

非線形光学結晶挿入型重力波検出器の応答と不安定性

東京工業大学 理学部物理学科 宗宮研究室
12B14766 柳沼 拓哉

2016年2月16日

Contents

1	はじめに	4
2	重力波検出器と干渉計雑音	5
2.1	重力波	5
2.1.1	重力波	5
2.1.2	重力波源	5
2.2	重力波検出器	6
2.2.1	共振型検出器とレーザー干渉型検出器	6
2.2.2	Michelson 干渉計の基本原理	7
2.3	重力波検出器における雑音	9
2.3.1	位相雑音	9
2.3.2	変位雑音	10
3	Optomechanical dynamics	12
3.1	Fabry-Perot Cavity	12
3.1.1	共振器の反射率と透過率	12
3.1.2	フリースペクトラルレンジ	14
3.1.3	Fabry-Perot Cavity の重力波応答	15
3.2	Dual Recycling	16
3.2.1	共振条件と Sideband	16
3.2.2	Singnal Recycling Cavity の信号増幅率	18
3.2.3	Detune 位相	20
3.3	電磁場の量子化	22
3.3.1	Beam Splitter 近辺の場合	22
3.3.2	Fabry-Perot Cavity 近辺の場合	25
3.3.3	鏡の変動	27
3.3.4	電磁場と干渉計の相互作用 \mathcal{K}	28
3.3.5	量子雑音	29
3.4	Singnal Recycling Cavity と光バネ	30
3.4.1	Singnal Recycling Cavity における量子化	30
3.4.2	光バネと Mizuno-Hypothesis	32
4	非線形光学結晶挿入型干渉計	35
4.1	非線形光学結晶のはたらき	35
4.1.1	非線形光学における電気感受率	35
4.1.2	非線形光学過程	36
4.1.3	NLC の Input-output relation	37
4.2	非線形光学結晶による問題	39

4.2.1	Atomic Instability	39
4.2.2	Optial Instability	40
4.2.3	Additional Noise	41
5	NLC 干渉計の不安定性	42
5.1	Optical Instability	42
5.1.1	Optical Instability の仕組み	42
5.1.2	伝達関数とナイキスト線図	42
5.1.3	検証方法と伝達関数行列	44
5.2	不安定性検証結果	47
5.2.1	計算結果	47
5.2.2	Optical Instability の検証と考察	48
6	結論と今後の研究	52

Chapter 1

はじめに

Einsteinにより重力波が予言されてから100年が経過した。重力波は時空のさざなみであり、時空を歪ませながら空間を伝播する。その直接的な観測が今まで成功していなかった要因は、重力波による時空変化は非常に小さいためである。しかし、2016年2月12日未明、遂に重力波が発見された。アメリカの重力波検出器 Advanced LIGO のメンバーによるこの発表は世紀の大発見であり、また、重力波天文学の開幕を告げるものであった。重力波の直接検出は決してゴールではない。今、重力波学問は、重力波天文学の開拓という新たなる段階へ進もうとしているのである。

日本の重力波検出器 KAGRA も、今年度末からその運転が開始される予定である。KAGRA は、地面振動を抑えるために地下に製作された点と、サファイアの鏡を用いた極低温重力波検出器という点で、他国の重力波検出器と差別化が図られている。この2点は、KAGRA の地面振動雑音と熱雑音の改善に大きく貢献する。雑音をなるべく小さくしたい理由は、重力波の相互作用の小ささ故に、その信号が雑音にかき消されてしまうからである。我々は、量子雑音、熱雑音、地面振動雑音、その他の雑音を出来る限り小さくすることで、重力波の信号を得ることが出来るのである。

高周波における重力波検出器の感度を大きく制限する存在として、量子雑音が挙げられる。言い換えれば、高周波帯の量子雑音を改善できれば、重力波検出器の感度を飛躍的に改善することができるのである。しかし、量子雑音の検出幅と感度強度は trade-off の関係にあり、この目論見を実現することは難しい。この trade-off は、光共振器の中で複数回往復した高周波の信号が次第に打ち消し合い始めることによる。現在までに、この trade-off を回避するための様々な方法が考案・実験されてきた。

本学士論文の目的は、この trade-off を回避するために考案された非線形光学結晶挿入型重力波検出器の安定性の評価である。第2章と第3章では、重力波検出器の基礎事項の確認を行い、また、電磁場の量子化から光バネと呼ばれる物理現象を紹介する。これは、共振器内部に溜められた輻射圧があたかも鏡に対するバネのように作用し、特定の周波数帯に非常に強い共振をもたらす現象である。光バネが存在する共振器の内部に非線形光学結晶を設置することで、高周波帯の感度が大幅に改善されることが期待されている。

第4章では非線形光学効果の確認と感度の計算を行い、実際に光バネの周波数が高周波側へ移動したことを述べる。しかし、この非線形光学結晶挿入型重力波検出器では様々な不安定性が示唆されており、特にシステム全体に不安定性をもたらす Optical Instability について第5章で議論する。Optical Instability の安定性はナイキストの安定判別法により議論することができ、第5章でもそれを採用している。結果として、非線形光学結晶挿入型重力波検出器が不安定であることが示されたが、直感的な解釈と一致しない振る舞いも見られたため、その考察も第5章で述べている。

Chapter 2

重力波検出器と干渉計雑音

2.1 重力波

2.1.1 重力波

アインシュタインが一般相対性理論で「重力波」の存在を予言してから、およそ一世紀が経過した。それにも関わらずその直接検出がなされていなかった要因は、偏に重力波の性質によるものである。直接検出の障害となっている重力波の性質として、他の物質との相互作用が非常に小さいことが挙げられる。この相互作用の矮小さによって、重力波検出器に重力波が入射したとしても、検出器自体の種々の雑音に負けて重力波信号は隠されてしまう。したがって、我々が重力波を直接観測するためには、こういった検出器雑音を限りなく小さくすることが重要である。

2.1.2 重力波源

代表的な重力波源として、中性子星連星システムの合体が挙げられる。合体のプロセスは以下の通りである。はじめに、連星を形成する2つの天体は、重力波を放出しながらそれぞれの軌道を回っている。連星は重力波を放出しながら次第にエネルギーを失い、その軌道は段々と小さくなる。この段階で、重力波信号の周波数が増加することは直感的に理解しやすいが、この結果として重力波信号はチャープ信号となる。次に、軌道の縮小によって天体間の距離が縮まった連星は、強い相互作用を及ぼし合うようになり、やがて衝突する。最終的に、2つの天体で構成されていた連星は新しい1つの天体を形成するが、この典型例として連星ブラックホールによる新しいブラックホールの誕生が知られている。新しく形成された合体天体もまた重力波を放出し、その重力波振幅は次第に小さくなることが知られている (ring-down process) アメリカの重力波検出器 Advanced LIGO で観測された現象も正にこれである。

その他の重力波源としては、重力波背景放射や超新星爆発による重力波バーストなどが存在するが、そのどれもが非常に小さい振幅と相互作用効果を持っているため、直接的な検出は困難を極める。

2.2 重力波検出器

2.2.1 共振型検出器とレーザー干渉型検出器

section2.1 で述べたように、重力波が他の物質に及ぼす影響は非常に小さい。この微小な相互作用効果を観測するために、様々な実験方法と検出機構が考案されてきた。その中でも特に有名である検出機構が、共振型重力波検出器とレーザー干渉型重力波検出器である。

まず、共振型重力波検出器について述べる。共振型検出器は、重力波によって励起される検出器の縦振動モードを感知することにより、重力波を観測する。このような検出器では、重力波信号を電磁場の信号へ変換し、増幅する。共振型と呼ばれる由縁は、共振型重力波検出器が2質点をバネで結んだ振動子モデルとして考えることができ、その固有振動数と近い周波数を持つ重力波を検出できるところにある。すなわち、振動子の固有振動数に近い周波数を持った重力波が入射した際に、振動子の固有振動（縦振動モード）が励起され、その振動を感知することで重力波を検出する。

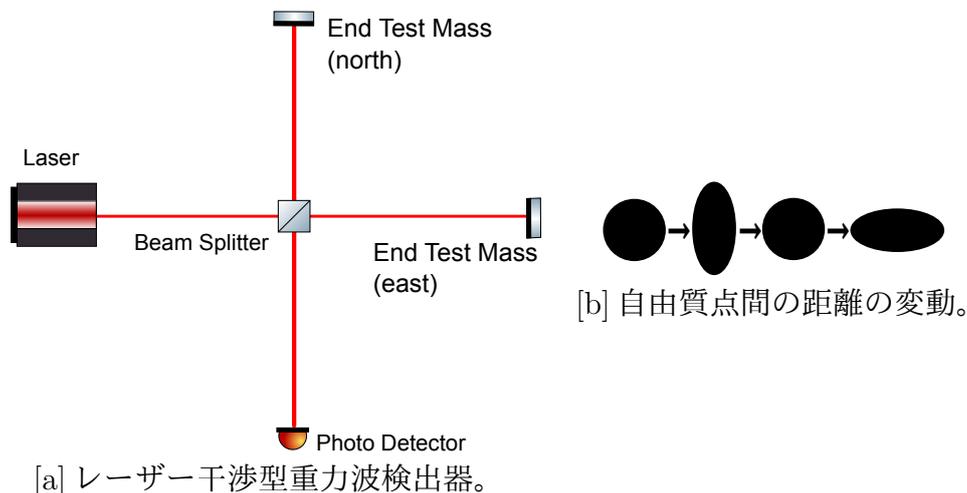


Figure 2.1: (a) マイケルソン干渉計を利用したレーザー干渉型重力波検出器。重力波が入射すると dark port に干渉縞が現れる。(b) 自由質点間の距離が四重極に変動する様子を表している。重力波による自由質点間の距離変動は四重極であり、片方が伸びればもう片方は縮む性質を持つ。これによってマイケルソン干渉計の光路差に変化が生じる。

レーザー干渉型重力波検出器では、重力波とレーザー電磁場の相互作用を利用して重力波を検出する。詳しくは次節で述べるが、レーザー干渉型重力波検出器は、その原理としてマイケルソン干渉計を利用する（図 2.1a）。レーザーを出た光が Beam Splitter (BS) によって2つの方向（east 方向と north 方向）へ分けられ、End Test Mass (ETM) によって反射され、Beam Splitter 上で再び干渉する。east 方向と north 方向の光路差が波長の整数倍にセットされている場合、Beam Splitter の符号により、レーザー側（bright port）では光が強め合い、光検出器側（dark port）では光が打ち消し合う。重力波は自由質点間の距離を四重極で変化させる性質を持つ（図 2.1b）ため、干渉計に重力波が入射すると、光路差が波長の整数倍からずれる。これにより dark port で干渉縞が生じ、重力波を検出することができる。

Advanced LIGO や Advanced VIRGO、KAGRA など、世界中で重力波検出器の運転、開発が行われているが、そのいずれもがレーザー干渉型重力波検出器である。相互作用の小さ

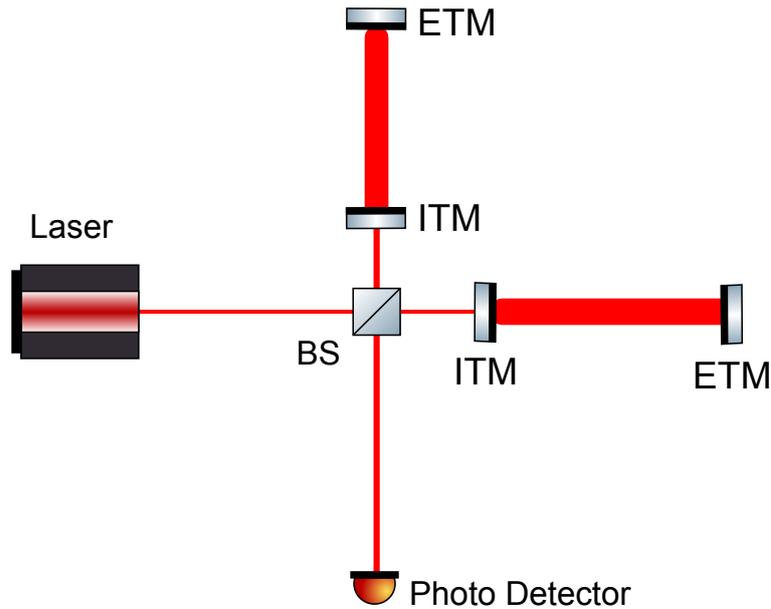


Figure 2.2: Fabry-Perot Michelson 干渉計。Beam Splitter と ETM の間に Input test mass (ITM) を設置し、ITM と ETM で Fabry-Perot 共振器を構成する。

い重力波の信号を捉えるために、レーザー干渉計の基線長は例えば 100km 程度と非常に長いものでなければならない。しかし、地球上で 100km 程度の干渉計を建設することはほぼ不可能であり、実際に LIGO の基線長は 4km、KAGRA の基線長は 3km である。光の実効的な距離を稼ぐ手段として、後述の Fabry-Perot 共振器が導入されている。

2.2.2 Michelson 干渉計の基本原理解

Michelson 干渉計の基本的な設計は、図 2.1a の通りである。east 方向と north 方向の光路差を波長の整数倍に設定しておけば、ETM から反射された 2 つの光のうち、east 方向の光の位相が反転し、光検出器側へ漏れ出る量はゼロとなる。これが、光検出器側が dark port、あるいは anti-symmetric port と呼ばれる由縁である。逆に、ETM に反射された光がレーザー側へ戻る際には位相の反転が生じない。したがって、レーザー側へ戻る光は強め合うことになり、これが bright port、あるいは symmetric port と呼ばれる由縁である。

Michelson 干渉計に重力波が入射した場合を考える。重力波は自由質点間の距離に四重極の影響を与えるため、例えば east 方向が伸びた際には north 方向は縮められる。これにより east arm と north arm の光路差が波長の整数倍からずれてしまい、dark port に光が漏れ出てしまうこととなる。dark port における光の漏れは重力波が入射したことにより引き起こされるため、この光は重力波の情報を持つことが期待される。時間領域における重力波の歪みを $h(t)$ とし、ETM と Beam Splitter の距離を L とすれば、重力波が入射したことによる光路差の変位は $\delta L = 2h(t)L$ となる。同様に、伝播する電場の位相変位は $\Delta\phi(t) = 2h(t)L\omega_0/c$ と書ける。ここで、 ω_0, c は、それぞれレーザーの角周波数と光の速さを表す。典型的な重力波の振幅は $h \sim 10^{-21}$ m であり、干渉計に用いられるレーザーの周波数は $\omega_0 \sim 9 \times 10^{14}$ Hz である。KAGRA の arm の長さ 3km を用いれば、典型的な重力波の入射による位相変位は $\Delta\phi \sim 10^{-11}$ となる。重力波検出器で生じるこの位相変位は、あまりにも小さすぎるために計測することが難しい。

この問題を解消するために、Advanced LIGO や KAGRA では Fabry-Perot 方式が導入さ

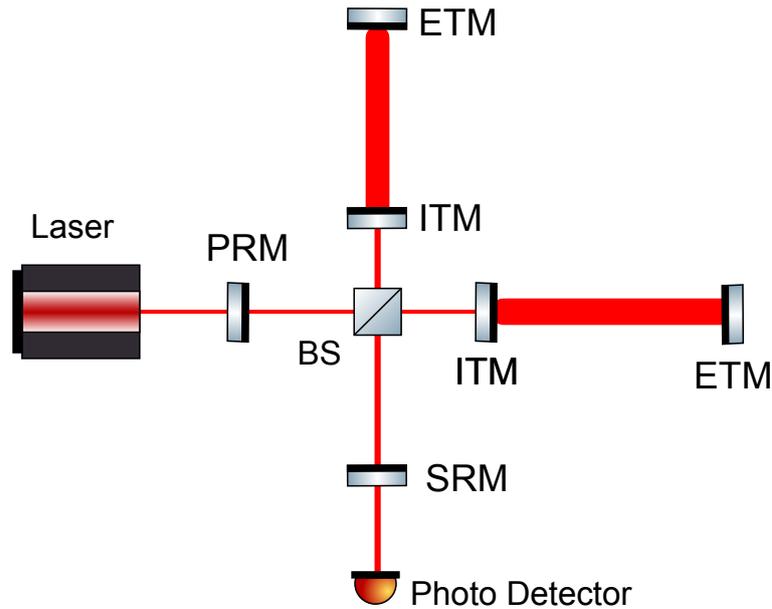


Figure 2.3: Dual Recycling Fabry-Perot Michelson 干渉計。Beam Splitter とレーザーの間に Power recycling mirror (PRM) を設置し、PRM と Michelson 干渉計で Power Recycling Cavity (PRC) を構成する。Signal Recycling Mirror (SRM) は Beam Splitter と光検出器の間に設置され、Signal Recycling Cavity (SRC) を構成する。

れている (図 2.2)。これは、Input Test Mass (ITM) を Beam Splitter と ETM の間に設置することで腕共振器を構成し、光の実効的な距離を稼ぐという方法である。共振器内で入射レーザー光は共振状態であり、ITM と ETM の 2 枚鏡で構成されるこの腕共振器を Fabry Perot Cavity (FPC) と呼ぶ。Fabry-Perot Cavity において、ITM を透過した光は ETM で反射され、再度 ITM で反射され、という事象を繰り返す、結果として何度も Fabry-Perot Cavity 内を往復する。 N 回 Fabry-Perot Cavity 内を往復するとすれば、その過程において位相変位は $\Delta\phi \sim 2hNL\omega_0/c$ となり、重力波信号が増幅されることと同値である。さらに、Fabry-Perot Cavity の構成によって Cavity 内のレーザーパワーが実効的に上昇したことになり、後述の shot noise を大幅に改善することが可能となる。

実際の干渉計では、ITM を挿入して Fabry-Perot Cavity を構成する他に、Power Recycling Mirror (PRM) と Signal Recycling Mirror (SRM) が設置されている (図 2.3)。PRM はレーザーと Beam Splitter の間に置かれ、Michelson 干渉計から戻ってきた bright port の光を再び干渉計へ打ち返し、干渉計内部の実効的なレーザーパワーを上げる共振器、Power Recycling Cavity (PRC) を構成する。SRM は Beam Splitter と光検出器の間に設置され、dark port に漏れ出した信号を干渉計へ打ち返す Signal Recycling Cavity (SRC) を構成する。Power Recycling Cavity は入射レーザーが共振するように共振器長を設定するが、Signal Recycling Cavity の共振器長は観測したい重力波の周波数に応じて変化させる。入射レーザーが共振状態になるように設定した場合には低周波の、入射レーザーが反共振の状態になるように設定した場合には高周波の重力波信号を取得することが期待される。前者の Signal Recycling Cavity の状態は Broadband Signal Recycling (Beam SplitterR) と呼ばれ、後者は Broadband Resonant Sideband Extraction (BRSE) と呼ばれる。ここで、完全な共振・反共振状態ではなく、共振器長を少しずらして設定することを Detune するという。詳細は次章で述べるが、Detune された干渉計ではより効率よく信号を取り出すことが可能となり、これは LIGO や KAGRA などの重力波検出器でも導入されている。本論文で Signal Recycling Cavity を含んだ干渉計を扱う際には、Signal Recycling Cavity が Detune されているものとして議論を進める。上記の

Fabry-Perot Cavity、Power Recycling Cavity、Signal Recycling Cavity を含んだ Michelson 干渉計のことを Dual Recycling Fabry-Perot Michelson 干渉計と呼ぶ。

2.3 重力波検出器における雑音

前節の通り、重力波検出器では 10^{-21}m 程度の振幅を持つ重力波信号を計測しなければならない。しかし、鏡の熱雑音やレーザーの量子揺らぎによる雑音など、本来であれば無視することができる小さな雑音によって、こういった微小な変位をもたらす重力波信号は隠されてしまう。すなわち、雑音によって干渉計の感度は制限されることとなる。本節では、重力波検出器で問題視される雑音について代表的なものを記述する。

