

令和5年度修士論文

重力波検出器の信号増幅系における  
光熱効果を補償する結晶の評価

東京工業大学理学院物理学系 宗宮研究室

22M00295 臼倉航

2024年2月5日

# 概要

重力波は、質量をもつ物体が運動することで、重力によって周囲の時空が歪み、波として光速で伝搬する現象のことであり、1916年にアインシュタインによって予言された。それから約100年経った2015年にアメリカの重力波望遠鏡で初検出された。重力波信号を解析することによって、電磁波を用いた宇宙の観測では捉えることのできなかったブラックホールの存在や連星中性子星の合体などが観測できるようになった。これは、重力波を通して宇宙の謎を解き明かすさらなる一歩である。しかし、宇宙には検出器の限界によって未だに観測されていない天体現象がたくさんあり、検出器の感度向上のための研究開発が盛んに行われている。現在、重力波検出器は第2世代まで研究開発が進んでおり、アメリカのLIGO、ヨーロッパのVIRGO、日本のKAGRAなどが代表的な検出器として挙げられる。これらは、kmスケールの基線長を持った複合光共振器で構成され、原理的な感度は光の量子ゆらぎによって制限されている。重力波検出器のプロブである鏡と光が相互作用し、光の量子揺らぎが鏡の変位測定の量子限界を決める。そして鏡と光の相互作用を操作することで量子雑音の大きさを増減することが可能となる。特に、光ばねという現象を用いて重力波信号を増幅することで、量子雑音を低減できることがわかっている。一方で、単純な光ばねによる信号増幅効果は光共振器に用いている鏡の損失と共振状態からのずれのみで決まるため限界がある。そこで、光共振器の実効的な光学損失を補うために、次世代重力波検出器のための技術として、光パラメトリック増幅と光カー効果という2つの非線形光学効果を用いた信号増幅技術の開発が進んでいる。これを用いることで、光ばねの性質を変化させることができ、重力波検出器の更なる感度向上を実現することができる。しかし、非線形光学効果を起こすためには、強いレーザー光強度が必要となり、結晶の光熱効果が顕著に表れる。先行研究では、光共振器に挿入した非線形光学結晶PPKTPの光熱効果を正確に見積もり、差し引くことで、信号増幅効果の検証に成功したが、光熱効果の直接的な補償はできなかった。本研究では、第二の結晶を挿入することで光熱効果の影響を光学的に補償することを目標に、非線形光学結晶の光熱効果を直接的に補償する技術を提案し、検証実験を行った。補償条件を満たす結晶としてフッ化カルシウム結晶を選択し、この結晶を光共振器内に配置し伝達関数を測定することで、光学補償に必要なパラメタの推定を行った。

# Abstract

Gravitational waves are phenomena in which the motion of an object with mass distorts the space-time around it due to gravity and propagates as waves at the speed of light. It was predicted by Einstein in 1916. It was first detected by the U.S. gravitational wave detector in 2015, about 100 years after Einstein's prediction. The existence of black holes and binary neutron star-neutron mergers, which could not be detected by observations of the universe using electromagnetic waves, have been revealed by analyzing the gravitational wave signals. This is a further step toward unraveling the mysteries of the universe through gravitational waves. However, there are still many astronomical phenomena in the universe that have not yet been observed due to the limitations of detectors. So, the research and development to improve the sensitivity of detectors is being actively carried out. They are currently in progress up to the second generation, including LIGO in the U.S., VIRGO in Europe, and KAGRA in Japan. They consist of optical composite resonators with kilometer-scale baseline lengths, and their principle sensitivity is limited by the quantum fluctuations of light. This is treated as quantum noise in a gravitational wave detector, and by considering the interaction between the optical resonator and the mechanical oscillator, one can describe the various effects of the optical resonator that affect quantum noise and quantum noise. In particular, it has been shown that quantum noise can be reduced by amplifying gravitational wave signals using the phenomenon of optical spring. On the other hand, the signal amplification effect of a simple optical spring is limited because it is determined solely by the loss of the mirror used in the optical resonator and its deviation from the resonant state. To compensate for the effective optical loss of the optical resonator, two nonlinear optical effects, optical parametric amplification and optical Kerr effect, are being developed as signal amplification techniques for next-generation gravitational wave detectors. This can be used to change the nature of the optical spring and further improve the sensitivity of the gravitational wave detector. In a previous study, they succeeded in verifying the signal amplification effect by accurately estimating and subtracting the photothermal effect of a nonlinear optical crystal PPKTP inserted into an optical resonator, but they could not directly compensate for the photothermal effect. With the goal of optically compensating for the effects of photothermal effects by inserting a second crystal, I proposed a technique to directly compensate for the photothermal effects of nonlinear optical crystals and conducted verification experiments.

---

Calcium fluoride crystals were selected as crystals that satisfy the compensation conditions, and the parameters necessary for optical compensation were estimated by placing these crystals in an optical resonator and measuring the transfer function.

# 目次

第 1 章	重力波	1
1.1	計量テンソル	1
1.2	Einstein 方程式	2
1.3	重力波の伝搬	2
1.4	重力波による空間変化	3
第 2 章	重力波検出器	5
2.1	重力波検出器の歴史	5
2.2	重力波検出器の原理	7
2.3	重力波検出器における様々な雑音	10
第 3 章	非線形光学	14
3.1	様々な非線形光学効果	14
3.2	結合波方程式	15
3.3	SHG	17
3.4	光パラメトリック過程	21
第 4 章	重力波検出器の量子雑音	24
4.1	量子光学	24
4.2	演算子の定義	30
4.3	様々な量子雑音	34
4.4	量子雑音低減のための技術	43
第 5 章	実験の原理	49
5.1	制御工学	49
5.2	光熱効果の影響	53
5.3	光共振器のモードマッチング	57
第 6 章	実験	61
6.1	結晶の選定	61
6.2	光共振器の設計	62
6.3	光熱効果の影響のシミュレーション	68

目次	v
6.4 フッ化カルシウム結晶の光熱効果測定 . . . . .	71
第 7 章 結論	76
謝辞	78
参考文献	81

# 第1章

## 重力波

重力波は、1916年にアインシュタインが発表した一般相対性理論で予言された。重力波とは、質量をもつ物体が運動することで、重力によって周囲の時空が歪み、波として光速で伝播する現象のことである。これは、時空と物質の状態を結びつける方程式である Einstein 方程式を線形近似することで導出することができる [1]。本章では、基礎的な知識から始まり、重力波の一般論について議論する。

### 1.1 計量テンソル

Minkowski 時空と呼ばれる重力場の存在しない平坦な時空において、2点間の微小距離  $ds$  は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

と表すことができる。ギリシャ文字  $\mu, \nu$  はそれぞれ 0, 1, 2, 3 の値をとり、同じ添え字に対しては縮約をとる。また、 $\eta_{\mu\nu}$  は Minkowski 時空における計量テンソルで、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

と表すことができる。ここまでは平坦な時空を考えてきたが、重力場の存在する歪んだ時空においても  $ds^2$  は不変である。そこで、ローレンツ変換を考えることで歪んだ時空における計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (1.3)$$

と表すことができる ( $\alpha, \beta$  は任意の文字)。

## 1.2 Einstein 方程式

計量テンソルは、任意の座標系での2点間の距離とその空間の特性についての情報を持つ物理量であり、以下に示す Einstein 方程式に従う。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

右辺の  $G$  は万有引力定数、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルと呼ばれ、時空に存在する物質の状態を表すテンソルである。一方、左辺の  $G_{\mu\nu}$  は Einstein テンソルと呼ばれ、時空の状態を表すテンソルであり、

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.5)$$

で与えられる。ここで、 $R_{\mu\nu}, R$  はそれぞれ Ricci テンソル、Ricci スカラーである。これらは Riemann テンソル  $R^\mu_{\nu\lambda\kappa}$  によって以下のように定義される:

$$R_{\mu\nu} := R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, R := R^\alpha_\alpha \quad (1.6)$$

また、Riemann テンソルは以下のように定義される:

$$R^\mu_{\nu\lambda\kappa} := \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda,\kappa} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} - \Gamma^\mu_{\sigma\kappa} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \quad (1.7)$$

ここで、 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  は Christoffel 記号と呼ばれ、以下のように定義できる:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} := \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (1.8)$$

## 1.3 重力波の伝搬

ここでは、地球上などの弱い重力場を考える。この場合、計量テンソルを摂動項  $h_{\mu\nu}$  を加えた形で

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

と表すことができる。Einstein テンソルは  $h_{\mu\nu}, \square = \partial^\mu \partial_\mu, h = h^\mu_\mu$  を用いて

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} [h^\delta_{\lambda,\nu\delta} + h^\delta_{\nu,\lambda\delta} - \square h_{\nu\lambda} - h_{,\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} (h^\delta_{,\delta\sigma} - \square h)] \quad (1.10)$$

と表せる。さらに、 $h_{\mu\nu}$  を

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.11)$$

と書き換えると、

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} (\tilde{h}^\delta_{\lambda,\nu\delta} + \tilde{h}^\delta_{\nu,\lambda\delta} - \square \tilde{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} \tilde{h}^\delta_{,\delta\sigma}) \quad (1.12)$$

となる。さらに、Lorentz ゲージ:

$$\tilde{h}^\delta_{,\delta\sigma} = 0 \quad (1.13)$$



とトランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ):

$$\tilde{h}_{\mu 0} = 0, \tilde{h}_{\mu}^{\mu} = 0 \quad (1.14)$$

を同時に適用すると、線形化された Einstein 方程式は

$$\square h_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

と書ける。ここで、宇宙空間などの真空中では  $T_{\mu\nu} = 0$  なので、式 1.15 に適用すると真空中の Einstein 方程式:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.16)$$

が得られる。式 1.16 から摂動項  $h_{\mu\nu}$  は波動方程式に従うことがわかる。重力波が  $z (= x^3)$  方向に伝播すると考え、波動方程式の単色平面波解を行列表示で表すと、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[-ik(ct - z)] \quad (1.17)$$

となる (摂動項  $h_{\mu\nu}$  が対象テンソルであることを使っている)。また、 $k$  は重力波の波数である。 $h_+$  と  $h_{\times}$  はそれぞれプラスモード、クロスモードと呼ばれる。この解を求めたことによって、重力波は2つのモード (プラスモード、クロスモード) をもって光速で空間を伝播する横波であることが分かった。

## 1.4 重力波による空間変化

ここまでで、重力波は2つのモードを持った横波であることが分かった。ここでは、自由質点の運動を考えることで、重力波がどのように時空を歪めるのかを確認する。歪んだ時空に存在する粒子は以下のような測地線方程式に従う:

$$\frac{d^2 x^{\beta}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0 \quad (1.18)$$

ここで、 $\tau$  は質点の固有時間である。式 1.18 の初期状態  $\nu = 0, \lambda = 0$  のとき、

$$\frac{d^2 x^{\beta}}{d\tau^2} = 0 \quad (1.19)$$

となり、質点に加速度が働かないため、重力波の影響は表れないことがわかる。次に、2つの質点間の距離に重力波が与える影響を問がる。2つの質点はそれぞれ、原点  $x_{(0)}^{\mu} = (0, 0, 0, 0)$  と原点から距離  $R_0$  だけ離れた  $x_{(1)}^{\mu} = (0, R_0 \cos \theta, R_0 \sin \theta, 0)$  とする。ここで  $z$  軸方向から + モードの重力波

$$h_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos \omega t \quad (1.20)$$

が入射したとき、 $x_{(0)}^\mu$  と  $x_{(1)}^\mu$  の2点間の距離は、

$$d_+ = \int_{x_{(0)}^\mu}^{x_{(1)}^\mu} |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2} \sim R_0 \left( 1 + \frac{h_+}{2} \cos 2\theta \cos \omega t \right) \quad (1.21)$$

となり、重力波の影響により  $R_0 \frac{h_\pm}{2} \cos 2\theta \cos \omega t$  だけ変化することがわかる。×モードの重力波の際も同様に計算すると、

$$d_\times = R_0 \left( 1 + \frac{h_\times}{2} \cos 2\theta \cos \omega t \right) \quad (1.22)$$

となる。図 1.1 はそれぞれのモードに対しての自由質点の運動を示した。レーザー干渉計型重

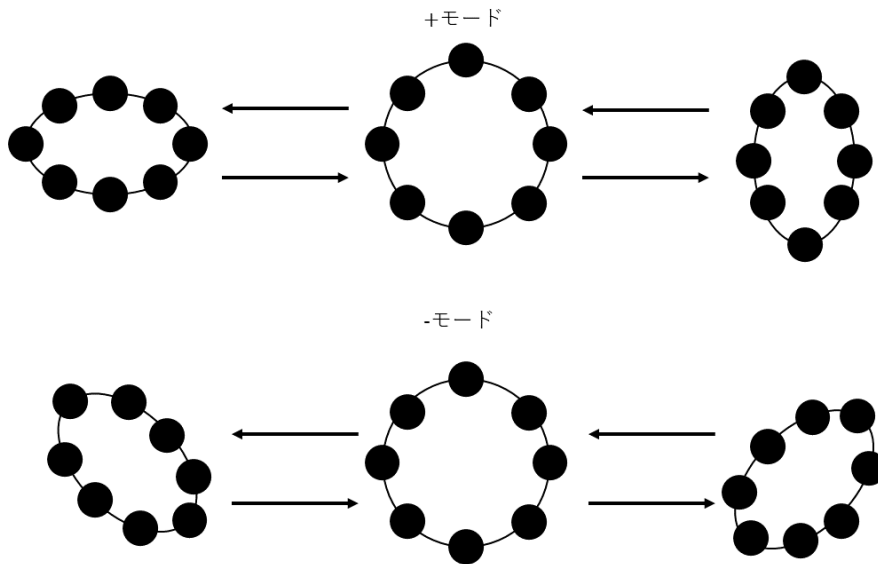


図 1.1 重力波による自由質点の変位

力波検出器では、2つの鏡 (自由質点に相当する) の距離をレーザー干渉計を用いて測定することで重力波を捉えることができる。次章でこの原理の詳細について述べる。

## 第2章

# 重力波検出器

前述したとおり重力波とはきわめて小さな振幅を持った波である。そして、その影響は時空の変動となって表れる。具体的には、物の伸縮や2点間の距離の変化である。つまり、その長さの変化をうまくとらえることができれば重力波を検出することができる。しかし、直接的な重力波の検出は振幅が極めて小さいため非常に困難である。本章では、重力波検出器の歴史と原理及びその感度を制限する様々な雑音について述べる。

### 2.1 重力波検出器の歴史

重力波は、アインシュタインが1916年に提唱した一般相対性理論の中で予言したものである。しかし、当時は重力波の効果はあまりにも小さすぎるため、観測することは困難であると考えられていた。

そんな中、1960年代にメリーランド大学の物理学者ウェーバーによって共振型重力波検出器(Weber bar)が提案され、制作された。図2.1の検出器は、アルミ合金の塊でできている[2]。重力波がこの合金の弾性体を通過すると、その伸び縮みの効果で弾性体に共鳴振動を起し、その長さ変化を電圧に変換して読み取る、というのが検出の原理とされている。この装置をメリーランド大学とアルゴンヌ国立研究所(シカゴ)の2か所に設置し、2台の信号の相関を調べた。そして、1969年、天体からの重力波信号を発見したと発表された。この実験結果は天の川銀河中心からの重力波だと解析されたが、その振幅から推定される天体現象のエネルギーがあまりにも大きいことから、結果は否定的なものであった。現在では、ウェーバーが観測した信号はノイズであったと考えられている。

これをきっかけとして、1990年代まで、様々な共振型検出器が世界中の研究所で製作された。その過程で、検出器の感度を向上させるための極低温技術や懸架技術といった現在の重力波検出器の土台となる要素技術が開発された。また、信号解析の統計的な信頼度を上げるための共振型検出器プロジェクトの間で、世界規模での検出器コラボレーションが形成され、データの共有が行われるようになった。しかし、このような共振型重力波検出器は、弾性体の共振周波数付近の帯域でしか高感度を得られないため、重力波を捉えることはできない。そこで、1990年代からは、広い周波数帯域で信号を検出することができるレーザー干渉計型重力波検出器の開発が主流となっていった。



図 2.1 ウェーバーと共振型重力波検出器 [2]

1990 年代半ばからは、第一世代とされている km スケールの大型干渉計プロジェクトが開始された。具体的には、アメリカの LIGO、イタリアの VIRGO、ドイツの GEO、日本の TAMA300 といった検出器が挙げられる。これらの検出器は、重力波検出器の原理検証を目的としていた。

2010 年代には、第一世代の知見を活かして、第二世代の重力波検出プロジェクトが各国で計画された。具体的には、アメリカの Advanced LIGO、ヨーロッパの Advanced VIRGO、そして日本の KAGRA が挙げられる。特に KAGRA は岐阜県にある神岡鉱山に建設された重力波検出器であり、地下に建設されている点、鏡にサファイアを用いている点、鏡を極低温まで冷却している点において他の第二世代の検出器と大きく異なる。

今までの検出器はすべて地上に設置されていたが、宇宙空間で稼働する重力波検出器の計画も積極的に進められている。また、よりスケールを大きくした地上設置型の検出器として、



図 2.2 LIGO ハンフォード観測所の航空写真 [3]

ヨーロッパの Einstein Telescope、アメリカの Cosmic Explorer などが計画されている。

## 2.2 重力波検出器の原理

本節では重力波検出器の基本的な原理について述べる [4] [5]。図 2.2 や図 2.3 のようなレーザー干渉型重力波検出器が現在の重力波検出器として主流となっている。ここでは、基本的なマイケルソン干渉計を用いた検出器の原理について述べる。まず、図 2.5 のようなマイケルソン干渉計に入射する電場を

$$E_{in} = E_0 e^{i\Omega t} \quad (2.1)$$

とする。 $\Omega$  はレーザーの周波数である。また、Michelson 干渉計の  $x$  軸方向の腕の長さを  $L_x$ 、 $y$  軸方向の腕の長さを  $L_y$  とする。 $E_{in}$  がビームスプリッタで分けられ、それぞれ  $L_x, L_y$  の光路で往復するとき位相のずれ  $\phi_x, \phi_y$  が生じる。そして、再度ビームスプリッタでそれぞれの電場が重ね合わされ、出力電場  $E_{out}$  は以下ようになる。

$$E_{out} = \frac{1}{2} E_0 e^{i(\Omega t - \phi_x)} + \frac{1}{2} E_0 e^{i(\Omega t - \phi_y)} \quad (2.2)$$

出力電場  $E_{out}$  は光検出器によって光強度  $P_{out}$  として検出される。光強度は入力電場の振幅の絶対値の 2 乗で

$$P_{out} = \frac{1}{2} |E_{in}|^2 (1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \quad (2.3)$$

と計算できる。よって、マイケルソン干渉計の出力強度  $P_{out}$  は位相差に依存することがわかる。この位相差が  $\pi/2$  のとき  $P_{out}$  は最大になり、0 のとき最小になる。



図 2.3 KAGRA 全体のイメージ画像 (東京大学宇宙線研究所)

これを踏まえて、重力波によって生じる位相差を計算する。+ モードの重力波  $h(t)$  がマイケルソン干渉計に入射したときを考える。光の伝搬は微小距離  $ds^2 = 0$  によって決まる。また、 $x$  方向に進む光を考えると  $dy = dz = 0$  であるので、式 1.3 より

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (1 + h(t))dx^2 = 0 \quad (2.4)$$

となる。したがって

$$dx = \left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) cdt \quad (2.5)$$

となる。ここで  $h(t) \ll 1$  という近似を用いた。 $L_x$  を往復する間にかかる時間を  $\Delta t_x$  とすると式 2.5 の両辺を積分して

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t_x}^t dx &= c \int_{t-\Delta t_x}^t \left(1 - \frac{1}{2}h(t')dt'\right) \\ \Delta t_x &= \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t')dt' \end{aligned} \quad (2.6)$$

と計算できる。式 2.6 から  $L_x$  を往復したときの位相変化  $\phi_x$  を

$$\phi_x = \frac{2L_x\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t')dt' \quad (2.7)$$

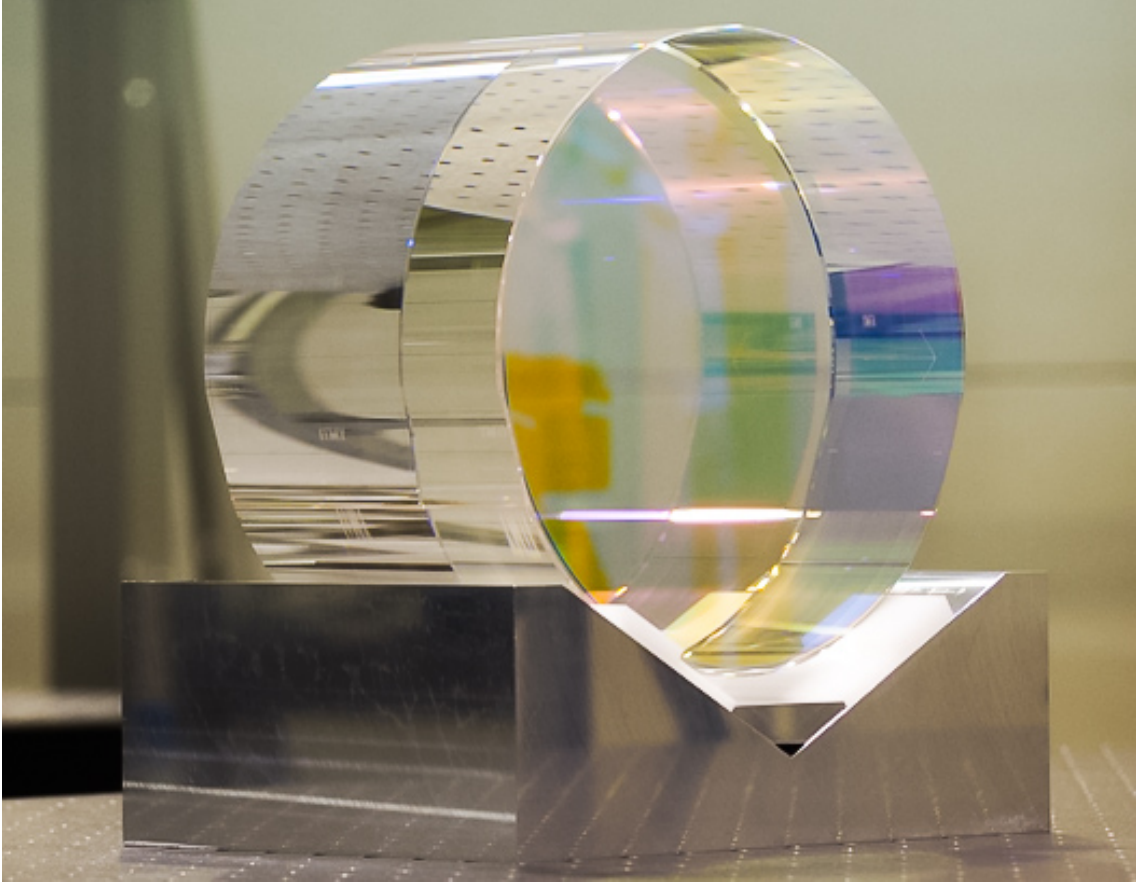


図 2.4 KAGRA のサファイア鏡 (東京大学宇宙線研究所)

と計算できる。 $L_y$  を往復したときの位相変化  $\phi_y$  も同様に計算すると

$$\phi_y = \frac{2L_y\Omega}{c} - \frac{\Omega}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.8)$$

となる。マイケルソン干渉計は重力波によって変動した  $L_x$  と  $L_y$  の位相差  $\phi'_-$  を測定することができる。 $L \sim L_x \sim L_y, L_x - L_y = L_-$  とすると

$$\phi'_- = \frac{2L_-\Omega}{c} + \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.9)$$

となる。第1項は重力波が入射していない場合の位相差であり、第2項は重力波の影響による位相変化である。そして、第2項を以下のように定義する。

$$\Delta\phi_{GW} := \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.10)$$

ここで、 $h(t)$  の逆フーリエ変換を

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

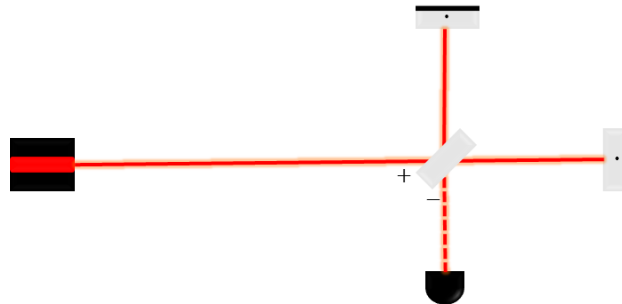


図 2.5 マイケルソン干渉計

とすると

$$\Delta\phi_{GW} = \int_{-\infty}^{\infty} H_M(\omega)h(\omega)d\omega \quad (2.12)$$

$$H_M(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \quad (2.13)$$

と表すことができる。 $H_M(\omega)$  は周波数  $\omega$  の重力波に対するマイケルソン干渉計の周波数応答である。観測すべき重力波の周波数を固定して、 $H_M(\omega)$  を基線長  $L$  の関数として考えると、100 Hz 程度までの比較的低い周波数の重力波に対しては  $L$  が長いほど良い応答を示す。

### 2.3 重力波検出器における様々な雑音

ここでは重力波検出器における様々な雑音について述べる。これらのことを述べる前に、振幅スペクトル密度というものを定義する。ある物理量  $x(t)$  を十分長い時間測定するとき、この平均値のずれを積分すると 0 になる。そこで、このような物理量を評価するためには、平均値からのずれの 2 乗を積分した値である Root Mean Square (RMS) を用いて、実効的な振幅を計算する。まず、 $x(t)$  における分散の平均値は、

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T} d\omega \end{aligned} \quad (2.14)$$



と書ける。ここで、 $X(T)$  は物理量  $x(T)$  をフーリエ変換したものであり、 $T$  は測定時間である。式 2.14 の被積分関数はパワースペクトル密度  $P(\omega)$  と呼ばれている。

$$P(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{T} \quad (2.15)$$

そして、パワースペクトル密度の平方根をとったものが振幅スペクトル密度  $S(\omega)$  と呼ばれている。

$$S(\omega) = \sqrt{P(\omega)} \quad (2.16)$$

振幅スペクトルは物理量に周波数成分がどの程度含まれているかを表しており、以下ではこれを用いて議論を進めていく。

### 2.3.1 地面振動雑音

地面は自然の動きや人々の生活によって常に振動しているため、それらが重力波検出器の懸架鏡に伝わり鏡を揺らすことで生じる雑音を地面振動雑音という。ここでは、質量  $m$  の鏡を長さ  $L$  で懸架した振り子の地面振動雑音を考える。振り子の支点が  $x(t)$  だけ動いた時の懸架鏡の変位を  $y(t)$  とすると振り子の微分方程式は、

$$m\ddot{y} = \frac{mg}{L}(x - y) - \Gamma_m(\dot{x} - \dot{y}) \quad (2.17)$$

$$= m\omega_m^2(x - y) - 2m\gamma_m(\dot{x} - \dot{y}) \quad (2.18)$$

と書ける。 $\Gamma_m$  は懸架鏡のダンピング係数、 $\omega_m = g/L$  は振り子の共振周波数、 $\gamma_m = \Gamma_m/2m$  はダンピング係数を書き換えたものである。この微分方程式をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{m\omega_m^2 + 2im\gamma_m\omega}{m(-\omega^2 + \omega_m^2) + 2im\gamma_m\omega} X(\omega) \\ &= \frac{\omega_m^2 + i\frac{\omega_m\omega}{Q_m}}{-\omega^2 + i\frac{\omega_m\omega}{Q_m} + \omega_m^2} X(\omega) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。 $Q_m = \omega_m/2\gamma_m$  は振り子の  $Q$  値である。式 2.19 は測定帯域  $\omega$  が振り子の共振周波数より十分高く、 $Q$  値が非常に高い場合、

$$Y(\omega) \sim -\frac{\omega_m^2}{\omega^2} X(\omega) \quad (2.20)$$

となる。このことから、地面振動の振幅スペクトル密度は周波数の2乗に反比例して減少することがわかる。この低減効果は、多段振り子にすることで大きくすることができる。KAGRA では9段の多段振り子を用いることで、防振効果を高めている。また、KAGRA を図 2.3 のように地下に建設することによって、さらに地面振動雑音を低減することが可能である。

