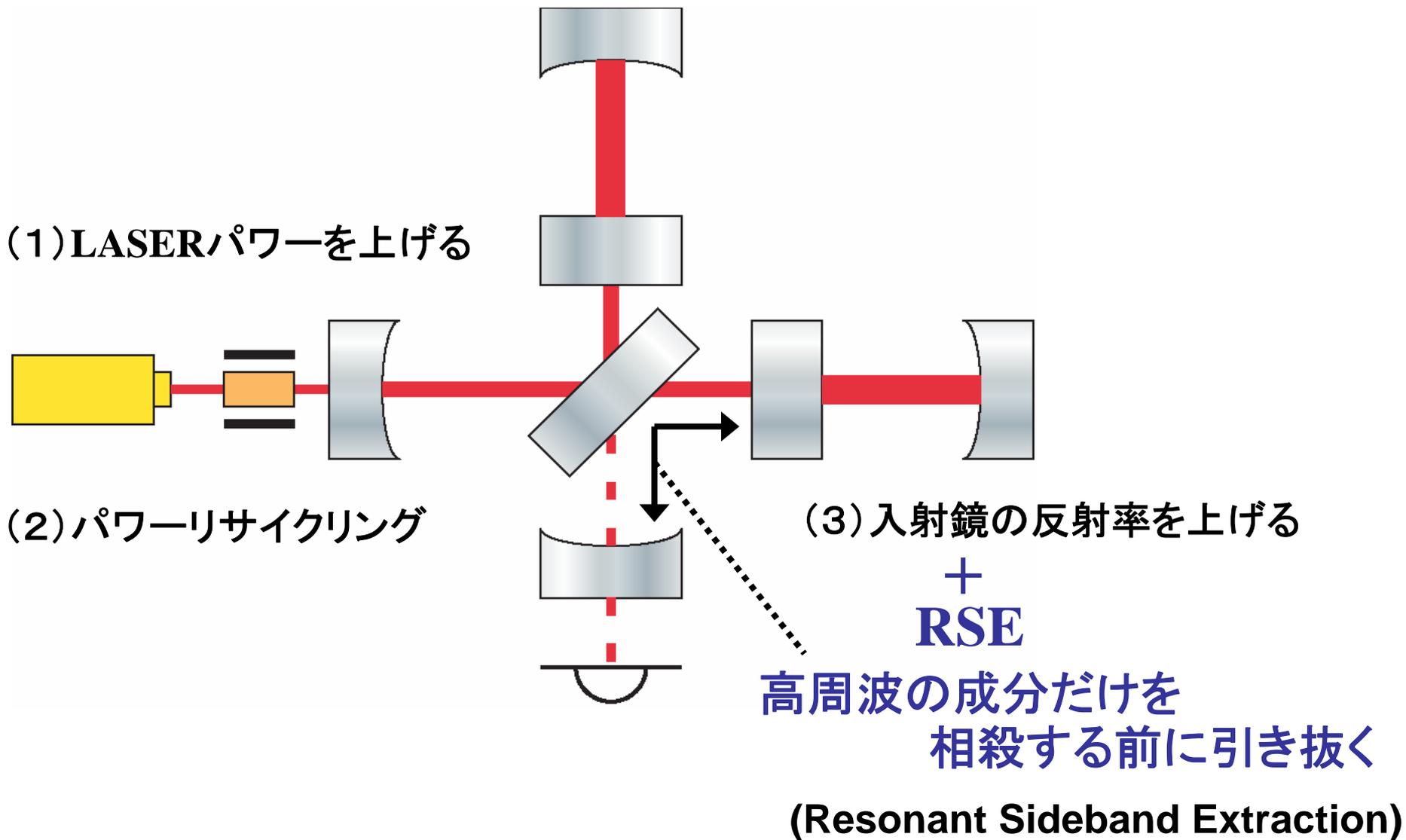
# ショットノイズ感度向上



# ショットノイズ感度向上

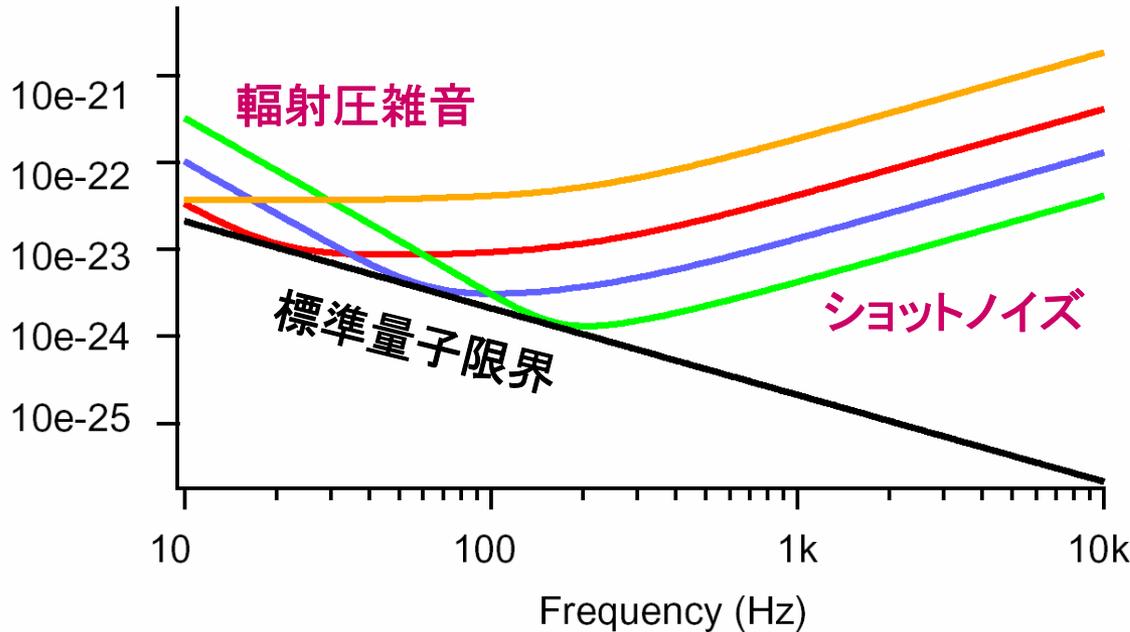


# ショットノイズ感度向上



# 不確定性原理

Noise Spectrum (1/rHz)



位置測定の感度は標準量子限界を超えられない

# いろいろ

- 重力波検出器は実は位置測定を目的としていないので、標準量子限界を超えることができる
  - 量子非破壊計測
  - 光バネによる信号増幅
  - 変位雑音不感型干渉計
- 量子雑音以外に感度を制限するものがある
  - 熱雑音
  - 地面振動雑音
  - 残留ガス雑音
- 干渉計を制御するのも大変である
  - 制御法開発
  - プロトタイプ実験
  - 回りこみショットノイズ