2.3.1 位相雑音

shot noise

古典電磁気学により、電磁場は無限個の振動子集団であることが示されている。この振動子集団の基底状態は、電磁場の零点振動に寄与する。これらの零点振動は信号に影響を及ぼし、雑音となる。量子力学における不確定性原理と同様にして、電磁場の量子状態では光子数揺らぎと位相揺らぎの不確定性原理が成り立つことが知られている：

$$\Delta N_p \Delta \phi \geq 1. \quad (2.1)$$

ここで、 ΔA はパラメータ A の揺らぎ (分散) を表し、 N_p, ϕ はそれぞれ入射レーザーの光子数と位相を表す。光子数が Poisson 分布に従うコヒーレント光においては $\Delta N_p \sim \sqrt{N_p}$ であり、最小不確定状態においては $\Delta \phi \sim 1/\sqrt{N_p}$ である。この位相揺らぎが shot noise に寄与するため、noise を抑えるためには N_p の値を大きくする必要がある。これは、レーザー光の入射パワーを大きくすることに一致する。すなわち、入射パワーを大きくすれば shot noise を抑えることができるというわけである。この考え方は、干渉計への入射パワーが I_0 で与えられた際の shot noise spectrum がおよそ

$$S_{xx}^{\text{sh}} \sim \frac{\hbar c^2}{I_0 w_0} \quad (2.2)$$

で表されることから読み取ることができる。ここで、添字の xx は noise spectrum が変位の spectrum であることを示している。

残留ガス雑音

LIGO や KAGRA などの重力波検出器で用いられる Michelson 干渉計では、空気中の分子による光の散乱を防ぐために、そのコンポーネントが真空でなければならない。しかし、高真空に引いたとしても干渉計内部にはガスが残留しており、これがレーザー光を散乱して位相方向の雑音を生み出す。しかし、 10^{-9}torr 程度の H_2 残留ガスに対して、雑音のスペクトル強度はおよそ $10^{-25}/\sqrt{\text{Hz}}$ 程度であるため、現在の干渉計で到達できる最高感度にはさほど影響を及ぼさないと考えられる。

2.3.2 変位雑音

輻射圧雑音

shot noise の小節でも触れたように、コヒーレント光における光子数揺らぎは $\sqrt{N_p}$ で与えられる。この光子数揺らぎは、干渉計の輻射圧に強い影響を及ぼす。鏡に作用する輻射圧の揺らぎを ΔF_{rp} とすれば、作用時間 t における式は

$$\Delta F_{rp} \sim \frac{\sqrt{N_p} \hbar k_p}{t} \quad (2.3)$$

と表される。ここで、 k_p は入射レーザーの波数を表す。鏡の周波数応答関数は $-1/m\Omega^2$ で表わされるので、輻射圧雑音による変位 noise spectrum は次のように概算できる：

$$S_{xx}^{rp} \sim \frac{(\Delta F_{rp} t)^2}{m^2 \Omega^2} \quad (2.4)$$

鏡に作用する輻射圧が小さいほど輻射圧雑音は小さくなるので、レーザーの入射パワーが小さければ小さいほど良い。これは shot noise とは逆の要求である。

このように、レーザーの量子揺らぎという同じ発端でありながら、shot noise と輻射圧雑音は異なる入射パワー依存性を示す。同時に、shot noise は高周波帯で、輻射圧雑音は低周波帯で支配的になるという性質も持っている。このような shot noise と輻射圧雑音の関係性は、Standard Quantum Limit (SQL) と呼ばれる量子雑音の限界を与える。式 (2.2) と (2.4) を足し合わせ、全体の量子雑音を求めると、

$$\begin{aligned} S_{xx} &= S_{xx}^{\text{sh}} + S_{xx}^{\text{rp}} \\ &\sim \frac{\hbar c^2}{I_0 w_0} + \frac{(\Delta F_{rp} t)^2}{m^2 \Omega^2} \geq \frac{2\hbar}{m\Omega^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

最右辺は量子雑音の最小値を表し、標準量子限界 (Standard Quantum Limit) と呼ばれる。SQL は不確定性原理に由来するものであり、直感的には次のように理解することができる：重力波信号の位相 quadrature をより正確に計測しようとするならば、レーザーの入射パワーを上げる必要がある。これにより輻射圧雑音は増幅し、振幅 quadrature の不確定性が増加する。振幅 quadrature をより正確に計測しようとするならば、レーザーの入射パワーを下げる必要があるが、これにより shot noise が増幅し、位相 quadrature の不確定性が増加する。この trade-off の関係が SQL を生み出すのである。

地面振動雑音

地面振動雑音は、 10^0 Hz 以下程度の比較的low周波な領域で支配的となる雑音である。 1 Hz 近辺での地面振動雑音の大きさはおよそ $10^{-8} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ 程度であり、 Ω^{-2} に比例しながら減少する。ここで、 Ω は角周波数を表す。これは、鏡の周波数応答関数が $-1/m\Omega^2$ で表されることによる。この地面振動雑音を回避するために、重力波検出器では Vibration Isolation System (VIS) を設計・導入している。VIS は ITM や ETM などの鏡を振り子で釣り、地面振動の直接的な影響を緩和するシステムであり、LIGO や KAGRA でも非常に大きな役割を担っている。

熱雑音

熱雑音は、重力波検出器を構成する鏡や振り子で生じる雑音である。鏡における熱雑音は、Thermo-optic noise と Brownian thermal noise が有名である。Thermo-optic noise は鏡のコー

ティングの温度変化により引き起こされる雑音であり、熱膨張が原因となる Thermoelastic noise と、熱による屈折率の変化が原因となる Thermorefractive noise の2種類がある。Brownian thermal noise は、鏡の温度が非零であることに起因する鏡のブラウン運動の揺らぎによってもたらされる雑音であり、ブラウン運動による鏡の体積変動を通じて影響を見ることができる。Brownian thermal noise の Power Spectral density (PSD) は温度 T の $1/2$ 乗に比例するため、当然ながら低温では減少することがわかる。

Chapter 3

Optomechanical dynamics

前章で記述したように、量子雑音は重力波検出器の感度を大きく制限する。重力波の直接検出の際には、この量子雑音の詳細を知ることが必要不可欠である。この章では、はじめに重力波検出の核心である、Michelson 干渉計における Optomechanical dynamics を導出する。次に電磁場の量子状態を確認し、Cavity における量子光学の dynamics を計算する。

3.1 Fabry-Perot Cavity

3.1.1 共振器の反射率と透過率

Fabry-Perot Cavity 内の電場を図 3.1 のように定義する。ここで、共振器長を L 、ITM の振幅反射率と振幅透過率を r_1, t_1 、ETM の振幅反射率と振幅透過率を r_2, t_2 とする。Fabry-Perot Cavity の反射電場 E_r 、透過電場を E_t について、次式が成り立つ：

$$E_a = t_1 E_{in} + r_1 E_b, \quad (3.1)$$

$$E_b = r_2 E_a e^{-i\Phi}, \quad (3.2)$$

$$E_r = -r_1 E_{in} + t_1 E_b, \quad (3.3)$$

$$E_t = t_2 E_a e^{-i\Phi/2}. \quad (3.4)$$

ここで、 E_a, E_b は ITM 付近の電場を表し、 Φ は光が共振器内を伝播するときの位相変化

$$\Phi \equiv \frac{2L\Omega}{c} \quad (3.5)$$

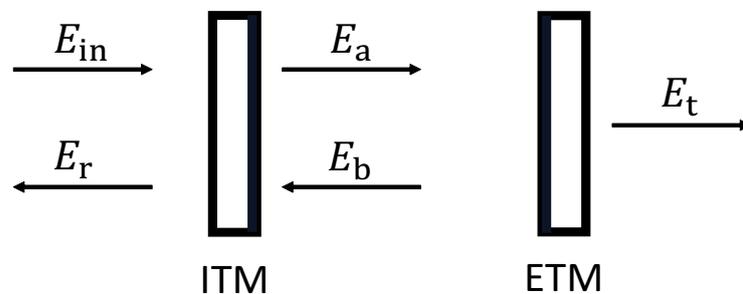


Figure 3.1: Fabry-Perot Cavity における電場。

である。ただし、 Ω は入射光 E_{in} の角周波数、 c は光速を表す。式 (3.1) から (3.4) について、各電場を E_{in} を用いて表す。例えば E_a については以下のように計算できる。式 (3.2) を (3.1) に代入して

$$\begin{aligned} E_a &= t_1 E_{\text{in}} + r_1 r_2 E_a e^{-i\Phi} , \\ \Leftrightarrow (1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}) E_a &= t_1 E_{\text{in}} , \\ \Leftrightarrow E_a &= \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} E_{\text{in}} . \end{aligned}$$

他の3つの電場も同様にして求めると

$$E_a = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} E_{\text{in}} \quad (3.6)$$

$$E_b = \frac{r_2 t_1 e^{-i\Phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} E_{\text{in}} , \quad (3.7)$$

$$E_r = \left(-r_1 + \frac{r_2 t_1^2 e^{-i\Phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} \right) E_{\text{in}} , \quad (3.8)$$

$$E_t = \frac{t_1 t_2 e^{-i\Phi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} E_{\text{in}} . \quad (3.9)$$

以上により、共振器の反射率 r_{cav} と透過率 t_{cav} は、

$$r_{\text{cav}} \equiv \frac{E_r}{E_{\text{in}}} = -r_1 + \frac{r_2 t_1^2 e^{-i\Phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} , \quad (3.10)$$

$$t_{\text{cav}} \equiv \frac{E_t}{E_{\text{in}}} = \frac{t_1 t_2 e^{-i\Phi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} \quad (3.11)$$

と定義できる。このとき、共振器の反射光強度 P_r と透過光強度 P_t を計算すると

$$P_r = |E_r|^2 = \frac{\{(r_1^2 + t_1^2)r_2 - r_1\}^2 + 4r_1 r_2 (r_1^2 + t_1^2) \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{(1 - r_1 r_2)^2 (1 + F \sin^2 \frac{\Phi}{2})} |E_{\text{in}}|^2 , \quad (3.12)$$

$$P_t = |E_t|^2 = \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Phi}{2}} |E_{\text{in}}|^2 \quad (3.13)$$

となる。ここで F は

$$F \equiv \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad (3.14)$$

で定義される値である。Fabry-Perot Cavity が共振しているとき、共振器内部の光の強度は最大となり、したがって透過光強度 P_t も最大となる。よって、Fabry-Perot Cavity が共振するときの位相変化の条件は、式 (3.13) より

$$F \sin^2 \frac{\Phi}{2} = 0 \Leftrightarrow \Phi = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{N}) . \quad (3.15)$$

これは共振条件と呼ばれており、共振器長が波長の整数倍であるときに光が共振することがわかる。

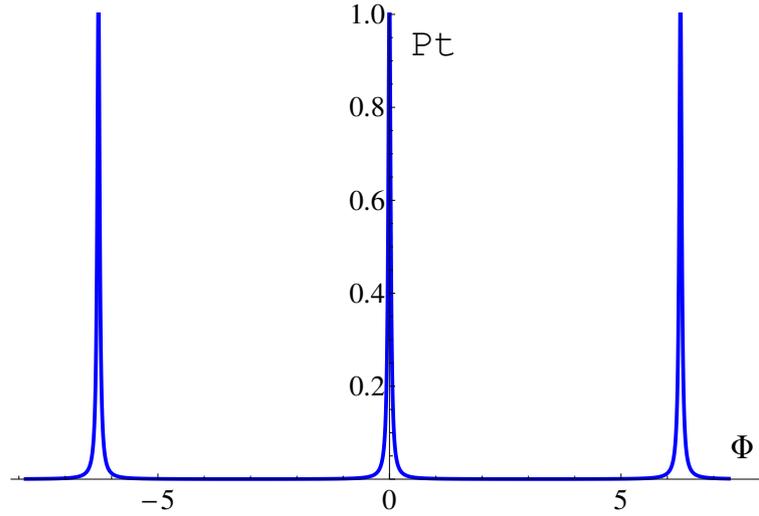


Figure 3.2: フィネスが100の場合の Fabry-Perot Cavity 透過光強度。横軸は位相 Φ であっている。ピークとピークの角周波数の差が FSR である。

3.1.2 フリースペクトラルレンジ

$\Phi = 2L\Omega/c$ より、共振器長 L を定数として見れば、位相変化 Φ は入射レーザーの周波数 Ω の関数である：

$$\Phi = \Phi(\Omega) .$$

ここで、式 (3.13) より透過光強度 P_t は位相変化 Φ の関数であるので、

$$P_t = P_t(\Omega)$$

と表すことができる。式 (3.13) の具体形を考慮に入れば、透過光強度は周波数 Ω の周期関数となることがわかる。この周期をフリースペクトラルレンジ (Free Spectral Range : FSR) と呼ぶ。これを満たす周波数を Ω_{FSR} とすれば、次式が成り立つ：

$$\frac{2L\Omega_{\text{FSR}}}{c} = 2\pi \Leftrightarrow \Omega_{\text{FSR}} = \frac{c}{L}\pi . \quad (3.16)$$

実際に、横軸を Φ として透過光強度のグラフを描くと図 3.2 のような周期関数となる。透過光のピークの半値全幅を Ω_{FWHM} とすれば、

$$\Omega_{\text{FWHM}} = \frac{2c}{L} \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}}$$

と計算できる。 $x \gg 1$ のとき、 $\arcsin(x) \sim x$ と近似できるので、 $F \gg 1$ 、すなわち $r_1 \sim 1, r_2 \sim 1$ であると仮定すれば、

$$\Omega_{\text{FWHM}} \sim \frac{2c}{L} \frac{1}{\sqrt{F}} = \frac{2(1 - r_1 r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \quad (\because (3.14)) . \quad (3.17)$$

Ω_{FSR} と Ω_{FWHM} の比はフィネスと呼ばれ、共振の鋭さを表す指標となる：

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\Omega_{\text{FSR}}}{\Omega_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} . \quad (3.18)$$

すなわち、共振の鋭さは、ITM と ETM の反射率のみで決定されることがわかる。

3.1.3 Fabry-Perot Cavity の重力波応答

$h(t)$ の歪みを持つ重力波が Fabry-Perot Cavity に入射している状態を考える。光が共振器を往復するためにかかる時間を Δt とすると、往復時間は次式で与えられることが知られている：

$$\Delta t = \frac{2L}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt' h(t'). \quad (3.19)$$

ここで、第1項は重力波が存在しない場合に干渉計の往復にかかる時間を表し、第2項は重力波が入射したことにより生じる歪みの伝播時間を表す。光が共振器内を n 回往復する時間を Δt_n とすれば、

$$\Delta t_n = \frac{2L}{c} n + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L}{c}n}^t dt' h(t'). \quad (3.20)$$

ここで、Fabry-Perot Cavity の周波数応答を見るために、式 (3.20) を時間空間から周波数空間へ書き換える。重力波の歪み $h(t)$ の Fourier 変換を

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega) e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

で定義すれば、 Δt_n は周波数 ω を用いて

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= \frac{2L}{c} n + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L}{c}n}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega) e^{i\omega t'} \\ &= \frac{2L}{c} n + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{L\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。ここで、周波数 Ω である Fabry-Perot Cavity への入射電場 E_{in} を用いて、反射電場 E_r は次のように表される：

$$\begin{aligned} E_r &= E_{\text{in}} \left[-r_1 + r_2 t_1^2 e^{-i\Omega \Delta t_1} + r_1 r_2^2 t_1^2 e^{-i\Omega \Delta t_2} + \dots \right] \\ &= E_{\text{in}} \left[-r_1 + r_2 t_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{-i\Omega \Delta t_n} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

[\cdot] 内の第1項は Fabry-Perot Cavity に入射せずに反射した光を、第2項は n 回共振器内を往復した光を表している。この式に (3.22) を代入し、 $|h| \ll 1$ として計算すれば、

$$\frac{E_r}{E_{\text{in}}} = -r_1 + \frac{r_2 t_1^2 e^{-i\Phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\Omega}{2\omega} \frac{1 - e^{-2i\Gamma}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi} e^{-2i\Gamma}} e^{i\omega t} h(\omega) \right] \quad (3.24)$$

となる。ただし、

$$\Gamma \equiv \frac{L\omega}{c} \quad (3.25)$$

と定義される。式 (3.24) において、第1項と第2項は重力波が存在しない時の Fabry-Perot Cavity 反射率と一致している (式 (3.10))。ここで、入射光が Fabry-Perot Cavity に対して共振であるとき、 $\Phi = 2\pi n$ とでき、式 (3.24) は

$$\begin{aligned} \frac{E_r}{E_{\text{in}}} &= \frac{-r_1 + (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \left[1 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\alpha\Omega}{\omega} \frac{\sin \Gamma}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\Gamma}} e^{-i\Gamma} h(\omega) e^{i\omega t} \right] \\ &\equiv \frac{-r_1 + (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \left[1 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H_{\text{FP}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここで、 α と $H_{\text{FP}}(\omega)$ は

$$\alpha \equiv \frac{r_2 t_1^2}{-r_1 + (r_1^2 + t_1^2)r_2}, \quad (3.27)$$

$$H_{\text{FP}}(\omega) \equiv \frac{\alpha \Omega}{\omega} \frac{\sin \Gamma}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\Gamma}} e^{-i\Gamma} \quad (3.28)$$

で定義され、 $H_{\text{FP}}(\omega)$ は重力波が Fabry-Perot Cavity に入射したときの周波数応答関数を表す。

3.2 Dual Recycling

3.2.1 共振条件と Sideband

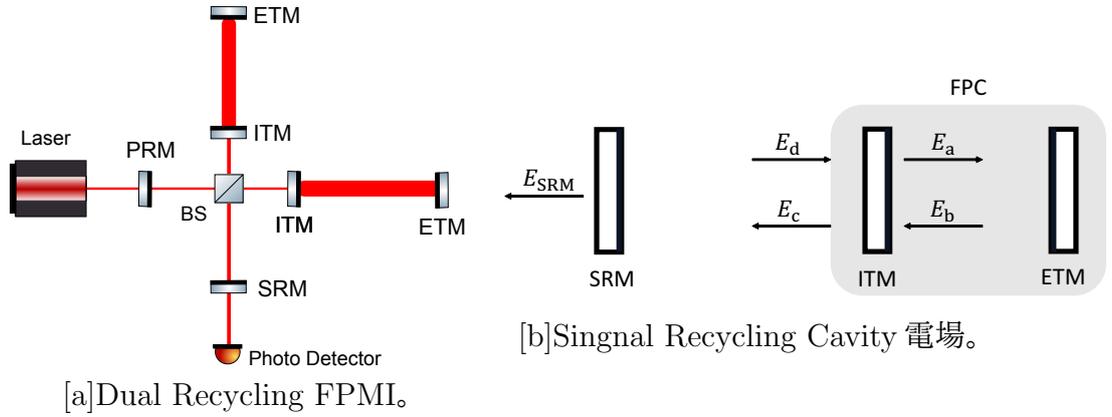


Figure 3.3: (a)PRM と SRM を導入した Dual Recycling FPMI。同相信号は Power Recycling Cavity で増幅され、差動信号は Singnal Recycling Cavity で増幅される。(b)Singnal Recycling Cavity 付近の電場。Fabry-Perot Cavity を合わせ 1 枚鏡として考えることで、節 3.1.1 と同様に電場を解くことができる。

Michelson 干渉計の動作点においては、dark port にほとんど光が漏れず、ほとんどの光が bright port に返ってくる。この戻ってきた光を鏡で反射し、再び干渉計へ入射させることで、干渉計内部の実効的な入射パワーを上昇させることができる。図 3.3a のように、Beam Splitter とレーザーの間に Power Recycling Mirror (PRM) を設置し、同相の信号を Michelson 干渉計へ打ち返すことを Power Recycling という。このとき、PRM と Michelson 干渉計 (MI) は共振器を形成し、Power Recycling Cavity (PRC) と呼ばれる。前章で述べたように、shot noise は入射レーザーのパワーが大きいほど改善されるので、Power Recycling Cavity を導入することによって干渉計感度を大きく向上させることができる。

ここで、Power Recycling Cavity の共振条件について考える。節 3.1.1 と同様の計算を行うが、このとき Michelson 干渉計を、式 (3.10) で与えられる反射率 r_{cav} を持つ 1 枚の合わせ鏡だと考えると計算が容易である (図 3.3b)。Fabry-Perot Cavity が共振である場合、式 (3.10) の位相変化 Φ は $2\pi n$ で与えられ、逆に反共振であるときには $\Phi = -\pi + 2\pi n$ である。これを (3.10)(3.11) に代入すれば

$$r_{\text{cav}} = -r_1 + \frac{r_2 t_1^2}{1 - r_1 r_2} = \frac{r_2 - r_1}{1 - r_1 r_2} \quad \text{for resonant} \quad , \quad (3.29)$$

$$r_{\text{cav}} = -r_1 + \frac{-r_2 t_1^2}{1 + r_1 r_2} = -\frac{r_2 + r_1}{1 + r_1 r_2} \quad \text{for anti-resonant} \quad . \quad (3.30)$$