### 2.3.2 熱雑音

懸架鏡や鏡が熱浴とランダムにエネルギーのやり取りをすることでこれらの振動が励起され、鏡が揺らされることで生じる雑音を熱雑音という。ここでは懸架鏡を1次元の調和振動子

とした系の運動方程式を考えることで、熱雑音について考える。まず、1次元の調和振動子の共振周波数を  $\omega_0$ 、復元力を  $F_{res}(t)$ 、減衰率を  $\gamma$  とすると運動方程式は、

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0x = F_{res}(t) \quad (2.21)$$

と書ける。これをフーリエ変換すると、

$$-m\omega^2 X(\omega) + m\omega_0 X(\omega) + im\gamma\omega X(\omega) = F_{res}(\omega) \quad (2.22)$$

$$-m\omega^2 X(\omega) + m\omega_0(1 + i\phi(\omega))X(\omega) = F_{res}(\omega) \quad (2.23)$$

となる。 $\phi(\omega)$  は散逸項であり、 $(1 + i\phi(\omega))$  は複素ばね定数と呼ぶ。また、式 2.23 から振り子の変位と外力の比が求まり、揺動散逸定理と組み合わせることで熱雑音による変位のパワースペクトル密度  $P_{th}(\omega)$  は、

$$P_{th}(\omega) = \frac{4k_B T}{m\omega} \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)} \quad (2.24)$$

と求まる。散逸項  $\phi(\omega)$  には、周波数依存性を持つ viscous モデルと周波数によらず一定値をとる structure モデルがある。重力波検出器は高真空に保たれているので、一般的には structure モデルが適用される。このモデルを使って  $P_{th}(\omega)$  を書き直すと、

$$P_{th}(\omega) = \frac{4k_B T}{m\omega} \frac{\omega_0^2/Q}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)} \quad (2.25)$$

となる。このことから、熱雑音の振幅スペクトル密度は温度と機械損失 ( $Q$  値の逆数) に比例し、振動子の機械損失が少ないほど熱雑音が小さくなることがわかる。KAGRA では、極低温で機械損失が小さなサファイアを懸架ワイヤーにも用いることで、熱雑音の低減効果を高めている。

### 2.3.3 ニュートニアン雑音

知覚や大気といった外部環境が重力場を変動させ、鏡が揺らされることで生じる雑音をニュートニアン雑音という。この雑音の影響は非常に小さく、第2世代の重力波検出器では無視できるほど小さいが、第3世代の重力波検出器では、 $\sim 10\text{Hz}$  程度の感度を制限すると考えられている。また、KAGRA では、地下水による重力勾配の変動が設計感度を制限することが示唆されている [6]。

### 2.3.4 輻射圧雑音

光子は運動量を持つため、光が鏡で反射される際に光子が鏡によって運動量変化を受け、鏡は光子から力を受けることになる(輻射圧と呼ぶ)。これは、光子数が一定であれば輻射圧も一定になることがわかるが、光子数は統計的な揺らぎを持つため、輻射圧も一定にはならない。その結果、鏡の位置が揺らぐことで生じる雑音を輻射圧雑音という。

### 2.3.5 散乱雑音

検出器に入る光の光子数が量子的に揺らぐことで生じる雑音を散乱雑音という。この揺らぎはポアソン分布に従い統計的な揺らぎであるため、周波数によらない雑音である。これをホワイトノイズという。

### 2.3.6 標準量子限界

光の量子性に起因する輻射圧雑音と散乱雑音をまとめたものを量子雑音という (これについては 4 章で議論する)。ここでは量子雑音を直感的に考えていく。光強度が強いほど光子数は多くなるので、検出の際の揺らぎは小さくなり、輻射圧の雑音は大きくなる。一方で、光強度が弱いほど光子数は小さくなるので、検出の際の揺らぎは大きくなり、輻射圧の雑音は小さくなる。これらのことから、輻射圧雑音と散乱雑音は光強度に対してトレードオフの関係があることがわかる。この関係から決まる検出器の感度の限界値を標準量子限界 (Standard quantum limit : SQL) という。

## 第3章

# 非線形光学

前章では重力波の基本的な原理や雑音（量子雑音以外）について述べた。一般的に重力波検出器の原理的な感度は前述した標準量子限界によって制限される。この標準量子限界を打ち破る手法の一つとして非線形光学効果を用いた技術が重力波検出器には用いられている [7]。そこで、本章では非線形光学の基本的な原理について述べる。本章では [8] を参考にした。

### 3.1 様々な非線形光学効果

電場に誘起される分極を介して、光と物質は相互作用しているため、電場がかかったときの物質の状態の変化は、物質中の分極が誘起されることで表現できる。通常の光学であれば、分極と電場は比例の関係にあるとしているが、電場が非常に強くなると分極の非線形性が無視できなくなる。この非線形性に起因する現象が非線形光学効果である。非線形性を考慮すると、物質の分極は、

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(t) + \epsilon_0 \chi^{(2)} |E(t)|^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3(t) + \dots \quad (3.1)$$

と電場の冪級数で展開できる。ここで、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。式 3.1 の第 2 項を 2 次の非線形分極、係数  $\chi^{(2)}$  を 2 次の非線形感受率と呼び、第 3 項を 3 次の非線形分極、係数  $\chi^{(3)}$  を 3 次の非線形感受率と呼ぶ。このとき、電場  $E(t) = A \cos \omega t$  が非線形光学媒質に入射すると、以下のように 2 次の非線形分極が誘起される。

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) &= \epsilon_0 \chi^{(2)} A^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi^{(2)} A^2 \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi^{(2)} A^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

この式の第 1 項から入射波の 2 倍の周波数の光が放出されていることがわかる。これを第 2 高調波発生 (second harmonic generation : SHG) と呼ぶ。また、周波数  $2\omega$  の光を第 2 高調波 (2 倍波)、入射した周波数  $\omega$  の光を基本波という。次に、電場  $E(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$  が非線形光学媒質に入射するとき、式 3.2 同様に計算すると 2 次の非線形分極は、

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} [A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t]^2 \quad (3.3)$$

となる。式 3.3 を展開すると、周波数  $\omega_1, \omega_2$  の SHG のほかに、2 つの周波数成分の積の項

$$2\epsilon_0 \chi^{(2)} A_1 A_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \epsilon_0 \chi^{(2)} A_1 A_2 [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (3.4)$$

が含まれていることがわかる。これをそれぞれ、和周波発生と差周波発生と呼ぶ。ここで、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  の和周波数を  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  とする。この2つの周波数が一致した場合、SHG と等しくなる。一方で、周波数  $\omega_3$  の光から周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の光を発生させる現象を光パラメトリック過程と呼ぶ。もう一度、電場  $E(t) = A \cos \omega t$  が非線形光学物質に入射したときを考える。すると、式 3.1 より以下のように3次の非線形分極が誘起される。

$$\begin{aligned} P^{(3)}(t) &= \epsilon_0 \chi^{(3)} A^3 \cos^3 \omega t \\ &= \epsilon_0 \chi^{(3)} A^3 \left[ \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

この式の第2項の周波数  $3\omega$  の成分は第3次高調波発生と呼ぶ。ここで、式 3.5 の第1項は入射波と同じ周波数を持つことから、この項は線形分極と非線形分極をあわせて、

$$P(t) = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} A^2 \right) A \cos \omega t \quad (3.6)$$

と書ける。線形感受率と屈折率の関係

$$n^2 = 1 + \chi^{(1)} \quad (3.7)$$

と式 3.6 を用いることで、以下のように非線形光学効果により屈折率が変化することがわかる。

$$n^2 = 1 + \chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} A^2 \quad (3.8)$$

よって、媒質の屈折率は、

$$n = n_0 + n_2 I \quad (3.9)$$

となる。ここで、 $n_2$  は非線形屈折率、 $I$  は光の強度である。このように光の強度に依存して屈折率が変化する3次の非線形効果を光カー効果と呼ぶ。ある条件を満たすことで、2次の非線形光学効果の連鎖でカー効果を起こすことができる。これをカスケード非線形光学効果と呼ぶ。以下では、SHG、光パラメトリック過程、カスケード非線形光学効果について詳しく述べる。

## 3.2 結合波方程式

ここでは、非線形媒質中の光波の伝搬を考える。このとき、非線形分極を介して相互作用をしながら媒質中を伝搬する電場の挙動を表した方程式を結合波方程式と呼ぶ。

### 3.2.1 結合波方程式の導出

ここでは、マクスウェル方程式から出発し、結合波方程式の導出を行う。非線形媒質中においても、電磁場の伝搬はマクスウェル方程式に従う。媒質中には光の吸収の元となる電流や自

由電子は存在しないという仮定の下でのマクスウェル方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.13)$$

と書ける。 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$  はそれぞれ電場、磁束密度、電束密度、磁場である。ここで、電束密度  $\mathbf{D}$  に非線形分極の寄与を加えると、

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) \quad (3.14)$$

となる。ここで、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率、 $\epsilon$  は比誘電率である。また、光の周波数領域では磁場の非線形性は無視することができるので、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (3.15)$$

となる。式 3.10 から 3.15 を用いると、電場  $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega t$  に対する波動方程式は、

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

と導かれる。ここで、図 3.1 のように  $z$  軸方向に伝搬し、複素振幅  $F(z)$  が非線形媒質中で変

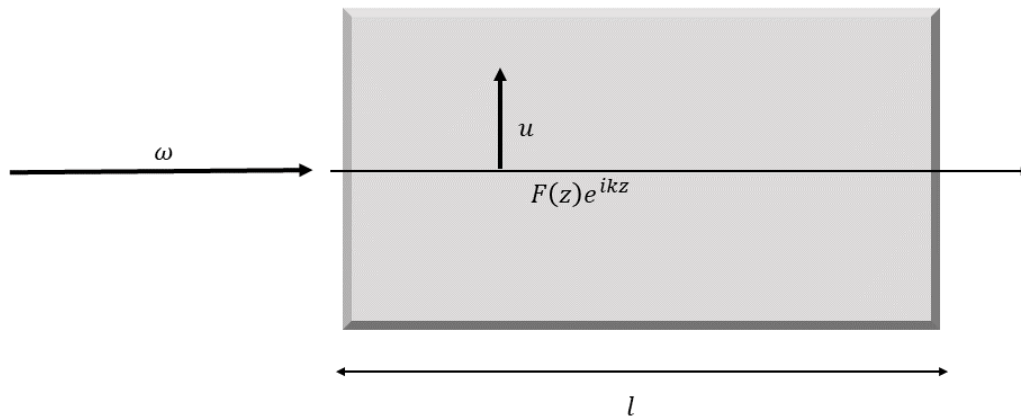


図 3.1 非線形媒質中の伝搬

化するとき、電場は、

$$\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{u} F(z) e^{ikz} \quad (3.17)$$

となる。ここで、 $\mathbf{u}$  は偏光状態を表す単位ベクトルであり、 $F(z)$  はほとんど変化しないゆっくり変化する関数である。また、 $\mathbf{u}$  は  $z$  軸方向に直交すると考えたため、電場の発散は 0 になる。複素振幅の  $z$  による 2 階微分は無視できるとして、式 3.17 を式 3.16 に代入すると、

$$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{i\omega}{2\epsilon_0 cn} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{P}_{NL}(\omega) e^{-ikz} \quad (3.18)$$

と導くことができる。

周波数  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 (= \omega_1 + \omega_2)$  の 3 光波が相互作用しながら 2 次の非線形媒質中を伝搬することを考える。例えば、周波数  $\omega_3$  の非線形分極  $P_3^{(2)}$  は、

$$P_3^{(2)} = \epsilon_0 \chi_3^{(2)} F_1 F_2 e^{i(k_1+k_2)z} \quad (3.19)$$

となる。ここで、 $k_i (i = 1, 2, 3)$  は波数であり、 $\chi$  は 2 次の非線形感受率ベクトルである。周波数  $\omega_1, \omega_2$  も同様に求めることができ、これらを式 3.18 に代入すると、

$$\frac{dF_1}{dz} = \frac{i\omega_1 (\chi_{eff}^{(2)})^*}{2cn_1} F_2^* F_3 e^{i\Delta kz} \quad (3.20)$$

$$\frac{dF_2}{dz} = \frac{i\omega_2 (\chi_{eff}^{(2)})^*}{2cn_2} F_1^* F_3 e^{i\Delta kz} \quad (3.21)$$

$$\frac{dF_3}{dz} = \frac{i\omega_3 \chi_{eff}^{(2)}}{2cn_3} F_1 F_2 e^{-i\Delta kz} \quad (3.22)$$

となる。この連立方程式を結合波方程式と呼ぶ。ここで、 $\chi_{eff}^{(2)}$  は 2 次の有効非線形感受率であり、 $n_i (i = 1, 2, 3)$  は  $\omega_i$  波に対する媒質の屈折率である。また、 $\Delta k$  は  $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$  であり、位相不整合と呼ぶ。これについては次に詳しく述べる。

### 3.2.2 位相整合条件

ここでは、位相不整合  $\Delta k$  について詳しく述べる。これは、非線形分極とそれから発生した電場の位相のずれを表す量である。非線形媒質と電場の相互作用する領域が有限であれば、その逆数程度の位相不整合が許される。非線形媒質の厚さを  $L$  とすると、 $z$  方向の位相不整合の許容範囲は  $|\Delta k L| < \pi$  である。このとき、

$$l_c = \frac{\pi}{\Delta k} \quad (3.23)$$

だけ進むと、位相差は  $\pi$  に達し、エネルギーの流れが完全に逆向きになることがわかる。式 3.23 をコヒーレンス長と呼ぶ。また、位相不整合  $\Delta k$  が  $\Delta k = 0$  という条件を満たすとき、非線形光学効果が起こる。これを位相整合条件という。一般的に、非線形光学効果では位相不整合条件が満たされていることが前提となり、結晶の複屈折や、屈折率の温度変化を利用して条件を満たすようにする。

## 3.3 SHG

ここでは、式 3.2 で表される SHG について詳しく述べる。

## 3.3.1 SHG の結合波方程式

SHG の過程を、結合波方程式を用いて考えていく。図 3.2 のように、非線形媒質に周波数

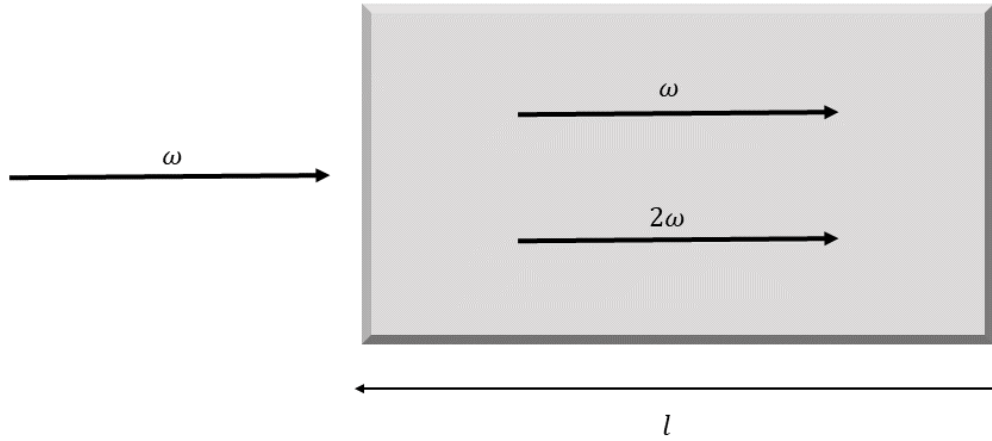


図 3.2 非線形媒質中の SHG の過程

$\omega$  の基本波を入射すると、媒質中を基本波と同じ周波数を持った波と 2 倍波が伝搬する。それぞれの複素振幅を  $F_1, F_2$  とすると、結合波方程式は、

$$\frac{dF_1}{dz} = -\frac{1}{2}\alpha_1 F_1 + \frac{i\omega\chi_{eff}^{(2)}}{cn_1} F_1^* F_2 e^{i\Delta kz} \quad (3.24)$$

$$\frac{dF_2}{dz} = -\frac{1}{2}\alpha_2 F_2 + \frac{i\omega\chi_{eff}^{(2)}}{cn_2} F_1^2 e^{-i\Delta kz} \quad (3.25)$$

となる。ここで、位相不整合  $\Delta k$  は  $\Delta k = k_2 - 2k_1$  である。SHG の変換効率の度合いによって、結合波方程式を解くことができる。まず、変換効率が小さい場合を考える。このとき、基本波の複素振幅  $F_1$  の変化は無視することができ、定数  $F_0$  とする。この条件の下、式 3.24, 3.25 を解くと、結晶の端での複素振幅は、

$$F_2(l) = \frac{\omega\chi_{eff}^{(2)} F_0^2}{cn_2\Delta k} (1 - e^{-i\Delta kl}) \quad (3.26)$$

と求められる。光の強度と複素振幅の関係は、

$$I = \frac{n}{2\mu_0 c} |F|^2 \quad (3.27)$$

と書けるので、式 3.26 の複素振幅を代入すると、2 倍波の強度は、

$$I_2 = 8\pi^2\mu_0 c \left( \frac{(\chi_{eff}^{(2)})^2}{n_1^2 n_2} \right) \left( \frac{l}{\lambda} \right) \text{sinc}^2 \left( \frac{\Delta kl}{2} \right) I_1^2 \quad (3.28)$$



となる。ここで、 $\lambda$  は基本波の波長、 $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$  である。図 3.3 は式 3.28 を 位相不

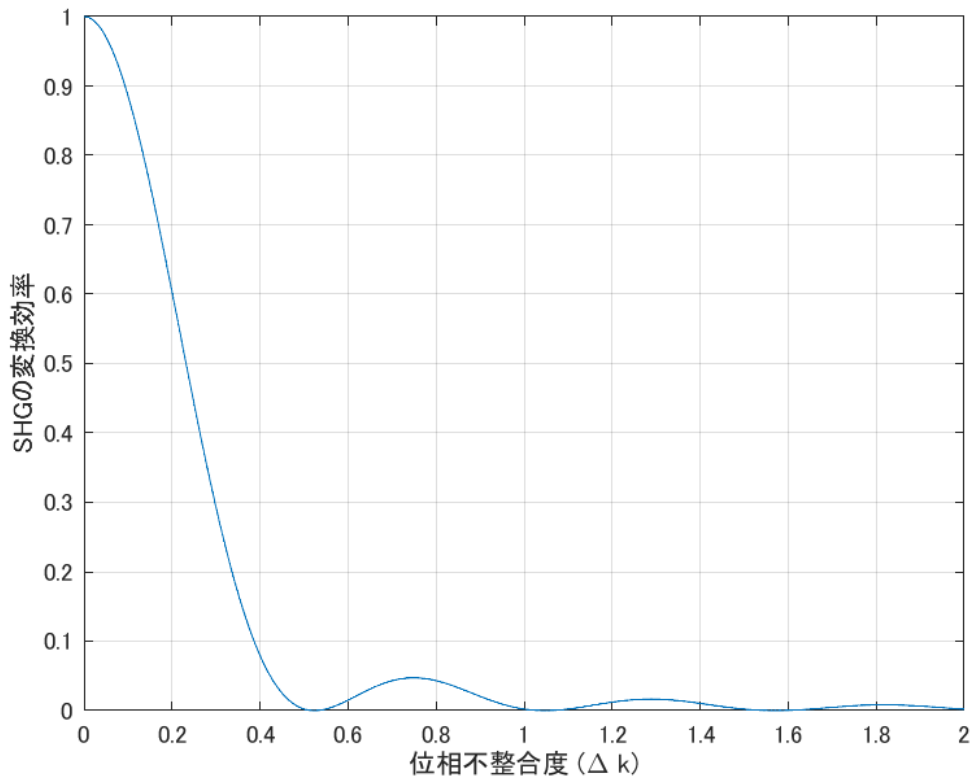


図 3.3 位相不整合度に対する SHG の変換効率

整合度に対する SHG の変換効率を表している。縦軸は入射光強度で規格化された値を用いている。式 3.28 から SHG により得られた 2 倍波の強度は、基本波強度の 2 乗に比例することがわかる。また、この図から位相整合条件  $\Delta kl \ll 1$  を満たしていれば、SHG の変換率は結晶長に比例して増大し、位相不整合条件を満たさないときは、結晶長に対して周期的に変動することがわかる。

次に、SHG の変換効率が高い場合を考える。式 3.24, 3.25 を  $z$  でもう一度微分し、エネルギー保存則

$$n_1|F_1|^2 + n_2|F_2|^2 = n_1|F_1(0)|^2 \quad (3.29)$$

を用いると、2 倍波の複素振幅の結合波方程式は以下のように書ける ( 位相整合条件を満たしている場合 ) :

$$\frac{d^2 F_2}{dz^2} + \frac{2\omega^2(\chi_{eff}^{(2)})^2}{c^2 n_1^2 n_2} (n_1|F_1(0)| - n_2|F_2|^2) F_2 = 0 \quad (3.30)$$

ここで、式 3.30 の微分方程式を変数

$$\kappa^2 = \frac{2\mu_0\omega^2(\chi_{eff}^{(2)})^2}{cn_1^2n_2}I_1(0) \quad (3.31)$$

$$x = \kappa z \quad (3.32)$$

$$y = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{F_2}{|F_1(0)|} \quad (3.33)$$

を用いて無次元化すると、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2(1 - y^2)y = 0 \quad (3.34)$$

と変形することができる。この微分方程式の解は、 $y = \tanh x$  を解に持つので 2 倍波の強度は、

$$I_2 = I_1(0) \tanh^2(\kappa z) \quad (3.35)$$

と求まる。この式から  $\kappa z \gg 1$  の領域では基本波は全て 2 倍波に変換されることがわかる。

### 3.3.2 カスケード非線形光学効果

ここまでは、位相整合条件を満たすことを前提に考えてきた。ここでは、あえて位相整合条件から外したときの振る舞いについて考える。位相不整合では、媒質表面からコヒーレンス長の 2 倍の距離のところで 2 倍波は消え、基本波だけになる。このとき、基本波に再変換される 2 倍波の位相は基本波と異なる。このため、2 倍波からの戻り光に引きずられて基本波の位相が変化する。この位相変化量は基本波の強度に依存する。こうして、式 3.9 のような 3 次の非線形光学効果であるカー効果によく似た現象が生じる。この現象を 2 次の非線形光学効果の連鎖で起こるため、カスケード非線形光学効果と呼ぶ。位相不整合が大きいと考えると、基本波の強度はほぼ一定であり、2 倍波の強度はほぼ 0 である。この条件の下、変換効率が高いときの SHG の結合波方程式は、

$$\frac{d^2F_1}{dz^2} - i\Delta \frac{dF_1}{dz} + \kappa^2 F_1 = 0 \quad (3.36)$$

と近似できる。この微分方程式の解は、

$$F_1 = F_1(0)e^{i\beta_{\pm}z} \quad (3.37)$$

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \Delta k \pm \sqrt{\Delta k^2 + 4\kappa^2} \right] \quad (3.38)$$

となる。特に  $\Delta k \gg \kappa$  のとき、小さい固有値を持つ解が主要項となるので、

$$F_1 = F_1(0)e^{i\Delta\phi_{NL}} \quad (3.39)$$

$$\Delta\phi_{NL} = -\frac{2\mu_0\omega^2(\chi_{eff}^{(2)})^2}{c\Delta kn_1^2n_2}I_1(0)z \quad (3.40)$$

となる。ここで、結晶の端での基本波の複素振幅は、

$$F_1(l) = F_1(0)e^{i\Delta\phi_{NL}} \quad (3.41)$$

と書ける。この式から、カスケード非線形光学効果により、強度に比例して入射光の位相が  $\Delta\phi_{NL}/2$  だけずれることがわかる。カスケード非線形光学効果を用いた場合、3 次の非線形光学効果を用いるよりも大きな非線形屈折率が得られること、位相不整合度を変えることで非線形屈折率の大きさや符号を調節できること、2 次の非線形光学効果を起こす方が高速であることがメリットとして挙げられる。実際に、カスケード非線形光学効果を用いた光ばねの強化 [9] [10] などが実用例として挙げられる。

### 3.4 光パラメトリック過程

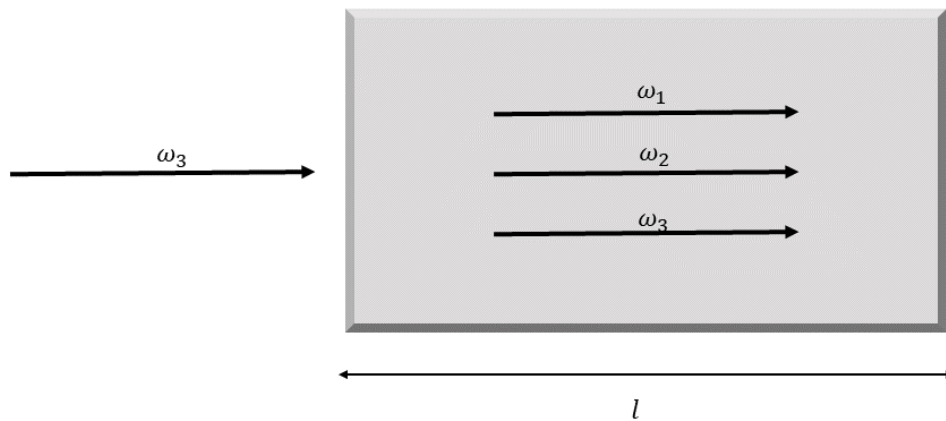


図 3.4 非線形媒質中の光パラメトリック過程

図 3.4 のように周波数  $\omega_3$  の光を非線形光学結晶に入射し、 $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  を満たす周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の光を発生させる過程を光パラメトリック過程と呼ぶ。周波数  $\omega_3$  の入射光をポンプ光、発生する周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の光のうち一方をシグナル光、残りをアイドラ光と呼ぶ。光パラメトリック過程のうち、ポンプ光とシグナル光を非線形光学結晶に同時に入射することでシグナル光を増幅させる過程を光パラメトリック増幅 (optical parametric amplifier : OPA) と呼ぶ。また、ポンプ光を共振器内に設置された非線形光学結晶に入射することで、シグナル光とアイドラ光を発生させる装置を光パラメトリック発信器 (optical parametric oscillator : OPO) と呼ぶ。ここでは、光パラメトリック増幅について詳しく述べる。

### 3.4.1 光パラメトリック増幅

式 3.20, 3.21, 3.22 の結合波方程式を用いて、光パラメトリック増幅を導出する。以下に結合波方程式を再提示する。

$$\frac{dF_1}{dz} = \frac{i\omega_1(\chi_{eff}^{(2)})^*}{2cn_1} F_2^* F_3 e^{i\Delta kz} \quad (3.42)$$

$$\frac{dF_2}{dz} = \frac{i\omega_2(\chi_{eff}^{(2)})^*}{2cn_2} F_1^* F_3 e^{i\Delta kz} \quad (3.43)$$

$$\frac{dF_3}{dz} = \frac{i\omega_3\chi_{eff}^{(2)}}{2cn_3} F_1 F_2 e^{-i\Delta kz} \quad (3.44)$$

ここで、変換効率が低く、ポンプ光  $F_3$  の減数が無視できるとして、この結合波方程式を解くと、

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} - i\Delta k \frac{dF_1}{dz} - g_0^2 F_1 = 0 \quad (3.45)$$

$$g_0^2 = \frac{1\mu_0\omega_1\omega_2(\chi_{eff}^{(2)})^2}{cn_1n_2n_3} I_3 \quad (3.46)$$