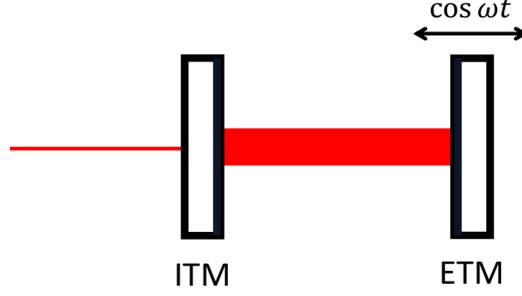


Figure 3.4: Fabry-Perot Cavity に重力波が入射した系。

ここで、 $r_2 > r_1$ である状態、すなわち ETM 反射率が ITM 反射率よりも大きい状態を over-coupling と呼び、重力波検出器の Fabry-Perot Cavity ではこの状態が保たれている。この不等式を用いると、上式において、Fabry-Perot Cavity が共振であれば合わせ鏡の反射率は正、反共振であれば反射率が負であることが求められる。PRM の振幅反射率と振幅透過率をそれぞれ r_p, t_p とすれば、節 3.1.1 の計算と同様にして、Power Recycling Cavity としての反射率 r_{PRC} は以下のように計算できる：

$$r_{\text{PRC}} = -r_p + \frac{r_{\text{cav}} t_p^2 e^{-i\beta}}{1 - r_p r_{\text{cav}} e^{-i\beta}} . \quad (3.31)$$

ただし、 β は Power Recycling Cavity を伝播するときの位相変化である。したがって、Fabry-Perot Cavity が共振している場合、式 3.31 における r_{cav} は負となるため、 $\beta = 2\pi n$ のときに Power Recycling Cavity は反共振、 $\beta = -\pi + 2\pi n$ のときに共振状態をとることとなり、Fabry-Perot Cavity の共振条件とは逆の関係性を示す。

次に、Signal Recycling Cavity (SRC) について考える。この場合、入射光 (Carrier) の電場だけでなく、Sideband と呼ばれる電場の振る舞いも考慮する必要がある。Sideband とは、Michelson 干渉計に重力波が入射した際に生成される、周波数 $\Omega \pm \omega$ を持つ信号光のことである。ここで、 Ω は入射光の周波数、 ω は入射した重力波の周波数であり、すなわち Sideband は直接的に重力波の情報を含んでいることとなる。Fabry-Perot Cavity において、重力波の入射によって ETM が $L'(t) = \Delta L \cos \omega t$ で振動している場合を考える。このとき、Fabry-Perot Cavity の共振器長 $L(t)$ は、重力波が入射していない場合の共振器長 L を用いて、次のように表される：

$$L(t) = L + L'(t) = L + \Delta L \cos \omega t .$$

Fabry-Perot Cavity への入射電場を $E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$ として、共振器内における Carrier の 1 周

分の振る舞いを調べる。共振器長 L に対して Carrier は共振であることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
E_{\text{round trip}}^{\text{Ca}} &= E_{\text{in}} e^{i\Omega \frac{2L(t)}{c}} \\
&= E_{\text{in}} e^{i\Omega \frac{2L'}{c}(t)} \\
&\propto e^{i\Omega t} \times e^{i\Omega \frac{2\Delta L}{c} \cos\{\omega(t - \frac{L}{c})\}} \\
&= e^{i\Omega t} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{2\Omega\Delta L}{c} \right) i^n e^{in\omega(t - \frac{L}{c})} \\
&\sim e^{i\Omega t} \left[1 + \left(\frac{i}{2} \frac{2\Omega\Delta L}{c} \right) e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{L}{c}} + \left(\frac{i}{2} \frac{2\Omega\Delta L}{c} \right) e^{-i\omega t} e^{i\omega \frac{L}{c}} \right] \\
&= e^{i\Omega t} + i \frac{\Omega\Delta L}{c} e^{i\Omega t} e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{L}{c}} + i \frac{\Omega\Delta L}{c} e^{i\Omega t} e^{-i\omega t} e^{i\omega \frac{L}{c}} \\
&= e^{i\Omega t} + i \frac{\Omega\Delta L}{c} e^{i(\Omega+\omega)t} e^{-i\omega \frac{L}{c}} + i \frac{\Omega\Delta L}{c} e^{i(\Omega-\omega)t} e^{i\omega \frac{L}{c}} .
\end{aligned}$$

ここで、第3行から第4行への変形では Bessel 級数を導入し、続く第5行への変形では $n = 0, \pm 1$ の項まで Bessel 級数展開を行った。最終行において、第1項は入射した Carrier を表し、第2項と第3項が重力波の入射に伴って生じる Sideband を表している。以上により、MI に重力波が入射した際には、Carrier の角周波数 Ω の周りに $\Omega \pm \omega$ の Sideband が出現することが示された。2本の Sideband について、 $\Omega + \omega$ を Upper-Sideband、 $\Omega - \omega$ を Lower-Sideband と呼ぶ。

さて、Michelson 干渉計の dark port が暗い状態 (dark fringe) である場合、図 3.3a の Singnal Recycling Cavity には Carrier 成分が存在せず、Sideband の信号のみが dark port に漏れ出てくる。この Sideband を打ち返す Signal Recycling のやり方は3通りあり、それぞれ Broadband Signal Recycling (BSR)、Broadband Resonant Sideband Extraction (BRSE)、Detune と呼ばれる。BSR は Singnal Recycling Cavity の共振器長に対して Carrier が共振になるように設定してあり、低周波の Sideband をよく共振させるローパスの特性を持つ。BRSE では Carrier が反共振になるよう設定してあり、高周波の Sideband を共振させるハイパス特性を持つ。ここで言う共振 (反共振) は Power Recycling Cavity の共振条件のときと同様で、Fabry-Perot Cavity が共振状態のときには通常の共振条件 (反共振条件) の逆の位相をとることに注意する。Detune は BSR や BRSE と異なり、完全な共振、反共振の状態は作らない。例えば Detuned Resonant Sideband Extraction (DRSE) では、Carrier を反共振から少しずらした状態に設定し (これを Detune と呼ぶ)、Sideband のどちらか片方のみを Singnal Recycling Cavity 内でよく共振させる。すなわち、Broadband な Singnal Recycling Cavity と Detuned Singnal Recycling Cavity の違いは、以下の通りである: BSR や BRSE では、Carrier を完全に共振、反共振の状態にし、2本の Sideband が対称にある程度の共振をするように設定した。これにより広い周波数帯域で重力波を観測する可能性が大きくなり、Broadband と呼ばれる由縁でもある。逆に DSR や DRSE では、片方の Sideband に限っては Broadband な干渉計よりも鋭く共振するため、特定の周波数帯に関して BSR や BRSE よりも高い感度を示す。以上の3つの Singnal Recycling Cavity の共振状態に関しては図 3.5 にまとめてある。

3.2.2 Singnal Recycling Cavity の信号増幅率

次に、Signal Recycling Cavity の信号増幅率 G_{SRC} を考える。Signal Recycling Cavity の信号増幅率は、SRM の透過光 E_{SRM} と SRM を設置しない場合の透過光 E_{noSRM} の比で定義さ

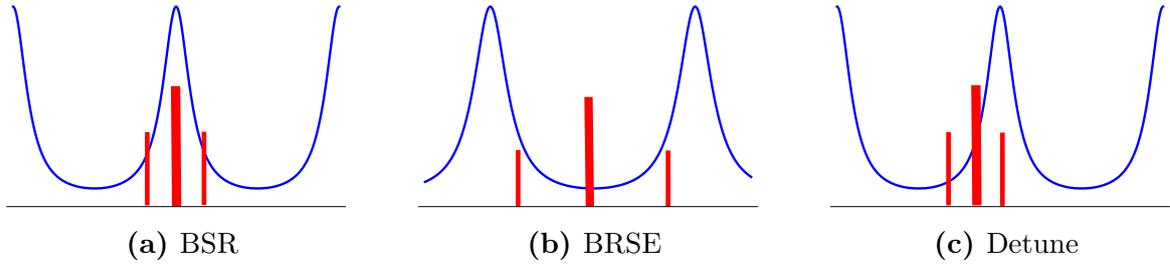


Figure 3.5: 各図における曲線は共振器透過率を表し、ピークの所でよく共振する。横軸は周波数である。3本の赤線のうち、中心はCarrierを表し、残り2本は重力波の入射によってできたSidebandを表す。(a)BSRの共振状態。Sidebandの周波数が小さければ小さいほどFSRのピークでよく共振できる。(b)BRSE。こちらはSidebandの周波数がある程度大きいところで共振している。ただし、あまりにも大きすぎる周波数だと信号を相殺し、感度が落ちてしまう。(c)DSR。CarrierをFSRのピークからずらすことで、片方のSidebandをよく共振させる。

れる：

$$G_{\text{SRC}} \equiv \left| \frac{E_{\text{SRM}}}{E_{\text{noSRM}}} \right|. \quad (3.32)$$

SRMの振幅反射率と透過率を r_s, t_s 、Signal Recycling Cavityの共振器長を l として、図3.3bのように電場を定義すると、電場に関して以下の連立方程式が成り立つ：

$$\begin{aligned} E_a &= r_1 E_b + t_1 (E_{\text{in}} + E_d), \\ E_b &= r_2 E_a e^{-i\frac{2L}{c}\omega}, \\ E_c &= t_1 E_b - r_1 E_d, \\ E_d &= r_s E_c e^{i\frac{2l}{c}\Omega}, \\ E_{\text{SRM}} &= t_s E_c e^{i\frac{l}{c}\Omega}. \end{aligned}$$

ここで注意すべきことは、 E_d や E_{SRM} にかかる位相変化にはCarrierの周波数 Ω を用いることである。これは、実際に伝播するのはSidebandであるが、BSRやBRSEの共振条件としては選択しなければならないのはCarrierであるためである。2つの位相変化について

$$\psi \equiv \frac{L}{c}\omega, \quad \phi \equiv \frac{l}{c}\Omega \quad (3.33)$$

と定義して、 E_{SRM} を E_{in} で表すと、

$$E_{\text{SRM}} = \frac{r_2 t_1^2 t_2 e^{i(\psi+\phi)}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\phi}} \left[1 - r_1 r_2 e^{i\psi} - \frac{r_2 r_s t_1^2 e^{i(\psi+2\phi)}}{1 + r_1 r_s e^{2i\phi}} \right]^{-1} E_{\text{in}}. \quad (3.34)$$

SRMが存在しない場合の電場については、 $r_s = 0, t_s = 1$ とすればよいので、式(3.34)より

$$E_{\text{noSRM}} = r_2 t_1^2 e^{i(\psi+\phi)} (1 - r_1 r_2 e^{i\psi})^{-1} E_{\text{in}}. \quad (3.35)$$

したがって、絶対値を取らない場合の信号増幅率 G_{SRC} を H_{SRC} とすれば、この値は以下のよう計算できる：

$$\begin{aligned}
H_{\text{SRC}} &= \frac{E_{\text{SRM}}}{E_{\text{noSRM}}} \\
&= \frac{\frac{r_2 t_1^2 t_2 e^{i(\psi+\phi)}}{1+r_1 r_2 e^{2i\phi}} \left[1 - r_1 r_2 e^{i\psi} - \frac{r_2 r_s t_1^2 e^{i(\psi+2\phi)}}{1+r_1 r_s e^{2i\phi}} \right]^{-1} E_{\text{in}}}{r_2 t_1^2 e^{i(\psi+\phi)} (1 - r_1 r_2 e^{i\psi})^{-1} E_{\text{in}}} \\
&= \frac{t_s (1 - r_1 r_2 e^{i\psi})}{(1 + r_1 r_s e^{2i\phi}) \left(1 - r_1 r_2 e^{i\psi} - \frac{r_2 r_s t_1^2 e^{i(\psi+2\phi)}}{1+r_1 r_s e^{2i\phi}} \right)} \\
&= \frac{t_s}{1 - r_s e^{2i\phi} \left[r_1 + r_2 t_1^2 e^{i\psi} / (1 - r_1 r_2 e^{i\psi}) \right]} .
\end{aligned}$$

ここで、Fabry-Perot Cavity の ETM 反射率を 1 であるとすると、結局

$$H_{\text{SRC}} = \frac{t_s}{1 - r_s e^{2i\phi} \left[r_1 + t_1^2 e^{i\psi} / (1 - r_1 e^{i\psi}) \right]} . \quad (3.36)$$

信号増幅率 G_{SRC} は、この絶対値をとればよいので

$$G_{\text{SRC}} = \left| \frac{t_s}{1 - r_s e^{2i\phi} \left[r_1 + t_1^2 e^{i\psi} / (1 - r_1 e^{i\psi}) \right]} \right| . \quad (3.37)$$

式 (3.33) において、 ψ は重力波による Fabry-Perot Cavity での位相変化を、 ϕ は Singnal Recycling Cavity を伝播するとき Carrier にかかる位相変化を表しているため、式 (3.37) の ϕ に適切な値を代入することで、Singnal Recycling Cavity の共振状態を BSR や BRSE、Detune に設定することができる。具体的には、通常の Fabry-Perot Cavity の反共振条件 $2\phi = -\pi + 2\pi n$ のとき Carrier は Singnal Recycling Cavity に共振する (BSR)。このときの信号増幅率は、式 (3.37) より、

$$G_{\text{BSR}} = \left| \frac{t_s}{1 - r_s \left[-r_1 + t_1^2 e^{i\psi} / (1 - r_1 e^{i\psi}) \right]} \right| \quad (3.38)$$

となる。同様にして、通常の共振条件 $2\phi = 2\pi n$ が成り立つように Singnal Recycling Cavity の長さを調整すれば、Singnal Recycling Cavity における Carrier は反共振となる (BRSE)。このときの信号増幅率は

$$G_{\text{BRSE}} = \left| \frac{t_s}{1 + r_s \left[-r_1 + t_1^2 e^{i\psi} / (1 - r_1 e^{i\psi}) \right]} \right| \quad (3.39)$$

となる。これらを角周波数 Ω についてプロットすると、図 3.6 のようになる。この図からも、BSR は低周波側の Sideband を増幅するようなローパス特性を持ち、BRSE は高周波側の Sideband を増幅するようなハイパス特性を持っていることがわかる。ただし、BRSE において注意すべきこととして、あまりにも高周波 Sideband を強く共振しすぎてしまった場合には、信号が相殺して見えなくなってしまう性質がある。この打ち消し合う周波数のことをキャビティポールという。

3.2.3 Detune 位相

Singnal Recycling Cavity における Detune とは、図 3.5c のように、Carrier を共振または反共振から少しずつらすことにより、片側の Sideband をより強く共振させる方法である。BSR

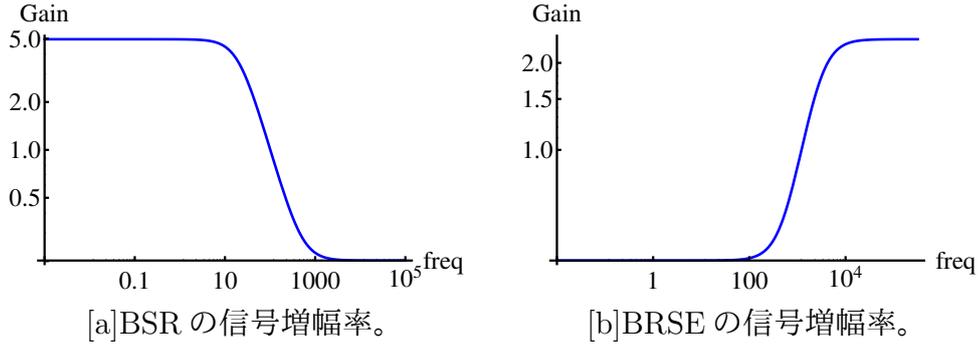


Figure 3.6: (a) 横軸を角周波数 Ω にとった BSR の信号増幅率。低周波側では大きな増幅率を持っているのに対し、高周波側ではその Gain が落ちていることがわかる。(b)BRSE の信号増幅率。BSR とは逆にハイパス特性を持っていることが見て取れる。

の状態、すなわち、Carrier が共振である状態から Detune した Singnal Recycling Cavity の状態を Detuned Singnal Recycling (DSR) と呼び、BRSE から Detune した状態を Detuned Resonant Sideband Extraction (DRSE) と呼ぶ。DRSE は、BRSE のときの共振器長から Δl だけずらすことで実現される：

$$\phi = \frac{l\Omega}{c} = n\pi \quad (\text{BDSE}), \quad (3.40)$$

$$\phi = \frac{(l + \Delta l)\Omega}{c} = n\pi + \delta \quad (\text{DRSE}). \quad (3.41)$$

ここで、 δ は Detune 位相と呼ばれる。このときの信号増幅率 G_{DRSE} は、式 3.33 に式 3.41 を代入して、次のように求められる：

$$G_{\text{DRSE}} = \left| \frac{t_s}{1 + r_s e^{2i\delta} [-r_1 + t_1^2 e^{-i\psi} / (1 - r_1 e^{-i\psi})]} \right|. \quad (3.42)$$

DSR のときも同様にして、位相の関係式は次のように修正される：

$$\phi = \frac{l\Omega}{c} = -\frac{\pi}{2} + n\pi \quad (\text{BSR}), \quad (3.43)$$

$$\phi = \frac{(l + \Delta l)\Omega}{c} = -\frac{\pi}{2} + n\pi + \delta \quad (\text{DSR}). \quad (3.44)$$

DSR における信号増幅率は、

$$G_{\text{DSR}} = \left| \frac{t_s}{1 - r_s e^{2i\delta} [-r_1 + t_1^2 e^{i\psi} / (1 - r_1 e^{i\psi})]} \right|. \quad (3.45)$$

と書かれる。それぞれの信号増幅率を角周波数 Ω の関数としてプロットした結果が図 3.7 である。この図から、Detuned Singnal Recycling Cavity はある特定の周波数帯に強い増幅特性を示すことがわかる。すなわち、観測したい重力波源に対して適切な Detune 位相 δ を選択すれば、Broadband な Singnal Recycling Cavity よりも信号を取得しやすいというメリットがある。

より高感度の重力波検出器を追求するためには、Detuned Singnal Recycling Cavity を導入することが重要である。観測可能な周波数帯域が狭くなってしまいう一方、Detuned Singnal Recycling Cavity はより鋭い感度ピークを持つからだ。Detune された Singnal Recycling Cavity がこのような高感度を示す要因としては、後述の光バネなどの影響も大きく関わっている。

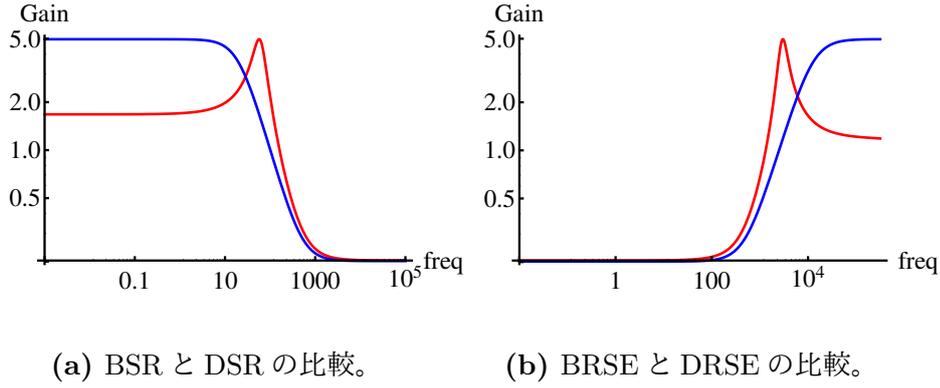


Figure 3.7: (a)BSR と DSR の信号増幅率を Ω の関数としてプロットしたものである。(b)BRSE と DRSE の信号増幅率の比較。(a) と (b) より、Detuned Singnal Recycling Cavity はある特定の周波数帯に強い増幅特性を示すことがわかる。

3.3 電磁場の量子化

前節までは電磁場を古典的な波として扱い、周波数応答関数や Fabry-Perot Cavity の反射率などを調べてきた。しかし、重力波検出器の感度を大きく制限する量子雑音を扱うためには、これらの光を量子的に扱うことが必要となる。具体的には、場は光子の生成消滅演算子で記述され、これが振幅方向と位相方向の雑音を与える。したがって本節では、two-photon formalism を用いて、干渉計内部の光を量子化する際の記述法を確認し、dark port から入射し雑音源となる真空場の Input-Output relation を求める。

3.3.1 Beam Splitter 近辺の場

図 3.8 のように真空場を定義する。dark port から入射してくる量子化された電磁場について、正の周波数（反時計回りの回転をする）を持つものは、次の式で与えられる：

$$E_{\text{in}}^{(+)} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{Ac}} a_{\omega} e^{-i\omega t} . \quad (3.46)$$

ここで、 A はビーム断面積を表し、 a_{ω} は場の消滅演算子を表している。生成消滅演算子は以下の交換関係を満たす：

$$[a_{\omega}, a_{\omega'}] = 0 , [a_{\omega}, a_{\omega'}^{\dagger}] = 2\pi\delta(\omega - \omega') . \quad (3.47)$$

この電磁場が周波数 $\omega_0 \pm \Omega$ の Sideband を形成する場合を考える。ここで、 ω と Ω の定義が前節までとは異なっていることに注意されたい。本節における Carrier の角周波数は ω_0 であり、Sideband のずれは Ω である。今、Sideband の生成消滅演算子を

$$a_{\pm} \equiv a_{\omega_0 \pm \Omega} \quad (3.48)$$

のように定義すると、交換関係 (3.47) は次のように書き換えられる：

$$[a_{+}, a_{+}^{\dagger}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') , [a_{-}, a_{-}^{\dagger}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') . \quad (3.49)$$

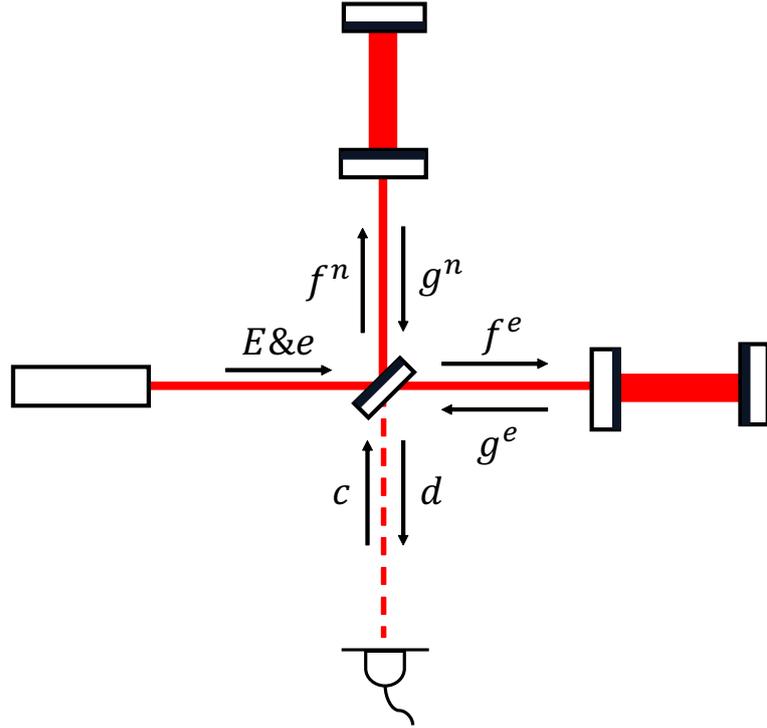


Figure 3.8: Beam Splitter 近辺の場の定義。入射レーザーのみを古典的に扱い、他の真空場は量子的に扱う。各真空場はベクトル表記であり、振幅 quadrature と位相 quadrature を 1, 2 成分に持つ。例えば $e = (e_1, e_2)$ であり、 e_1 は振幅 quadrature、 e_2 は位相 quadrature である。

ただし、交換可能であるコンポーネントは省略した。このとき、式 (3.46) で書かれる電場は、Sideband の生成消滅演算子を用いて次のように書き換えられる：

$$E_{\text{in}}^{(+)} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Ac}} e^{-i\omega_0 t} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} (a_+ e^{-i\Omega t} + a_- e^{i\Omega t}) . \quad (3.50)$$

上式の導出において、根号内においては

$$\sqrt{\omega_0 \pm \Omega} \sim \omega_0$$

が成り立つと近似した。実際、 ω_0 と Ω の比は 10^{-13} 程度である。(3.50) より、dark port からの入射真空場を Sideband の生成消滅演算子で表すことができたが、Squeezing による信号増幅の振る舞いをみるためには、two-photon formalism を用いるのが便利である。two-photon formalism とは、(3.50) のような形で表される真空場を振幅 quadrature と位相 quadrature に分解し、その quadrature における雑音を扱いやすくする手法である。two-photon formalism では、振幅 quadrature の消滅演算子 a_1 と位相 quadrature の消滅演算子 a_2 を次のように定義する：

$$a_1 \equiv \frac{a_+ + a_-^\dagger}{\sqrt{2}} , \quad a_2 \equiv \frac{a_+ - a_-^\dagger}{\sqrt{2}i} . \quad (3.51)$$

非ゼロである交換関係は、次式で与えられる：

$$[a_1, a_2^\dagger] = -[a_2, a_1^\dagger] = i2\pi\delta(\Omega - \Omega') . \quad (3.52)$$

(3.50) に対応する、負の周波数（時計回り）を持つ真空場は $E^{(-)} = E^{(+)\dagger}$ で与えられるので、dark port から入射してくる真空場の合計は、

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} &= E_{\text{in}}^{(+)} + E_{\text{in}}^{(-)} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Ac}} e^{-i\omega_0 t} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} (a_+ e^{-i\Omega t} + a_- e^{i\Omega t}) + \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Ac}} e^{i\omega_0 t} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} (a_+^\dagger e^{i\Omega t} + a_-^\dagger e^{-i\Omega t}) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \left[\cos(\omega_0 t) \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (a_1 e^{-i\Omega t} + a_1^\dagger e^{i\Omega t}) + \sin(\omega_0 t) \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (a_2 e^{-i\Omega t} + a_2^\dagger e^{i\Omega t}) \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

式的具体形より、 a_1 は $\cos(\omega_0 t)$ quadrature の場を記述する演算子であり、 a_2 は $\sin(\omega_0 t)$ quadrature の場を記述する演算子であることがわかる。ここで、 \cos quadrature は振幅 quadrature、 \sin quadrature は位相 quadrature である。

dark port からの出力真空場についても同様の計算を行えば、

$$E_{\text{out}} = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \left[\cos(\omega_0 t) \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (b_1 e^{-i\Omega t} + b_1^\dagger e^{i\Omega t}) + \sin(\omega_0 t) \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (b_2 e^{-i\Omega t} + b_2^\dagger e^{i\Omega t}) \right]. \quad (3.54)$$

以上により、dark port の入射真空場と出力真空場を two-photon formalism で表し、振幅 quadrature と位相 quadrature にわけることができた。次に、Beam Splitter 近傍の真空場を two-photon formalism で記述する。

図 3.8 のように、bright port から入射してくる場を $E(t)$ & e とする。ここで、 $E(t)$ は古典的な電磁場であり、式 (3.54) のような量子化された形式ではなく、前節まで用いていた次のような式で与えられる：

$$E(t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Ac}} E e^{-i\omega_0 t} + \text{h.c.} \quad (3.55)$$

ここで、 E は古典的な電磁場の振幅を表し、その周波数は ω_0 である。また、h.c. はエルミート共役を表し、正の周波数を持つ電磁場と負の周波数を持つ電磁場の混合状態であることを示す。式 (3.54) と同様にして、bright port から Beam Splitter への入射場を求めると、

$$E_{\text{in}} = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \left\{ \cos(\omega_0 t) \left[\sqrt{2}E + \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (e_1 e^{-i\Omega t} + e_1^\dagger e^{i\Omega t}) \right] + \sin(\omega_0 t) \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (e_2 e^{-i\Omega t} + e_2^\dagger e^{i\Omega t}) \right\}. \quad (3.56)$$

ただし、 e_1 , e_2 はそれぞれ Sideband 場 e の振幅 quadrature と位相 quadrature である。このとき、Beam Splitter に入射するレーザーのパワー I_0 は次式で与えられる：

$$I_0 = \frac{\langle E_{\text{in}}^2 \rangle_t}{4\pi} Ac = \hbar\omega_0 E^2. \quad (3.57)$$

ここで、 $\langle X \rangle_t$ は物理量 X の時間平均である。Beam Splitter の振幅反射率と透過率を $1/\sqrt{2}$ とすれば、図 3.8 で定義される他の場の連立方程式は、次のようになる：

$$f^e = \frac{e - c}{\sqrt{2}}, \quad (3.58)$$

$$f^n = \frac{e + c}{\sqrt{2}}, \quad (3.59)$$

$$d = \frac{-g^e + g^n}{\sqrt{2}}. \quad (3.60)$$

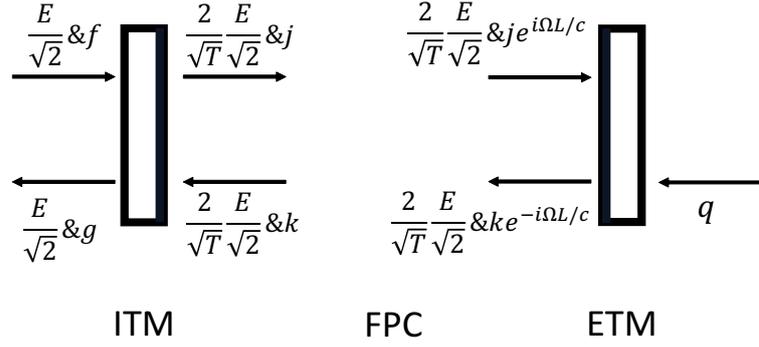


Figure 3.9: Fabry-Perot Cavity 近傍の場の定義。

3.3.2 Fabry-Perot Cavity 近辺の場

図 3.9 のように Fabry-Perot Cavity 近傍の場を設定する。ここで f と g は east 方向を考えているが、north 方向でも同様に求められる。また、Michelson 干渉計の周波数応答関数 H_{MI} と Fabry-Perot Michelson 干渉計の周波数応答関数 H_{FP} の絶対値の比をとると

$$\left| \frac{H_{\text{FP}}}{H_{\text{MI}}} \right| = \frac{4}{t_1^2} \quad (3.61)$$

となる。これは、Fabry-Perot Michelson 干渉計が信号を $4/t_1$ 倍することを表しており、すなわち、共振器内部において電場は $\sqrt{4/t_1^2}$ 倍に増幅される。ただし、 t_1 は ITM の振幅透過率である。Carrier ($E(t)$) は Fabry-Perot Cavity で共振しているとすると、共振器内部の位相遅れについては真空場のみ考えれば良いことがわかる。ITM の振幅反射率を r_1 とすれば、ITM 近傍では、次の連立方程式が成り立つ：

$$\mathbf{j} = t_1 \mathbf{f} + r_1 \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{g} = t_1 \mathbf{k} - r_1 \mathbf{f} \quad . \quad (3.62)$$

ここで、ETM が重力波と輻射圧によって揺らされている系を考える。 $X(t)$ を共振器長の変動とし、その Fourier 変換を X とする：

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega X(\Omega) e^{-i\Omega t} \quad . \quad (3.63)$$

この振動 X が Carrier に変調を加え、Sideband を形成する。式 (3.56) の E が Carrier を表すので、 $X(t)$ で共振器長が変動しているときの、共振器内部における Carrier の振る舞いは次のようになる：

$$\begin{aligned} E_{\text{Ca}} &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \sqrt{\frac{4}{t_1^2}} \sqrt{2} E \cos \left(\omega_0 \left[t - \frac{2X(t)}{c} \right] \right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \sqrt{\frac{4}{t_1^2}} E \left[\cos \omega_0 t \cos \omega_0 \frac{2X(t)}{c} + \sin \omega_0 t \sin \omega_0 \frac{2X(t)}{c} \right] \\ &\sim \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \sqrt{\frac{4}{t_1^2}} E \left[\cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t \cdot \omega_0 \frac{2X(t)}{c} \right] \\ &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \sqrt{\frac{4}{t_1^2}} E \left[\cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t \cdot \frac{2\omega_0}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} X(\Omega) e^{-i\Omega t} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.64)$$

ここで、 $x \ll 1$ のとき、三角関数が

$$\sin x \sim x, \cos x \sim 1 \quad (3.65)$$

と近似できることと、式 (3.63) を用いた。式 (3.65) において、第 1 項は重力波が存在しない場合でも存在する、Carrier の共振の項である。第 2 項は $X(t) \neq 0$ であるときに生じる項であり、sin quadrature、すなわち、位相の quadrature に変化をもたらし、Sideband を形成する。したがって \mathbf{k} は、 \mathbf{j} と Carrier、ETM からの入射真空場の影響を受けるため、次のように書ける：

$$\mathbf{k} = r_2 \mathbf{j} e^{2i\Omega L/c} + \delta \mathbf{k} e^{i\Omega L/c} + t_2 \mathbf{q} e^{i\Omega L/c}, \quad (3.66)$$

$$\delta \mathbf{k} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{4}{t_1^2}} E \frac{2X(t)\omega_0}{c} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

r_2, t_2 は ETM の振幅反射率と透過率であり、今回は簡単のために $r_2 = 1, t_2 = 0, \mathbf{q} = 0$ を仮定する。この場合、式 (3.66) は

$$\mathbf{k} = r_2 \mathbf{j} e^{2i\Omega L/c} + \delta \mathbf{k} e^{i\Omega L/c} \quad (3.68)$$

となる。(3.62) と (3.68) を解くと、

$$\mathbf{j} = \frac{1}{1 - r_1 e^{2i\Omega L/c}} (t_1 \mathbf{f} + r_1 e^{i\Omega L/c} \delta \mathbf{k}) \quad (3.69)$$

となる。 $r_1 \sim 1, \Omega L/c \sim 1$ より、(3.69) の分子において $r_1 e^{i\Omega L/c} \sim 1$ と近似することができる。分母については、 $r_1^2 + t_1^2 = 1$ より

$$r_1 = \sqrt{1 - t_1^2} \sim 1 - \frac{1}{2} t_1^2 \quad \text{when } t_1 \ll 1$$

が成り立ち、また、 $e^{2i\Omega L/c}$ については第 2 項までマクローリン展開すると、

$$1 - r_1 e^{2i\Omega L/c} \sim 1 - \left(1 - \frac{t_1^2}{2}\right) \left(1 + \frac{2i\Omega L}{c}\right) \sim \frac{2L}{c} (\gamma - i\Omega). \quad (3.70)$$

ここで、 $t_1^2 = T$ として、キャビティポール γ を

$$\gamma \equiv \frac{Tc}{4L} \quad (3.71)$$

と定義した。したがって、式 (3.69) は近似的に

$$\mathbf{j} \sim \frac{c}{2L(\gamma - i\Omega)} (t_1 \mathbf{f} + \delta \mathbf{k}) \quad (3.72)$$

と書き換えることができる。ここで、共振器からの出力場である \mathbf{g} について求めると、式 (3.62)(3.66)(3.72) から、

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -r_1 \mathbf{f} + t_1 \mathbf{k} \\ &= -r_1 \mathbf{f} + t_1 (\mathbf{j} e^{2i\Omega L/c} + \delta \mathbf{k} e^{i\Omega L/c}) \\ &= -r_1 \mathbf{f} + t_1 e^{2i\Omega L/c} \frac{1}{1 - r_1 e^{2i\Omega L/c}} (t_1 \mathbf{f} + r_1 e^{i\Omega L/c} \delta \mathbf{k}) + t_1 \delta \mathbf{k} e^{i\Omega L/c} \\ &= \frac{e^{2i\Omega L/c} - r_1}{1 - r_1 e^{2i\Omega L/c}} \mathbf{f} + \frac{t_1 e^{i\Omega L/c}}{1 - r_1 e^{2i\Omega L/c}} \delta \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.73)$$

前述の近似 (3.70) と

$$\beta \equiv \arctan(\Omega/\gamma) \quad (3.74)$$

で定義される β を用いると、式 (3.73) は次のように変形できる：

$$\mathbf{g} = e^{2i\beta} \mathbf{f} + \sqrt{\frac{(c/2L)^2 t_1^2}{\gamma^2 + \Omega^2}} e^{i\beta} \delta \mathbf{k} . \quad (3.75)$$

これにより、Fabry-Perot Cavity からの出力場 \mathbf{g} を入射場 \mathbf{f} と ETM ゆらぎ $\delta \mathbf{k}$ で表すことができた。

3.3.3 鏡の変動

共振器内で循環する電磁場 E_{int} は、式 (3.56) における古典振幅 E を

$$E \rightarrow \frac{2}{T} \frac{E}{\sqrt{2}} \quad (3.76)$$

とし、真空場を $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{j}$ に置き換えることで得られる。ただし、ここで用いた T は強度透過率であり、 $T = t_1^2$ を満たす。 \mathbf{j} が鏡の変動場 $\delta \mathbf{k}$ を含んでいるため、共振器内を循環する電磁場のパワー ($\langle E_{\text{int}}^2 \rangle / 4\pi$) Ac は、古典的な定常要素 W_{circ} と変動要素 δW_{circ} の2つで構成される：

$$W_{\text{circ}} = \frac{1}{2} \frac{4E^2}{T} \hbar \omega_0 = \frac{2}{T} I_0 = \frac{I_0/2}{\gamma L/c} , \quad (3.77)$$

$$\delta W_{\text{circ}} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{\sqrt{I_0 \hbar \omega_0} f_1}{(L/c)(\gamma - i\Omega)} e^{-i\Omega t} + \text{h.c.} \quad (3.78)$$

ここで、 f_1 は真空場 \mathbf{f} の振幅 quadrature である。さて、式 (3.78) で記述される共振器パワーの変動要素は、鏡に対する輻射圧雑音を生み出す。鏡はもともと振り子で釣られているが、これは W_{circ} による輻射圧と復元力でつりあいの位置にある。ここに変動要素 δW_{circ} が加わると、鏡は

$$F_{\text{BA}} = 2\delta W_{\text{circ}}/c \quad (3.79)$$

だけの反作用力を受ける。したがって、east arm の鏡の変位 $X(t)$ についての運動方程式は

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = \frac{L}{2} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{4\delta W_{\text{circ}}}{cm} \quad (3.80)$$

となる。ここで、 $h(t)$ は重力波を表し、 m は鏡の質量を表す。なお、式 (3.80) では各鏡の質量が等しいとして相対質量を用いている。Fourier 変換を用いて周波数空間に移し、この微分方程式を解くと

$$X(\Omega) = \frac{L}{2} h(\Omega) - \frac{4\delta W_{\text{circ}}}{cm\Omega^2} . \quad (3.81)$$

north arm についても同様に差動の変動を求めると、

$$Y(\Omega) = -\frac{L}{2} h(\Omega) - \frac{4\delta W_{\text{circ}}}{cm\Omega^2} . \quad (3.82)$$

3.3.4 電磁場と干渉計の相互作用 \mathcal{K}

最後に、dark port からの出力場 \mathbf{d} を見る。式 (3.60) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \frac{-\mathbf{g}^e + \mathbf{g}^n}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{2i\beta} (\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^e) + \sqrt{\frac{(c/2L)^2 T}{\gamma^2 + \Omega^2}} e^{i\beta} (\delta \mathbf{k}^n - \delta \mathbf{k}^e) \right] \\ &= \mathbf{c} e^{2i\beta} + \sqrt{\frac{(c/2L)^2 T}{2(\gamma^2 + \Omega^2)}} e^{i\beta} \frac{\delta \mathbf{k}^n - \delta \mathbf{k}^e}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

ここで、 $\delta \mathbf{k}^n - \delta \mathbf{k}^e$ は、(3.67) と (3.81)(3.82) より、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{k}^n - \delta \mathbf{k}^e &= \sqrt{\frac{4}{T}} \frac{2\omega_0 E}{c} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \right) \\ &= \sqrt{\frac{4}{T}} \frac{2\omega_0 E}{c} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Lh \end{pmatrix} - \frac{4\sqrt{\hbar\omega_0 I_0}}{m\Omega^2 L(\gamma - i\Omega)} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^n - f_1^e \end{pmatrix} \right) \\ &= \sqrt{\frac{4}{T}} \frac{2\omega_0 E}{c} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Lh \end{pmatrix} - \frac{4\sqrt{2\hbar\omega_0 I_0}}{m\Omega^2 L(\gamma - i\Omega)} \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

ここで、

$$\mathbf{c} = \frac{-\mathbf{f}^e + \mathbf{f}^n}{\sqrt{2}} \quad (3.85)$$

を用いた。以上より、dark port からの入射場と出力場の関係は、次のように書かれる：

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\mathcal{K}} \end{pmatrix} \frac{h}{h_{\text{SQL}}} e^{i\beta}. \quad (3.86)$$

ここで、

$$I_{\text{SQL}} \equiv \frac{mL^2\gamma^4}{4\omega_0}, \quad (3.87)$$

$$h_{\text{SQL}} \equiv \sqrt{\frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2}}, \quad (3.88)$$

$$\mathcal{K} \equiv \frac{(I_0/I_{\text{SQL}})2\gamma^4}{\Omega^2(\gamma^2 + \Omega^2)} = \frac{8I_0\omega_0}{mL^2\Omega^2(\gamma^2 + \Omega^2)} \quad (3.89)$$

と定義した。ここで、 \mathcal{K} はカップリング定数と呼ばれる値であり、光と干渉計がどの程度 Optomechanical な相互作用をしているのかを見る指標となる。なお、式 (3.86) の導出では、

$$\gamma - i\Omega \sim \sqrt{\gamma^2 + \Omega^2} \quad (3.90)$$

を用いた。

式 (3.86) の第 2 項は ETM の揺らぎによる重力波の混入を表しており、位相 quadrature にのみ非零の成分を持つ。これより重力波の情報は、ETM から位相 quadrature に混入してくることがわかる。