となる。アイドラ光  $F_2$  も式 3.45 に従う。この微分方程式の基本解は指数関数に従うことから、位相不整合が  $|\Delta k| < 2g_0$  のとき指数関数的に増大することがわかる。位相整合条件  $\Delta k = 0$  が満たされているときの解は、

$$F_1 = F_1(0) \cosh g_0 z + ie^{i\phi_3} \left( \frac{n_2\omega_1}{n_1\omega_2} \right)^{1/2} F_2^*(0) \sinh g_0 z \quad (3.47)$$

$$F_2^* = -ie^{-i\phi_3} \left( \frac{n_1\omega_2}{n_2\omega_1} \right)^{1/2} F_1(0) \sinh g_0 z + F_2^*(0) \cosh g_0 z \quad (3.48)$$

となる。結晶の端では、

$$F_1(l) = F_1(0) \cosh g_0 l + ie^{i\phi_3} \left( \frac{n_2\omega_1}{n_1\omega_2} \right)^{1/2} F_2^*(0) \sinh g_0 l \quad (3.49)$$

$$F_2^*(l) = -ie^{-i\phi_3} \left( \frac{n_1\omega_2}{n_2\omega_1} \right)^{1/2} F_1(0) \sinh g_0 l + F_2^*(0) \cosh g_0 l \quad (3.50)$$

となる。ここで、 $\phi_3$  はポンプ光の初期位相である。式 3.47, 3.48 からそれぞれの強度を求めると、

$$I_1 = I_1(0) + I_1(0) \sinh^2 g_0 z \quad (3.51)$$

$$I_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} I_1(0) \sinh^2 g_0 z \quad (3.52)$$

となる。ここで、シグナル光の周波数  $\omega_1$  とアイドラ光の周波数  $\omega_2$  が等しいとき式 3.51 を用いると OPA の増幅率は、

$$\frac{I_1(l)}{I_1(0)} = \cosh 2g_0 z + \sinh 2g_0 z \cos(\phi_3 - 2\phi_1 + \pi/2) \quad (3.53)$$

と求まる。ここで、 $g_0 z = u$  とおき、 $\phi_3 - 2\phi_1 + \pi/2 = \theta$  とおくと、OPA は真空場に対してスクイザーとして作用できることがわかる。式 3.53 の場合、 $e^u$  がスクイージングファクター、 $\theta$  がスクイージングアングルに該当する。

## 第 4 章

# 重力波検出器の量子雑音

現在の重力波検出器は、技術の進歩により熱雑音や地面振動雑音といった技術的な雑音を低減することができるようになった。つまり、最終的な重力波の感度は量子雑音に制限されることになる。本章では、様々な干渉計における量子雑音を導出し、それを低減するための技術について述べる。特に断りが無い限り  $T_i = t_i^2$  と表記する ( $i$  は任意の文字)。

### 4.1 量子光学

量子雑音を導出するためには、真空状態の揺らぎに対する干渉計の応答を計算する必要がある、そのためには、量子化された電場の揺らぎを振幅成分と位相成分に分けて考えなければいけない。そこで、ここでは古典電磁場の直交位相分解から始まり、電磁場の量子化、さらにその直交位相分解などの量子光学の基本的な原理について述べる。

#### 4.1.1 古典電磁場の直交位相分解

量子化された電磁場の直交位相分解を行う前に、古典電磁場に対して直交位相分解を行う。電磁場を  $z$  方向に進む平面波

$$E(z, t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) \quad (4.1)$$

として考える。式 4.1 を展開すると、

$$E(z, t) = E_0 \cos k_0 z \cos \omega_0 t + E_0 \sin k_0 z \sin \omega_0 t \quad (4.2)$$

となる。ここで、 $E_0 \cos k_0 z = E_1$ ,  $E_0 \sin k_0 z = E_2$  とし  $t$  のみの関数

$$E(t) = E_1 \cos \omega_0 t + E_2 \sin \omega_0 t \quad (4.3)$$

とする。式 4.1 の電場の振幅と位相がそれぞれ  $\delta E_0(t)$ ,  $\delta \phi(t)$  だけ揺らぐと、

$$E'(t) = (E_0 + \delta E_0) \cos(\omega_0 t - k_0 z - \delta \phi) \quad (4.4)$$

$$= (E_1 + e_1) \cos \omega_0 t + (E_2 + e_2) \sin \omega_0 t \quad (4.5)$$

となる。また、

$$e_1 = \frac{E_1}{E_0} \delta E_0 - E_2 \delta \phi$$

$$e_2 = E_1 \delta \phi + \frac{E_2}{E_0} \delta E_0$$

はそれぞれ  $E_1, E_2$  の揺らぎである。一般的に、 $E_1 = E_0, E_2 = 0$  となるときについて考えるため、 $e_1 = \delta E_0$  は振幅の揺らぎ、 $e_2 = E_0 \delta \phi$  は位相の揺らぎに対応する。そのため、 $E_1, e_1$  を振幅 quadrature、 $E_2, e_2$  を位相 quadrature という。以下の議論では電場とその揺らぎを振幅 quadrature と位相 quadrature に分けて、

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

とベクトル表記で表す。また、揺らぎの quadrature を周波数空間で考える必要があるため、揺らぎに対するフーリエ変換を

$$e_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a_j(t) e^{-i\omega t} dt \quad (j = 1, 2) \quad (4.8)$$

と定義する。実際の測定では電場ではなく、強度  $P = \hbar\omega_0 |E|^2 / 2$  であるため、

$$\begin{aligned} P &\sim \frac{\hbar\omega_0}{2} ((E_1^2 + E_2^2) + 2(E_1 e_1 + E_2 e_2)) \\ &= P_E + \delta P_E \end{aligned} \quad (4.9)$$

と書ける。重力波信号や量子雑音による電場の揺らぎは  $P_E = \hbar\omega_0 (E_1 e_1 + E_2 e_2)$  として測定されることがわかる。このことから測定を行うために用いる光を参照光 (ローカルオシレータ) と呼び、この時の入射電場に対する偏角  $\xi_E = \arctan\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$  をホモサイン角という。

#### 4.1.2 電磁場の量子化

ここまでは古典電磁場について考えてきた。しかし、量子雑音は光の量子性に起因する雑音であるため、量子化された電磁場を考える必要がある。ここでは電磁場の量子化の導出について述べる。真空中のマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.13)$$

と書ける。電場  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$  はスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いて、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.15)$$

と書ける。ここで、ゲージ条件としてクーロンゲージ  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を課すと、ベクトルポテンシャルは波動方程式

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = 0 \quad (4.16)$$

に従う。この波動方程式を解くために体積  $V = L^3$  の立方体の導体に閉じ込められた電磁場を考える。波数ベクトルを  $\mathbf{k} = (n_x \pi/L, n_y \pi/L, n_z \pi/L)$  ( $n_x, n_y, n_z$ : 整数) とすると、各波数に対するベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は波数に垂直であることがわかる。波数ベクトル  $\mathbf{k}$  に数直な方向を持つ互いに垂直なベクトルを  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k}), \mathbf{e}_2(\mathbf{k})$  とするとベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu=1,2} \sum_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}\mu} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + A_{\mathbf{k}\mu}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}) \mathbf{e}_\mu \quad (4.17)$$

と求まる。よって、電場  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu=1,2} \sum_{\mathbf{k}} i\omega_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}\mu} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} - A_{\mathbf{k}\mu}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}) \mathbf{e}_\mu(\mathbf{k}) \quad (4.18)$$

となり、磁束密度  $\mathbf{B}$  は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu=1,2} \sum_{\mathbf{k}} ik (A_{\mathbf{k}\mu} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} - A_{\mathbf{k}\mu}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_\mu(\mathbf{k}) \quad (4.19)$$

となる。 $\hat{\mathbf{k}}$  は波数ベクトルの方向を向いた単位ベクトルである。ここで、電場のハミルトニアン

$$H = \int \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\nu_0} \mathbf{B}^2 \right) \quad (4.20)$$

を計算する。まず、電場による項を計算すると、

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E}^2 d\mathbf{r} &= V \sum_{\mu, \mathbf{k}} [-\omega_{\mathbf{k}} \omega_{-\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}\mu} A_{-\mathbf{k}\mu} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}})t} + A_{\mathbf{k}\mu}^* A_{-\mathbf{k}\mu}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}})t}) \\ &\quad + \omega_{\mathbf{k}}^2 (A_{\mathbf{k}\mu} A_{\mathbf{k}\mu}^* + A_{\mathbf{k}\mu}^* A_{\mathbf{k}\mu})] \end{aligned} \quad (4.21)$$

となる。さらに、磁場による項も計算すると、

$$\int \mathbf{B}^2 d\mathbf{r} = V \sum_{\mu, \mathbf{k}} \mathbf{k}^2 [(A_{\mathbf{k}\mu} A_{-\mathbf{k}\mu} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{-\mathbf{k}})t} + A_{\mathbf{k}\mu}^* A_{-\mathbf{k}\mu}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{-\mathbf{k}})t}) + (A_{\mathbf{k}\mu} A_{\mathbf{k}\mu}^* + A_{\mathbf{k}\mu}^* A_{\mathbf{k}\mu})] \quad (4.22)$$

となる。これらをハミルトニアンの式 4.20 に代入すると、

$$H = \sum_{\mu, \mathbf{k}} 2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}^2 V A_{\mathbf{k}\mu} A_{\mathbf{k}\mu}^* \quad (4.23)$$

と求まる。このハミルトニアンを調和振動子のハミルトニアンの形にするために、一般化座標  $Q_{\mathbf{k}\mu} = 2\sqrt{\varepsilon_0 V} \operatorname{Re}[A_{\mathbf{k}\mu}]$ 、一般化運動量  $P_{\mathbf{k}\mu} = 2\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\varepsilon_0 V} \operatorname{Im}[A_{\mathbf{k}\mu}]$  と定義することで、変数変換を行う。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \mathbf{k}} (P_{\mathbf{k}\mu}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\mu}^2) \quad (4.24)$$



こうすることで、調和振動子のハミルトニアンと一致させることができた。さら、 $[\hat{Q}_{\mathbf{k}\mu}, \hat{P}_{\mathbf{k}\mu}] = i\hbar$  という交換関係を課すことで、量子化した電磁場を以下のように考えることができる。

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \mathbf{k}} [\hat{P}_{\mathbf{k}\mu}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{Q}_{\mathbf{k}\mu}^2] \quad (4.25)$$

また、生成消滅演算子を

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\mu} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2\hbar}} \hat{Q}_{\mathbf{k}\mu} + i \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \hat{P}_{\mathbf{k}\mu} \quad (4.26)$$

と定義すると、

$$\hat{A}_{\mathbf{k}\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} V \hat{a}_{\mathbf{k}\mu} \quad (4.27)$$

となる。ここで、演算子の交換関係は  $[\hat{a}_{\mathbf{k}\mu}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\nu}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mu\nu}$  となる。式 4.27 を式 4.18, 4.19 に代入すると量子化された電場と磁束密度は、

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mu=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\mu} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - \hat{a}_{\mathbf{k}\mu}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}) e_{\mu}(\mathbf{k}) \quad (4.28)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mu=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\mu_0\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\mu} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - \hat{a}_{\mathbf{k}\mu}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}) \hat{\mathbf{k}} \times e_{\mu}(\mathbf{k}) \quad (4.29)$$

と求まる。

### 4.1.3 量子化された電磁場の直交位相分解

ここでは、量子化された電場の直交位相分解を行う。自由空間中を  $z$  軸方向に伝搬する電場を考えると式 4.28 は、

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0 c \mathcal{A}}} (\hat{a}_{\omega} e^{-i\omega t} + \hat{a}_{\omega}^\dagger e^{i\omega t}) d\omega \quad (4.30)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} &\rightarrow \frac{l}{2\pi c} \int d\omega \\ i\sqrt{\frac{2\pi c}{l}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(i\omega z/c) &\rightarrow \hat{a}_{\omega} \\ \frac{V}{l} &\rightarrow \mathcal{A} \end{aligned}$$

とした。 $\mathcal{A}$  は実効的なビームの断面積を表す。また、 $\hat{a}_{\omega}, \hat{a}_{\omega}^\dagger$  に対する交換関係は、

$$[\hat{a}_{\omega}, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (4.31)$$

となる。各周波数  $\Omega$  の重力波によって、角周波数  $\omega_0$  のキャリア光から  $\omega_0 + \Omega$  と  $\omega_0 - \Omega$  のサイドバンドが発生する。この時の電場は、

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c \mathcal{A}}} \int_0^\infty [e^{-i\omega_0 t} (\hat{a}_+ e^{-i\Omega t} + \hat{a}_- e^{i\Omega t}) + e^{i\omega_0 t} (\hat{a}_+^\dagger e^{i\Omega t} + \hat{a}_-^\dagger e^{-i\Omega t})] d\Omega \quad (4.32)$$

と書ける。 $\hat{a}_+ = \hat{a}_{\omega_0+\Omega}$  と  $\hat{a}_- = \hat{a}_{\omega_0-\Omega}$  はそれぞれアップーサイドバンドとロウワーサイドバンドの消滅演算子である。交換関係は、

$$[\hat{a}_+, \hat{a}_{+'}^\dagger] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad (4.33)$$

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_{-' }^\dagger] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad (4.34)$$

である。さらに、

$$\hat{a}_1(\Omega) = \frac{\hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (4.35)$$

$$\hat{a}_2(\Omega) = \frac{\hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (4.36)$$

を導入することで、式 4.32 の電場は、

$$\hat{E}(t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 c \mathcal{A}}} [\hat{a}_1(t) \cos(\omega_0 t) + \hat{a}_2(t) \sin(\omega_0 t)] \quad (4.37)$$

となる。これが量子化された電場の直交位相分解である。 $\hat{a}_1(t)$  が振幅 quadrature、 $\hat{a}_2$  が位相 quadrature にそれぞれ対応する。ここで、それぞれの演算子の交換関係は、

$$[\hat{a}_1(\Omega), \hat{a}_2^\dagger(\Omega')] = i2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad (4.38)$$

である。また、

$$\hat{a}_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\hat{a}_j(\Omega) e^{-i\Omega t} + \hat{a}_j^\dagger(\Omega) e^{i\Omega t}) d\Omega \quad (4.39)$$

としており、これは振幅 quadrature と位相 quadrature のフーリエ変換に対応する。

#### 4.1.4 パワースペクトル密度

ここでは重力波信号と量子雑音の信号雑音比に対するパワースペクトル密度について考える。状態  $|\phi\rangle$  の揺らぎが干渉計に入り、信号と揺らぎに起因する雑音の和が出力として得られたとき、信号雑音比を示す演算子が  $\hat{h}_n(\omega)$  と求まったときを考える。パワースペクトル密度の定義は式 2.15 で与えられているため、これらから感度の片側スペクトル密度  $S_h(f)$  は

$$\frac{1}{2} \langle \phi | h_n(\omega) h_n^\dagger(\omega) + h_n^\dagger(\omega) h_n(\omega) | \phi \rangle = \pi\delta(\omega - \omega') S_h(f) \quad (4.40)$$

と書ける。干渉計に入る状態  $|\phi\rangle$  が任意の周波数に対する消滅演算子と作用させることで 0 となるコヒーレント状態であったとすると、

$$\frac{1}{2} \langle 0 | \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j | 0 \rangle = \pi\delta(\omega - \omega') \delta_{jk} \quad (4.41)$$

となる。 $|0\rangle$  は真空状態を表し、計算には式 4.33, 4.34, 4.38 の交換関係を用いた。よって  $h_n(\omega) = \eta_1 \hat{a}_1 + \eta_2 \hat{a}_2$  と書ける量子雑音による感度は、

$$S_h(f) = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 \quad (4.42)$$

と求まる。

## 4.1.5 スクイーズド状態

ここでは重力波検出器に用いられているスクイージング技術の基本となるスクイーズド状態について述べる。スクイーズド状態とは最小不確定性状態を保ったまま位相もしくは振幅 quadrature を片方よりも小さく圧搾した状態である。シングルモードに対するスクイーズド状態  $|\xi, \alpha\rangle$  は、

$$|\xi, \alpha\rangle := \exp(\xi^* \hat{a}^2 - \xi (\hat{a}^\dagger)^2) / 2 |\alpha\rangle = \hat{S}(\xi) |\alpha\rangle \quad (4.43)$$

で定義される。 $|\alpha\rangle$  はコヒーレント状態である。コヒーレント状態からスクイーズド状態への変換を消滅演算子を用いて書き直すと、

$$\hat{b} = \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \quad (4.44)$$

となる。また演算子  $\hat{b}$  を用いて直交位相分解を

$$\hat{X}_1 = \frac{\hat{b} + \hat{b}^\dagger}{2} \quad (4.45)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{\hat{b} - \hat{b}^\dagger}{2i} \quad (4.46)$$

と定義する。ここで  $\xi = -ue^{2i\theta}$  と置くと、 $\hat{a}_\theta = \hat{x}_1 \cos \theta + \hat{x}_2 \sin \theta$  は、

$$\hat{b}_\theta = e^u \hat{a}_\theta \quad (4.47)$$

$$\hat{b}_{\theta+\frac{\pi}{2}} = e^{-u} \hat{a}_{\theta+\frac{\pi}{2}} \quad (4.48)$$

となる。 $\hat{b}_\theta = \hat{X}_1 \cos \theta + \hat{X}_2 \sin \theta$  である。よって各 quadrature の揺らぎは、

$$\Delta b_\theta = \frac{1}{2} e^u \quad (4.49)$$

$$\Delta b_{\theta+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{-u} \quad (4.50)$$

と書ける。振幅 quadrature と位相 quadrature は、

$$\hat{b}_1 = (\cosh u + \sinh u \cos 2\theta) \hat{a}_1 + (\sinh u \sin 2\theta) \hat{a}_2 \quad (4.51)$$

$$\hat{b}_2 = (\sinh u \sin 2\theta) \hat{a}_1 + (\cosh u - \sinh u \cos 2\theta) \hat{a}_2 \quad (4.52)$$

となり、ベクトル表示に書き直すと

$$\mathbf{b} = S(u, \theta) \mathbf{a} \quad (4.53)$$

となる。ここで  $S(u, \theta)$  はスクイージング行列と呼ばれ、

$$S(u, \theta) = \begin{pmatrix} \cosh u + \sinh u \cos 2\theta & \sinh u \sin 2\theta \\ \sinh u \sin 2\theta & \cosh u - \sinh u \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

となる。 $s = \exp(u)$  はスクイージングファクター、 $\theta$  はスクイージングアングルという。図 4.1 にスクイーズド状態の真空場のイメージ図を示す。

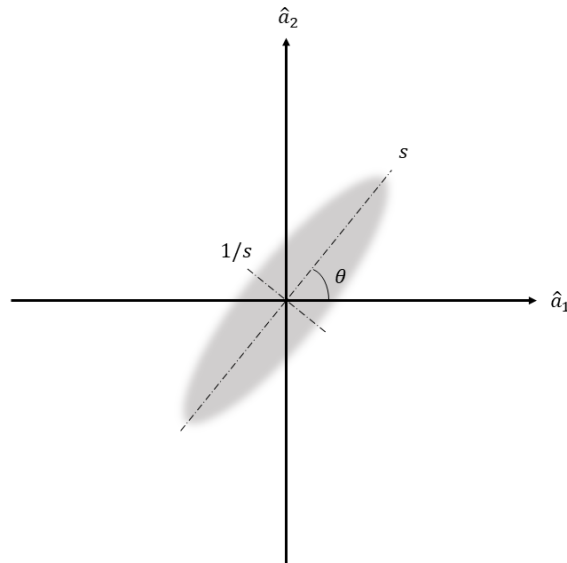


図 4.1 スクイズド状態の真空場のイメージ図

## 4.2 演算子の定義

ここでは式 4.6,4.7 で定義したキャリア光とその揺らぎの振幅 quadrature と位相 quadrature に対して、干渉計を構成する各要素が与える変換について述べる。

### 4.2.1 伝搬

図 4.2 のように電場が距離  $L$  だけ自由空間を伝搬した場合を考える。これは時間が  $\tau = \frac{L}{c}$  だけ遅れるのと同様であるため、

$$\mathbf{B} = R(\phi)\mathbf{A} \tag{4.55}$$

$$\mathbf{b}(t) = R(\phi)\mathbf{a}(t - \tau) \tag{4.56}$$

と書ける。 $\phi = \frac{L\Omega}{c}$  は伝搬による位相変化であり、 $R(\phi)$  は回転行列

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

である。電場の揺らぎをフーリエ変換することで、

$$\mathbf{b}(\omega) = e^{-i\frac{L\omega}{c}} R(\phi)\mathbf{a}(\omega) \tag{4.58}$$

が得られる。

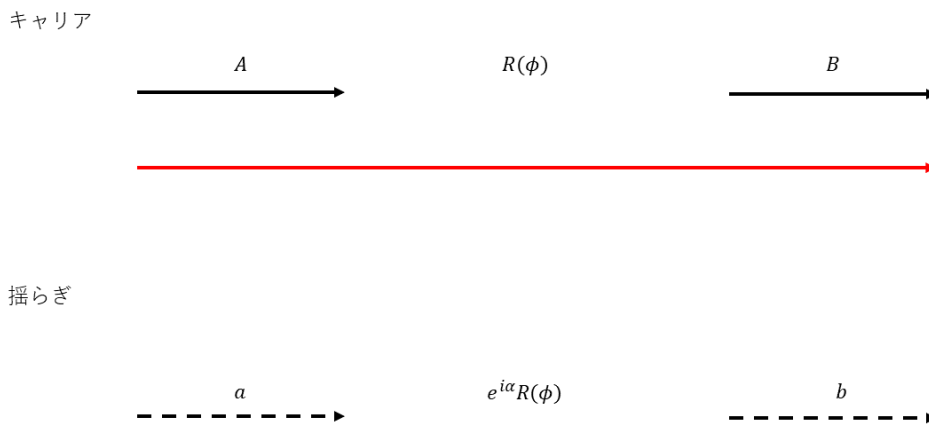


図 4.2 自由空間での伝搬 ( $\alpha = -\omega\tau$ )

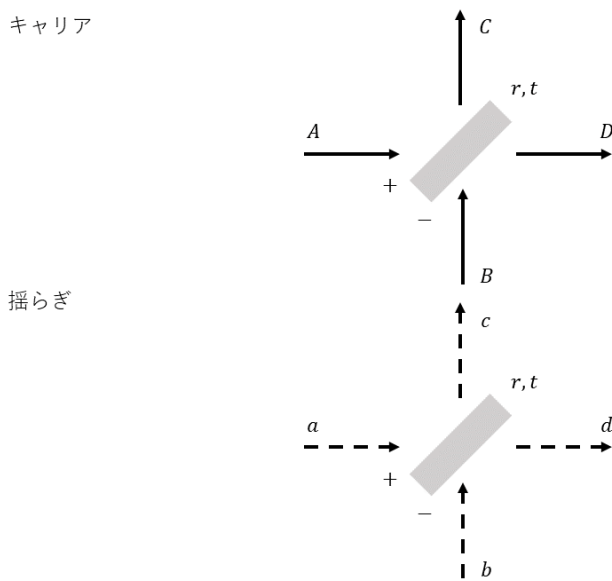


図 4.3 鏡での透過・反射

### 4.2.2 鏡での透過・反射

図 4.3 のように振幅反射率、透過率がそれぞれ  $r, t$  である鏡で、電場を干渉させることを考える。ここで、鏡の内部で起こる反射と外部で起こる反射は位相が反転することに注意すると、

$$C(t) = rA(t) + tB(t) \tag{4.59}$$

$$D(t) = tA(t) - rB(t) \tag{4.60}$$

となる。よって、

$$\mathbf{C} = r\mathbf{A} + t\mathbf{B} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{D} = t\mathbf{A} - r\mathbf{B} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{c}(\omega) = r\mathbf{a}(\omega) + t\mathbf{b}(\omega) \quad (4.62)$$

$$\mathbf{d}(\omega) = t\mathbf{a}(\omega) - r\mathbf{b}(\omega) \quad (4.63)$$

と書ける。

### 4.2.3 光パラメトリック増幅の作用

非線形光学効果の1つである OPA を用いることで、スクイズド状態を作ることができる。式 3.49 によりキャリア光に対して OPA を起こすと、

$$\begin{aligned} B(t) = & [(A_1 + a_1(t)) \cos \omega_0 t + (A_2 + a_2(t)) \sin \omega_0 t] \cosh u \\ & + [(A_1 + a_1(t)) \cos(\omega_0 t - 2\theta) - (A_2 + a_2(t)) \sin(\omega_0 t - 2\theta)] \sinh u \end{aligned} \quad (4.65)$$

となる。 $2\theta = \phi' + \pi/2$  はスクイーミングアングルである。よって、

$$\mathbf{B} = S(u, \theta)\mathbf{A} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{b}(\omega) = S(u, \theta)\mathbf{a}(\omega) \quad (4.67)$$

と書ける。スクイーミング行列は式 4.54 より

$$S(u, \theta) = R(\theta) \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} R(-\theta) \quad (4.68)$$

となる。 $s$  はスクイーミングの大きさを表すスクイーミングファクターである。

### 4.2.4 重力波信号の発生とスクイーミング

ここでは、重力波検出器に用いられている自由質点となる鏡が電場の揺らぎに与える影響について述べる。重力波検出器には自由質点となる鏡が用いられている。この時、鏡で電場が反射することでその揺らぎに鏡の微小変化に比例した信号が加わる。そして電場揺らぎのそれぞれの quadrature は輻射圧を介して変換される。このことから、懸架鏡はスクイザーとして働くようになるため、これを ponderomotive スクイーミングという。図 4.4 のような自由質点となる鏡を考える。この鏡が微小変位  $\delta x(t)$  だけ動くとき、反射光の位相が変化することを考慮すると、

$$B(t) \sim (A_1 + a_1(t) - 2A_2 k_0 \delta x(t)) \cos \omega_0 t + (A_2 + a_2(t) + 2A_1 k_0 \delta x(t)) \sin \omega_0 \quad (4.69)$$

となる。よって、

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{a}(t) + 2k_0 \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} \delta x(t) \quad (4.71)$$

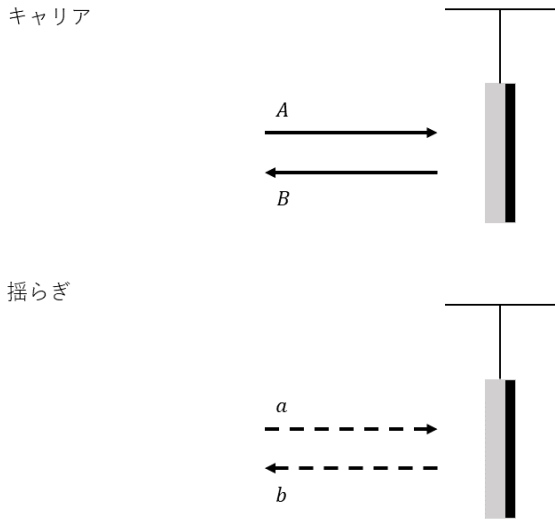


図 4.4 懸架鏡による反射

と書ける。さらに、 $\delta x(t)$  を求めるために鏡の変位に対する運動方程式を立てる。鏡に働く力を考える値、機械的な復元力、光の輻射圧、重力波が鏡に与える力である。まず、光の輻射圧によって受ける力  $F_{RP}$  を考える。これは運動量と力積の関係から、

$$F_{RP}^{tot}(t) = 2\hbar k_0((A_1 + a_1(t))^2 + (A_2 + a_2(t))^2) \sim F_{RP} + \delta F_{RP}(t) \quad (4.72)$$

となる。ここで、 $F_{RP}$  は機械的な復元力と釣り合っているため、打ち消される。次に重力波が鏡に与える力  $F_{GW}$  を考える。振幅  $h(t)$  の重力波が検出器に到達すると、光路長  $L$  は  $Lh(t)$  分だけ長くなる。よって、重力波による力  $F_{GW}$  は、

$$F_{GW} = \frac{1}{2}mL \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \quad (4.73)$$

となる。式 4.72, 4.73 を用いて鏡の変位に対する運動方程式を立てると、

$$m \frac{d^2(\delta x(t))}{dt^2} = \delta F_{RP} + \frac{1}{2}mL \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \quad (4.74)$$