以上より、dark port における出力場 \mathbf{d} について、dark port からの入射場 \mathbf{c} と重力波信号 h の線形和で表すことができた。式 (3.86) から読み取れることは、出力場の各 quadrature は、

もはや入射場の quadrature で記述されないということである。出力場 \mathbf{d} の振幅 quadrature d_1 は入射場 \mathbf{c} の振幅 quadrature c_1 で記述される。しかし、位相 quadrature に関してはそうではない。式 (3.86) の右辺第 1 項を見れば、 d_2 として \mathbf{c} の振幅 quadrature と位相 quadrature が混合していることが読み取れる。このような、Fabry-Perot Cavity の応答において、入射場の振幅 quadrature と位相 quadrature が混合される現象を、Ponderomotive squeezing という。これにより、真空場の量子状態がスクイーズされ、すなわち振幅 quadrature の雑音と位相 quadrature の雑音がスクイーズされた状態になり、重力波検出器の信号雑音比 (SN 比) を改善することが期待されている。

3.3.5 量子雑音

Fabry-Perot Cavity の Input output relation は次式で与えられるのであった：

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\mathcal{K}} \end{pmatrix} \frac{h}{h_{\text{SQL}}} e^{i\beta}. \quad (3.91)$$

ここで、第 2 項が重力波の入射による信号を表すのに対し、第 1 項は dark port から出力される雑音を表す。すなわち、dark port から入射した真空場 \mathbf{c} が、雑音として信号に紛れ込んでくるのである。慣習的に d_2 を観測量であるとする。(3.91) について、 d_2 に注目すれば、

$$d_2 = \Delta d_2 + \sqrt{2\mathcal{K}} \frac{h}{h_{\text{SQL}}} e^{i\beta}, \quad \Delta d_2 \equiv (c_2 - \mathcal{K}c_1) e^{2i\beta}. \quad (3.92)$$

したがって、出力場 \mathbf{d} から重力波信号の Fourier 変換 $h = h(\Omega)$ を求めようとする際、出現する雑音成分は

$$h_n(\Omega) = \frac{h_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}} \Delta d_2 e^{-i\beta} \quad (3.93)$$

と書かれる。この雑音演算子は Fourier 変換のランダム過程における雑音であり、対応したスペクトル密度 $S_h(f)$ は次式で与えられる：

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_h(f) = \langle \text{in} | h_n(\Omega) h_n^\dagger(\Omega') | \text{in} \rangle_{\text{sym}}. \quad (3.94)$$

ここで $f = \Omega/2\pi$ であり、 $|\text{in}\rangle$ は入射場 \mathbf{c} の量子状態である。添字 sym は演算子の対称化を表している： $h_n(\Omega) h_n^\dagger(\Omega')$ を $\frac{1}{2}(h_n(\Omega) h_n^\dagger(\Omega') + h_n^\dagger(\Omega') h_n(\Omega))$ で置き換えれば良い。式 (3.93) を (3.94) に代入することを考えると、(3.93) の位相遅れ $e^{-i\beta}$ は (3.94) において打ち消し合うことがわかる。すなわち、式 (3.93) における位相遅れは、出力雑音に影響を及ぼさない。したがって、式 (3.93) は次のように置き換えても差し支えない：

$$h_n(\Omega) = \frac{h_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}} \Delta d_2. \quad (3.95)$$

従来の干渉計では、dark port における入射場 \mathbf{c} の状態は真空場であった：

$$|\text{in}\rangle = |0_c\rangle. \quad (3.96)$$

この真空場は、場の生成消滅演算子 c_+ , c_- について、次の関係を満たす：

$$c_+ |0_c\rangle = c_- |0_c\rangle = 0. \quad (3.97)$$

(3.97) と two-photon formalism の関係式 (3.51)(3.52) より、

$$\langle 0_c | c_j c_{k'}^\dagger | 0_c \rangle_{\text{sym}} = \frac{1}{2} 2\pi \delta(\Omega - \Omega') \delta_{jk} \quad \text{for } j, k = 1, 2 \quad (3.98)$$

の関係が成り立つ。式 (3.94) と (3.98) の式の形を比較すれば、入射場 \mathbf{c} のノイズスペクトル $S_c(f)$ は次式で定義されることがわかる：

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi \delta(\Omega - \Omega') S_{c_j c_{k'}}(f) = \langle \text{in} | c_j c_{k'} | \text{in} \rangle_{\text{sym}} . \quad (3.99)$$

$j = k$ のとき、 $S_{c_j c_j}(f) \equiv S_{c_j}$ は quadrature c_j のパワー（ノイズ）スペクトルであり、 $j \neq k$ のとき $S_{c_j c_k}(f)$ はクロス（ノイズ）スペクトルを表す。クロススペクトルとは、2つの quadrature c_j, c_k に含まれている同じ周波数成分 Ω の要素がどれだけの相関を持っているのかを表す指標である。今回の入射場 \mathbf{c} については、パワースペクトルとクロススペクトルは次のようになる：

$$S_{c_1}(f) = S_{c_2}(f) = 1 \quad , \quad S_{c_1 c_2}(f) = 0 . \quad (3.100)$$

すなわち、入射した真空場 \mathbf{c} はコヒーレント状態である。式 (3.92)(3.95)(3.98) を合わせれば、干渉計のノイズスペクトル密度は、

$$S_h = \frac{h_{\text{SQL}}^2}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{K}} + \mathcal{K} \right) \geq h_{\text{SQL}}^2 = \frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2} . \quad (3.101)$$

このスペクトル密度は全ての周波数 Ω で制限され、この制限値（最右辺）は標準量子限界（Standard Quantum Limit : SQL）である。

3.4 Singnal Recycling Cavity と光バネ

3.4.1 Singnal Recycling Cavity における量子化

本節では、節 3.2.2 で計算した古典的な Singnal Recycling Cavity の電磁場について量子化することを考える。この量子化によって、Detune した Singnal Recycling Cavity で観測される「光バネ」の性質を見ることが出来る。まず、Signal Recycling Fabry Perot Cavity における場を図 3.10 のように定義する。SRM の振幅反射率と振幅透過率を r_s , t_s とする。Singnal Recycling Cavity への入射場 \mathbf{a} と出力場 \mathbf{b} により、SRM と Beam Splitter 間の場の方程式は次のようになる：

$$\mathbf{c} = t_s R(\phi) \mathbf{a} + r_s R^2(\phi) \mathbf{d} \quad , \quad \mathbf{b} = -r_s \mathbf{a} + t_s R(\phi) \mathbf{d} . \quad (3.102)$$

ここで、 $R(\phi)$ は Singnal Recycling Cavity での位相遅れを表す行列であり、

$$R(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

で定義する。上式で ϕ は Carrier の Singnal Recycling Cavity に対する Detune を表している。ここで、 $\phi = 0$ 、すなわち Detune しない場合には、 $R(\phi)$ は対角成分しか持たない。これにより、式 (3.102) において位相 quadrature と振幅 quadrature は混ざらない。しかし、Detune した $\phi \neq 0$ である場合には、位相 quadrature と振幅 quadrature が混合する。この Detune の結果により、共振器内で Optomechanical Coupling 効果が見られる。さて、図 3.10 におい

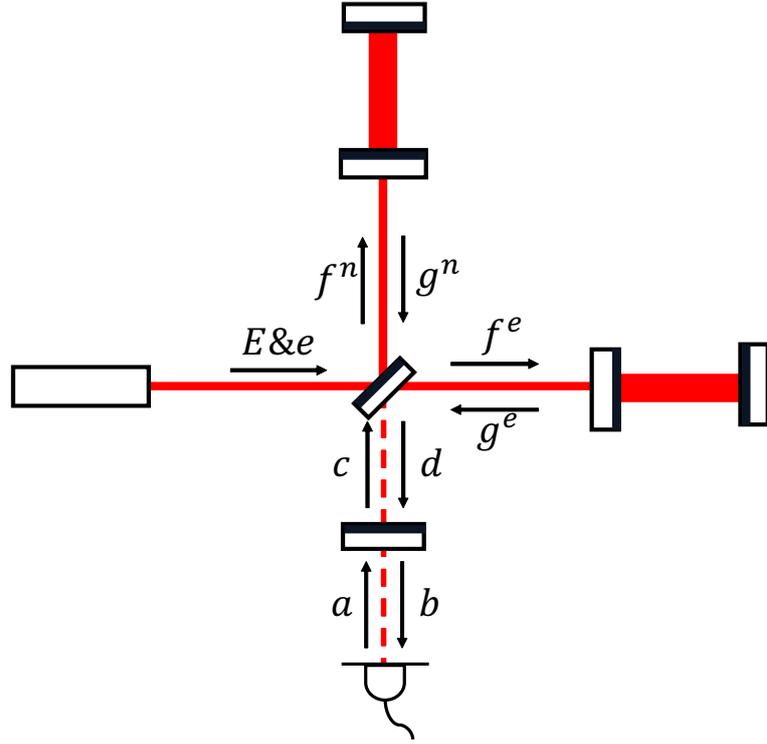


Figure 3.10: SRFPMI と場の定義。

て、Fabry-Perot Cavity の場の応答は前節で既に調べている。式 (3.91)(3.102) を連立して解けば、干渉計に入射した真空場の Input output relation は

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} \left(e^{2i\beta} \mathbf{C} \mathbf{a} + \sqrt{2\mathcal{K}t_s} e^{i\beta} \mathbf{D} \frac{h}{h_{\text{SQL}}} \right). \quad (3.104)$$

ただし、各文字の定義については以下の通りである：

$$M = 1 + r_s^2 e^{4i\beta} - 2r_s e^{2i\beta} \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right), \quad (3.105)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.106)$$

$$C_{11} = C_{22} = (1 + r_s^2) \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2r_s \cos 2\beta, \quad (3.107)$$

$$C_{12} = -t_s^2 (\sin 2\phi + \mathcal{K} \sin^2 \phi), \quad (3.108)$$

$$C_{21} = t_s^2 (\sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi), \quad (3.109)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, \quad (3.110)$$

$$D_1 = -(1 + r_s e^{2i\beta}) \sin \phi, \quad (3.111)$$

$$D_2 = -(-1 + r_s e^{2i\beta}) \cos \phi. \quad (3.112)$$

式 (3.104) について、第1項は Singnal Recycling Cavity に入射した真空場 \mathbf{a} の出力時の状態を表す項であり、すなわち真空場の雑音に対応する。第2項は Fabry-Perot Cavity の ETM から入射した重力波 h を含んでおり、すなわち干渉計の信号に対応する。したがって、重力

波信号が存在しない場合 ($h = 0$) であっても、真空場の量子雑音は常に存在している。第1項が雑音、第2項が信号である関係から、干渉計の感度曲線 S_{hh} はそのSN比をとればよいので、

$$S_{hh} = h_{\text{SQL}} \frac{\sqrt{|C_{11}|^2 + |C_{22}|^2}}{\sqrt{2\mathcal{K}t_s D_2}} \quad (3.113)$$

で与えられる。

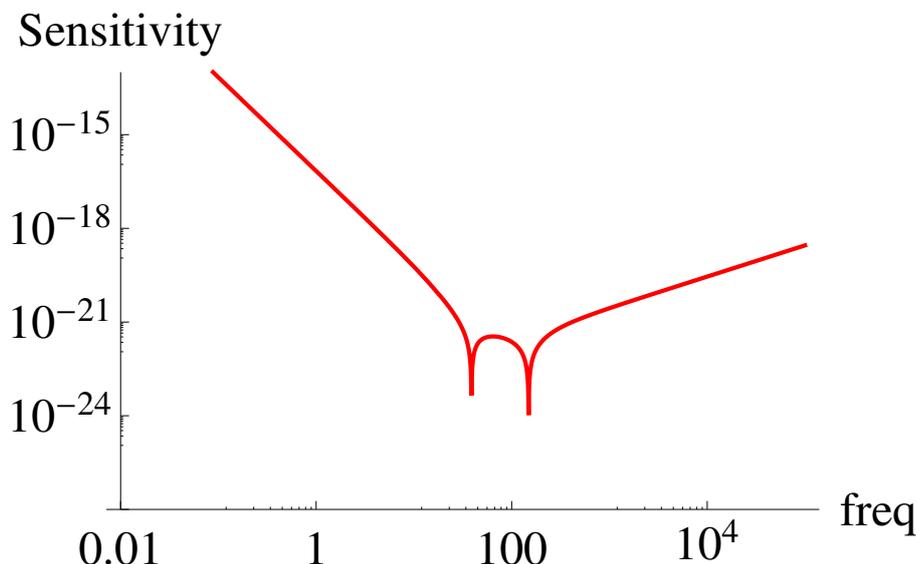


Figure 3.11: (3.113) で与えられる量子雑音感度曲線。縦軸は Sensitivity、横軸は角周波数を表し、Sensitivity は指数が小さくなるほど雑音を低減できていると考える。低周波側ピークでの感度の向上は光バネの効果、高周波側ピークでの感度の向上は Optical Resonance の効果を表す。

3.4.2 光バネと Mizuno-Hypothesis

Detune した Signal Recycling Fabry Perot Cavity において、光と干渉計の相互作用 (Optomechanical Coupling) から生まれる物理現象の 1 つに、光バネ (Optical Spring) がある。共振器内部では必然的に輻射圧が大きくなるが、この輻射圧が鏡に対するバネとして働くことで復元力をもたらし、特定の周波数帯で非常に強い共振を生み出すのである。干渉計がロックされた状態から鏡が外側へ動いた場合、鏡の重力と釣り合いの関係にあった内部の輻射圧が弱まるため、鏡は内側へ戻ろうとする。逆に、ロックの状態から内側へ動いた場合には内部の輻射圧が釣り合いの状態よりも強まり、鏡は外側へ動くように輻射圧に押される。このように、輻射圧があたかもバネの復元力のように働き、鏡をロックの位置に止めようとする現象が光バネである。この光バネ周波数帯の強い共振によって重力波信号は増幅され、干渉計感度の向上が得られる。図 3.11 において、DRSE における量子雑音感度曲線には 2 つのピークがあった。この低周波のピークが光バネの共振による感度の向上である。高周波側のピークは Optical Resonance と呼ばれる共振器自体の共振を表す。

さて、光バネの直感的な解釈については上記の通りであり、鏡と輻射圧は図 3.12 のように運動する。次に、バネの共振周波数について考える。Detune した Signal Recycling Fabry

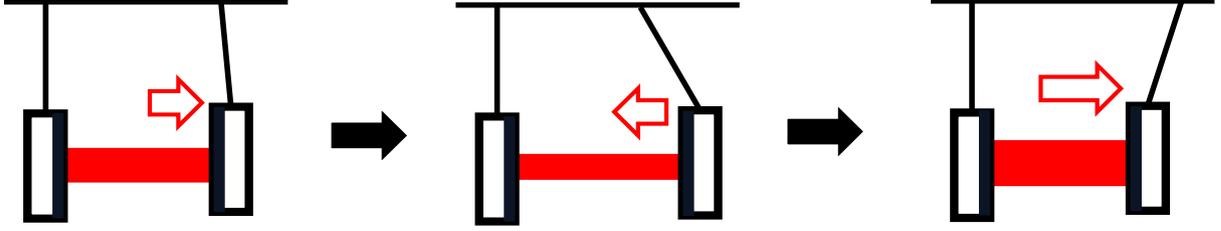


Figure 3.12: 光バネの運動。鏡が輻射圧に押され釣り合いの位置からずれると、輻射圧がバネのようにはたらき、鏡を釣り合い（ロック）の位置に戻そうとする。これにより、光バネの共振周波数でより強い共振が得られる。

Perot Cavity の Input output relation は式 (3.106) の通りであり、重力波信号の伝達関数は

$$H_G = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}D_2}}{Mh_{\text{SQL}}} \quad (3.114)$$

である。[2] で述べられている通り、光バネの共振周波数は (3.114) の分母がゼロになる場合、すなわち、重力波の伝達関数が発散する場合の周波数で与えられる。これにより、我々が解くべき式は $M = 0$ である。 $\beta \ll 1$ とすれば、式 (3.106) の位相部分を 1 と近似できるので、

$$M \sim 1 + r_s^2 - 2r_s \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right). \quad (3.115)$$

ここで、キャビティポールよりも低い帯域 $\Omega \ll \gamma$ について考えるときにはさらに

$$M \sim 1 + r_s^2 - 2r_s \left(\cos 2\phi + \frac{4I_0\omega_0}{mL^2\Omega^2\gamma^2} \sin 2\phi \right) \quad (3.116)$$

と近似できる。したがって、光バネの周波数 Ω_{OS} は

$$\begin{aligned} M = 0 &\Leftrightarrow 1 + r_s^2 - 2r_s \left(\cos 2\phi + \frac{8I_0\omega_0}{mL^2\Omega^2\gamma^2} \sin 2\phi \right) = 0 \quad (3.117) \\ &\Leftrightarrow \Omega_{\text{OS}} = \sqrt{\frac{8I_0\omega_0 \sin 2\phi}{mL^2\gamma^2[(r_s + 1/r_s) - 2 \cos 2\phi]}} \end{aligned}$$

で与えられる。現在、キャビティポールよりも低い帯域について考えたが、高周波帯では $e^{i\beta} \sim 1$ の近似が徐々に悪くなるため、optical resonance の影響も考えなければならない。

最後に、DRSE 干渉計で Detune 位相 ϕ を変化させた場合の量子雑音感度曲線を図 3.13 に示す。これにより、Detune させた干渉計では、その位相を変えることで光バネ共振周波数を変化させることができる。これは式 (3.118) から読み取ることができる。図 3.13 より、感度強度と重力波の検出幅には trade-off の関係があることがわかる。すなわち、Detune 位相を調整して感度をより向上させれば、その高感度の帯域は狭まっている。この trade-off の関係は Mizuno-Hypothesis と呼ばれており、Detune 位相を変化させるだけでは高感度広帯域を実現することが出来ない。また、我々は 10^2 以上の周波数領域に存在する重力波に関心がある。Detune 位相を変化させた場合、光バネによる共振ピークは高周波高感度の方向に、Optical Resonance の共振ピークは低周波高感度の方向に移動することが図 3.13 から読み取れる。したがって、Optical Resonance の共振周波数を固定しつつ、光バネの共振ピークを高周波数側へ移すことが出来れば、より高周波での高感度を実現することができる。

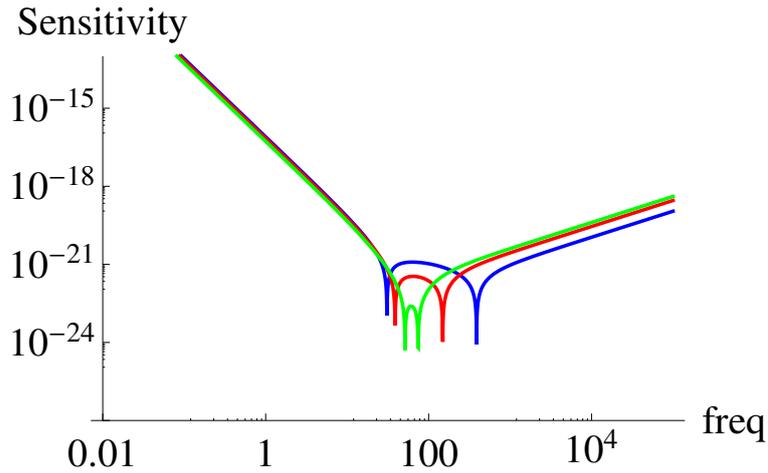


Figure 3.13: Detune ϕ を変化させた DRSE 量子雑音感度曲線。縦軸が Sensitivity、横軸は周波数を表す。青が $\phi = \pi/2 - 0.3$ 、赤が $\phi = \pi/2 - 0.6$ 、緑が $\phi = \pi/2 - 0.9$ を示す。これより、感度強度と検出幅には trade-off の関係がある。

高周波での高感度を実現するためには、図 3.14 のようにレーザーから干渉計への入射パワー I_0 を上昇させるという方法がある。しかし、入射パワーを増加させることは技術的に非常に困難であり、それほど現実的な手段ではない。ところが、Detune された Signal Recycling Cavity に非線形光学結晶を挿入することで、レーザーの入射パワーを実効的に増幅することが可能となる。次章では、この非線形光学効果の確認をまず行い、次にその量子雑音感度曲線を見ることで、あたかも入射パワーを上昇させたかのような振る舞いが見られることを示す。さらに非線形光学結晶の設置により生じる不安定性について軽く触れ、第 5 章での不安定性への議論に繋げる。

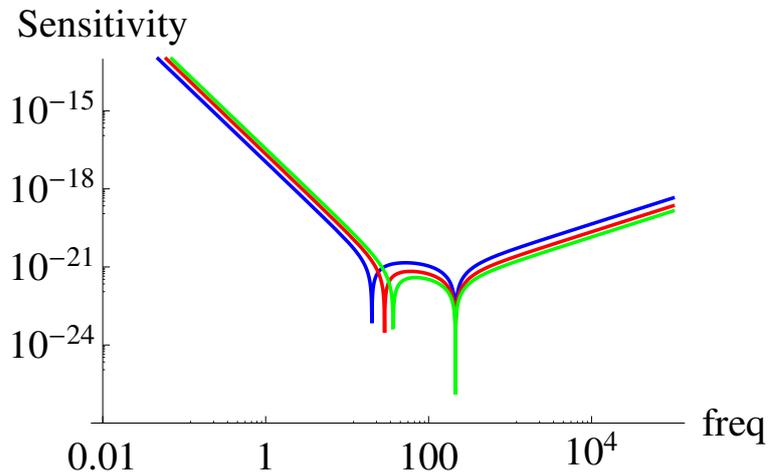


Figure 3.14: Detune $\phi = \pi/2 - 0.5$ を固定し、入射パワー I_0 を変化させた DRSE 量子雑音感度曲線。青が $I_0 = 75\text{W}$ 、赤が $I_0 = 300\text{W}$ 、緑が $I_0 = 750\text{W}$ を示す。Optical Resonance の共振周波数は変化せず、光バネの周波数のみが高周波側へ移動している。

Chapter 4

非線形光学結晶挿入型干渉計

前章では、Fabry-Perot Cavity の Optomechanical dynamics について導出した。しかし、Dual Recycling を採用した干渉計であっても、相互作用が微小である重力波を検出できる可能性は低いままである。低周波側に存在する光バネのピークを高周波側に移すことができれば、より観測可能性の高い周波数帯で高感度を実現できるはずである。しかし、検出幅と感度強度には trade-off の関係があり、光バネの周波数を上げれば Optical Resonance の周波数が低くなってしまう。この trade-off を回避するためには入射レーザーのパワー上昇が必要であるが、実際の干渉計でレーザーのパワーを増加させることは難しい。そこで、干渉計感度の更なる向上のため、我々の研究室では非線形光学結晶挿入型の重力波検出器を考案した。Beam Splitter と Signal Recycling Mirror の間に非線形光学結晶 (Non-Linear Crystal : NLC) を設置することで、実効的な入射パワーの向上を達成でき、また微小な重力波信号を増幅させることができる。本章では、光バネとスクイーミングを含めた NLC 挿入型干渉計のダイナミクスを述べる。

4.1 非線形光学結晶のはたらき

4.1.1 非線形光学における電気感受率

線形光学において、媒質中の電束密度 $\mathbf{D}(t)$ は、電場 $\mathbf{E}(t)$ と分極 $\mathbf{P}(t)$ を用いて

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t) + \mathbf{P}(t) = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E}(t) \quad (4.1)$$

で与えられる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率、 χ_e は電気感受率を表す。この関係式により、媒質中の誘電率は

$$\epsilon \equiv (1 + \chi) \epsilon_0 \quad (4.2)$$

で定義される。また、各ベクトルについて、振幅成分と位相成分に分けて $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} e^{-i\omega t}$ のように書けるとする。式 (4.1) の変形において、誘電分極 $\mathbf{P}(t)$ は電場 $\mathbf{E}(t)$ に比例するという関係を用いた：

$$\mathbf{P}(t) = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}(t) . \quad (4.3)$$

しかし、電磁波の電界強度 $|\mathbf{E}(t)|^2$ が大きくなるにつれ、誘電分極 $\mathbf{P}(t)$ は

$$\mathbf{P}(t) = \chi(\mathbf{E}(t)) \epsilon_0 \quad (4.4)$$

のような電場依存の式で書けるようになり、もはや式 (4.3) のような比例関係で記述することはできなくなる。ここで、簡単のために電場 $\mathbf{E}(t)$ と誘電分極 $\mathbf{P}(t)$ をスカラー量であると

し、式(4.4)を $E(t)$ について摂動展開し、

$$\begin{aligned} P(t) &= \epsilon_0[\chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \dots] \\ &\equiv P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

のように分極を定義する。式(4.3)と(4.6)を比較すれば、線形光学での電気感受率は(4.6)における $\chi^{(1)}$ に対応していることがわかる。ここで、(4.6)の $\chi^{(2)}$ と $\chi^{(3)}$ はそれぞれ2次の非線形感受率、3次の非線形感受率と呼ばれ、テンソル量として表される。例えば2次の非線形感受率は、分極成分 P_i に対し2つの電場成分 E_j, E_k の積で得られるため、3階のテンソルとして $\chi_{ijk}^{(2)}$ で表される。これらの非線形感受率に対応して、非線形分極は $P^{(2)}(t) = \epsilon_0\chi_{ijk}^{(2)}E(t)^2$ と定義される。

実電荷と実電流が存在しない場合、非線形な媒質中の電磁場の振る舞いは次の波動方程式で表される：

$$\Delta E(t) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E(t)}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2}. \quad (4.6)$$

この式の右辺は媒質中の電子に加わる加速度に対応しており、すなわち、電磁場の放射を示す項である。よって、非線形な媒質における電磁場は非線形分極 $P(t)$ により発生した電磁波と入射電場との非線形相互作用で記述することができる。我々の実験系では2次の非線形感受率を持つ非線形光学結晶を用いているので、次節では具体的な現象・差周波発生について定性的に述べる。

4.1.2 非線形光学過程

異なる周波数 ω_1, ω_2 を持つ2つの電磁場 $E_1(t), E_2(t)$ が、2次の非線形感受率を持つ光学結晶に入射する場合を考える。系に入射する電場 $E(t)$ は

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_1e^{-i\omega_1 t} + E_2e^{-i\omega_2 t} + \text{c.c.} \quad (4.7)$$

で表される。c.c. は複素共役を表す。このとき、結晶中の2次の非線形分極 $P^{(2)}(t)$ は、(5.1)を用いて

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) &= \epsilon_0\chi^{(2)}E^2(t) \\ &= \epsilon_0\chi^{(2)}[E_1^2e^{-2i\omega_1 t} + E_2^2e^{-2i\omega_2 t} \\ &\quad + 2E_1E_2e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + 2E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + \text{c.c.}] + 2(E_1E_1^* + E_2E_2^*) \end{aligned} \quad (4.8)$$

のように計算できる。式(4.9)の各項の位相部分について見れば、分極の誘起によって放出される電磁場の周波数がわかる。例えば $[\cdot]$ 内の第1項は周波数2倍の波 $2\omega_1$ を放出する過程に、第3項は和周波 $\omega_1 + \omega_2$ を放出する過程（和周波発生）に対応している。第4項は差周波発生と呼ばれる過程に対応しており、入射した周波数の差 $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ の周波数を放出する ($\omega_1 > \omega_2$)。図4.1からも読み取れるように、差周波発生過程では周波数 ω_1 の光子が消滅し、 ω_2 と ω_3 の周波数を持つ光子が生成される。すなわち、結晶に入射した2つの電磁場の内、周波数の低い $E_2(t)$ が増幅されている。差周波発生におけるこのような増幅過程は光パラメトリック過程（Optical Parametric Amplification : OPA）と呼ばれる。

図4.1(b)のエネルギー準位の図について説明する。まず基底状態 $|1\rangle$ にあった結晶中の原子が ω_1 の光子を吸収し、仮想励起状態 $|3\rangle$ に励起される。励起された原子は周波数 ω_2 を持つもう一つの入射波に刺激（誘導）され、 ω_2, ω_3 の光子を放出し、基底状態へ戻る（誘導放出過程）。また、この過程は2つ目の入射波 $E_2(t)$ が存在していない場合でも起こり得る。

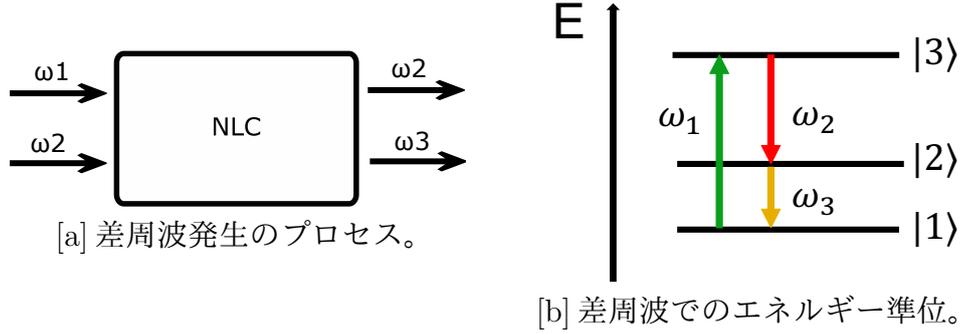


Figure 4.1: 非線形光学結晶で生じる差周波のプロセス。

すなわち、励起状態 $|3\rangle$ から自然に ω_2 , ω_3 の光子を放出して基底状態に戻るのである。この過程は自然放出と呼ばれるが、誘導放出に比べ、放出される電磁場の強度は弱くなる。

このような差周波発生に用いられる非線形光学結晶が Fabry-Perot Cavity のような共振器に設置された場合、誘導放出過程で放出された ω_2 , ω_3 の波は、共振器長を合わせることで非常に大きな強度を持つ。このような、共振器と非線形光学結晶を用いた光増幅器のことを光パラメトリック発振器 (Optical Parametric Oscillator : OPO) と呼ぶ。入射波と出力波の名称については、 ω_1 の光をポンプ光、取得したい周波数 ω_2 (ω_3) を持つ出力光をシグナル光、必要でない周波数 ω_3 (ω_2) を持つもう一方の出力光をアイドラー光と呼ぶ。シグナル光とアイドラー光は、名称こそ区別しているものの、物理的には等価な関係である。我々が実験で扱う非線形光学結晶も光パラメトリック発振器に分類される。

4.1.3 NLC の Input-output relation

前節では、非線形光学結晶における信号増幅の仕組みと基礎知識について述べた。本節では、図 4.2 のような、NLC が挿入されている系の Input-output relation を求める。ここで、NLC では入射電磁場と結晶との相互作用による 2 次の非線形感受率 $\chi^{(2)}$ により、光パラメトリック増幅 (OPA) が生じる。結晶での信号増幅応答はスクイーミング演算子 $S(r, \lambda)$ により表される。ただし、 r はスクイーミングファクター、 λ はスクイーミング角度と呼ばれる。ここで、簡単のために $\lambda = 0$ としている。スクイーミングは真空場の量子揺らぎ、すなわち雑音を減らす際に扱われる。スクイーズされた真空場の雑音は、片方の quadrature の雑音が増加し、もう片方の quadrature の雑音が減少する。これにより、測定する quadrature における量子揺らぎを減らすことが可能となり、結果 SN 比の改善に繋がるのである。

スクイーミング演算子 $S(r, \lambda = 0) \equiv S(r)$ は

$$S(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

と書くことができる。ここで、 e^r を改めて r と定義した。理想的な非線形光学結晶のモデルでは信号増幅応答が (4.9) で与えられる。すなわち、非線形光学結晶へポンプ光 (緑の光) とシグナル光 (重力波信号を持つ光) が入射した際の、光と結晶の相互作用が、スクイーミングの行列で記述されるということである。非線形光学結晶に入射する真空場を \mathbf{x} 、出力真空場を \mathbf{y} とすると

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ x_2/r \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

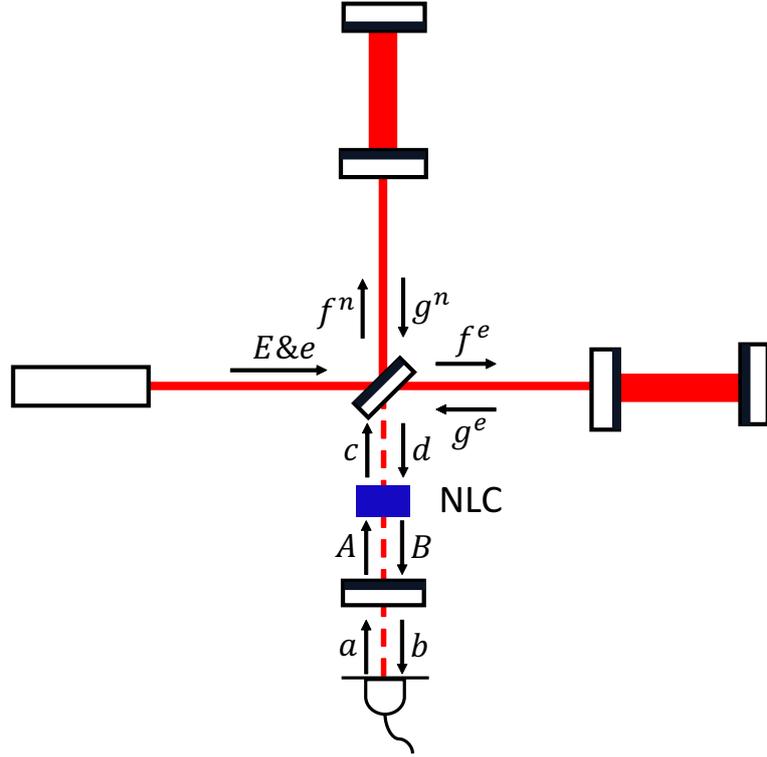


Figure 4.2: SRFPMI に NLC を設置した場合の場の定義。

のように書ける。スクージングによって量子揺らぎによる雑音を減少させたい場合、 $r > 1$ とする。このとき、出力される真空場は振幅 quadrature の量子揺らぎが増幅され、位相 quadrature の量子揺らぎが減少していると見ることができる。通常、我々が観測するのは位相 quadrature であるので、位相 quadrature の量子的な揺らぎを抑えるために $r > 1$ とする。しかし、今回の我々の実験系では位相方向の信号を増幅することが目的となる。信号増幅器として (4.10) を見る場合、 $r > 1$ のとき、振幅 quadrature の信号は増幅され、位相 quadrature の信号は減少すると見る。よって、 $r < 1$ として考える。

図 4.2 のように場を定義すれば、場の連立方程式は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -r_s \mathbf{a} + t_s \mathbf{B}, & \mathbf{A} &= r_s \mathbf{B} + t_s \mathbf{a}, \\ \mathbf{B} &= R(\phi) S(r) \mathbf{d}, & \mathbf{c} &= R(\phi) \mathbf{A}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{d} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\mathcal{K}} \end{pmatrix} \frac{h}{h_{\text{SQL}}} e^{i\beta}.$$

これを解けば、干渉計への入力真空場 \mathbf{a} と出力真空場 \mathbf{b} の Input output relation は、SRC のときと同様に

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} \left(e^{2i\beta} \mathbf{C} \mathbf{a} + \sqrt{2\mathcal{K}} t_s e^{i\beta} \mathbf{D} \frac{h}{h_{\text{SQL}}} \right). \quad (4.11)$$

ただし各文字の定義は、非線形光学結晶の応答 $S(r)$ によって以下のように修正される：

$$M = r + rr_s^2 e^{4i\beta} - 2r_s e^{2i\beta} \left(\frac{1+r^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right), \quad (4.12)$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$C_{11} = (1+r_s^2) \left(\frac{1+r^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2rr_s \cos 2\beta - \frac{1-r^2}{2} t_s^2, \quad (4.14)$$

$$C_{12} = -t_s^2 \left(\frac{1+r^2}{2} \sin 2\phi + \mathcal{K} \sin^2 \phi \right), \quad (4.15)$$

$$C_{21} = t_s^2 \left(\frac{1+r^2}{2} \sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi \right), \quad (4.16)$$

$$C_{22} = (1+r_s^2) \left(\frac{1+r^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2rr_s \cos 2\beta + \frac{1-r^2}{2} t_s^2, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$D_1 = -(1+rr_s e^{2i\beta}) \sin \phi, \quad (4.19)$$

$$D_2 = -(-1+rr_s e^{2i\beta}) \cos \phi. \quad (4.20)$$

これを用いて、非線形光学結晶を設置した干渉計の量子雑音スペクトルは図 4.3 のようになる。Optical Resonance による共振ピークの周波数は変化させることなく、光バネのピークのみを高周波側に移動させられていることが読み取れる。この振る舞いは入射パワー I_0 を増加させた図 3.14 と同様であり、すなわち、非線形光学結晶を挿入することは入射パワーを実効的に増加させることと同値である。実際に結晶挿入型検出器の光バネ共振周波数を求めると、上式の $M = 0$ について第 3 章と同様に解けばよく、

$$\Omega_{\text{OS}} = \sqrt{\frac{8(I_0/r)\omega_0 \sin 2\phi}{mL^2\gamma^2[(r_s + 1/r_s) - (r + 1/r) \cos 2\phi]}} \quad (4.21)$$

となる。ここで、式 (4.21) を見れば、実効的な入射パワーが I_0 から I_0/r になっていることがわかる。現在、 $r < 1$ なので、これは実効的な入射パワーの向上を示す結果となっている。つまり、非線形光学結晶の信号増幅により共振器内の輻射圧を強め、光バネの周波数を変更していると言える。実際の干渉計では、レーザーのパワーを増加させることに比べ、非線形光学効果によるスキージングのファクターを増加させることのほうが簡単であるため、章の初めで期待した通りの結果となっている。以上により、検出幅と感度強度の trade-off を回避して光バネのピークを高周波側へ移動させることに成功した。

しかし、干渉計内部に非線形光学結晶を設置したことにより、干渉計では様々な問題が生じる。次節では先行研究 [3] で調べられていた 2 つの不安定性と新たなる雑音について述べる。

4.2 非線形光学結晶による問題

4.2.1 Atomic Instability

Atomic Instability とは、非線形光学結晶自体の不安定性である。現在、非線形光学結晶にはポンプ光とシグナル光が入射しており、結晶原子では状態の励起や光子の放出などが発生

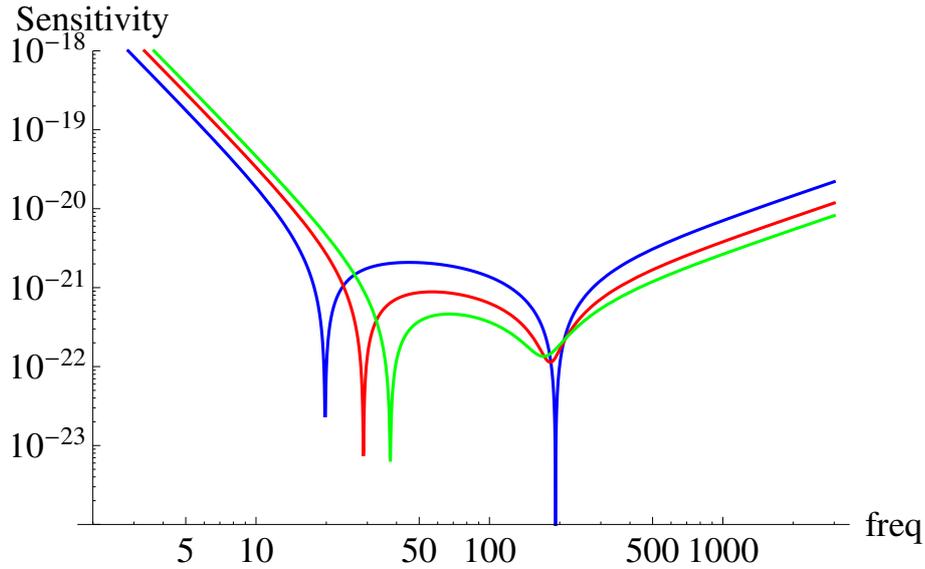


Figure 4.3: 非線形光学結晶挿入型重力波検出器の量子雑音感度曲線。スクイーミングファクターについて、青は $r = 1$ 、赤は $r = 0.9$ 、緑は $r = 0.8$ である。Detune は $\phi = \pi/2 - 0.5$ 、入射パワーは $I_0 = 75\text{W}$ で固定している。

している。図 4.1b において、原子は基底状態 $|1\rangle$ から仮想状態 $|3\rangle$ に励起され、シグナル光によって誘導放射が生じ、状態 $|2\rangle$ を経由して基底状態へと戻る。このプロセスにおいて、基底状態の原子が仮想励起状態 $|3\rangle$ を経てシグナル光と同じ周波数の光子を放出する割合 ($|1\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |2\rangle$) を γ_{opt} 、アイドラー光を放出して $|2\rangle$ から $|1\rangle$ へ緩和される原子の割合を γ_{21} とする (図 4.4)。 $\gamma_{\text{opt}} < \gamma_{21}$ であれば、励起された原子は全て基底状態へと緩和される。この条件下では Atomic Instability は発生しない。しかし、 $\gamma_{\text{opt}} > \gamma_{21}$ である場合、この結晶では反転分布が成り立つことになる。すなわち、反応の過程で、結晶の初期状態である $|1\rangle$ の原子数よりも励起状態 $|2\rangle$ に存在する原子の数が多くなってしまふ。これはレーザー発振の仕組みと全く同等であり、非線形光学結晶自体がシグナル光を放出し続けるレーザー化 (レイジング) してしまふことを表している。