と書ける。式 4.74 をフーリエ変換すると、

$$\delta x(t) = -\frac{2\hbar k_0}{m\omega^2}(A_1 a_1(\omega) + A_2 a_2(\omega)) + \frac{1}{2}Lh(\omega) \quad (4.75)$$

となり、式 4.71 もフーリエ変換し式 4.75 を代入すると、

$$\mathbf{b}(\omega) = P(k_A, \xi_A)\mathbf{a}(\omega) + \zeta_A \mathbf{n}_{A\perp} h(\omega) \quad (4.76)$$

となる。ここで、

$$P(k_A, \xi_A) = R(\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} R(-\xi) \quad (4.77)$$

は ponderomotive スクイーミング行列であり、

$$\mathbf{n}_{A\perp} = \begin{pmatrix} -\sin \xi_A \\ \cos \xi_A \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

はキャリア  $\mathbf{A}$  に対して垂直な単位ベクトルである。 $\xi_A = \arctan(A_2/A_1)$  は入射光に対するキャリアの偏角を表している。また、

$$\kappa = \frac{8P_A\omega_0}{mc^2\omega^2} \quad (4.79)$$

$$h_{SQL} = \sqrt{\frac{8\hbar}{mL^2\omega^2}} \quad (4.80)$$

はそれぞれ、オプトメカニカル結合定数、干渉計の SQL である。式 4.76 の第 1 項目は鏡がスクイザーとして働いていることを示している。また、式 4.76 の第 2 項目は重力波がキャリアと直交した方向に揺らぎとして現れることを示している。つまり、重力波検出器は重力波によって発生したサイドバンドを検出する装置だと言える。

### 4.3 様々な量子雑音

ここでは干渉型重力波検出器の量子雑音について述べる。以下では重力波検出器 KAGRA に合わせて、干渉計の腕の長さ  $L = 3$  km、鏡の質量を  $m = 23$  kg としている。

#### 4.3.1 マイケルソン干渉計

まず、干渉型重力波検出器の基本となるマイケルソン干渉計の量子雑音を導出する。図 4.5 のように腕の長さ  $L_x$  と  $L_y$  のマイケルソン干渉計を考え、電場とその揺らぎを定義する。古典電場の入出力関係は、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{H} + \mathbf{D}}{\sqrt{2}}, \mathbf{C} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{K}}{\sqrt{2}}, \mathbf{G} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{K}}{\sqrt{2}}, \mathbf{L} = \frac{\mathbf{H} - \mathbf{D}}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{D} &= R(\phi_x)\mathbf{F}, \mathbf{E} = R(\phi_x)\mathbf{C}, \mathbf{F} = \mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= R(\phi_y)\mathbf{J}, \mathbf{I} = R(\phi_y)\mathbf{G}, \mathbf{J} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.81)$$

となる。 $\phi_x, \phi_y$  は  $L_x, L_y$  を電場が伝搬するときに生じる位相変化である。ここで、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{K} = 0$  とすると、

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{2}R(2\phi_x)[I + R(2\phi_-)]\mathbf{A} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{L}' = \frac{1}{2}R(2\phi_x)[I - R(2\phi_-)]\mathbf{A} \quad (4.83)$$

となる。ここで、各腕の位相差  $\phi_- = \phi_y - \phi_x$  とした。式 4.83 に注目すると、出力電場は  $\phi_-$  のみに依存することがわかる。この位相差が 0 のときをダークフリンジと呼び、 $\pi/2$  のときをブライトフリンジと呼ぶ。また、これ以外の状態をミッドフリンジと呼ぶ。次に、電場の揺ら



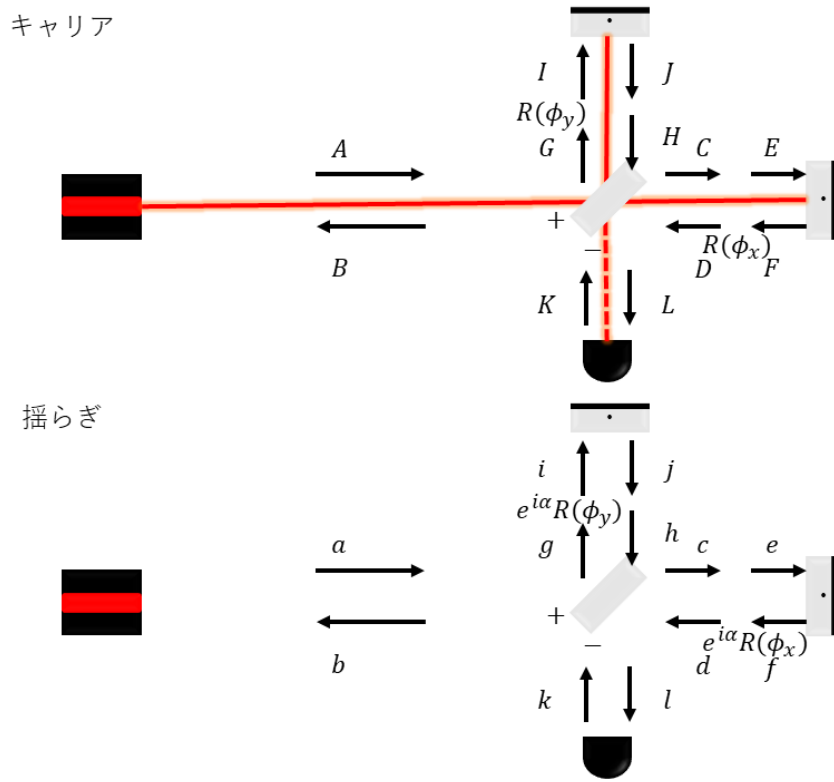


図 4.5 マイケルソン干渉計

ぎに対する入出力関係を考えると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{h} + \mathbf{d}}{\sqrt{2}}, \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}, \mathbf{g} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}, \mathbf{l} = \frac{\mathbf{h} - \mathbf{d}}{\sqrt{2}} \\
 \mathbf{d} &= e^{i\alpha} R(\phi_x) \mathbf{f}, \mathbf{e} = e^{i\alpha} R(\phi_x) \mathbf{c}, \mathbf{f} = P(\kappa, \xi_E) \mathbf{e} - \frac{\sqrt{\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \mathbf{n}_{E\perp} h(\omega) \\
 \mathbf{h} &= e^{i\alpha} R(\phi_y) \mathbf{j}, \mathbf{i} = e^{i\alpha} R(\phi_y) \mathbf{g}, \mathbf{j} = P(\kappa, \xi_J) \mathbf{i} + \frac{\sqrt{\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \mathbf{n}_{J\perp} h(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

となる。ここで、 $h_{SQL} = \sqrt{4\hbar/mL^2\omega^2}$ ,  $P_E = P_J = P_A/2$ ,  $\mathcal{K} = 4P_A\omega_0/mc^2\omega^2$ ,  $\alpha = L\omega/c$  とした。古典電場と同様に計算すると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}' &= R(-2\phi_x) \mathbf{b} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2i\alpha} [I + R(\phi_-)] P(\mathcal{K}, 0) \mathbf{a} + \frac{1}{2} e^{2i\alpha} [-I + R(2\phi_-)] P(\mathcal{K}, 0) \mathbf{k} \\
 &\quad + e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_- \\ \cos 2\phi_- - 1 \end{pmatrix} h(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{l}' &= R(-2\phi_x) \mathbf{l} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2i\alpha} [-I + R(2\phi_-)] P(\mathcal{K}, 0) \mathbf{a} + \frac{1}{2} e^{2i\alpha} [I + R(2\phi_-)] P(\mathcal{K}, 0) \mathbf{k} \\
 &\quad + e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_- \\ \cos 2\phi_- + 1 \end{pmatrix} h(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

となる。式 4.85, 4.86 の第三項に注目すると、ダークフリンジのときは重力波信号がすべて出力ポートに現れ、ブライトフリンジのときは重力波信号がすべて入力ポートに現れることがわかる。そのため、重力波検出器ではマイケルソン干渉計をダークフリンジで動作させるのが一般的である。ここで、式 4.86 の  $\phi_-$  を 0 にすると、

$$\mathbf{l}' = e^{2i\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k} + e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\omega) \quad (4.87)$$

となる。第1項は量子雑音、第2項は重力波信号を表している。そして、信号雑音比を表す演算子  $h_n(\omega)$  を

$$h_n(\omega) = \frac{h_{SQL}}{\sqrt{2\mathcal{K}}} (-\mathcal{K}k_1 + k_2) e^{i\alpha} \quad (4.88)$$

となる。この式から振幅スペクトル密度を求め、パワーごとにプロットしたグラフを図 4.6 に示す。これがマイケルソン干渉計の感度を表している。パワーを上げることで感度をよくする

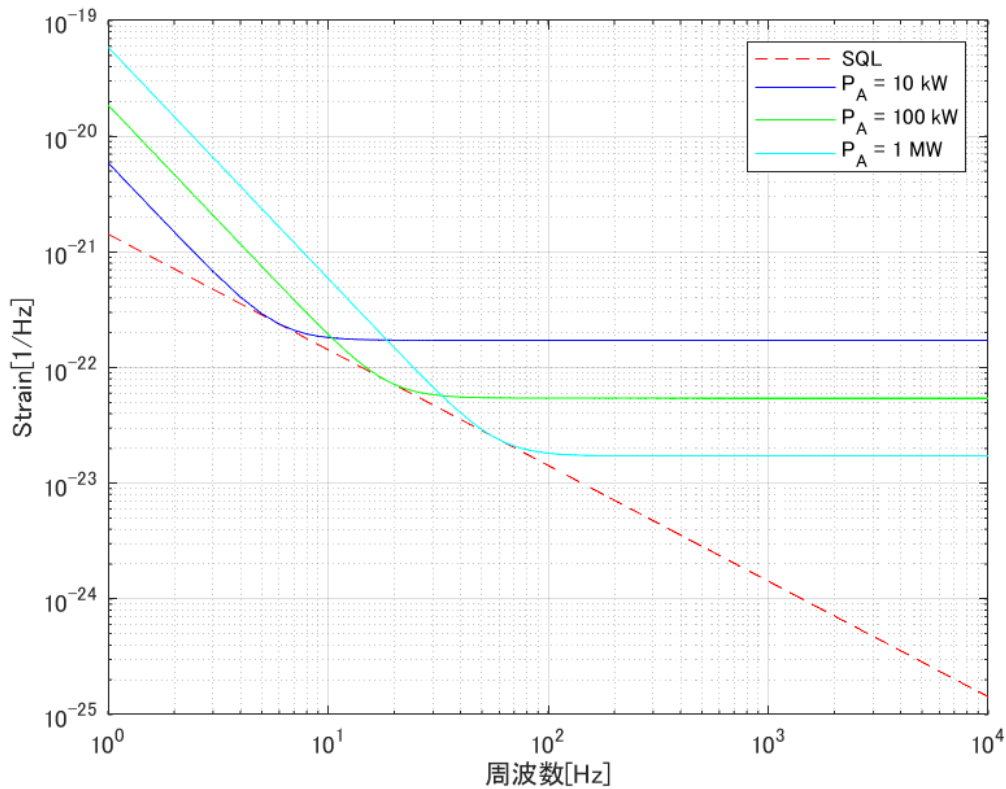


図 4.6 マイケルソン干渉計の感度

ことができるが、実際のレーザー光源として安定的に使用できるのは 100 W 程度であり、重力波検出までの感度を実現することはできない。そこで、重力波検出器にいくつかの光共振器を組み込むことで、感度の向上を実現している。

### 4.3.2 ファブリペロー共振器

ここでは重力波検出器の感度向上のために多用されている光共振器の基本原理について述べる。図 4.7 のような最も簡単なファブリペロー共振器を考える。2 つの鏡の距離を  $L$  とする。

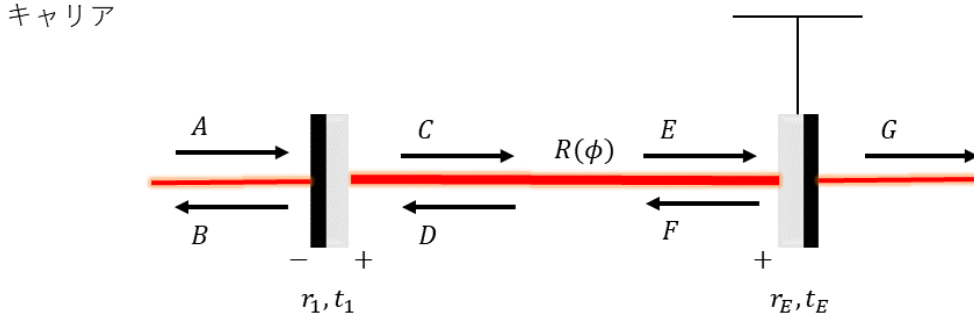


図 4.7 ファブリペロー共振器

古典電場の入出力関係は、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -r_1 \mathbf{A} + t_1 \mathbf{D}, \mathbf{C} = t_1 \mathbf{A} + r_1 \mathbf{D} \\ \mathbf{D} &= R(\phi) \mathbf{F}, \mathbf{E} = R(\phi) \mathbf{C}, \mathbf{F} = r_E \mathbf{E}, \mathbf{G} = t_E \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.89)$$

となる。そして、反射光  $\mathbf{B}$ 、入射光  $\mathbf{G}$  についてそれぞれ解くと、

$$\mathbf{B} = -r_1 A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t_1^2 r_E A_0}{1 + r_1^2 r_E^2 - 2r_1 r_E \cos 2\phi} \begin{pmatrix} \cos 2\phi - r_1 r_E \\ \sin 2\phi \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

$$\mathbf{G} = \frac{t_1 t_E A_0}{1 + r_1^2 r_E^2 - 2r_1 r_E \cos 2\phi} \begin{pmatrix} (1 - r_1 r_E) \cos 2\phi \\ (1 + r_1 r_E) \sin 2\phi \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

となる。よって、古典的な反射光強度  $P_B$  と透過光強度  $P_G$  は、

$$P_B = \frac{r_1^2 + r_E^2 - 2r_1 r_E \cos 2\phi}{1 + r_1^2 r_E^2 - 2r_1 r_E \cos 2\phi} P_A \quad (4.92)$$

$$P_A = \frac{t_1^2 t_E^2}{1 + r_1^2 r_E^2 - 2r_1 r_E \cos 2\phi} P_A \quad (4.93)$$

となる。これは、エネルギー保存  $P_B + P_G = P_A$  を満たすことがわかる。また、共振器内強度  $P_E$  は、

$$P_E = \frac{t_1^2}{1 + r_1^2 r_E^2 - 2r_1 r_E \cos 2\phi} P_A \quad (4.94)$$

となる。式 4.94 を  $\phi$  の関数としてプロットしたものが図 4.8 である。 $\phi = n\pi$  のとき、共振器

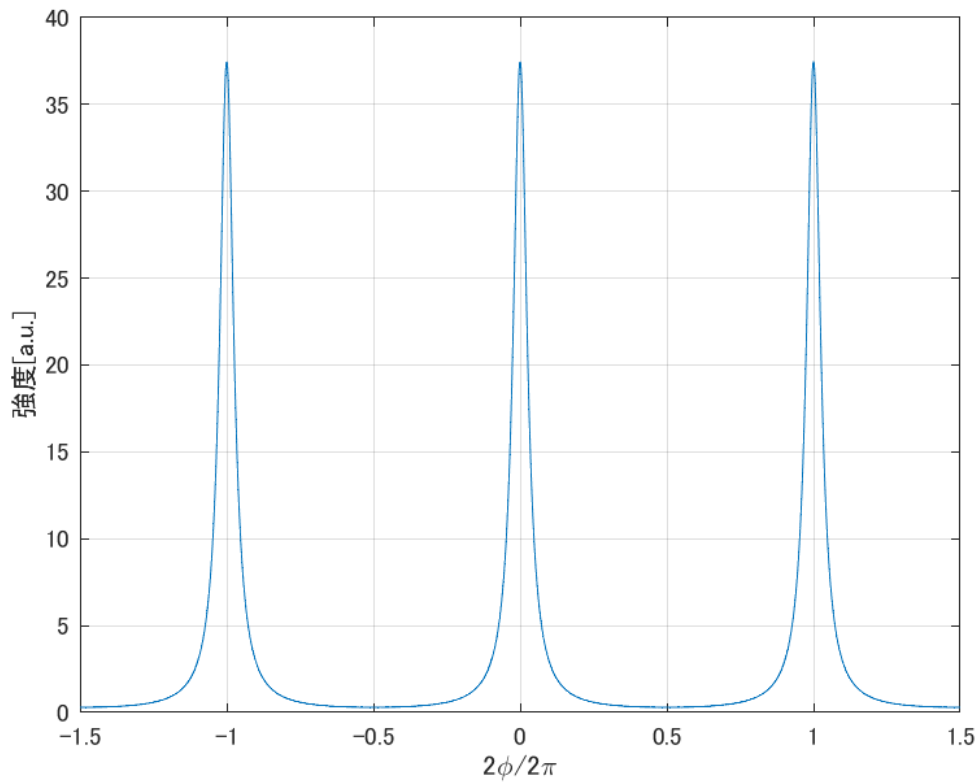


図 4.8 ファブリペロー共振器内強度

内強度が最大になっていることがわかる。これを共振器が共振状態にあるという。また、共振状態の間隔を Free Spectrum Range ( FSR ) と呼び、FSR に対応する共振器長間隔  $L_{FSR}$ 、光の周波数間隔  $f_{FSR}$  はそれぞれ、

$$L_{FSR} = \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.95)$$

$$f_{FSR} = \frac{c}{2L_c} \quad (4.96)$$

である。鏡の反射率が高く共振が鋭い場合、共振ピークの半値全幅  $f_{FWHM}$  は、

$$f_{FWHM} = \frac{1 - r_1 r_E}{\pi \sqrt{r_1 r_E}} f_{FSR} \quad (4.97)$$

となる。そして、FSR と FWHM の比を共振器のフィネスと呼び、

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_E}}{1 - r_1 r_E} \sim \frac{2\pi}{T_1 + T_E} \quad (4.98)$$

と書ける。これを用いて共振器内強度を 3 つの状態に分けると、

$$P_E \sim \frac{2\mathcal{F}}{\pi} P_A (T_1 \gg T_E) \quad (4.99)$$

$$P_E \sim \frac{\mathcal{F}}{\pi} P_A (T_1 = T_E) \quad (4.100)$$

$$P_E \sim 0 (T_1 \ll T_E) \quad (4.101)$$

である。式 4.99 の状態をオーバーカップリング、式 4.100 の状態をクリティカルカップリング、式 4.101 の状態をアンダーカップリングとそれぞれ呼ぶ。実際には、アンダーカップリングでは共振器内に光がたまらないため、この状態にならないように設計する必要がある。次に、電場の揺らぎの入出力関係について考える。図 4.9 のようなオーバーカップリングである

揺らぎ

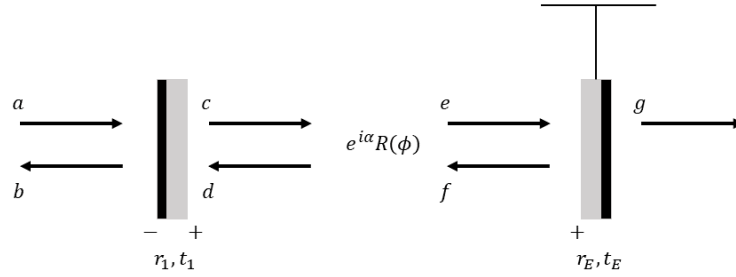


図 4.9 オーバーカップリングのファブリペロー共振器

場合の入出力関係は、

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -r_1 \mathbf{a} + t_1 \mathbf{d}, \mathbf{c} = t_1 \mathbf{a} + r_1 \mathbf{d} \\ \mathbf{d} &= e^{i\alpha} R(\phi) \mathbf{f}, \mathbf{e} = e^{i\alpha} R(\phi) \mathbf{c}, \mathbf{f} = P(\mathcal{K}, \xi_E) \mathbf{e} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \mathbf{n}_{E\perp} h(\omega) \end{aligned} \quad (4.102)$$

となる。ここで、 $\mathcal{K} = 16FP_A \omega_0 / \pi m c^2 \omega^2$ ,  $h_{SQL} = \sqrt{8\hbar / mL^2 \omega^2}$  である。 $\mathbf{b}$  について共振状態 ( $\phi = 0$ ) の時を考えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [-r_1 I + \frac{t_1^2 e^{2i\alpha}}{(1 - r_1 e^{2i\alpha})^2} \begin{pmatrix} 1 - r_1 e^{2i\alpha} & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 - r_1 e^{2i\alpha} \end{pmatrix}] \mathbf{a} \\ &+ \frac{t_1 e^{i\alpha}}{(1 - r_1 e^{2i\alpha})^2} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - r_1 e^{2i\alpha} \end{pmatrix} h_{SQL} \end{aligned} \quad (4.103)$$

となる。さらに、 $T = t_1^2 \ll 1, \alpha \ll 1$  として近似すると、

$$\mathbf{b} \sim \frac{\gamma - i\omega}{\gamma + i\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\gamma\tau}{\omega^2(\gamma^2 + \omega^2)} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} + \frac{\gamma - i\omega}{\sqrt{\gamma + \omega^2}} \frac{\sqrt{2\gamma\tau/\omega^2(\gamma^2 + \omega^2)}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\omega) \quad (4.104)$$

と書ける。ここで、 $\gamma = T_C / 4L, \tau = 8P_E \omega_0 / mLc$  とおいた。さらに、

$$\mathcal{K} = \frac{\gamma\tau}{\omega^2(\gamma^2 + \omega^2)} \quad (4.105)$$

$$\beta = \arctan(-\omega/\gamma) \quad (4.106)$$

とおくことで、

$$\mathbf{b} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} + e^{i\beta} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\omega) \quad (4.107)$$

となる。式 4.107 の第 2 項の絶対値をとると、重力波信号にたしてファブリペロー共振器は 1 次のローパスフィルタとして機能することがわかる。このときのカットオフ周波数が  $\gamma$  によって決まり、これをキャビティポールと呼ぶ。周波数  $\omega$  がキャビティポールより十分低いとき、式 4.107 の  $\mathcal{K}$  は、

$$\mathcal{K} \sim \frac{8P_A\omega_0}{mc^2\omega^2} \left( \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \right)^2 \quad (4.108)$$

となる。これは自由質点のオプトメカニカル結合定数  $\kappa$  (式 4.79) と比較すると  $\frac{2\mathcal{F}}{\pi}$  倍だけされていることがわかる。つまり、光共振器はレーザー光強度をフィネス倍程度増幅するだけでなく、重力波新語の応答もフィネス倍程度強化することができる。また、同条件でファブリペロー共振器の位相遅れ  $\beta$  を考えると、

$$\beta \sim \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \alpha \quad (4.109)$$

となり、位相遅れも  $\frac{2\mathcal{F}}{\pi}$  倍されることがわかる。このことから、ファブリペロー共振器は実効的な光路長もフィネス倍程度増幅することができるといえる。よって、マイケルソン干渉計の腕に共振器を入れることで、さらなる感度向上を実現することができる。

### 4.3.3 ファブリペロー・マイケルソン干渉計

ここでは、マイケルソン干渉計にファブリペロー共振器が組み込まれたファブリペロー・マイケルソン干渉計について述べる。図 4.10 のような長さ  $L$  でオーバーカップリングしている共振器を腕に組み込まれた干渉計を考える。この干渉計がダークフリンジで動作していると考えると、各腕は光共振器のときと同様に電場の揺らぎの入出力関係を求められる。これは式 4.106 より、

$$\mathbf{h} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{g} + e^{i\beta} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} h(\omega) \quad (4.110)$$

となる。ここで、 $\mathcal{K} = 2\gamma\tau/\omega^2(\gamma^2 + \omega^2)$ ,  $h_{SQL} = \sqrt{8\hbar/mL^2\omega^2}$ ,  $\tau = 16f_{arm}P_A\omega_0/\pi mLc$ ,  $f_{arm} = 2\pi/T$ ,  $T = t^2$  である。そして、式 4.42 を用いてファブリペロー・マイケルソン干渉計の感度  $\sqrt{S_h(\omega)}$  を計算すると、

$$S_h(\omega) = \frac{h_{SQL}^2}{2} \left( \mathcal{K} + \frac{1}{\mathcal{K}} \right) \quad (4.111)$$

となる。式 4.111 をプロットしたものが図 4.11 である。この図 4.11 から、光量が一定でも干渉計の腕の光共振器のフィネスを上げることで、感度の良い帯域を高周波帯域に移動できることがわかる。一方、高周波帯域での感度はフィネスの大きさに関わらず悪化してしまう。これは、干渉計の腕に組み込まれている光共振器のローパス特性により、キャビティポールよりも高い周波数の信号が減衰してしまうことに起因する。

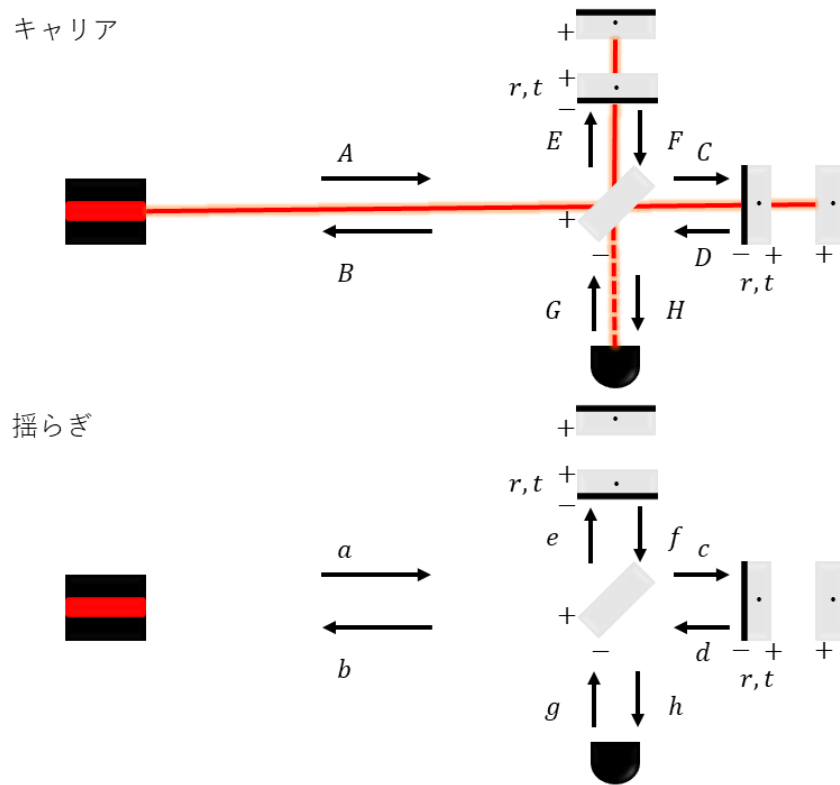


図 4.10 ファブリペロー・マイケルソン干渉計

#### 4.3.4 デュアルリサイクリング・マイケルソン干渉計

ここでは、図 4.12 のようなマイケルソン干渉計の入力ポートと出力ポートにそれぞれ鏡を設置したときを考える。これを Dual Recycling (DR) マイケルソン干渉計という。また、マイケルソン干渉計の入力ポートに鏡を設置して構成される光共振器を Power Recycling (PR) 共振器と呼び、出力ポートに鏡を設置して構成される光共振器を Signal Recycling (SR) 共振器と呼ぶ。DR マイケルソン干渉計がダークフリッジで動作している場合、すべてのキャリアが入力ポート、すべての信号が出力ポートに現れるため、PR 共振器と SR 共振器を分けてそれぞれ独立した光共振器として考えることができる。PR 共振器が共振しているときの古典電場の入出力関係は、

$$\mathbf{H} = -r_P \mathbf{G} + t_P \mathbf{J}, \mathbf{I} = t_P \mathbf{G} + r_P \mathbf{J}, \mathbf{J} = \mathbf{I} \tag{4.112}$$

となる。式 4.111 を  $\mathbf{I}$  について解くと、

$$\mathbf{I} = \frac{t_P}{1 - t_P} \mathbf{G} \sim \frac{2G}{t_P} \tag{4.113}$$

となり、実効的な入射光強度は  $P_I \sim 4P_G/T_P = 2F_P P_G/\pi$  ( $F_P$ : PR 共振器のフィネス) となることからフィネス倍程度増幅されることがわかる。また、SR 共振器も共振しているとき

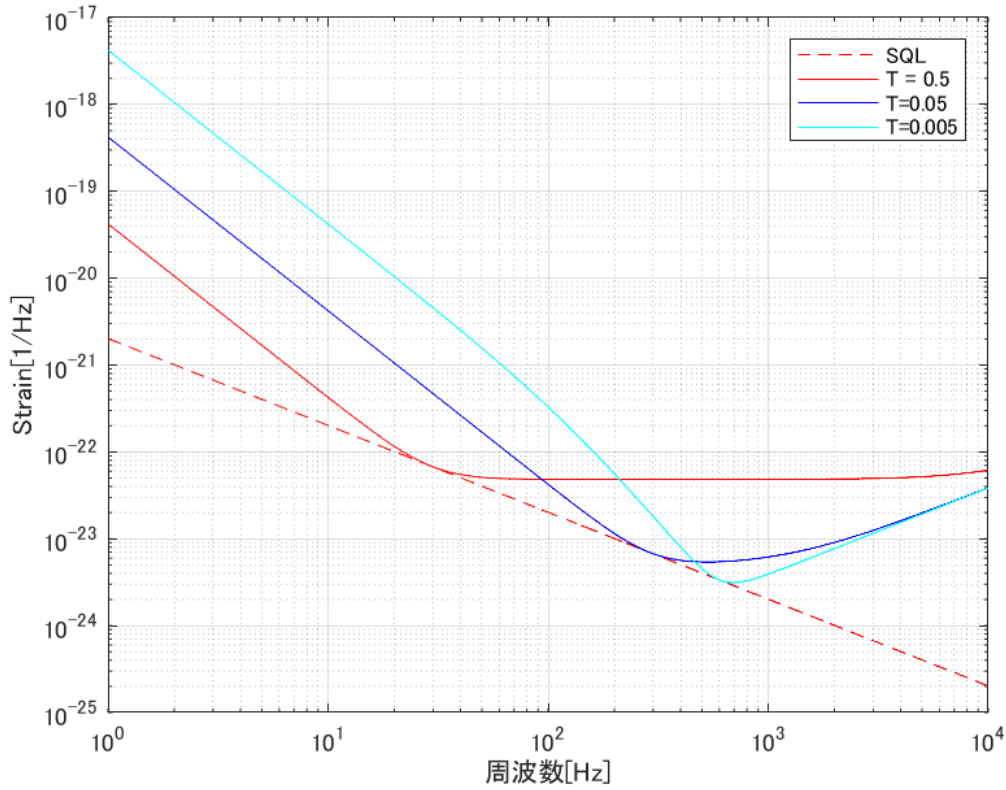


図 4.11 ファブリペロー・マイケルソン干渉計

の電場の揺らぎの入出力関係は、

$$\mathbf{b} = -r_S \mathbf{a} + t_S \mathbf{d}, \mathbf{c} = t_S \mathbf{a} + r_S \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} = e^{i\alpha_{SR}} R(\phi) \mathbf{f}, \mathbf{e} = e^{i\alpha_{SR}} R(\phi) \mathbf{c}, \mathbf{f} = e^{2i\alpha_{arm}} P(\kappa, 0) \mathbf{e} + e^{i\alpha_{arm}} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\omega) \quad (4.114)$$

となる。ここで、 $\kappa \sim 8P_G \mathcal{F}_P \omega_0 / \pi m c^2 \omega^2$ ,  $h_{SQL} = \sqrt{4\hbar/mL^2\omega^2}$  である。ここで、位相遅れを  $\alpha_{SR} = -l\omega/c$ ,  $\alpha_{arm} = -L\omega/c$  を用いて  $\alpha = \alpha_{SR} + \alpha_{arm}$  とすると、ファブリペロー共振器と同様に考えることができるので式 4.114 より、

$$\mathbf{b} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} + e^{i\beta} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\omega) \quad (4.115)$$

となる。ここで、 $\mathcal{K} = \gamma\tau/\omega^2(\omega^2 + \gamma^2)$ ,  $\gamma = T_S c / 4(L+l)$ ,  $\tau = 4P_I \omega_0 / m(L+l)c$ ,  $T_S = t_S^2$ ,  $\beta = \arctan(-\omega/\gamma)$  である。式 4.113, 4.115 より、PR 共振器はレーザーパワーをフィネス倍程度増幅するのに対して、SR 共振器は信号の応答をフィネス倍程度増幅することがわかる。DR マイケルソン干渉計は PR 共振器と SR 共振器の特性を持ち合わせているため、ファブリペロー共振器と同様の効果を干渉計に与えることになる。



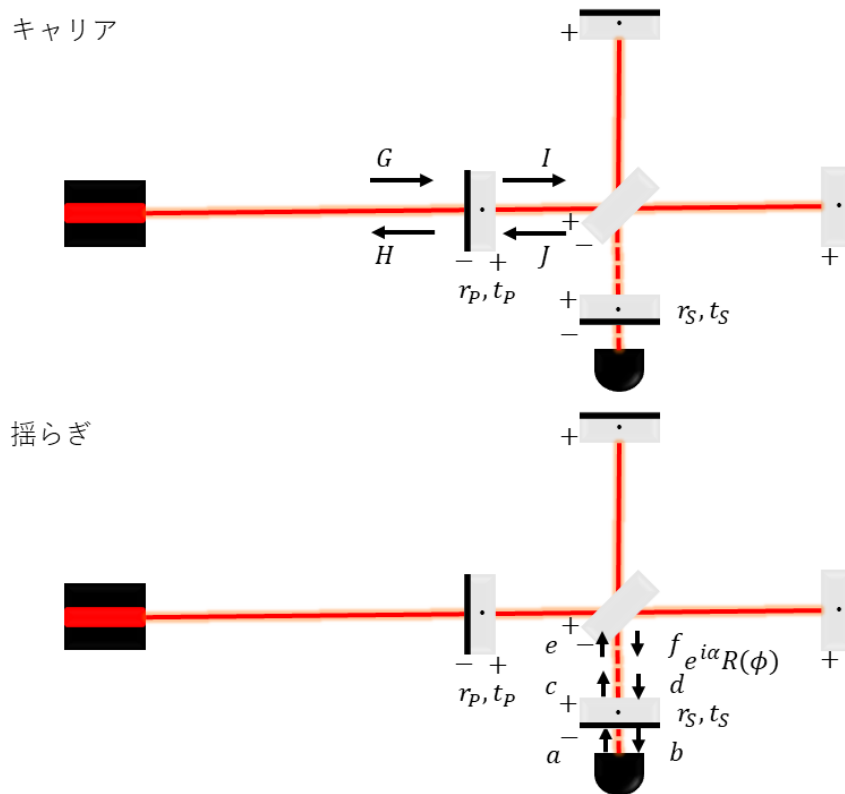


図 4.12 デュアルリサイクリング・マイケルソン干渉計

## 4.4 量子雑音低減のための技術

ここまで、量子雑音について議論してきたが、どれも標準量子限界を超えることはできていない。そこで、ここでは標準量子限界を超えるための技術として、ホモダイン測定、光ばね、OPA を用いた内部スクイーミング、そしてその他の技術について述べる。

### 4.4.1 ホモダイン測定

ここでは、ホモダイン角を調節して測定を行う手法であるホモダイン測定について述べる。ここまでの議論では信号の大きさを最大にするため、測定でのホモダイン角は全て  $\pi/2$  として計算していた。そこで、参照光の振幅 quadrature が 0 でない場合にホモダイン角が感度に与える影響について考える。干渉計に真空場  $\mathbf{a}$  が入射したとき、

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \mathbf{a} + \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} h(\omega) \quad (4.116)$$

となる。出力電場を  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$  と考えて測定すると、強度の揺らぎ  $\delta P_B$  は、

$$\begin{aligned} \delta P_B &= \hbar\omega_0(b_1 B_1 + b_2 B_2) \\ &= \hbar\omega_0[(A_{11} B_1 + A_{21} B_2)a_1 + (A_{21} B_1 + A_{22} B_2)a_2 + (H_1 B_1 + H_2 B_2)] \quad (4.117) \end{aligned}$$

となり、感度は、

$$S_h^{homo}(\omega) = \frac{|A_{11} \cos \xi_B + A_{21} \sin \xi_B|^2 + |A_{12} \cos \xi_B + A_{22} \sin \xi_B|^2}{|H_1 \cos \xi_B + H_2 \sin \xi_B|^2} \quad (4.118)$$

となる。ここで  $\xi_B = \arctan(B_2/B_1)$  はホモダイン角である。例えば、DR マイケルソン干渉計の場合、式 4.115 より、

$$S_h^{homo}(\omega) = \frac{h_{SQL}^2}{2\mathcal{K}} [(\cot \xi_B - \mathcal{K})^2 + 1] \quad (4.119)$$

と求まる。これをプロットしたものが図 4.13 である。ある周波数では SQL を突破すること

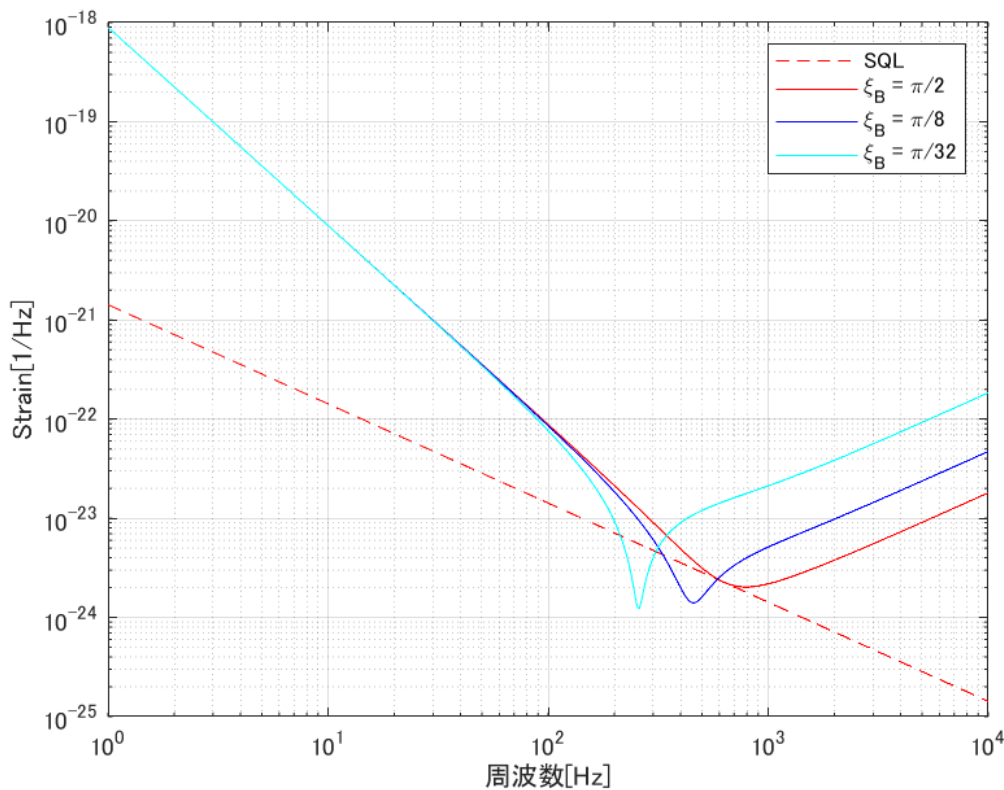


図 4.13 ホモダイン測定を行った場合の DR マイケルソン干渉計

事がわかる。この周波数は式 4.119 の第 1 項が 0 になるときであり、この時輻射圧雑音がキャンセルされる。この手法を Back Action Evasion (BAE) と呼ばれる。また、各周波数で量子雑音が最小になるようなホモダイン角を実現する手法を variational readout と呼ばれるが、これは実際の測定ではロスに弱いため、通常は重力波が最もよく取れるホモダイン角で固定して測定を行う。

#### 4.4.2 光ばね

ここまでの議論で登場した光共振器は全て共振状態として考えていたが、ここでは共振状態から離調されている場合について考える。一般的に重力波検出器では懸架鏡が用いられている

ため、光共振器を離調することでレーザー光の復元力と懸架鏡の機械的な復元力の間相互作用が働き、鏡を束縛することができるようになる。この現象を光ばねという。図 4.14 に光ばねのイメージを示す。懸架鏡が離調されていないときは復元力と輻射圧が釣り合っているので光

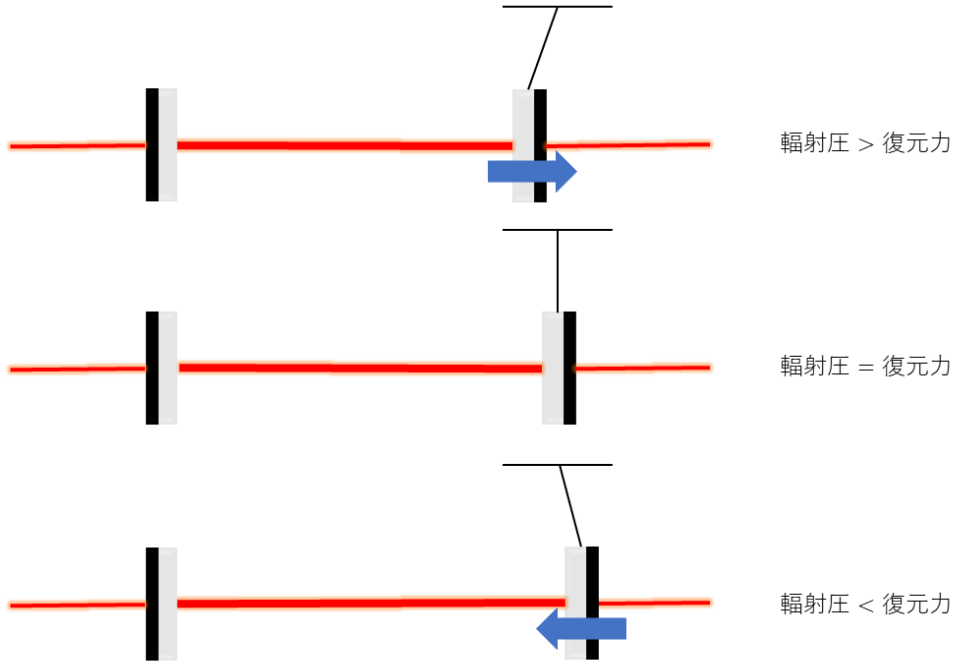


図 4.14 光ばね

ばねは生じない。一方で、懸架鏡を共振器長が短くなる方向や長くなる方向に離調されると、復元力と輻射圧が釣り合わなくなるので光ばねが生じる。そして、ばねのように元の位置に戻ろうとする力が鏡に働くのである。光ばねの特徴の一つとして、ばねのように共振周波数を持つというものがある。この共振周波数では信号を増幅できることから、重力波検出器にも応用されている [11] [12]。重力波検出器で用いる際は、PR 共振器や腕共振器を離調してしまうと共振器内強度が低下してしまうため、SR 共振器を離調することが一般的である。以下では、DR マイケルソン干渉計において SR 共振器を離調した系について考える。 $\phi \neq 0$  でないとき式 4.114 を解くと、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} &= [-r_S I + t_S^2 e^{2i\alpha} [I - r_S e^{2i\alpha} R(\phi) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} R(\phi) P(\kappa, 0) R(\phi)] \mathbf{a} \\
 &\quad + t_S e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{SQL}} [I - r_S e^{2i\alpha} R(\phi) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} R(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\omega) \\
 &= \frac{1}{M} [\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathcal{H}h(\omega)]
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

となる。ここで、 $M, \mathbf{X}, \mathcal{H}$  はそれぞれ、

$$M = r_S e^{2i\alpha} + \frac{1}{r_S} e^{-2i\alpha} - 2 \left( \cos 2\phi + \frac{\kappa}{2} \sin 2\phi \right) \quad (4.121)$$

$$X_{11} = \left( r_S + \frac{1}{r_S} \right) \left( \cos 2\phi + \frac{\kappa}{2} \sin 2\phi \right) - 2 \cos 2\alpha$$

$$X_{12} = - \left( \frac{1}{r_S} - r_S \right) \left( \sin 2\phi + \frac{\kappa}{2} (1 - \cos 2\phi) \right)$$

$$X_{21} = \left( \frac{1}{r_S} - r_S \right) \left( \sin 2\phi - \frac{\kappa}{2} (1 + \cos 2\phi) \right)$$

$$X_{22} = \left( r_S + \frac{1}{r_S} \right) \left( \cos 2\phi + \frac{\kappa}{2} \sin 2\phi \right) - 2 \cos 2\alpha$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \quad (4.122)$$

$$\mathcal{H} = t_S \frac{\sqrt{2\kappa}}{\hbar_{SQL}} \begin{pmatrix} - \left( \frac{1}{r_S} e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} \right) \sin \phi \\ \left( \frac{1}{r_S} e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} \right) \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

とおいた。そして感度求めると、

$$S_h(\omega) = \frac{|X_{11} \cos \xi_B + X_{21} \sin \xi_B|^2 + |X_{12} \cos \xi_B + X_{22} \sin \xi_B|^2}{|H_1 \cos \xi_B + H_2 \sin \xi_B|^2} \quad (4.124)$$

となる。ホモダイン角  $\xi_B = \pi/2$  で検出した場合の感度は式 4.124 より、

$$S_h(\omega) = \frac{|X_{21}|^2 + |X_{22}|^2}{|H_1|^2} \quad (4.125)$$

となる。さらに、 $T, \alpha, \phi, \kappa$  を微小量として近似すると、式 4.120 は、

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\mathcal{M}} [\mathbf{Y}\mathbf{a} + \mathcal{J}h(\omega)] \quad (4.126)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{M} = \omega^2 [(\gamma - i\omega)^2 + \Delta^2] - \Delta\tau/2 \quad (4.127)$$

$$Y_{11} = \omega^2(\omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) + \Delta\tau/2 \quad (4.128)$$

$$Y_{12} = -2\gamma\Delta\omega^2 \quad (4.129)$$

$$Y_{21} = 2\gamma\Delta\omega^2 - \gamma\tau \quad (4.130)$$

$$Y_{22} = \omega^2(\omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) + \Delta\tau/2 \quad (4.131)$$

$$\mathcal{J}_1 = - \frac{\sqrt{2\gamma\tau}}{\hbar_{SQL}} \Delta\omega \quad (4.132)$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\sqrt{2\gamma\tau}}{\hbar_{SQL}} (\gamma + i\omega)\omega \quad (4.133)$$

である。また、 $\Delta = \phi c/L$  は離調である。式 4.125 同様にホモダイン角  $\xi_B = \pi/2$  のときの感度を計算すると、

$$S'_h = \frac{|Y_{21}|^2 + |Y_{22}|^2}{|\mathcal{J}_2|^2} \quad (4.134)$$

となる。図 4.15 は式 4.134 の感度を示したものである。この図から、離調を大きくすること

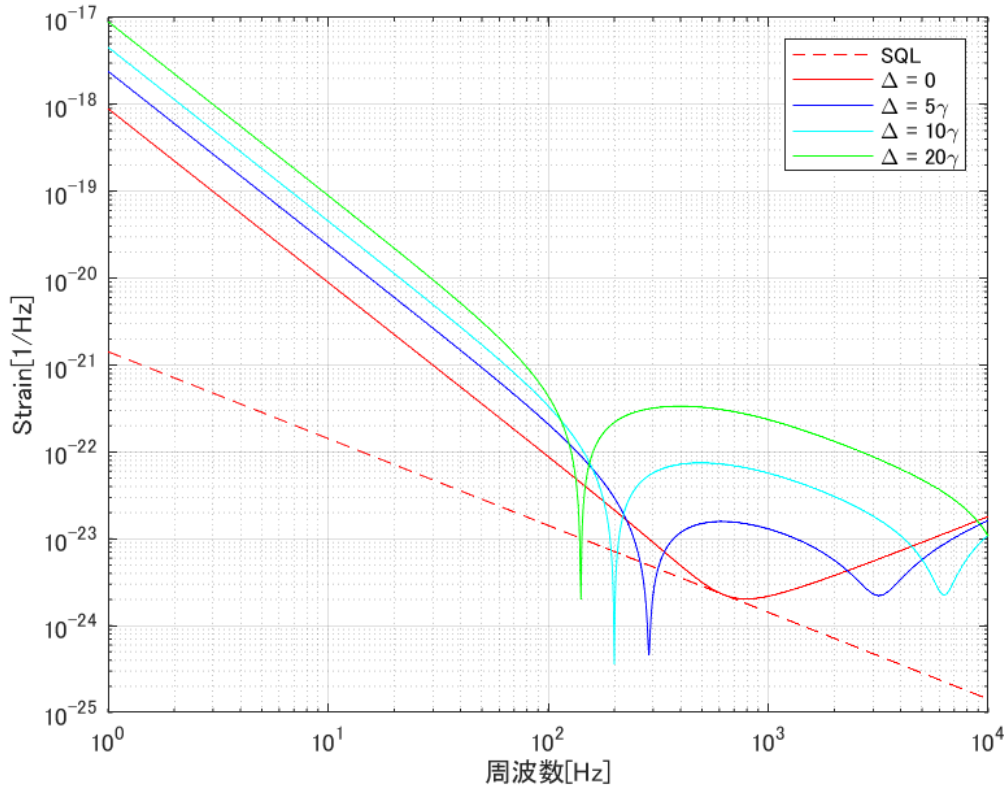


図 4.15 光ばねがあるときの DR マイケルソン干渉計の感度

で、2つのディップが現れ離れていくことがわかる。さらに、低周波数側のディップでは狭帯域ながらも SQL を突破できることがわかる。この周波数と式 4.127 を 0 にしたときに求められる光ばねの共振周波数 ( $r_S \rightarrow 1$  とした) が一致することから、光ばねには信号増幅効果があるといえる。一方、高周波数側のディップは純粋な光学的な共振である。

### 4.4.3 内部スキージング

ここでは、OPA を用いて共振器内部でスキージングを行う手法である内部スキージング [13] について述べる。これは共振器内強度の増減や OPA 以外の非線形光学効果が起こるため、キャリアが存在しない図 4.12 のような SR 共振器に非線形光学媒質を挿入した系を考える。式 4.114 の  $\mathbf{d}$  を  $\mathbf{d} = e^{i\alpha_s} R(\phi) S(s) \mathbf{f}$  と変更されるため、

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = & [-r_S I + t_S^2 e^{2i\alpha} [I - r_S e^{2i\alpha} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi)] \mathbf{a} \\ & + t_S e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{SQL}} [I - r_S e^{2i\alpha} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} R(\phi) S(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\omega) \end{aligned} \quad (4.135)$$

となる。ここで、スキージング角  $\theta = 0$  としている。離調がある場合、式 4.126 を解くと入出力関係は、

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} [\mathbf{X}' + \mathcal{H}' h(\omega)] \quad (4.136)$$

となる。ここで、

$$M' = r_S e^{2i\alpha} + \frac{1}{r_S} e^{-2i\alpha} - \left(s + \frac{1}{s}\right) \cos 2\phi - \frac{\kappa}{s} \sin 2\phi \quad (4.137)$$

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X'_{11} & X'_{12} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{pmatrix}$$

$$X'_{11} = \frac{1}{2} \left(r_S + \frac{1}{r_S}\right) \left[ \left(s + \frac{1}{s}\right) \cos 2\phi + \frac{\kappa}{s} \sin 2\phi \right] - 2 \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_S} - r_S\right) \left(s - \frac{1}{s}\right) \quad (4.138)$$

$$X'_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_S} - r_S\right) \left[ \left(s + \frac{1}{s}\right) \sin 2\phi + \frac{\kappa}{s} (1 - \cos 2\phi) \right] \quad (4.139)$$

$$X'_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_S} - r_S\right) \left[ \left(s + \frac{1}{s}\right) \sin 2\phi - \frac{\kappa}{s} (1 + \cos 2\phi) \right] \quad (4.140)$$

$$X'_{22} = \frac{1}{2} \left(r_S + \frac{1}{r_S}\right) \left[ \left(s + \frac{1}{s}\right) \cos 2\phi + \frac{\kappa}{s} \sin 2\phi \right] - 2 \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_S} - r_S\right) \left(s - \frac{1}{s}\right) \quad (4.141)$$

$$\mathcal{H}' = t_S \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{r_S s} e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\right) \sin \phi \\ \left(\frac{1}{r_S s} e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right) \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.142)$$

となる。式 4.124 と同様に感度を求めることができるので、

$$S_h(\omega) = \frac{|X'_{11} \cos \xi_B + X'_{21} \sin \xi_B|^2 + |X'_{12} \cos \xi_B + X'_{22} \sin \xi_B|^2}{|H'_1 \cos \xi_B + H'_2 \sin \xi_B|} \quad (4.143)$$

と書ける。ホモサイン角  $\xi_B = \pi/4$ 、 $\phi$  は 2 つのディップが 1 つになるように適当に調節することで、非常に狭い周波数帯域ではあるが、SQL を突破することがわかる [7]。このディップは光ばねの信号増幅効果をもたらしたものであり、スキージングファクター  $s$  を調節することで、より高周波数帯域にシフトすることができる。離調とスキージングファクターによってディップを調節できることから、重力波検出器にも応用され超新星爆発や中性子星連星合体の際に放たれる重力波を捉えることができる。

#### 4.4.4 その他の量子雑音低減技術

次世代の重力波検出器開発のために、様々な量子雑音低減技術の研究開発が進んでいる。内部スキージングと光ばねを組み合わせた信号増幅技術 [14] や先行研究でもある光パラメトリック増幅と光カー効果の 2 つの非線形光学効果を用いた信号増幅技術 [10] [9] などがある。特に、先行研究では、2 つの非線形光学効果を用いて光ばねを強化することに成功している。光ばねを強化することで、共振周波数を高くすることができ、より高周波帯域での重力波検出器の感度改善につながると考えられている。

## 第5章

# 実験の原理

次世代重力波検出器のための技術として、光パラメトリック増幅と光カー効果の2つの非線形光学効果を用いた信号増幅技術の開発 [9] [10] が進んでいる。実際に、先行研究 [10] では光熱効果を正確に見積もり、差し引くことで、非線形光学効果を使った光ばねの強化に成功した。光ばねは重力波検出器の信号増幅にも利用されており、その強化は検出器の精度向上に繋がっている。しかし、光熱効果の補償は実験的に行われていない。そこで、本研究では第二の結晶を光共振器に入れることで、光学的に補償することを目標としており、ここではそのために必要な理論について述べる。

### 5.1 制御工学

本実験では、結晶を入れた光共振器をフィードバック制御を用いて特定の離調の領域にとどめた状態で、系の周波数応答を測定することで光熱効果及び結晶の特性の評価を行っている。ここでは、本実験の原理を理解するうえで重要となる制御工学の基本的な事項について述べる。本節では [15] [16] を参考にした。

#### 5.1.1 伝達関数

伝達関数とはシステムの入出力関係を周波数空間で表現する関数である。そのため、周波数応答関数と呼ばれることもある。図 5.1 のような伝達関数  $G(\omega)$  のシステムにある信号  $x(\omega)$  が入力されたとき、 $y(\omega)$  が出力として得られた場合、入出力関係は、

$$y(\omega) = G(\omega)x(\omega) \quad (5.1)$$

と積の形で表すことができる。伝達関数が図 5.2 のような直列接続をされている場合、入出力関係は、

$$y(\omega) = (G_1(\omega) \cdot G_2(\omega))x(\omega) \quad (5.2)$$

と書くことができる。また、このような図をブロック線図と呼ぶ。伝達関数は複素関数で表されるため、伝達関数の絶対値をとったゲインと位相に分けることができる。これら2つの周波数特性を表したものが、ボード線図である。ここでは、ローパスフィルタのボード線図を考え