このように、非線形光学結晶において反転分布が実現され、結晶がシグナル光を放出し続けるレーザー化してしまふことを Atomic Instability と呼ぶ。Atomic Instability の発生条件は $\gamma_{\text{opt}} > \gamma_{21}$ が成り立つことである。 γ_{opt} は、ポンプ光により仮想励起状態へ励起される割合 γ_{13} とシグナル光による誘導放射の割合 γ_{32} の積で表される。したがってこの不安定性は、入射するポンプ光のパワーを調整すること、すなわち、 γ_{13} の値を小さくすることによって回避することが可能である。

4.2.2 Optial Instability

Optical Instability は干渉計全体として起きる不安定性である。Optical Instability は、Atomic Instability を回避した $\gamma_{\text{opt}} < \gamma_{21}$ の場合でも起こり得る。その発生条件は、非線形光学結晶における信号増幅の割合が、シグナル光が干渉計全体を伝播するときの損失よりも大きいことであるが、その直感的な理解と不安定性の検証は次章に譲る。

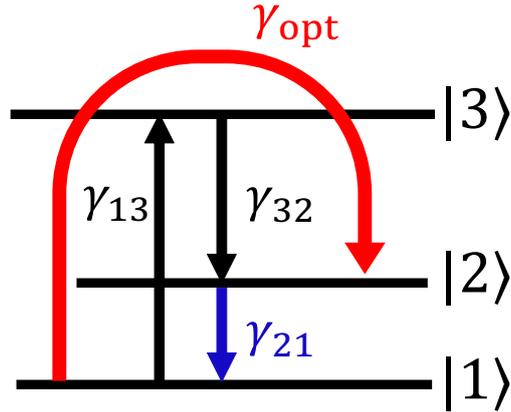


Figure 4.4: γ_{opt} と γ_{21} の定義。

4.2.3 Additional Noise

交換関係我々の実験系において、非線形光学結晶は信号増幅器として振る舞う。信号増幅後の出力場を $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ とすれば、 \mathbf{y} は式 (3.52) に対応する交換関係

$$[y_1(t), y_2^\dagger(t')] = -[y_1^\dagger(t), y_2(t')] = \delta(t - t') \quad (4.22)$$

を満たす必要がある。理想的な非線形光学結晶のモデルでは、結晶への Input Output relation は式 (4.10) のように書かれる。しかし、実際の干渉計では結晶内部での原子の熱衝突や熱雑音、さらにはポンプ光の励起プロセスで生じる $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ への励起による量子揺らぎなど、様々な雑音が混入する。こういった雑音の影響も加味すると、交換関係 (4.22) を満たすために、非線形光学結晶の Input output relation はもはや式 (4.10) のようなシンプルな形ではなくなる。具体的には、(4.10) の右辺に結晶内部の雑音を含んだ演算子を導入しなければ、交換関係 (4.22) を満たすことはできない。先行研究論文では、Atomic Instability と Optical Instability を回避したとしても、この Additional noise によって系の感度が改悪されてしまったという結果も出ている。

先行研究の論文でも述べられている通り、干渉計の感度向上と安定性を考えるためには、上記の3つの不安定性、雑音について議論することが重要である。本論文では、Atomic Instability はポンプ光の調整により制御できているものとし、系全体に不安定化をもたらす要因である Optical Instability の影響を議論する。安定性による系の感度については考えないものとして、Additional noise は理想的にゼロであると仮定する。

Chapter 5

NLC干渉計の不安定性

5.1 Optical Instability

5.1.1 Optical Instability の仕組み

干渉計全体を伝播する間の光子の損失の割合よりも、非線形光学結晶での信号増幅による光子の増加の割合が大きい場合、システム全体でレイジングが起こる。すなわち、システム自体が重力波信号を発振するレーザー化してしまうのである。この現象は Optical Instability と呼ばれ、非線形光学結晶挿入型干渉計を運転する際に不安定性をもたらす。ここで言う安定性とは、制御系において出力の大きさが無限に大きくならないことである。Optical Instability の環境下では、信号の出力がどこまでも大きくなってしまうため、これを不安定性と呼んでいる。

Optical Instability におけるレイジングは、直感的に次のように理解できる。はじめに重力波信号が干渉計に入射したとして、この重力波信号は非線形光学結晶で増幅される。干渉計を伝播する間に、ITM や SRM、Beam Splitter などの光学損失により、信号は次第に弱まっていく。信号増幅がゼロである場合、光学損失の影響により、やがて信号は干渉計内部から完全に消失する。これは、信号増幅による光子の割合が損失による光子の割合よりも小さい場合でも成り立つ。しかし、信号増幅による光子増加の割合がこの損失よりも大きい場合、光子が生成される数が光子の消滅数よりも大きくなるため、重力波信号は非線形光学結晶で生成され続け、干渉計を停止させるまで信号が消滅することはなくなる。これにより、干渉計からは常に重力波信号が発振されることになり、観測に混乱をもたらす。

Optical Instability を考察する場合、干渉計における伝達関数行列を考えるのが便利である。次節では、干渉計の安定性を考える上で必要となるナイキスト線図の概念について述べる。

5.1.2 伝達関数とナイキスト線図

図5.1のようなブロック線図を考える。一巡伝達関数 (open loop transfer function) を $G_o(s)$ 、総合伝達関数 (close loop transfer function) を $G_c(s)$ とする。ここで、 s はラプラス変数であり、周波数 ω を用いて $s = i\omega$ のように表される。系の順方向の伝達関数を $G(s)$ とすれば、一巡伝達関数は

$$G_o = G(s) \tag{5.1}$$

と表される。系への入力を $X(s)$ 、出力を $Y(s)$ とすれば、次の関係式が成り立つ：

$$Y(s) = G(s)X(s) + Y(s)G(s) . \tag{5.2}$$

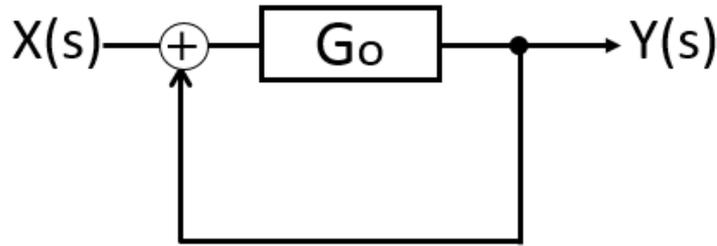


Figure 5.1: 一般的なフィードバック系のブロック線図。

したがって、総合伝達関数は、

$$G_c(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{G(s)}{1 - G_o(s)} \quad (5.3)$$

となる。ここで、入力に対する出力が、十分に時間が立った後で一定値に収束するシステムを安定、発散するシステムを不安定と呼ぶ。

伝達関数において、分子がゼロになる根 s を零点、分母がゼロである根 s を極と呼ぶことにすると、システムの安定条件は伝達関数の極の実部がすべて負であることである。図 5.2 において、左側の安定面に極がすべて存在する場合、その制御系は安定である。言い換えれば、極の実部が 1 つでも正である場合、すなわち、極が 1 つでも図 5.2 の右半面に存在すれば、系は不安定となる。極が調べやすい伝達関数では、直接極を求めて実部の符号を見れば系の安定性を知ることができる。

しかし、フィードバック制御系の総合伝達関数においては、直接極を求めることは困難であることがある。そのような場合に、系の安定性を調べる方法として有用な手法が、ナイキスト線図である。ナイキスト線図では、入力 $X(s)$ から出力 $Y(s)$ までの総合伝達関数 G_c の極を求めることなく、一巡伝達関数 G_o のみで安定性を議論することが可能である。図 5.1 の一巡伝達関数 G_o の分母について、次数が n で、極が p_1, p_2, \dots, p_n であるとする：

$$G_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (5.4)$$

ここで、 $N(s)$ は $G_o(s)$ の分子を、 $D(s)$ は分母を表す関数であるとした。今、 $D(s) - N(s) = (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)$ であると定義して、総合伝達関数 G_c の分母を求めると、

$$1 - G_o(s) = 1 - \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) - N(s)}{D(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (5.5)$$

となる。このことから、総合伝達関数 $G_c(s) = G_o(s)[1 - G_o(s)]^{-1}$ の極は、 $1 - G_o(s) = 0$ の根、すなわち、 z_1, z_2, \dots, z_n となる。一巡伝達関数の不安定極の個数と総合伝達関数の不安定極の個数、すなわち、 p_1, p_2, \dots, p_n と z_1, z_2, \dots, z_n の内、図 5.2 の不安定面に存在する根の数を、それぞれ r, z とする。

ラプラス変数 s を複素平面上の $-i\infty$ から $+i\infty$ まで虚軸にそって移動させ、安定面の半径無限大の円周を時計回りに移動し、 $-i\infty$ に戻る閉曲線 C を考える。ここで、複素数 s が閉曲線 C 上を動くとき、一巡伝達関数 $G_o(s)$ が複素平面上を描く軌跡をナイキスト軌跡と呼ぶ。ナイキスト軌跡が点 $(1, 0)$ を時計回りする回数を n とし、反時計回りに巻いた場合には負の値をとるとする。このとき、 n と不安定極数 r, z の間に次の関係式が成り立つ：

$$z = n + p \quad (5.6)$$

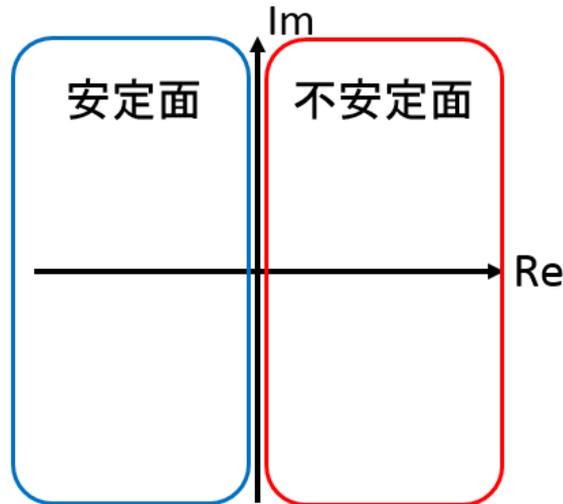


Figure 5.2: 複素平面における、極の安定面と不安定面。

この関係式より、ナイキストの安定判別法は次のように書かれる：

- ①一巡伝達関数 $G_o(s)$ の不安定極の数 r を求める。
- ② $G_o(s)$ のナイキスト軌跡を描く。
- ③ナイキスト軌跡が点 $(1, 0)$ を時計方向に回る数 n を求める。
- ④ $z = n + r$ より、 $z = 0$ となれば総合伝達関数は安定、それ以外の値は不安定と判別する。

たとえば、一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{7(s^2 - s + 2)}{(2s + 3)^2}$$

で与えられる場合、この伝達関数の極は $s = -3/2$ なので、不安定極の数は $r = 0$ である。これに対して、図 5.3 より、点 $(1, 0)$ は時計回りに 2 回巻かれているので、 $n = 2$ である。したがって、総合伝達関数の不安定極の数は $z = n + r = 2$ であり、このフィードバック系は不安定ということになる。

5.1.3 検証方法と伝達関数行列

非線形光学結晶挿入型の Michelson 干渉計について、ナイキスト線図を用いて Optical Instability を考える。式 (3.86) において、重力波信号 h は ETM から位相 quadrature に混入してくることを述べた。したがって、ETM の直後を始点として一巡伝達関数 G_o を求める。重力波信号は、ETM から混入して、Beam Splitter により dark port に送られ、非線形光学結晶を通過し、SRC を伝播する。その後 SRM に反射され再び SRC を伝播し、非線形光学結晶を通過して ETM へ戻る。この一巡の中で、重力波は以下の 4 つの作用を受けることとなる。

まず重力波は、非線形光学結晶により信号増幅作用を受ける。非線形光学結晶の信号増幅を表す行列 $S(r)$ は、第 4 章より

$$S(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

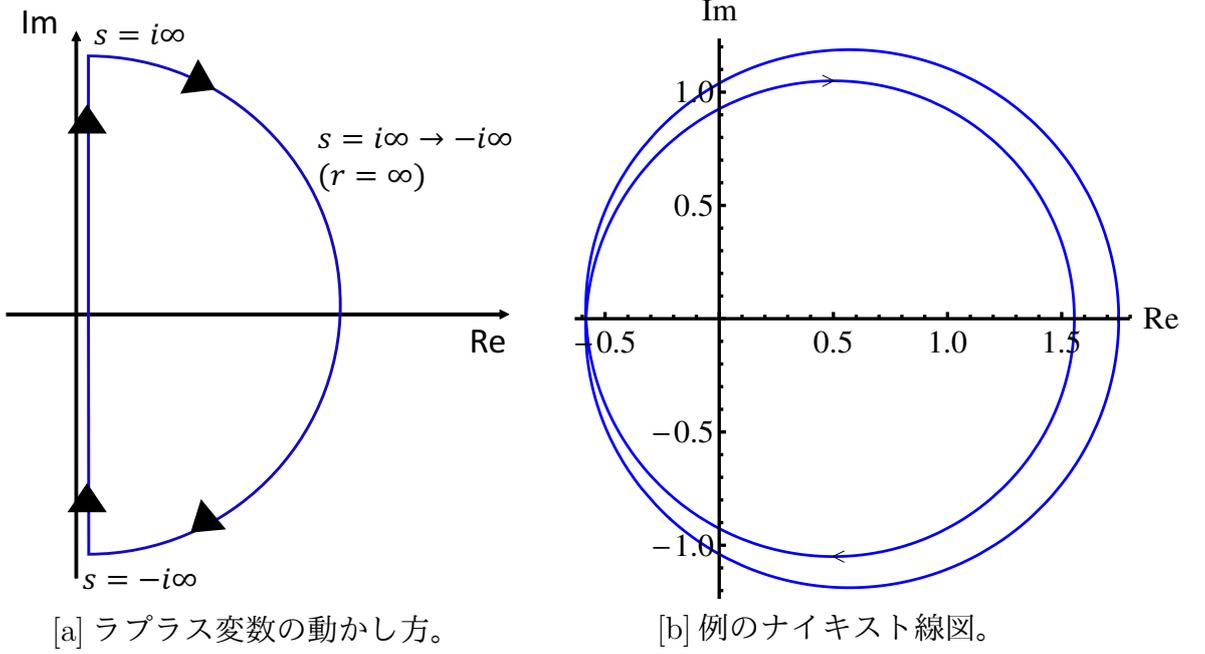


Figure 5.3: 左図のようにラプラス変数（周波数）を動かした時に $L(s)$ が描くベクトル軌跡。この場合、点 $(1, 0)$ を時計回りに 2 回巻いているので、 $n = 2$ であるとする。

で与えられる。 r はスクイーミングファクターであり、信号増幅作用について考えるため、 $r < 1$ とする。次に重力波は SRC を伝播することにより、位相が遅れることとなる。SRC における位相遅れの行列は、式 (3.103) より、

$$R(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

で与えられる。SRC を伝播後、真空場は SRM によって反射されるが、この反射率と透過率は真空場のロスの割合に対し、ダイレクトに影響を与える。この SRM の振幅反射率 r_s が 3 つ目の作用である。その後真空場は、再度 $R(\phi)$ の作用を受け、FPC に入射する。入射した真空場に対する FPC の反応は、式 (3.86) より

$$\mathbb{M}_{\text{opt}} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

で与えられる。ここで \mathcal{K} は光子と干渉計の Coupling 定数、 β は共振器での位相遅れを表し、

$$\mathcal{K} \equiv \frac{(I_0/I_{\text{SQL}})2\gamma^4}{\Omega^2(\gamma^2 + \Omega^2)} = \frac{8I_0\omega_0}{mL^2\Omega^2(\gamma^2 + \Omega^2)} \quad (5.10)$$

$$\beta = \arctan \frac{\Omega}{\gamma} \quad (5.11)$$

であった。以上の 4 つの作用を受け、混入した重力波の場は干渉計を一巡することとなる。ただし、非線形光学結晶を 1 回しか通過しないような光のパスを仮定した。

4 つの作用をブロック図に表したものが 5.4 である。図 5.4 より、混入した重力波の場の一巡伝達関数 G_0 を求めることができる。ここで注意しなければならないのは、重力波の一

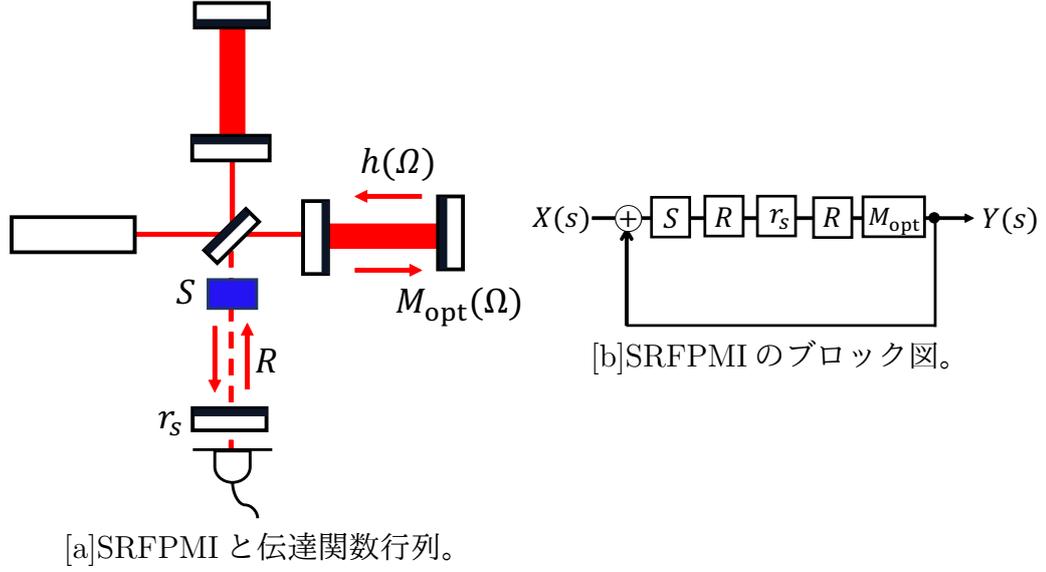


Figure 5.4: ETM から混入した重力波信号が SRFPMI を伝播する様子。Beam Splitter により dark port へ反射された信号はまず非線形光学結晶を通り (S)、SRC を伝播し (R)、SRM で反射され (r_s)、再度 SRC を伝播し (R)、非線形光学結晶を通らずに Fabry-Perot 共振器に入射し、ETM で M_{opt} の作用を受ける。

巡の伝達関数がスカラーではなく行列である点である。行列としての一巡伝達関数を改めて \mathbb{G} と置けば、

$$\mathbb{G} = M_{\text{opt}} R(\phi) r_s R(\phi) S(s) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

となる。ここで、行列の各成分は

$$g_{11} = e^{2i\beta} r [\cos^2 \phi - \sin^2 \phi], \quad (5.13)$$

$$g_{12} = -e^{2i\beta} \frac{2 \cos \phi \sin \phi}{r}, \quad (5.14)$$

$$g_{21} = e^{2i\beta} r \frac{[L^2 m s^2 (s^2 - \gamma^2) \sin 2\phi - 8I_0 \omega_0 \cos 2\phi]}{L^2 m s^2 (s^2 - \gamma^2)}, \quad (5.15)$$

$$g_{22} = e^{2i\beta} \frac{L^2 m s^2 (s^2 - \gamma^2) \cos 2\phi + 8I_0 \omega_0 \sin 2\phi}{L^2 m r s^2 (s^2 - \gamma^2)} \quad (5.16)$$

で表される。ただし、ラプラス変数 $s = i\Omega$ として計算した。また、 g_{22} に含まれる $e^{2i\beta}$ について、 β の定義式 (5.11) より、

$$\begin{aligned} e^{2i\beta} &= (\cos \beta + i \sin \beta)^2 \\ &= \cos^2 \beta + 2i \sin \beta \cos \beta - \sin^2 \beta \\ &= \frac{\gamma^2}{\Omega^2 + \gamma^2} + 2i \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \gamma^2}} \frac{\gamma}{\sqrt{\Omega^2 + \gamma^2}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ &= \frac{(\gamma + i\Omega)^2}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ &= \frac{(\gamma + s)^2}{\gamma^2 - s^2} \end{aligned}$$

と変形できる。これを用いれば、式 (5.16) は

$$\begin{aligned}
 g_{22} &= \frac{(\gamma + s)^2 L^2 m s^2 (s^2 - \gamma^2) \cos 2\phi + 8I_0 \omega_0 \sin 2\phi}{\gamma^2 - s^2 L^2 m r s^2 (s^2 - \gamma^2)} \\
 &= \frac{L^2 m s^2 (s^2 - \gamma^2) \cos 2\phi + 8I_0 \omega_0 \sin 2\phi}{L^2 m r s^2 (\gamma - s)(s - \gamma)}.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