図 5.1 システムの入出力関係



図 5.2 伝達関数の直列接続

る。ローパスフィルタの伝達関数  $G_l(\omega)$  は、

$$G_l(\omega) = \frac{1}{1 + i\tau\omega} \quad (5.3)$$

である。ここで、 $\tau$  は時定数であり、逆数をとるとカットオフ周波数になる。式 5.3 の伝達関数をボード線図に書いたものが図 5.3 である。上段がゲインを表しており、下段が位相を表している。この図ではカットオフ周波数を  $10/2\pi$  Hz に設定している。ローパスフィルタは図 5.3 から、カットオフ周波数以上の信号を減衰させる効果があることがわかる。



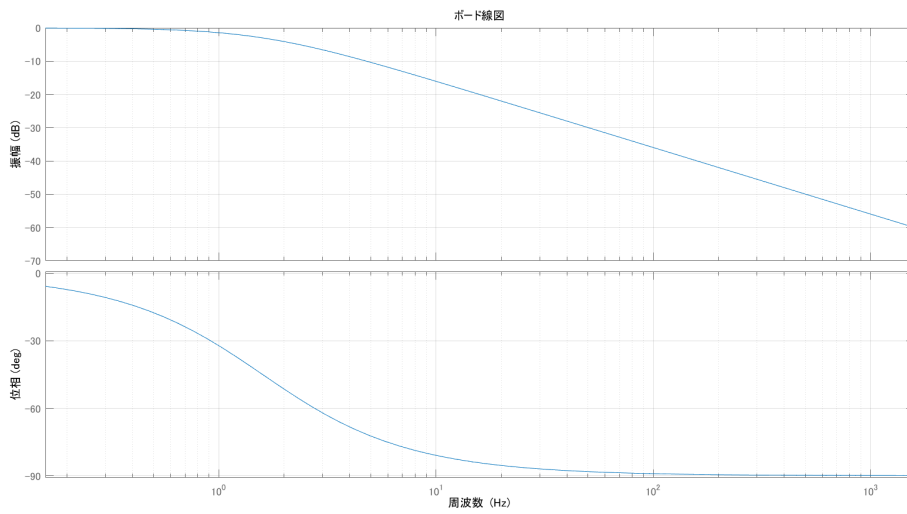


図 5.3 ローパスフィルタのボード線図

### 5.1.2 フィードバック制御

本実験ではフィードバック制御を用いることで、共振器の離調を固定して伝達関数の測定を行っている。フィードバック制御とはシステムに入力信号を与えた時の出力信号と目標値との誤差を0にするように、フィルタなどを通して入力信号にフィードバックする制御の方法のことである。この一連の系を制御系と呼ぶ。図 5.4 のような簡単な制御系を考える。式 5.2 を用

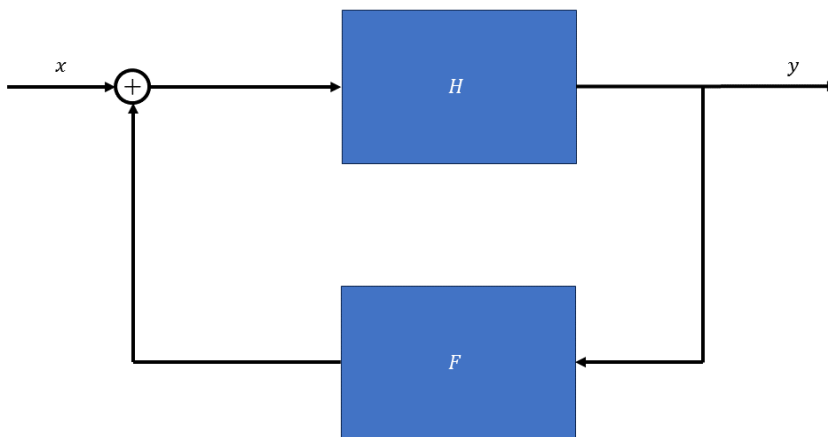


図 5.4 フィードバック制御のブロック線図

いてこの制御系の入出力関係を求めると、

$$y = \frac{H}{1 - FH}x \quad (5.4)$$

となる。ここで、

$$G_{cl} = \frac{H}{1 - FH} \quad (5.5)$$

$$G_{op} = FH \quad (5.6)$$

とおく。それぞれ、式 5.5 を閉ループ伝達関数、式 5.6 を開ループ伝達関数または一巡伝達関数と呼ぶ。閉ループ伝達関数は、制御系全体の周波数応答を示している。一方、開ループ伝達関数は、フィードバックの応答を示している。そのため、フィードバック制御系の安定性を評価するためには、一般的に開ループ伝達関数を用いる。以下では、フィードバック制御系の安定性は開ループ伝達関数を用いて議論する。

### 5.1.3 フィードバック制御の安定性

フィードバック制御系の安定性について議論するために、式 5.5 の  $H = 1$  で、 $F$  がローパスフィルタの伝達関数  $G_l$ (式 5.3) である簡単な制御系を考える。そうすると、開ループ伝達関数は図 5.3 と同じボード線図になる。ここで、開ループ伝達関数が 1 になると式 5.4 より出力信号  $y$  が発散してしまい、制御系が不安定になってしまうことがわかる。この時の周波数を unity gain frequency (UGF) と呼ぶ。フィードバック制御系の安定性は UGF の時の位相と位相が  $\pi$  のときのゲインに注目する。位相は、UGF の時の位相が  $\pi$  よりどれだけ大きいかで評価し、これを位相余裕という。また、ゲインは、位相が  $\pi$  の点でのゲインが 1 (0db) よりどれだけ小さいかで評価し、これをゲイン余裕と呼ぶ。この二つの条件を満たす制御系であれば制御系が安定であるといえる。

### 5.1.4 位相補償

フィードバック制御はフィルタを通すことで、安定にすることができる。本実験では、アクチュエータとしてピエゾ素子を用いているため、ピエゾの機械共振周波数が開ループ伝達関数に現れてしまう。機械共振周波数あたりでは、制御系が不安定になってしまうため、この周波数よりも低い帯域に UFG を設定することで、制御系の不安定性を回避することができる。このフィルタの伝達関数は、式 5.3 と同等であり、図 5.3 からカットオフ周波数近辺で位相が遅れることがわかる。このように、位相を遅らせることでゲイン余裕を確保するフィルタを位相遅れ補償という。本実験では用いていないが、位相を進ませることで位相余裕を確保するフィルタとして機能する位相進み補償というものもある [17]。以下にその伝達関数を示す：

$$G_{ad}(\omega) = \frac{1 + i\tau_1\omega}{1 + i\tau_2\omega} \quad (5.7)$$

## 5.2 光熱効果の影響

先行研究 [10] では、非線形光学結晶の非線形光学効果を用いて光ばねの強化に成功しているが、この効果以外にも光熱効果が起こることがわかっている [18]。これは、光カー効果を起こすためには、強いレーザー光強度が必要となり、非線形光学結晶は相対的に大きな熱吸収係数と熱膨張係数を持っているためである。光熱効果が起こることで、結晶の長さが変化し、それに伴って光路長も変化する。このことによって、光共振器の時間応答と周波数応答が変化する。また、光熱効果によって光による摩擦力が光ばねにもたらされる。ここでは、光熱効果の原理とそれが光共振器の応答に与える影響について述べる。

### 5.2.1 光熱効果の原理

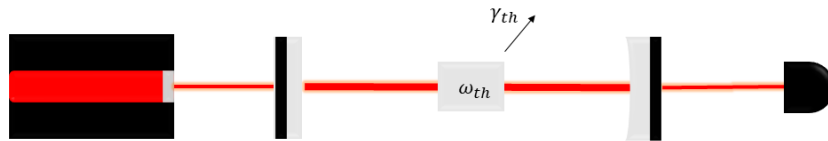


図 5.5 光共振器内の結晶の光熱効果

図 5.5 のような光共振器内に結晶が挿入された系を考える。エンドミラーの変位を  $x_{act}$ 、光熱効果による結晶の変位を  $x_{th}$  とすると、実効的な共振器長の変位  $x$  は、

$$x = x_{act} + x_{th} \quad (5.8)$$

と書ける。 $x_{th}$  は結晶の熱膨張と光熱効果の両方に寄与している [19]。このことに考慮すると  $x_{th}$  の温度変化は、

$$\frac{\partial x_{th}}{\partial t} = \left( n\alpha_0 + \frac{dn}{dT} \right) L' \quad (5.9)$$

となる。ここで、 $L'$  は共振器内の結晶の長さ、 $T$  は結晶の温度、 $\alpha_0$  は熱膨張係数である。また、結晶の熱膨張と光熱効果の影響を考慮した熱膨張係数を再定義すると、

$$\alpha = n\alpha_0 + \frac{dn}{dT} \quad (5.10)$$

となる。以下ではこれを熱膨張係数と呼ぶ。よって、式 5.9 から  $x_{th}$  の時間変化は、

$$\frac{\partial x_{th}}{\partial t} = \alpha L' \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.11)$$

と書ける。よって、 $x_{th}$  は、

$$x_{th} = \alpha L' (T - T_0) \quad (5.12)$$

となり、結晶の温度  $T$  と周囲の温度  $T_0$  の差に比例することがわかる。次に、共振器内の結晶の温度について考える。結晶の温度は、結晶以外の熱流に依存する。ここでいう熱流はレーザー光の吸収によるものである。よって、結晶の熱流  $\omega$  は、

$$\omega = \alpha' L' P \quad (5.13)$$

と書ける。ここで、 $P$  は共振器内強度、 $\alpha'$  は熱吸収係数である。結晶の熱流が生じる原因は様々あるが、主に輻射圧による影響かそれ以外かに分けることができる。結晶の温度と周囲の温度の差が小さいときには、輻射圧の影響を無視することができるため、それ以外の影響のみを考慮すればよい。以下では、輻射圧の影響は無視することで議論を進める。熱流は結晶内だけでなく、結晶の外も考える必要がある。結晶の外の熱流  $q$  は、

$$q = \frac{T - T_0}{k} \quad (5.14)$$

と書ける。ここで、 $k$  は熱抵抗である。また、結晶の温度の時間変化は結晶全体の熱流に比例することから、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C} (\omega - q) \quad (5.15)$$

と書ける。ここで、 $C$  は結晶の熱容量である。最後に、光熱効果を考慮したときの共振器内強度について考える。共振器内強度  $P$  は、

$$P = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{1}{1 + \delta^2} P_0 \quad (5.16)$$

と書ける。ここで、 $\mathcal{F}$  は共振器のフィネス、 $P_0$  は入射光強度である。また、 $\delta$  は離調であり、

$$\delta = \frac{2\mathcal{F}\omega_0}{\pi c} x \quad (5.17)$$

と書ける。ここで、離調  $\delta$  は  $x_{act}$  に比例するのではなく、光熱効果も考慮した変位  $x$  に比例することに注意が必要である。

## 5.2.2 光熱効果による光共振器の時間応答

ここでは、光熱効果を考慮した光共振器のスペクトルについて考える。式 5.17 を時間微分すると、

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{2\mathcal{F}\omega_0}{\pi c} \left[ \frac{\alpha L'}{C} (\omega - q) + \frac{\partial x_{act}}{\partial t} \right] \quad (5.18)$$

となる。また、結晶の外の熱流  $q$  を式 5.8, 5.12, 5.17 を用いて書き換えると、

$$q = \frac{1}{k\alpha L'} x_{th} = \frac{1}{k\alpha L'} \left( \frac{\pi c}{2\mathcal{F}\omega_0} \delta - x_{act} \right) \quad (5.19)$$

となる。よって、この式を用いて式 5.18 を変形すると、

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{1}{kC} \delta + \frac{4\mathcal{F}^2 \omega_0 \alpha \alpha' L'^2 P_0}{\pi^2 c C} \frac{1}{1 + \delta^2} + \frac{2\mathcal{F}\omega_0}{\pi c} \left( \frac{1}{kC} x_{act} + \frac{\partial x_{act}}{\partial t} \right) \quad (5.20)$$

となる。さらに、この式を時間微分すると、

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \left( \frac{8\mathcal{F}^2 \omega_0 \alpha \alpha' L'^2 P_0}{\pi^2 c C} \frac{\delta}{(1 + \delta^2)^2} - \frac{1}{kC} \right) \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{2\mathcal{F}\omega_0 v}{\pi c k C} \quad (5.21)$$

$$= (A - B) \frac{\partial \delta}{\partial t} + D \quad (5.22)$$

となる。ここで、エンドミラーが一定の速度  $v = \partial x_{act} / \partial t$  で動いているとする。また、 $\frac{8\mathcal{F}^2 \omega_0 \alpha \alpha' L'^2 P_0}{\pi^2 c C} \frac{\delta}{(1 + \delta^2)^2} = A$ ,  $\frac{1}{kC} = B$ ,  $\frac{2\mathcal{F}\omega_0 |v|}{\pi c k C} = D$  とそれぞれ置いた。図 5.6 は  $A = 8, B =$

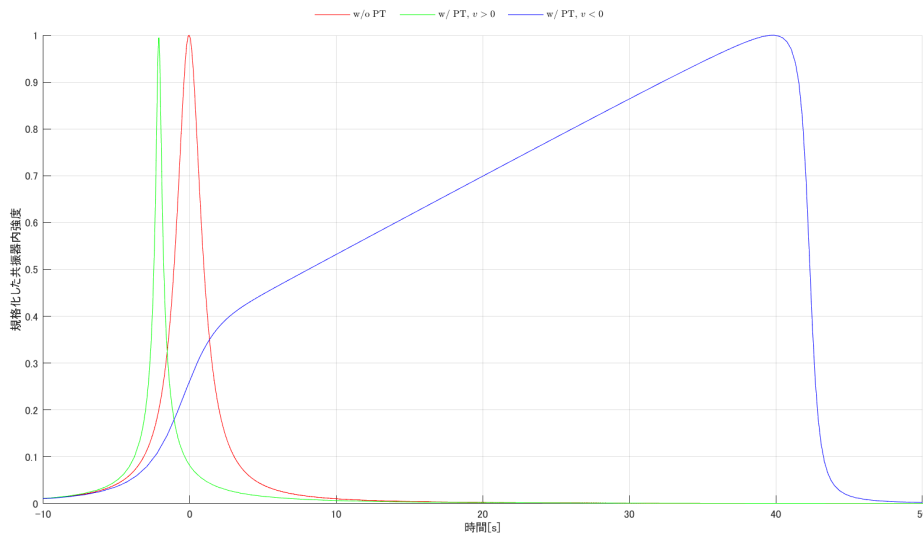


図 5.6 光熱効果の影響を受けているときの光共振器のスペクトル

0.07,  $D = 0.1$  として式 5.22 を解き、共振器内強度をプロットしたものである。この図から、光熱効果がある場合とない場合で明らかにスペクトルが変化していることがわかる。 $v > 0$  の場合、共振状態に近づく間に結晶の熱吸収が増加するため、共振器ははやく共振状態に達する。したがって、光熱効果のない場合よりも線幅の狭いスペクトルが得られる。一方、 $v < 0$  の場合、光熱効果はエンドミラーの変位を打ち消す方向に作用するため、光熱効果がない場合よりも極めて線幅の広いスペクトルとなる。ここで、スペクトルの歪みは、結晶の熱吸収と緩和には一定の時間がかかるため、光熱効果の影響だけでなく、エンドミラーの変位の速度にも依存することに注意する必要がある。また、光熱効果の発生よりも速くエンドミラーを動かした場合、共振器のスペクトルは光熱効果がない場合と同じ形状になる。

### 5.2.3 光熱効果による光共振器の周波数応答

ここでは、光熱効果の影響を考慮した光共振器の周波数応答について述べる。式 5.20 に注目すると、第 2 項に離調  $\delta$  の非線形項が含まれていることがわかる。この離調  $\delta$  はフィードバック制御により一定に保たれているとすると、 $\delta(t) = \delta_0 + d\delta(t)$  を用いて式の第 2 項を以下のように線形化することができる:

$$\frac{1}{1 + \delta(t)^2} \sim \frac{1}{1 + \delta_0^2} - \frac{2\delta_0}{(1 + \delta_0^2)^2} d\delta(t) \quad (5.23)$$

共振器の実効的な変位 (式 5.8) についても同様に線形化を行うと、式 5.23 を線形化することができ、その式をフーリエ変換すると、

$$i\Omega dx(\omega) = - \left( \frac{1}{kC} + \frac{8\mathcal{F}^2\omega_0\alpha\alpha' L'^2 P_0}{\pi^2 cC} \frac{\delta_0}{(1 + \delta_0)^2} \right) dx(\omega) + \left( \frac{1}{kC} + i\omega \right) dx_{act}(\omega) \quad (5.24)$$

となる。そして、共振器の実効的な微小変位  $dx(\omega)$  とエンドミラーの微小変位  $dx_{act}(\omega)$  の比をとることで、光熱効果による光共振器の周波数応答  $H_{th}(\omega)$  は、

$$\begin{aligned} H_{th}(\omega) &= \frac{dx(\omega)}{dx_{act}(\omega)} \\ &= \frac{\gamma_{th} + i\omega}{(\omega_{th} + \gamma_{th} + i\omega)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

と求まる。ここで、 $\omega_{th}$  と  $\gamma_{th}$  はそれぞれ

$$\omega_{th} = \frac{8\mathcal{F}^2\omega_0\alpha\alpha' L'^2 P_0}{\pi^2 cC} \frac{\delta_0}{(1 + \delta_0)^2} \quad (5.26)$$

$$\gamma_{th} = \frac{1}{kC} \quad (5.27)$$

となり、 $\omega_{th}$  を光熱吸収率と呼び、 $\gamma_{th}$  を光熱緩和率と呼ぶ。光熱効果の伝達関数 (式 5.25) は位相補償の伝達関数 (式 5.7) と同じ特徴を持っていることがわかる。光熱吸収率  $\omega_{th}$  が光熱緩和率  $\gamma_{th}$  よりも十分大きいときに、光熱効果の影響が伝達関数に現れる。エンドミラーを光熱吸収率  $\omega_{th}$  と同じような速度で動かすと、伝達関数の位相が進むことがわかる。これは、共振器長の変化に熱膨張が寄与するからである。一方、エンドミラーを光熱緩和率  $\gamma_{th}$  よりも小さい周波数で動かすと、伝達関数の位相は変わらないことがわかる。これは、光熱効果が熱平衡状態に落ち着いてしまうからである。このように、光熱効果の伝達関数では光熱吸収率  $\omega_{th}$  と光熱緩和率  $\gamma_{th}$  のパラメータが重要になる。それぞれ、伝達関数をフィッティングすることで推定することができるが、光熱緩和率  $\gamma_{th}$  は以下の式でも推定することができる [20]:

$$\gamma_{th} = \frac{\kappa_{th}}{\rho C_0 r_0^2} \quad (5.28)$$

ここで、 $\kappa_{th}$  は熱伝導率、 $\rho$  は結晶の密度、 $C_0$  は比熱容量、 $r_0$  は結晶中のビーム径である。これは、結晶にあたっているレーザーのビーム半径が一定であると仮定すると用いることができる。本研究ではシミュレーションを行う際にこの仮定の下、式 5.28 を用いた。また、本実験では、固定鏡の光共振器の周波数応答を測定することで、各パラメータを推定した。

### 5.3 光共振器のモードマッチング

本実験では、測定のためにレーザー光源と光共振器を用いた。レーザー光源はビームサイズと強度分布を持ったガウシアンビームであり、そのままの状態では光共振器の共振状態を作ることができない。共振状態を作るには、光共振器の空間モードとレーザー光源の空間モードを一致させる必要がある。ここでは、ガウシアンビームの基本的な原理 [21]、ABCD 行列を用いたガウシアンビームの空間モードの変換 [22]、そして光共振器のモードマッチング及び安定性 [23] について述べる。

#### 5.3.1 ガウシアンビーム

レーザー光の電場を考えると一般的に平面波を考えれば十分であるが、光共振器へのレーザー光の入射を考えられる場合は電場の空間モードが重要になる。レーザー光の電場を空間モード  $U(x, y, z)$  まで考慮すると、

$$E(t, x, y, z) = U_{lm}(x, y, z)E_0e^{i\omega t} \quad (5.29)$$

となる。この式の  $U_{lm}(x, y, z)$  を Hermite-Gaussian モードという。この表式は、

$$U_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{2^{l+m}l!m!}} H_{lm}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) \exp\left[\left(-\frac{1}{\omega^2(z)} - i\frac{k}{2R(z)}\right)(x^2 + y^2) + i(l+m+1)\zeta(z)\right] \quad (5.30)$$

となる。ここで、 $k, \omega_0$  はそれぞれ波数、ガウシアンビームのウエスト半径であり、 $\omega(z), R(z), \zeta(z)$  はそれぞれ、

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (5.31)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad (5.32)$$

$$\zeta(z) = \arctan \frac{z}{z_0} \quad (5.33)$$

$$z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2} \quad (5.34)$$

となる。これらは順に、ビーム半径、波面の曲率半径、Gouy 位相、レイリーレンジ、 $H_{lm}$  は Hermite 多項式である。また、 $l = m = 0$  のときを基本モードと呼び、それ以外を高次モードと呼ぶ。本実験では基本モードに対してモードマッチングすることで、光共振器の設計を行った。図 5.7 はビーム半径  $\omega(z)$ 、波面の曲率半径  $R(z)$ 、Gouy 位相  $\zeta(z)$  をプロットしたものである。 $z = 0$  のとき、ビーム半径  $\omega(z)$  は最小になるため、これをビームウエストと呼ぶ。また、ウエストの位置では波面の曲率半径  $R(z)$  が無限大となり、Gouy 位相  $\zeta$  は 0 となる。ウエストから離れていくと波面の曲率半径は小さくなるが、Gouy 位相はレイリーレンジで最

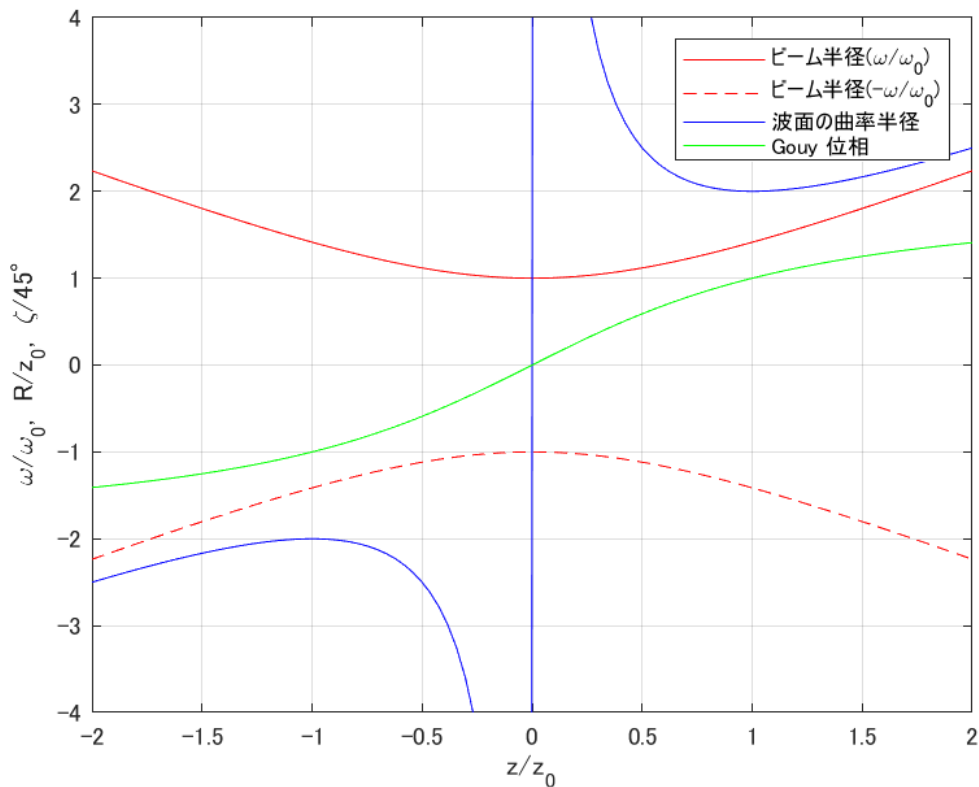


図 5.7 ガウシアンビームのビーム半径、波面の曲率半径、Gouy 位相

少となり、再び大きくなる。レーザー光源は十分遠くから見ると点光源とみなすことができ、Gouy 位相は  $\pm\pi/2$  に近づいていく。したがって、レイリーレンジはレーザー光を平面波とみなせる許容範囲を示している。

### 5.3.2 ABCD 行列

ここでは、ガウシアンビームを媒質やレンズなどの光学素子を透過させることでどのように変換されるかを考える。ここで、ガウシアンビームの性質を表すビームパラメータを

$$q = z + iz_0 \tag{5.35}$$

と定義する。例えば、ある光学素子によって  $q_1$  から  $q_2$  に変換されるとすると、

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

となる。この式を計算すると、

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{5.37}$$

となる。ここで、 $A, B, C, D$  はガウシアンビームが通った媒質や光学素子の  $ABCD$  行列の要素であり、代表的なものは下記のとおりである。・均一な媒質中における距離  $d$  の伝搬

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.38}$$



・焦点距離  $f$  のレンズ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

・曲率半径  $R$  のレンズでの反射

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

例えば、ガウシアンビームが距離  $d$  だけ伝搬し、曲率半径  $R$  のレンズで反射したときの  $ABCD$  行列は、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

となる。

### 5.3.3 モードマッチング

光共振器を設計するためには、光共振器の空間モードとガウシアンビームの空間モードを光学素子を用いて一致させる必要がある。これをモードマッチングという。ここでは、モードマッチングの具体的な計算について述べる。まず、基本的な光共振器のモードを計算する。光共振器を往復する前のビームパラメータを  $q_0$  とし、往復した後のビームパラメータを  $q'_0$  とする。ビームパラメータ  $q_0$  は光共振器のウェストの位置における値を考える。このとき、式 5.35 から  $q_0 = iz_0^{cav}$  となる。光共振器の空間モードにおけるウェスト位置を  $z^{cav}$ 、レイリーレンジを  $z_0^{cav}$  とする。光共振器内を 1 往復するときの  $ABCD$  行列は、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^{cav} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L - z^{cav} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

となる。ここで、 $R$  は鏡の曲率半径、 $L$  は光共振器の長さである。光共振器の空間モードを求めるためには、往復した後のビームパラメータ  $q'_0$  と往復する前のビームパラメータ  $q_0$  が一致すればよい。よって、

$$\begin{pmatrix} q'_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

を満たせばいいことがわかる。ここで用いている  $ABCD$  行列は式 5.42 で求めたものである。一般に、鏡の曲率  $R$  と光共振器の長さ  $L$  は実験的に容易に決めることができるパラメータであり、式 5.43 から光共振器のウェスト位置  $z^{cav}$  とレイリーレンジ  $z_0^{cav}$  を求めることができる。ここまでの、光共振器の空間モードがわかったため、ガウシアンビームの空間モードと一致させることを考える。そのためには、 $ABCD$  行列を

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

として、

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

を満たすような  $d$  と  $f$  を探せばよい。本実験では JamMt というシミュレーションソフトを用いて  $d$  と  $f$  を決定した。

### 5.3.4 光共振器の安定性

ここでは、光共振器の安定条件について述べる。光共振器に用いる鏡の曲率半径  $R$  と光共振器の長さ  $L$  は実験的に容易に決めることができると述べたが、以下のような条件を満たす必要がある。

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1 \quad (5.46)$$

この条件を満たす光共振器の空間モードは安定となり、設計する際にもこれに注意した。ここで、 $R_1, R_2$  はそれぞれ左の鏡と右の鏡の曲率半径であり、 $g = 1 - L/R$  は  $g$  パラメータと呼ぶ。

## 第6章

# 実験

本研究では、先行研究 [9] [10] で用いられている非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果を直接的に補償する技術を提案し、検証実験を行った。具体的には、光学的に補償するために必要なパラメータの条件を満たす結晶を選定し、式 5.25 で示した伝達関数のモデルに測定結果をフィッティングすることによって、光学補償に必要な結晶のパラメータの推定を行った。実験で用いた器具と本実験のセットアップを以下に示す。本実験では、元のレーザーからファイバーで伸ばして使っているため、最大で 60 mW 程度しか出力しない

実験器具名	メーカー	型番	備考
レーザー	Coherent	Mephisto	出力最大 1 W
ピエゾ素子 (PZT)	Noliac	NAC2122	
ピエゾドライバ	Piezomechanik	SVR500/3	
1/2 波長板 (HWP)	Thorlabs	WPHSM05-1064	
1/4 波長板 (QWP)	Thorlabs	WPQSM05-1064	
偏光ビームスプリッター (PBS)	Thorlabs	PBSW-1064	
パワーメータ	Thorlabs	S121C	
フォトディテクタ (PD)	Thorlabs	PDA10CS-EC	
フッ化カルシウム結晶	Edmund	22-603	厚さ 5 mm 反射率 < 1.0%
フロントミラー	Layertec	106300	反射率 98% 曲率なし
エンドミラー	Layertec	103167	反射率 > 99.9% 曲率 100 mm

図 6.1 主な実験器具

### 6.1 結晶の選定

本実験の第一段階として、先行研究で用いられていた結晶の光熱効果の影響を補償するパラメータを持つ結晶の選定を行った。光熱効果が起きる条件として、熱緩和が十分遅い必要がある。これは、結晶に熱が長い時間とどまることによって、光熱効果が起きやすくなるためである。

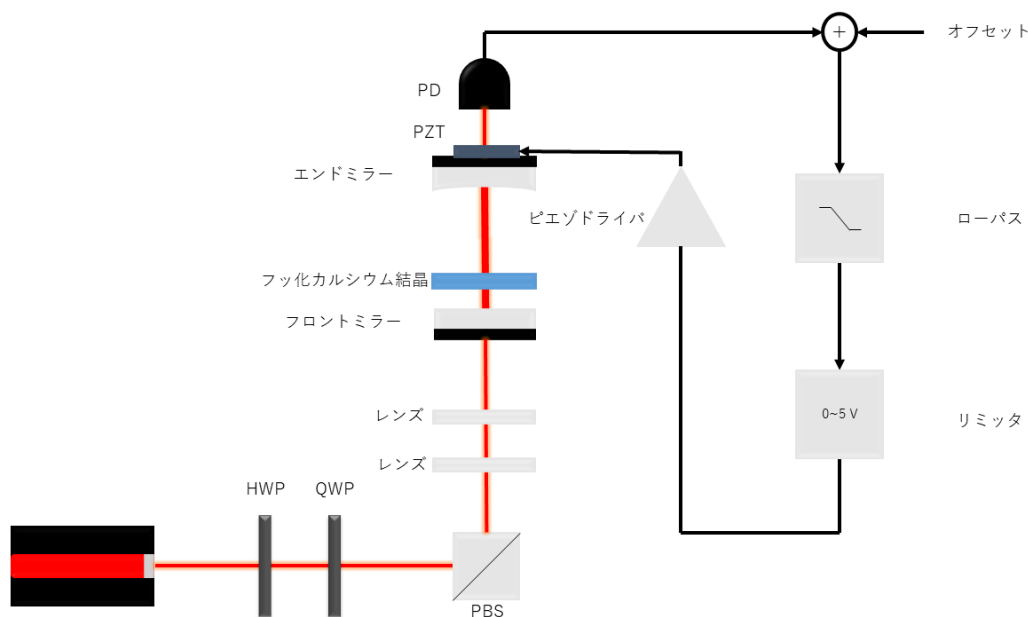


図 6.2 本実験のセットアップ

る。そのために、結晶のパラメータが、「熱伝導率が低い」「熱膨張係数が大きい」という2つの条件を満たさなければいけない。また、先行研究で用いられている結晶の熱膨張係数が正 [10] であるのに対して、補償するためには選定する結晶の熱膨張係数が負である必要がある。これは、熱膨張係数が負であることによって、先行研究で用いられている PPKTP の熱膨張を補償することができるからである。よって、選定する結晶のパラメータの条件をまとめると、

- ・熱伝導率が低い
- ・熱膨張係数が大きい
- ・熱膨張係数が負

となる。特に、条件の3つ目が重要となる。具体的には、熱膨張係数の式 5.10 より屈折率の温度係数が負である結晶を選ぶことになる。以下に、選定の候補として挙げた結晶の各パラメータ [24] をまとめた図を示す。図 6.3 より、この中で3つの条件を十分に満たす塩化ナトリウム結晶とフッ化カルシウム結晶に注目した。特に、塩化ナトリウム結晶は再定義した熱膨張係数が負の値かつ他の結晶に比べて大きいので、補償の結晶に適しているのではないかと考えた。しかし、実際は湿度に非常に敏感であり、1日実験室に置いていただけ溶けてしまった。そこで、今回の実験ではフッ化カルシウム結晶を用いる。再定義した熱膨張係数は塩化ナトリウム結晶に比べると非常に小さくなるが、他のパラメータを調節することで PPKTP の光熱効果を補償できると考えた。

## 6.2 光共振器の設計

フッ化カルシウム結晶の光熱効果のパラメータを推定するために、光共振器を用いた。本実験では、最も基本的な2枚の鏡が向かい合った光共振器を設計した。

結晶名	熱膨張係数	熱光学係数	熱伝導率	式 5.10 の熱膨張係数
PPKTP	$g_x = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ $g_y = 9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ $g_z = 0.6 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$\frac{dn_x}{dT} = 1.1 \times 10^{-5}$ $\frac{dn_x}{dT} = 1.3 \times 10^{-5}$ $\frac{dn_x}{dT} = 1.6 \times 10^{-5}$	13 W/m*K	$\alpha_x = 1.9 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ $\alpha_y = 2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ $\alpha_z = 1.6 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
塩化ナトリウム	$44 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$-44.8 \times 10^{-6}$	1.15 W/m*K	$-16.9 \times 10^{-6}$
フッ化バリウム	$18.1 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$-15.2 \times 10^{-6}$	11.7 W/m*K	$-7.1 \times 10^{-6}$
フッ化リチウム	$37 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$-16 \times 10^{-6}$	11.3 W/m*K	$-1.5 \times 10^{-6}$
フッ化カルシウム	$18.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$-10.6 \times 10^{-6}$	9.71 W/m*K	$-2.57 \times 10^{-6}$

図 6.3 結晶の各パラメーター一覧

### 6.2.1 モードマッチ

まず、本実験で用いるレーザーの特性を調べるために、ビームプロファイルを行った。具体的には、ビームプロファイラーを用いて、等間隔でビームの半径を測定し、その結果を式 5.31 を用いてフィッティングすることで、ビームのウエスト半径とウエスト位置を求めた。その結果を以下に示す。

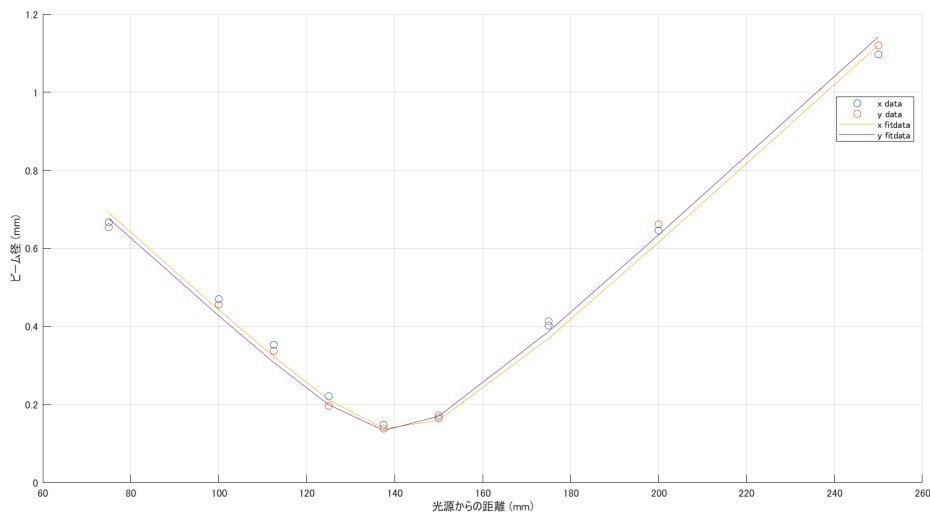


図 6.4 ビームプロファイルの結果

縦軸は光源からの距離、横軸はビーム径をそれぞれ表し、2次元平面を考慮して測定を行った。

その結果、x 軸方向のウエスト半径は 0.0662 [mm] であり、y 軸方向のウエスト半径は 0.0659 [mm] である。本研究でのビームのウエスト半径は、2 つの平均をとった 0.0661 [mm] を用いている。次に、ABCD 行列を用いて光共振器のウエスト半径とウエスト位置を求めた。ここで、式 5.46 の安定条件を満たすように共振器長を決めた。そして、光共振器のウエスト半径とウエスト位置がレーザーのウエスト半径とウエスト位置と一致するような片凸レンズを選定し、光共振器の前に置いた。そうすることで、レーザーのガウシアンビームの空間モードと光共振器の空間モードを一致させることができる。ここで、片凸レンズの選定は JamMT を用いて行った。設計した光共振器を以下に示す。共振器長は 75 [mm] で設計した。

### 6.2.2 フィネスの測定

光共振器のフィネスは光熱吸収率に大きく寄与している。そこで、フィネスがおおよそ設計値通り出ていることは非常に重要である。ここでは、フッ化カルシウム結晶を入れた状態での光共振器のフィネスが重要であるが、その前段階として何も結晶を入れていない光共振器のフィネスの測定を行った。まず、光共振器の離調を調節し、以下のように共振状態が見えるようにする。

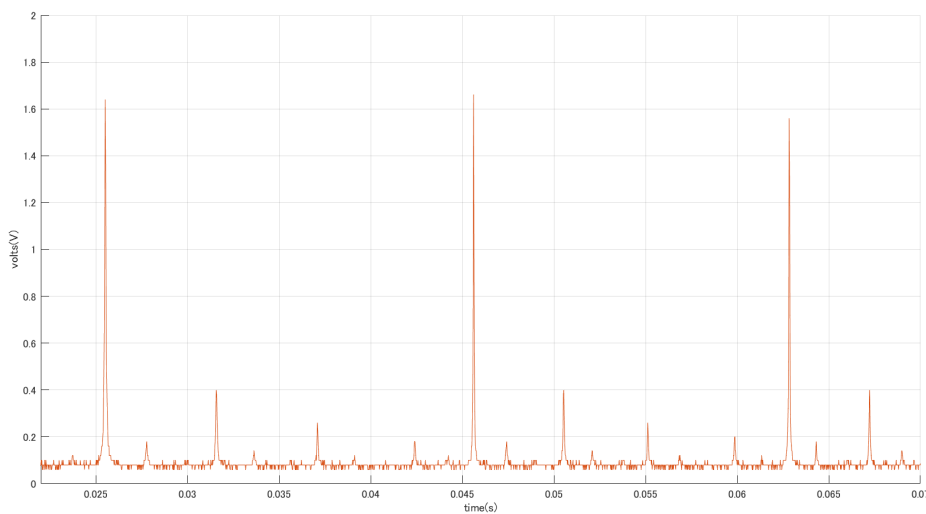


図 6.5 光共振器の共振状態

これは、エンドミラーにピエゾをつけ、発振器から周波数 1 Hz、振幅 2 V の三角波を印加し、透過光をオシロスコープで測定した。複数の共振状態が見えるが、一番大きいピークを光共振器の基本状態として扱う。また、フィネスの測定には、少なくとも共振器長を 1 フリンジ以上変化させる必要があるため、ピエゾドライバーを用いて振幅 2 V の三角波を最大 200 V まで増幅させたうえでピエゾに印加し、フィネスの測定を行った。ここで、ピエゾに負の電圧がかからないように注意が必要であり、ピエゾドライバーのオフセットは 0 に調節した。フィネスは理論的には式 4.98 で求めることができ、計算すると、

$$\mathcal{F}_{cal} = \frac{\pi\sqrt{0.98}}{1 - \sqrt{0.98}} \sim 311 \quad (6.1)$$

である。ここで、エンドミラーの反射率は1として計算した。一方、フィネスを実験的に求めるには、測定結果から共振状態の間隔 FSR と共振ピークの半値全幅 FWHM の比を計算することでフィネスの実測値を求めることができる。まず、FSR は図 6.5 より求めることができ、約  $0.02 \pm 0.001$  となる。次に、FWHM は図 6.5 ではわからないので、以下のように1つのピークを拡大した。FWHM は図 6.6 より求めることができ、 $9e-5 \pm 1.5e-5$  となる。これらの

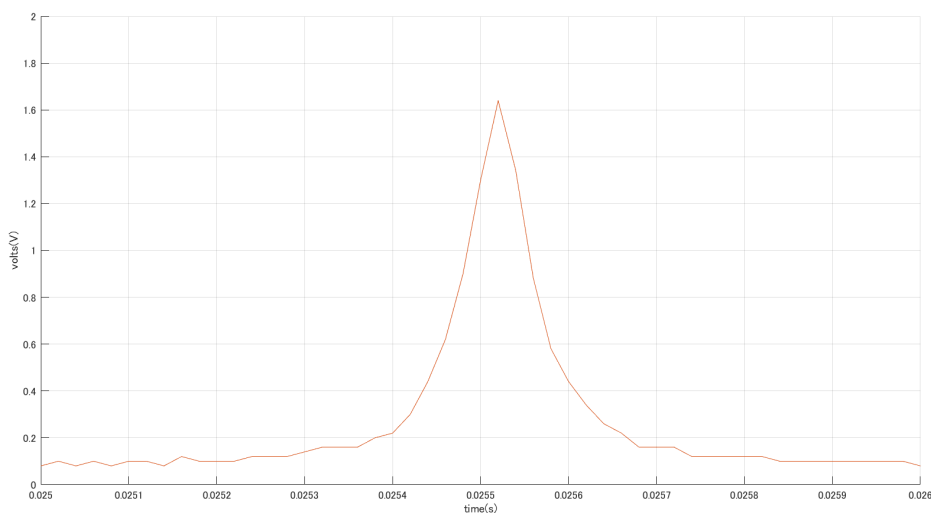


図 6.6 共振ピークの拡大図

ことから、フィネスの実測値を計算すると、

$$\mathcal{F}_{exp} \sim 233 \pm 31 \quad (6.2)$$

となる。フィネスの設計値よりも低くなっていることがわかる。これは、共振器を往復する際に外部にエネルギーが漏れてしまっていることやそれぞれの光学素子の光学損失などが原因として挙げられる。

### 6.2.3 光共振器の制御

本研究では、フッ化カルシウム結晶が入った光共振器をフィードバック制御することで、光熱効果の測定を行った。ここでは、フッ化カルシウム結晶が入っていない状態の光共振器のフィードバック制御を行った。光共振器をフィードバック制御する手法は2つある。1つ目は、「透過光を用いてフィードバック制御」する方法である。この手法では、共振器の離調の大きさごとにフィードバック制御することができる。2つ目は、「PDH法」を用いた方法 [25] である。これは、基本的に光共振器のスペクトルのピーク付近にフィードバック制御することができる。本実験では、「透過光を用いたフィードバック制御」を採用した。これは、光熱効果の光熱吸収率は光共振器の離調の大きさに依存しているため、離調ごとに制御する必要があるからだ。以下に本実験の制御系のブロック線図を示す。ローパスフィルタは、 piezo の共振周波数付近で制御系が不安定にならないように、高周波信号を減衰させている。カットオフ周波数は 3 Hz であり、十分なゲインを持たせた。加算器は、伝達関数の測定用であり、オフセット

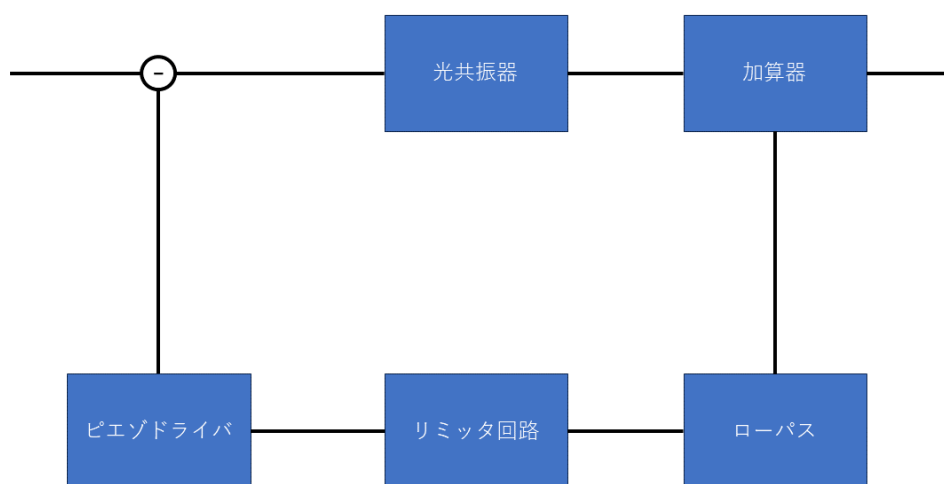


図 6.7 本実験の制御系

調節 ( $\pm 5 \text{ V}$ ,  $\pm 50 \text{ mV}$ ) もついているので、伝達関数を測定するための信号にオフセットを加えることができる。光共振器を制御する際はこのオフセットを調節して行った。また、光共振器の離調が正の領域に制御するのか、負の領域に制御するのかを選択することもできる。リミッタ回路は、ピエゾに負の電圧がかからないようにするためにあり、 $0 \sim 5 \text{ V}$  の範囲でピエゾにかかる電圧が制限されている。加算器の回路図は [17] を参照した。これらの回路をつなげ、エラー信号とリミッタ回路の後の信号をオシロスコープで測定した。加算器のオフセットを変えることで、エラー信号のオフセットも変えることができれば、光共振器は制御されることになる。

#### 6.2.4 伝達関数の測定

ここでは、光共振器にフッ化カルシウム結晶が入っているときの伝達関数と比較するために、光共振器の伝達関数の測定を行った。図 6.7 の制御系から光共振器のみの伝達関数を測定するためには、入出力の比をとる場所が重要である。本実験では以下のようにして、光共振器の伝達関数のみを測定した。ここで、H は光共振器、S はローパスなどの制御回路、+ の部分は加算器をそれぞれ表している。伝達関数を測定するために、加算器に信号  $x$  を加える。例えば、制御回路の後の信号は式 5.1 より  $xS$  となる。同様に計算すると、光共振器と加算器の間の信号は  $-xSH$  となる。よって、A の部分と B の部分の比をとることによって、光共振器の伝達関数のみを測定することができる。まず、光共振器の離調が正の領域に制御されたときの伝達関数の測定結果を以下に示す。特に、位相に注目すると  $3 \sim 300 \text{ Hz}$  で位相が変わらないことがわかる。いくつかのディップがあるが、これはピエゾ、マウントなどの光学素子の共振周波数である。次に、光共振器の離調が負の領域に制御されたときの伝達関数の測定結果を以下に示す。図 6.9 とほとんど変わらない。これらのことから光共振器の伝達関数の位相は特定の領



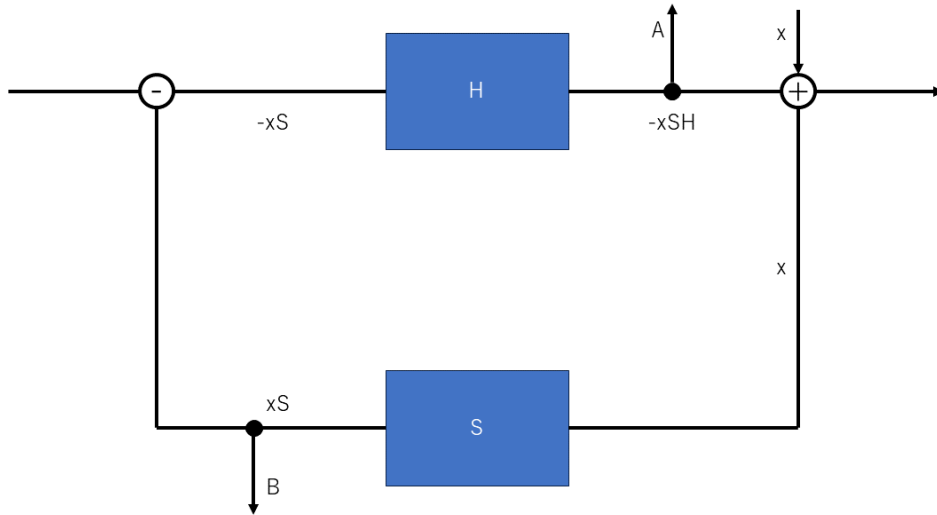


図 6.8 伝達関数の測定

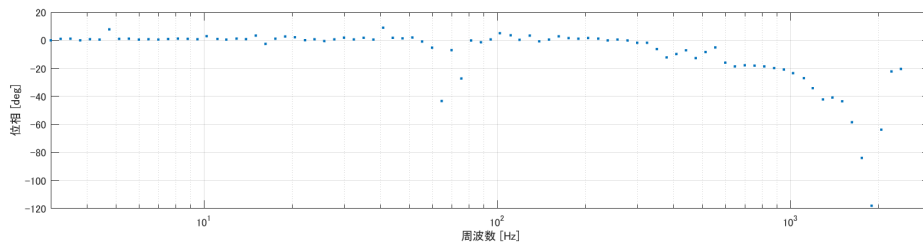


図 6.9 光共振器の離調を1で制御したときの伝達関数

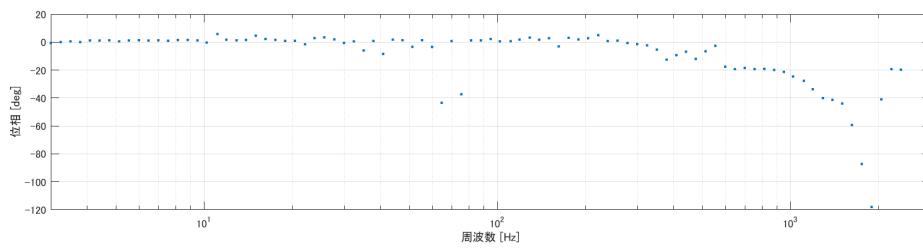


図 6.10 光共振器の離調を-1で制御したときの伝達関数

域で進んだり、遅れたりしないことがわかる。また、これらのことは離調の符号や大きさにも依存しない。高周波数帯域では piezo の共振周波数が顕著になるため、これからの測定では 3 ~ 100 Hz の周波数帯域に焦点を当てることにする。

### 6.3 光熱効果の影響のシミュレーション

本研究の目的は、フッ化カルシウム結晶の光熱効果のパラメータを推定することである。ここでは実際に測定を行う前に、光熱効果があるときの光共振器のスペクトルと伝達関数のシミュレーションを行った。スペクトルのシミュレーションには、式 5.22 を MATLAB の ode45 を使って解き、その値を式 5.16 に代入することで行った。また、伝達関数のシミュレーションでは式 5.25 より光熱吸収率  $\omega_{th}$  と光熱緩和率  $\gamma_{th}$  の値を変えることで行っている。この2つのパラメータは通常、伝達関数の測定結果をフィッティングすることで得られる。一方で、光熱緩和率  $\gamma_{th}$  は式 5.28 を使っても見積もることができる。そのため、シミュレーションで用いた光熱緩和率  $\gamma_{th}$  の値は式 5.28 を用いており、光熱吸収率  $\omega_{th}$  は先行研究で用いられている PPKTP の値と比較しながらシミュレーションを行った。光熱吸収率  $\omega_{th}$  は共振器の離調の大きさに依存する [18] が、本研究のシミュレーションでは離調が 1 のときの光熱吸収率  $\omega_{th}$  を想定している。

#### 6.3.1 PPKTP の光熱効果の影響

フッ化カルシウム結晶の光熱効果の影響をシミュレーションするために、先行研究のセットアップでの PPKTP の光熱効果の影響についてシミュレーションした。これは、PPKTP とフッ化カルシウム結晶を比較することで、光熱効果を補償できるかを確認するためである。また、PPKTP のパラメータの値は先行研究で用いられている値を用いている。まず、光共振器のスペクトルのシミュレーション結果は図 5.6 と同じである。各パラメータを見ると、光共振器のフィネスと離調の大きさ、入射光強度、熱膨張係数によってスペクトルの形が変わることがわかる。次に、パラメータの値を変えたスペクトルのシミュレーション結果を以下に示す。熱膨張係数は結晶によって固定されているため、パラメータ自体を自由に変えることは難しい。そこで、本実験の入射光強度に合わせてシミュレーションを行った。その他のパラメータは図 5.6 と同じである。図 5.6 と比較すると、非常に線幅が狭くなっているため、光熱効果がないときの光共振器のスペクトルと見分けがつかない状態になっていることがわかる。そこで、伝達関数の影響について考えることで、より詳細に光熱効果を測定することができるため、伝達関数のシミュレーションを行った。以下にその結果を示す。光熱緩和率  $\gamma_{th}$  と光熱吸収率  $\omega_{th}$ 、入射光強度と光共振器のフィネスも先行研究の値を用いた。また、光熱吸収率  $\omega_{th}$  は光共振器の離調の大きさが 1 のときの値を用いている。ここで、ゲインは検出器によって異なる結果が得られるため、検出器の影響を受けない伝達関数のボード線図の位相に注目した。光熱効果がない場合の光共振器の伝達関数と比較すると、離調の符号によって位相が進むか遅れることがわかる。このことから、光熱効果は光共振器の伝達関数の位相に顕著に表れることがわかる。

#### 6.3.2 フッ化カルシウム結晶の光熱効果の影響

ここでは、フッ化カルシウム結晶の光熱効果が光共振器に与える影響をシミュレーションする。まず、光共振器のスペクトルのシミュレーション結果を以下に示す。基本的にシミュレー