以上により、ETM より混入した重力波の一巡伝達関数行列を得ることができた。

伝達関数が行列表記である場合、すなわち、系への入力と出力が多入力、多出力である場合、前節のようなナイキスト線図を描くことは困難であり、厳密に安定性を議論するためには状態空間モデルを考える必要がある。ここで、式 (3.91) より、ETM から混入してくる重力波は位相 quadrature にしか現れない。形式的に、この重力波の系への入力を

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

と書くことにする。一巡伝達関数行列 G_o はこの \mathbf{h} に作用するので、一巡関数の行列成分は g_{12} と g_{22} しか残らない。さらに、我々が実際に観測する quadrature を位相 quadrature であるとすれば、結局 g_{22} 成分についてのみ考えれば良いとすることができる。したがって、行列表示であった系の一巡伝達関数行列 G_o をスカラー g_{22} に落としこむことができた。この g_{22} を重力波の擬似的な一巡伝達関数 $G_o(s)$ として、系の安定性を調べることにする。

5.2 不安定性検証結果

5.2.1 計算結果

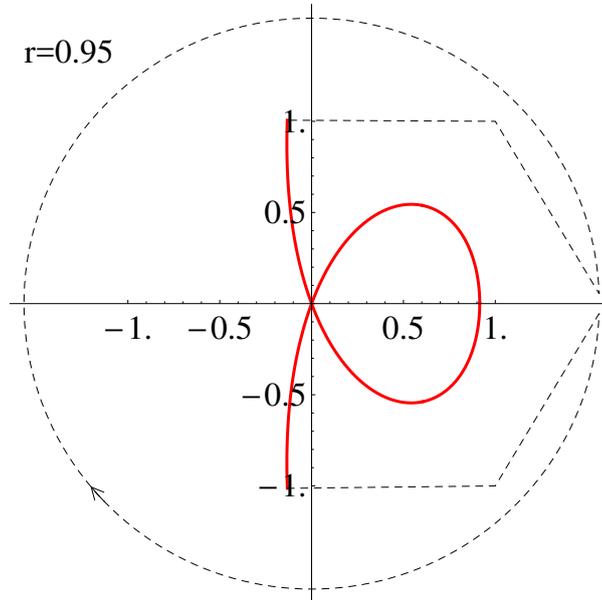


Figure 5.5: $r_s = \sqrt{0.85}$, $r = 0.95$, $\phi = \pi/2 - 3.5^\circ$ の一巡伝達関数 $G_o(s)$ のナイキスト線図。点 $(1, 0)$ が1回も巻かれていないため、系は不安定である。

前節の結果より、Optical Instability による系の安定性を議論するために用いる一巡伝達関数 $G_o(s)$ は、式 (5.18) より、

$$G_o(s) = g_{22} = \frac{L^2 m s^2 (s^2 - \gamma^2) \cos 2\phi + 8 I_0 \omega_0 \sin 2\phi}{L^2 m r s^2 (\gamma - s)(s - \gamma)} \quad (5.19)$$

である。この一巡伝達関数の極は、(5.19) の分母がゼロである方程式を解いて、

$$s = 0, 0, \gamma, \gamma \quad (5.20)$$

の4つである。この内不安定な極、すなわち、実部が正であるものは、 $s = \gamma$ の重解である。したがって、一巡伝達関数の不安定極の数 r は $r = 2$ である。ナイキストの安定判別法により、一巡伝達関数 $G_o(s)$ のナイキスト線図を描いて、点 $(1, 0)$ を反時計回りに2回巻けば、 $n = -2 \Rightarrow z = n + r = 0$ となり、系は安定となる。図 5.5 は、スキューリングファクター以外は KAGRA のパラメータを使用して描いたナイキスト図である。安定性を考える上での重要なパラメータとして、スキューリングファクター $r = 0.95$ 、SRC の Detune $\phi = \pi/2 - 3.5^\circ$ 、SRM の振幅反射率 $r_s = \sqrt{0.85}$ である。図 5.5 より $n = 0$ であり、総合伝達関数の不安定極の数 z は

$$z = n + r = 0 + 2 = 2 \neq 0$$

である。したがって、非線形光学結晶挿入型の重力波検出器は、その信号の出力に対して不安定であることが示された。しかし、このナイキスト線図の与える不安定性が、実際に Optical Instability によるものなのかについては考察が必要である。次節では、スキューリングファクターや SRM 反射率のパラメータを変化させ、これが Optical Instability の直感的な理解に一致するか考察する。結論から言えば、ここで得られた不安定性は Optical Instability のものではないと思われることが次節で示される。

5.2.2 Optical Instability の検証と考察

Optical Instability は、干渉計での光子の損失の割合よりも増幅の割合のほうが大きい場合に生じる。すなわち、光子の増幅の割合に対応するスキューリングファクターと、光子の損失に対応する SRM の反射率 r_s のパラメータ変化によるナイキスト図の振る舞いを見れば、それが Optical Instability によるものかを判定できるはずである。具体的には、スキューリングファクターの値を 1 から小さくしていけば信号増幅が甚だしくなるため、不安定性が増すはずである。逆に、SRM 反射率を小さくしていくと、dark port からの信号の損失が増加するため、系は安定に近づくはずである。

まず図 5.6 に、スキューリングファクター r を次第に小さくするナイキスト図を描いた。 $r = 1$ のときは反時計回りに $(1, 0)$ を巻いていないため総合伝達関数の不安定極が 2 つであるのに対し、 $r = 0.8$ では反時計回りに $(1, 0)$ を巻き、すなわち総合伝達関数の極が

$$z = n + r = -1 + 2 = 1$$

より 1 つに減っている。総合伝達関数の不安定極の数が減少するということは、系がより安定化することを表しており、したがって、「位相 quadrature に存在する重力波信号を増幅すればするほど、系は (いまだ不安定であるが) 安定に近づく」という結果が得られたことになる。これは Optical Instability の直感的な解釈に一致しない結果である。

次に SRM の反射率 r_s を変化させたナイキスト図を図 5.7 に記す。SRM 反射率 $r_s = \sqrt{0.8}$ の場合は $(1, 0)$ を巻いていないのに対し、反射率を上げた $r_s = \sqrt{0.99}$ の際には反時計回りに $(1, 0)$ を巻き、結果不安定極を 1 つ打ち消している。すなわち、SRM から光検出器へ漏れ出

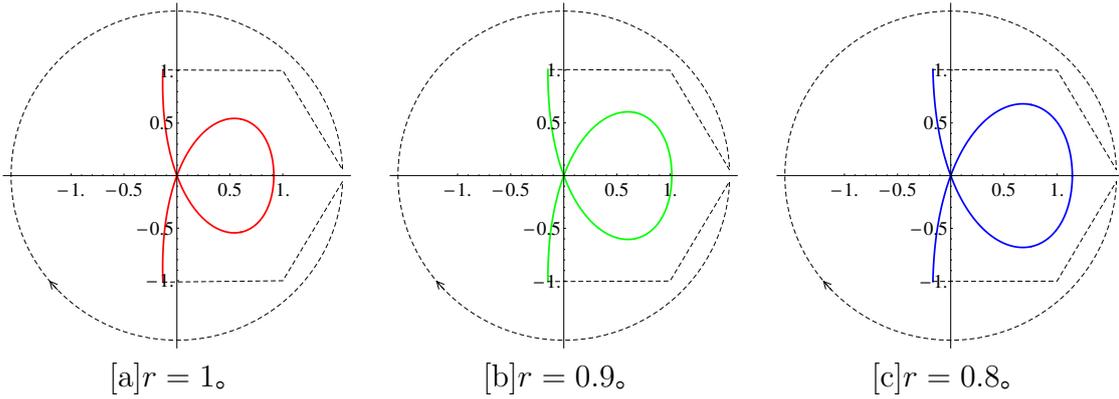


Figure 5.6: Detune ϕ と SRM 反射率の値は図 5.5 と同じである。スキージングファクターの値を小さくしていくと、 $(1, 0)$ を反時計回りに 1 回囲むため、不安定極を 1 つ打ち消していることがわかる。

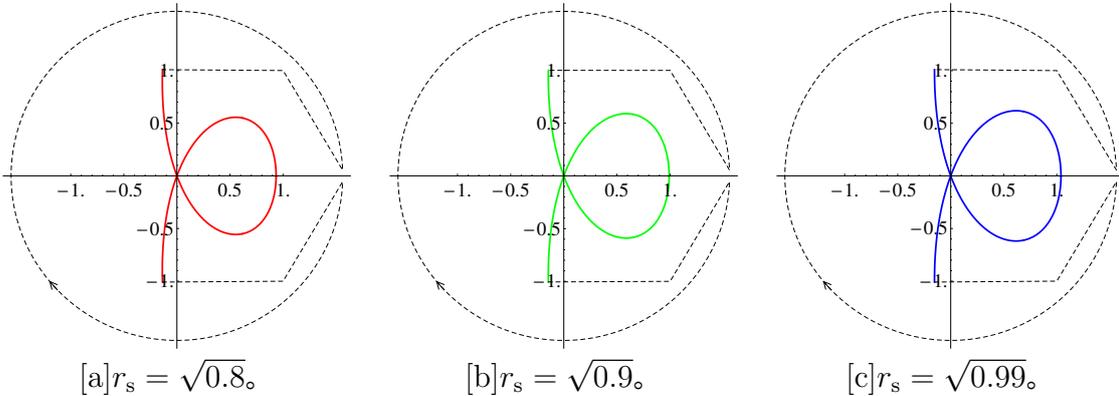


Figure 5.7: Detune ϕ とスキージングファクターの値は図 5.5 と同じである。SRM 反射率の値を大きくしていくと、 $(1, 0)$ を反時計回りに 1 回囲むため、不安定極を 1 つ打ち消していることがわかる。

ていく信号の損失を減少させたにも関わらず、系は安定に近づいている。これも直感的な解釈と反する結果である。

以上の結果について、以下の 2 通りの推測ができる。(1) 今回ナイキスト図を描いたことにより得られた不安定性は、Optical Instability による不安定性でない。(2) Optical Instability の不安定性を考える際には、より厳密な伝達関数行列の解析が必要である。この 2 つである。

(1) について

Detune した SRC を含んだ Michelson 干渉計では、光バネの効果により信号が増幅されることは第 3 章で述べた通りである。ここで、第 3 章で行った光バネ共振周波数の導出を考慮すれば、一巡伝達関数 $G_o(s)$ の極において、 $s = 0$ は光バネの共振周波数に対応している。すなわち、 $s = 0$ では光バネが共振し、その周波数において一巡伝達関数は発散している。このとき、光バネが生成される共振器は不安定となる。すなわち、非常に強い光バネの共振により過剰に増幅された光の輻射圧が、Detune された共振器の鏡に作用してダイナミカルな不安定性をもたらすのである。この不安定性は Optomechanical Instability と呼ばれる [3]。一巡伝達関数行列の 22 成分 g_{22} のボード線図 (ゲイン) は図 5.8 の通りである。この 100Hz

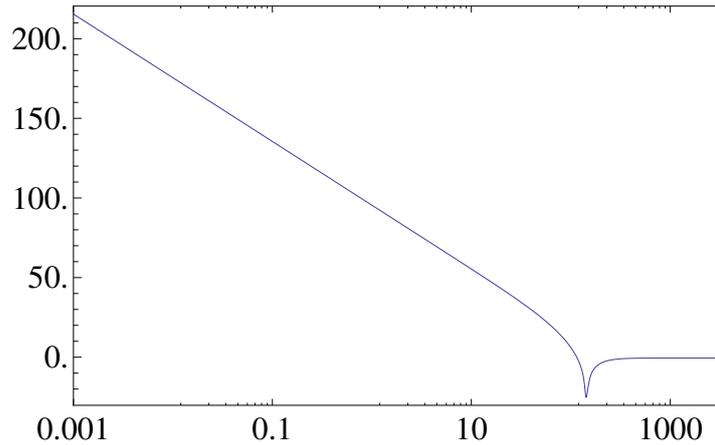


Figure 5.8: $r_s = \sqrt{0.85}$, $r = 1$, $\phi = \pi/2 - 3.5^\circ$ の場合の一巡伝達関数のゲイン。縦軸が dB、横軸が周波数を表す。

付近のピークが光バネの共振周波数である。この共振により信号は増幅されるが、同時に不安定性も生じる。この強い不安定性に Optical Instability が隠されてしまっているため、今回の検証では Optical Instability の影響が見られなかったのではないかと考えられる。実際、振幅方向の揺らぎが小さいほど、そして SRM の反射率が大きいほど光バネは安定するため、図 5.6 と図 5.7 の結果に一致する。

(2) について

今回のナイキスト図を用いた検証では、ETM から混入する重力波を式 (5.18) のように定義し、また位相 quadrature を観測するという仮定をして、伝達関数行列の g_{22} についてのみ扱うという簡易化を行った。これは、ナイキスト図を描く際に伝達関数がスカラーである必要があったからである。しかし、伝達関数行列としてナイキスト線図を描く方法も存在する。この理論は状態空間モデルと呼ばれ、込み入った制御工学の知識を必要とするため、本論文では扱っていない。この状態空間モデルを用いて伝達関数行列のナイキスト線図を描き得られた安定性の結果が、今回の結果と一致するかを確かめることが今後の課題となる。状態空間モデルを用いて得られたナイキストの安定判別法の結果が今回の結果と一致するならば、Optical Instability が光バネによる不安定性に隠されてしまっているという (1) の推測が正しいことになり、これを回避するための計算が必要になる。具体的には、光バネは Detune された Michelson 干渉計で見られる物理現象であるため、その Detune 位相 $\phi = 0$ or $\pi/2$ として光バネの効果が現れない系を考えることで、Optical Instability 単体の不安定性を見ることができる。この Broadband な干渉計において図 5.6 や図 5.7 のようにパラメータを変化させ、Optical Instability の直感的な解釈と一致する結果が得られるかどうかを調査すればよい。

逆に、状態空間モデルを用いて得られたナイキストの安定判別法の結果が今回の結果と一致しない、すなわち、Optical Instability の直感的解釈と一致する結果が得られたならば、伝達関数行列をスカラーに落としこむという今回の簡易化が誤りであったことが考えられる。簡易化が誤りであった場合、何故この方法が誤りであったのかについても考える必要がある。今回の簡易化では、重力波が位相 quadrature に混入してくるということ、出力で観測するのが位相 quadrature であるということから、伝達関数行列で 22 成分のみを見ればよいという簡易化を行った。しかし、出力の振幅 quadrature が発散している場合にもこの Instability は発生していると考えられるべきであり、したがって出力の振幅 quadrature についても考える必要があると考えられる。一巡伝達関数の g_{12} と g_{22} についてスカラーのナイキストの安定判

別法を行い、状態空間モデルを用いた結果と一致すれば、これは非常に価値のある理論を確立したことになる。伝達関数行列それ自身ではなく、伝達関数行列の特定成分のみを抜き出して安定性を議論できるという理論の確立は、今後系の安定性について検証することを大いに簡易化するからである。 g_{12} と g_{22} を用いた結果が状態空間モデルと一致しなかった場合には、伝達関数行列をスカラーに落としこむ方法は完全に誤りであり、状態空間モデルを用いた正式な手続きが必要となることが示される。

Chapter 6

結論と今後の研究

結果と今後の課題

結果

Signal Recycling Cavity に非線形光学結晶を設置することによって、信号増幅の要となる光バネの共振周波数を高周波帯に移動させることができる。しかし、この非線形光学結晶挿入型の重力波検出器を運用するためには、Atomic Instability と Optical Instability による不安定性を回避しなければならないことが示されていた [3]。Atomic Instability はポンプ光の調整により制御できるものとして、Optical Instability による不安定性を、伝達関数を用いたナイキストの安定判別法により調べた。我々の実験系では伝達関数は行列表記であり、これを回避する方法として、重力波信号は位相 quadrature からしか混入してこない点、我々が観測するのは位相 quadrature である点から、行列の 22 成分のみを見れば良いという簡易化を行った。

結果として、非線形光学結晶挿入型の重力波検出器は不安定であるということが示された。しかし、この不安定性は Optical Instability ではなく、光バネの不安定性ではないかという考察がなされた。光学系の損失の割合が大きいほど、そして信号増幅の割合が小さいほど Optical Instability は回避しやすくなるはずであるにも関わらず、それと真逆の振る舞いが見られたからである。そしてこの振る舞いは、光バネの不安定性の振る舞いに一致していた。このことから、Optical Instability の影響は、光バネの不安定性の影響に隠されてしまう程度に小さい、という推測もできるが、その定量的な議論は今後の課題である。

また、今回用いた行列の 22 成分のみを扱うという簡易化も、本来ならば伝達関数行列としてのナイキスト安定判別を行わなければならなかった。しかし、これを行うためには状態空間モデルとして伝達関数を扱う必要がある。状態空間モデルを用いたナイキストの安定判別法と、今回の簡易化によるナイキスト安定判別法が同じ結果を与えるのかもまだ未知であり、これも今後検証していきたい箇所である。

今後の課題

今後の課題としては、まず状態空間モデルを用いて一巡伝達関数の安定性について厳密に議論する。その結果によって今回の簡易化が正当なものであるのかを判定する。簡易化が正しい場合には、光バネの効果を取り除いた Broadband な干渉計において Optical Instability 単体の議論を行い、直感的な解釈に一致する結果が得られるかどうかを確認する。その後、Optical Instability と Optomechanical Instability の影響の大きさを比較し、実際に Optical Instability が隠されてしまっていたのかどうかを確認する。

簡易化が誤りであった場合、すなわち状態空間モデルを用いて得られたナイキストの安定判別法の結果が、Optical Instability の直感的解釈と一致する結果が得られた場合には、何故この方法が誤りであったのかについて考察する。出力の振幅 quadrature が発散している場合にもこの Instability は発生していると考え、出力の振幅 quadrature についても計算を行う。一巡伝達関数の g_{12} と g_{22} についてスカラーのナイキストの安定判別法を行い、状態空間モデルを用いた結果と一致すれば、伝達関数行列をスカラーに落としこむことができるという非常に価値のある理論を確立できたことになる。

この他に、干渉計の Improvement factor を計算することも今後の課題である。Improvement factor とは、従来の干渉計感度と非線形光学結晶挿入型の干渉計の感度の比であり、非線形光学結晶を設置したことによってどの程度感度が向上したのを見る指標である。Additional noise が存在しているとし、Atomic Instability と Optical Instability を回避した上での Improvement factor を計算し、干渉計感度が改善されているかどうかを調べる。我々の非線形光学結晶挿入型重力波検出器とは干渉計の構成が異なるが、先行研究 [3] では、Additional noise まで考慮した場合、Instability を回避した安定領域で感度の改善は見込めないという結果が得られている。結晶挿入型の重力波検出器でも同じ Improvement factor の結果が得られた場合には、系を安定化させるフィードバック機構を考案する必要がある。すなわち、干渉計感度が向上しているとき、系は Instability が回避されていない不安定領域にあるため、この不安定性を打ち消すようなフィードバックを考えなければならない。系を安定化させるフィードバック機構を考案できれば、干渉計感度は大きく改善され、重力波検出の可能性はより高まることが期待される。

以上が今後の課題である。

謝辞

本学士論文を書くにあたって、様々な方にお世話になりました。本論文が完成したのは、宗宮健太郎先生のおかげです。まだまだ知識が未熟である私に宗宮先生は様々なことをご教授くださいました。また、私が干渉計の理論の勉強がしたいと話した際に、まさに関心のある題材を用意してくださり、その御蔭で学士論文の内容を決めることができました。本当にありがとうございました。

また、研究室の皆様にも大変お世話になりました。博士課程の須佐友紀さんと修士課程の片岡優さんは、自分の専門ではない分野についての議論にも付き合ってくださいました。M2の矢野和城さんとM1の熱田将さんには、研究がうまくいかず落ち込んでいるときに励ましていただきました。同期の粕谷順子さんは研究室の空気を常に明るくしてくれました。

本論文は、これ以外にも多くの方に支えられて完成しました。ここに深くお礼申し上げます。

参考資料

参照論文

- [1] Kentaro Somiya, for the KAGRA Collaboration, arXiv:1111.7185 (2011)
- [2] Alessandra Buonanno, Yanbei Chen, Phys.Rev. D65 (2002) 042001
- [3] Yiqiu Ma *et al.*, Phys. Rev. A 92, 023807 (2015)
- [4] K.Somiya *et al.*, arXiv:1403.1222 (2014)
- [5] H.J.Kimble *et al.*, Phys.Rev. D65 (2002) 022002

参考文献

- [6] 花村榮一, 現代物理学叢書 量子光学, 岩波書店
- [7] Peskin Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, ABP