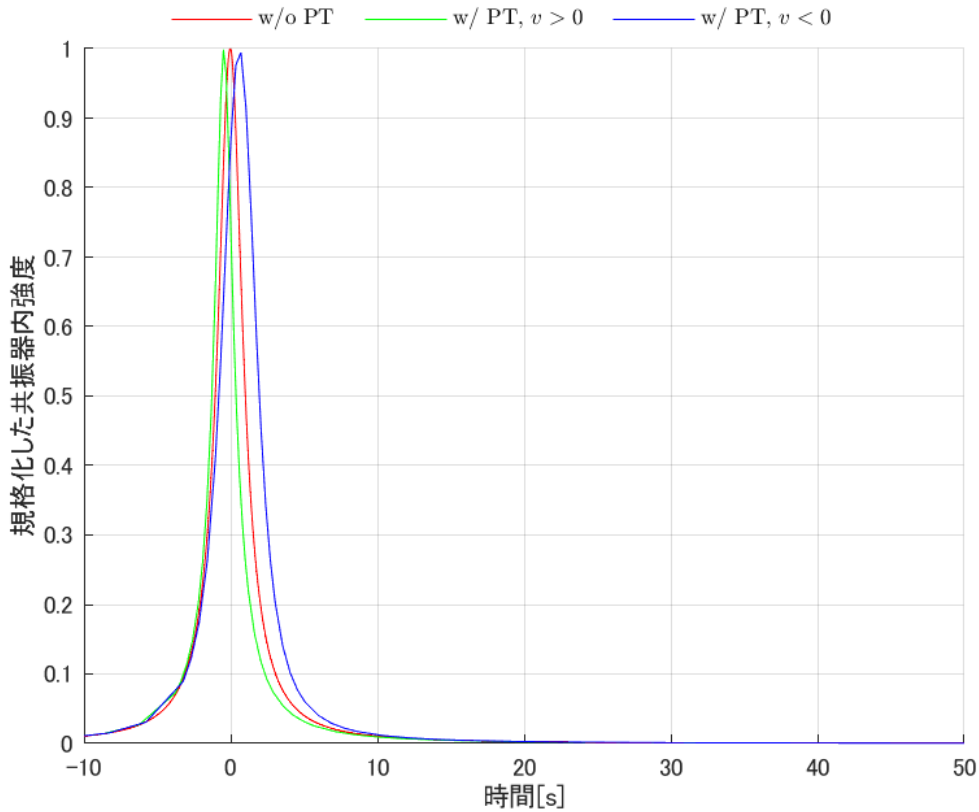


図 6.11 入射光強度を本実験に合わせたときの PPKTP が入っている状態の光共振器のスペクトル

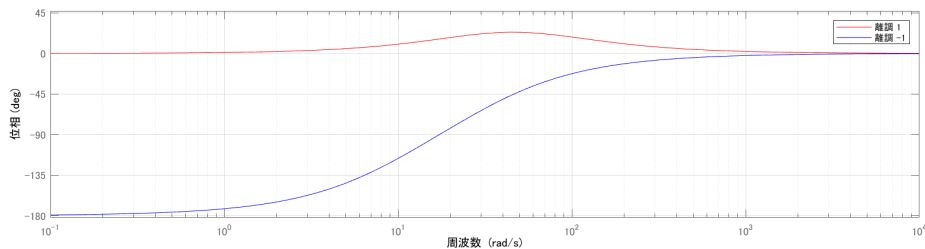


図 6.12 PPKTP を入れた状態の光共振器の伝達関数の位相

シヨンの方法は PPKTP と同じである。先行研究とのパラメータの違いを考慮してスペクトルのシミュレーションを行った。具体的な違いは、入射光強度、光共振器のフィネス、熱膨張係数である。特に、熱膨張係数は PPKTP と比較して、大きさと符号が違う点が重要である。PPKTP のスペクトルのシミュレーション結果である図 6.2 と比較すると、離調の符号によってスペクトルの傾きが逆になっていることがわかる。しかし、PPKTP と同様に、結晶が入っていないときの光共振器のスペクトルとほとんど変わらない。そのため、伝達関数のシミュレーションを行った。フッ化カルシウム結晶の場合、光熱緩和率  $\gamma_{th}$  と光熱吸収率  $\omega_{th}$  は直接的に求めることができないため、PPKTP と比較して各パラメータの値を決めていく。最初に、光熱吸収率  $\omega_{th}$  に注目する。これは、式 5.26 より、主に入射光強度、フィネス、熱膨張係数に依存している。先行研究の各パラメータ [9] に比べて、入射光強度が 1/10 になっている、

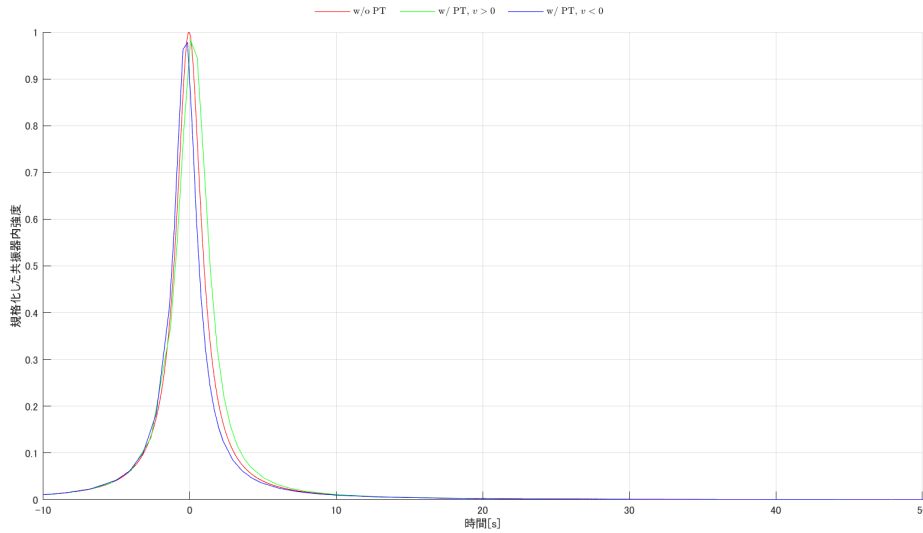


図 6.13 フッ化カルシウム結晶が入っている状態の光共振器のスペクトル

フィネスが 3 倍になっている、熱膨張係数の符号が負であり約 0.13 倍になっていることがそれぞれわかる。よって、PPKTP の場合、光熱吸収率  $\omega_{th} = 40$  (離調 1) に対して、式 5.26 よりフッ化カルシウム結晶の光熱吸収率  $\omega_{th} = 4.68$  としてシミュレーションを行った。また、その他のパラメータは PPKTP と同じ値を用いている。続いて、光熱緩和率  $\gamma_{th}$  に注目する。ここでは、結晶にあたるレーザーのビーム半径が一定であるという仮定の下、式 5.28 を用いて光熱緩和率  $\gamma_{th}$  の値を決めた。式 5.28 より光熱緩和率  $\gamma_{th}$  はビーム半径の 2 乗に反比例するため、結晶を通るビーム半径が大きければ小さくなり、結晶を通るビーム半径が小さければ大きくなるのがわかる。本実験のビーム半径は、PPKTP の場合のビーム半径に比べて大きいので、光熱緩和率  $\gamma_{th}$  は PPKTP の光熱緩和率の値よりも小さいとしてシミュレーションを行った。また、 $\omega_{th} > \gamma_{th}$  を満たすように調節した。まず、PPKTP とフッ化カルシウム結晶の単純な比較のために、PPKTP の光熱緩和率と符号を逆にした光熱吸収率をそのまま用いたシミュレーション結果を以下に示す。

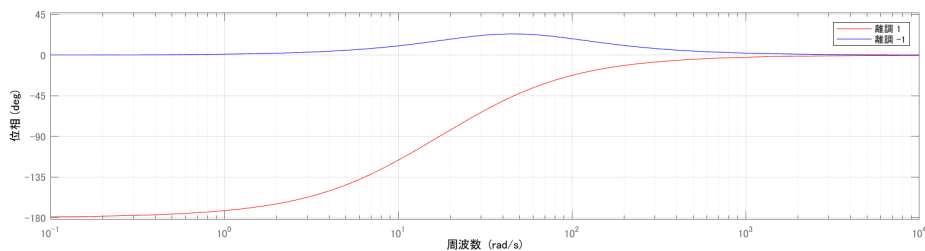


図 6.14 熱膨張係数の符号が逆の PPKTP を入れた状態を想定した光共振器の伝達関数の位相

ここで、PPKTP の熱膨張係数とフッ化カルシウム結晶の熱膨張係数は符号が逆であるため、シミュレーションでは光熱吸収率の符号を負にしている。図 6.12 と比較して、離調の大きさに対する伝達関数の位相が逆になっているのがわかる。次に、本実験のセットアップの

パラメータの値に合わせてシミュレーションを行った結果を以下に示す。図 6.15 から 10 Hz

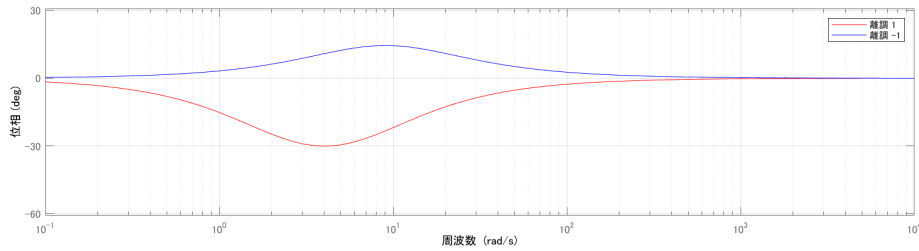


図 6.15 フッ化カルシウム結晶を入れた光共振器の離調が 1 のときの伝達関数の位相

程度までの低周波数帯域でそれぞれ位相進みと位相遅れが起きていることがわかる。また、図 6.15 のシミュレーションは離調  $\pm 1$  のときのみであったが、様々な離調の大きさによる伝達関数を比較したシミュレーション結果も以下に示す。離調の大きさに依存して位相進みと位相遅

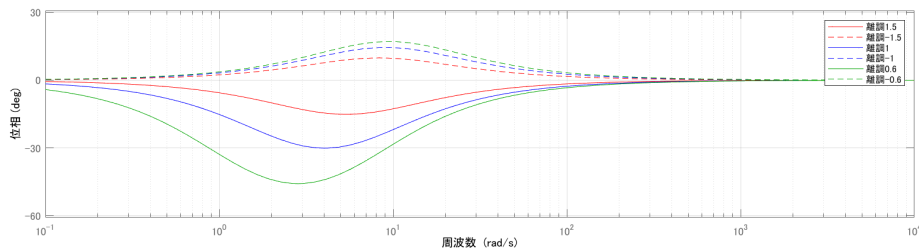


図 6.16 フッ化カルシウム結晶を入れた光共振器の伝達関数の位相

れの大きさが変化していることがわかる。特に、離調が 0.6 のとき位相遅れと位相進みが最も大きくなる。また、先行研究の非線形光学結晶は、離調が正のとき、光熱緩和率  $\omega_{th} > 0$  で光熱吸収率  $\gamma_{th} > 0$  となり、離調が負のとき、光熱緩和率  $\omega_{th} > 0$  で光熱吸収率  $\gamma_{th} > 0$  であるのに対して、フッ化カルシウム結晶は離調が正のとき、光熱緩和率  $\omega_{th} < 0$  で光熱吸収率  $\gamma_{th} > 0$  となり、離調が負のとき、光熱緩和率  $\omega_{th} > 0$  で光熱吸収率  $\gamma_{th} > 0$  となることがわかる。これが、非線形光学結晶の光熱効果を補償する条件となる。

## 6.4 フッ化カルシウム結晶の光熱効果測定

光熱効果の影響は光共振器のスペクトルや伝達関数に現れる。また、光熱効果の各パラメータは伝達関数を測定することで推定することができる。そこで、フッ化カルシウム結晶を挿入した光共振器の伝達関数の測定を行い、フッ化カルシウム結晶の光熱効果の各パラメータを推定した。

### 6.4.1 光共振器の設計

本実験では、設計した光共振器にフッ化カルシウム結晶を入れることで、光共振器の再設計を行う。結晶が入ったことで、元の共振器長が伸び、光共振器のモードマッチの低下につなが

る。具体的には、基本モードだけでなく、様々なモードが見えてしまっている状態である。これを改善するために、共振器長を調節した。フッ化カルシウム結晶は厚さ 5 mm で屈折率が 1.434 なので、共振器長に換算すると、約 7 mm 伸びていることがわかる。そこで、共振器長を縮める方向にエンドミラーを調節した。その結果を以下に示す。高次のモードが少なくな

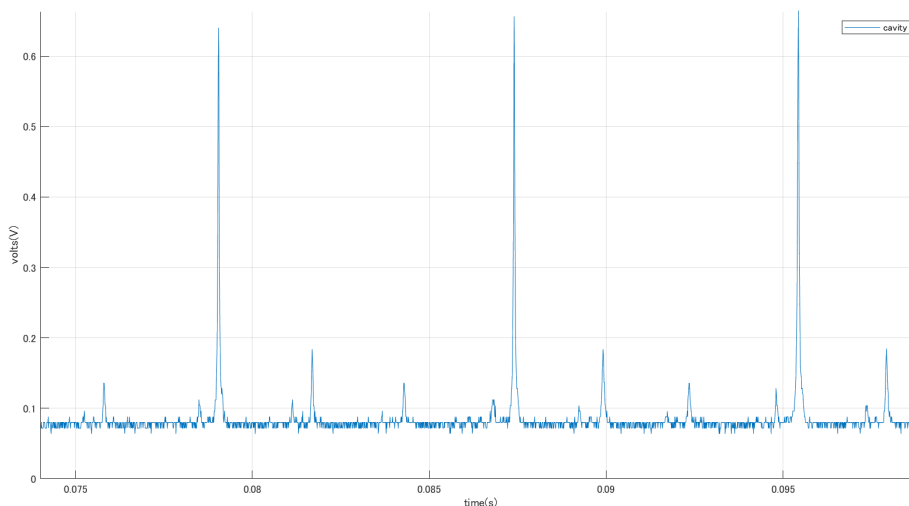


図 6.17 フッ化カルシウム結晶が入った光共振器の共振状態

り、基本モードを大きくすることができた。このことにより、フッ化カルシウム結晶を入れたことによる光共振器のモードマッチの低下を改善した。次に、フッ化カルシウム結晶が入った光共振器のフィネスの測定を行う。これは、測定結果から共振状態の間隔 FSR と共振ピークの半値全幅 FWHM の比を計算することで求めることができる。FSR は図 6.17 より、 $0.008 \pm 0.0001$  となる。一方で、FWHM は 1 つのピークを拡大した図 6.18 より、 $4e-5$  となる。よって、フィネスの実測値は

$$\mathcal{F}_{caf} \sim 209 \pm 4 \quad (6.3)$$

となる。フッ化カルシウム結晶が入っていない光共振器のフィネスの実測値  $\mathcal{F}_{exp}$  と比較しても、より小さくなっていることがわかる。これは、フッ化カルシウム結晶が入ったことにより、光学損失が増えてしまったことが原因として考えられる。

#### 6.4.2 光共振器の制御

フッ化カルシウム結晶を入れた光共振器を制御する。制御の方法はフッ化カルシウム結晶が入っていない単純な光共振器の制御方法と同じである。よって、この制御系のブロック線図は図 6.7 と同じになる。加算器のオフセットを変えることで、制御をすることができた。また、光共振器の制御の位置は加算器のオフセットで調節することができる。本実験では、制御する位置を変えながら伝達関数の測定を行った。

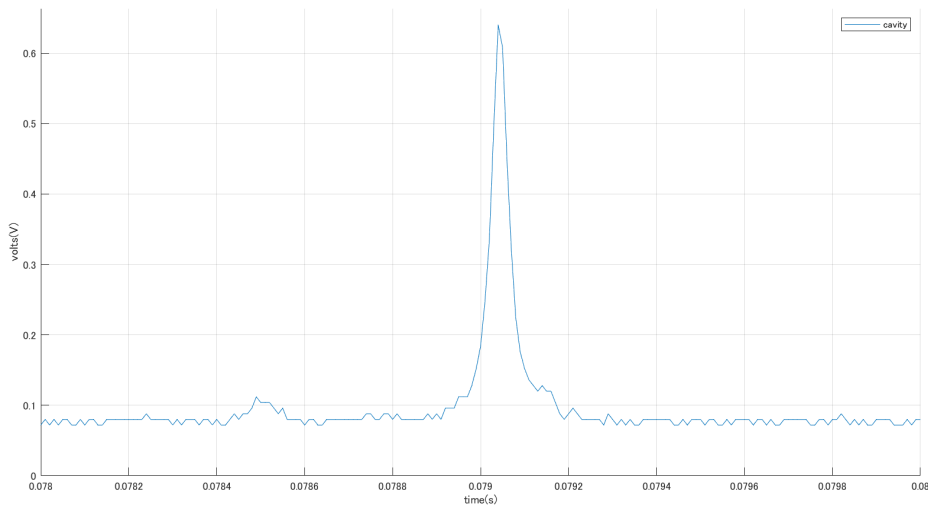


図 6.18 共振ピークの拡大図

### 6.4.3 伝達関数の測定

ここでは、フッ化カルシウム結晶を入れた光共振器の伝達関数の測定を行った。測定方法は、フッ化カルシウム結晶が入っていないときと同様で、制御系のブロック線図は図 6.8 と同じになる。また、測定対象である光共振器の離調がそれぞれ  $\pm 1.5, \pm 1, \pm 0.6$  のところに制御したときの伝達関数の測定を行った。これらは、式 5.16 よりそれぞれ光共振器の透過光強度の  $1/4, 2/4, 3/4$  に該当する。測定結果とその結果をフィッティングした結果を以下に示す。

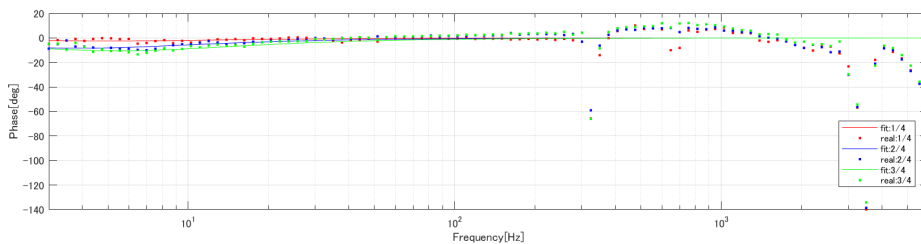


図 6.19 離調が正のときの測定結果とフィッティング結果

ここで、フィッティングは  $10 \sim 100$  Hz のデータを式 5.25 用いて行った。これは、 $100$  Hz 以上ではピエゾの共振周波数がありフィッティングがうまくいかず、 $10$  Hz 以下ではフィッティング結果と測定結果が一致しないためである。特に、低周波数帯域での不一致は、信号をゆっくり変化させたときに、熱の流出に寄与する領域が広がったため、実効的な熱容量が増加し、低周波数帯域での光熱緩和率  $\gamma_{th}$  が増加したことが原因として考えられる。データをより見やすくするために、 $10 \sim 200$  Hz の周波数領域で伝達関数の結果を拡大した図を以下に示す。フッ化カルシウム結晶が入っていないときの光共振器の伝達関数 (図 6.9、図 6.10) と比較すると、

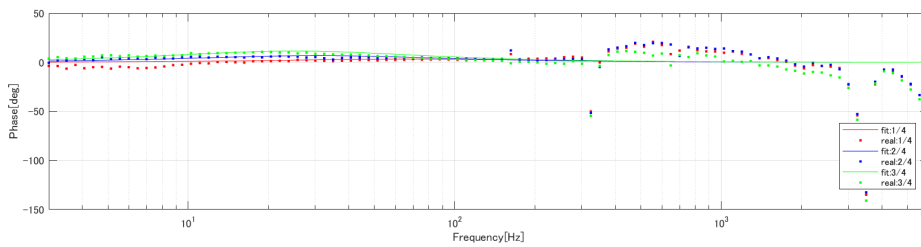


図 6.20 離調が負のときの測定結果とフィッティング結果

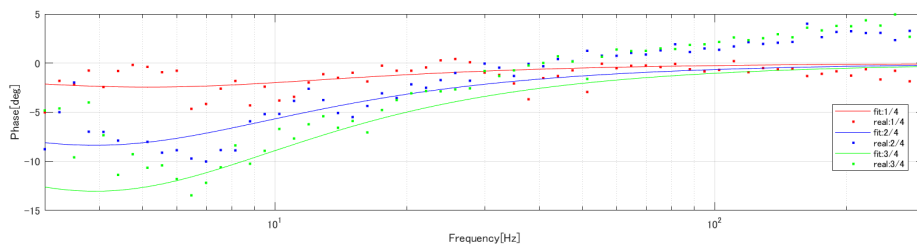


図 6.21 離調が正のときの測定結果を拡大した

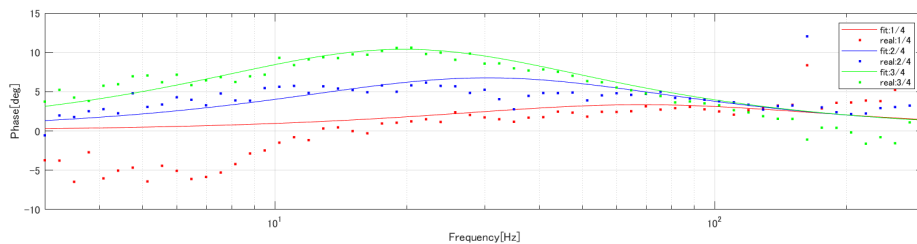


図 6.22 離調が負のときの測定結果を拡大した

特定の周波数帯域で離調が正のとき位相が遅れ、負のとき位相が進んでいることがわかる。また、シミュレーション結果である図 6.16 とよく一致し、離調が  $\pm 0.6$ 、つまり光共振器を透過光強度の  $3/4$  の位置に制御したときが位相遅れと位相進みが最も大きくなっている。このことから、光熱効果の影響が最もよく表れるのは、光共振器の離調が  $\pm 0.6$  のときであることがわかる。

#### 6.4.4 フッ化カルシウム結晶の評価

ここでは、フィッティング結果を用いてフッ化カルシウム結晶の光熱緩和率  $\gamma_{th}$  と光熱吸収率  $\omega_{th}$  の値を推定する。以下にその結果を示す。

フィッティングは式 5.25 を用いて行うことができ、その結果からそれぞれのパラメータを推定することができる。表 6.1, 6.2 より、光共振器の離調が  $\pm 0.6$  のときが最も光熱効果が顕著に表れ、離調が  $0.6$  のとき、光熱緩和率  $\gamma_{th} = 6.57$ 、光熱吸収率  $\omega_{th} = -2.02$  となった。



離調	$\omega_{th}/2\pi$ [Hz]	$\gamma_{th}/2\pi$ [Hz]
1.5	-0.44	5.36
1	-1.14	4.51
0.6	-2.02	6.57

表 6.1 離調が正のときの各パラメータ

離調	$\omega_{th}/2\pi$ [Hz]	$\gamma_{th}/2\pi$ [Hz]
-1.5	6.82	35.5
-1	7.23	27.1
-0.6	10.2	20.5

表 6.2 離調が負のときの各パラメータ

一方で、離調が -0.6 のとき、光熱緩和率  $\gamma_{th} = 20.5$ 、光熱吸収率  $\omega_{th} = 10.2$  となった。離調の符号によって値が異なるのは、離調を行う際に結晶にあたるビームがずれ、結晶中のビーム径が多少ずれたことが原因として考えられる。この結果から、離調が正のとき光熱吸収率が負となり、離調が負のとき光熱吸収率が正になるため、フッ化カルシウム結晶は、先行研究で用いられている非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果を補償する条件を満たすパラメータを持つことがわかった。

## 第7章

# 結論

次世代重力波検出器のための技術として、光パラメトリック増幅と光カー効果の2つの非線形光学効果を用いた信号増幅技術の開発が進んでおり、先行研究ではその技術を用いた光ばねの強化に成功している。しかし、2つの非線形光学効果以外に非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果が無視できなくなり、それに伴って光共振器の時間応答や周波数応答を変化させることがわかっている。また、光ばねにも影響を及ぼす。そこで、先行研究では光熱効果のパラメータを正確に見積もり、差し引くことで、非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果の影響を打ち消している。本研究では、実験的に非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果を補償することを目指した。

非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果の影響を補償するための条件を計算し、その条件を満たす結晶をいくつか選定した。その中でも、最も適正と思われるフッ化カルシウム結晶を見つけ、その特性を評価した。

フッ化カルシウム結晶の光熱効果を測定するために十分なフィネスを持つ光共振器を設計した。設計した光共振器にフッ化カルシウム結晶を挿入し、安定性を確認した。そして、透過光をエラー信号として制御することに成功した。

光熱効果の影響は、光共振器のスペクトルや伝達関数に現れるが、本研究ではフッ化カルシウム結晶の光熱効果のパラメータの推定を行うことが目的であるため、伝達関数の位相の測定を行うことで、パラメータの推定を行った。そして、フッ化カルシウム結晶が挿入された光共振器の伝達関数の位相の測定に成功した。光共振器の離調が正のとき、非線形光学結晶 PPKTP は特定の周波数帯域で位相進みが起きるのに対して、フッ化カルシウム結晶は位相遅れが起きることを発見した。一方で、光共振器の離調が負のとき、非線形光学結晶 PPKTP は特定の周波数帯域で位相遅れが起きるのに対して、フッ化カルシウム結晶は位相進みが起きることを発見した。また、離調ごとに伝達関数の測定を行い、離調が  $\pm 0.6$  のとき位相進み及び位相遅れが最も大きくなることがわかった。

伝達関数の測定結果をもとに、光熱効果を考慮した光共振器の伝達関数のモデル式 5.25 にフィッティングすることで、フッ化カルシウム結晶の光熱効果のパラメータ推定を行った。その結果、非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果の影響を補償するための条件を満たすパラメータを持つことがわかった。

本研究では、非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果を補償するための結晶を発見し、条件を満たすパラメータを持つことを確認できた。しかし、フッ化カルシウム結晶を非線形光学結晶

PPKTPが入っている光共振器に挿入し、伝達関数を測定することはできなかった。また、本研究で推定したパラメータの値は非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果の影響を補償するために十分な大きさではなかった。これは、光共振器のウエスト半径、光共振器内に結晶を置く位置を変えることで調節することができる。

今後は、フッ化カルシウム結晶を 信号増幅が行われている光共振器内に挿入し、伝達関数の測定を行うことで、非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果の影響を実験的に補償できることを確認したい。また、本研究では取り扱いが難しく用いることができなかったが、湿度や室温をうまくコントロールできれば、塩化ナトリウム結晶を用いることでも非線形光学結晶 PPKTP の光熱効果の影響を補償できると考えている。これは、フッ化カルシウム結晶よりも大きな補償条件を満たすパラメータを持っているからである。

## 謝辞

多くの方々の支えがあり、本修士論文を完成させることができました。締めくくりとして、この場を借りて感謝の気持ちを示したいと思います。

指導教員である宗宮先生には、短い期間ではありましたが、研究生生活の様々なことで大変お世話になりました。本研究室に所属し、修士論文を書き上げるまでに成長できたのは先生の指導のおかげです。また、研究テーマに関する助言を通して、専門的な知識だけでなく、試行錯誤する大切さや狭い視野にとらわれない大切さを先生から学ぶことができました。ありがとうございます。

原田先生には、実験室での器具の使い方や困っている際に助けていただきました。また、研究に対する姿勢を学ばせていただきました。

小田部さんには、実験の基礎となるところから本研究に至るまでたくさんのサポートをいただきました。短い期間ではありましたが、身近で小田部さんの研究に対する姿勢や考え方を実感し、たくさんのことを吸収させていただきました。また、実験で困ったことがあり壁にぶつかったとき、親身になって相談にのっていただきありがとうございました。

学習院大学の松本先生には、研究の基礎となる考え方や物事を考え抜く大切さを学ばせていただきました。当時は、松本先生にいただいた指導を理解できない未熟さがありましたが、今では本修士論文を完成させるうえでの土台となっています。ありがとうございました。

松本研究室の方々には、つらいときなどにたくさんの励ましをいただきました。皆さんのおかげで、楽しい研究生生活を送ることができました。

海堂さんには、特に実験室でお世話になりました。実験室で、行き詰っているときなどに声をかけていただき、とても助けになりました。

阿部さんには、ゼミの時間にお世話になりました。鋭い質問やたくさんの議論を通して、知識を深めることができました。

宗宮研究室の同期である笹岡くん、竹口くん、武田さんには研究の面ではもちろん、プライベートの面でも大変お世話になりました。3人ともとても優秀で、ついていくのに必死でしたが、たくさんのことを学ばせていただきました。また、気軽に話せる同期に恵まれて、研究生生活を楽しく過ごすことができました。私にとって3人の同期の存在がとても大きかったです。

羽場君には光共振器を設計する際にお世話になりました。また、堅実に研究に取り組む姿勢には感銘を受けました。

Diego とは研究室のイベントの際にお世話になりました。明るいキャラクターで場を盛り上げてくださり、ありがとうございました。

井殿君、竹下君には、居室でお世話になりました。時々、コミュニケーションをとっていた

だきありがとうございました。

OBの孝典さんには、就職活動の際にお世話になりました。お忙しい中、ESの添削や就活の相談に乗っていただきありがとうございました。

最後に、ここまで自分を育ててくれた家族には感謝してもしきれないほどのサポートをいただきました。このように何不自由なく学ぶことができ、自分の好きなものに没頭できたのは、特に母の存在が大きいと感じています。どんなときでも、自分の背中を押し、奮い立たせていただいたおかげで、本修士論文を完成させるまでに成長することができました。また、祖父や祖母、その他家族の方々の多大なるサポート、本当にありがとうございました。

たくさんの方々の支えがあって、本修士論文を完成させることができました。改めて感謝申し上げます。ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] 中村卓史/三尾典克/大橋正健, 重力波を捉える (京都大学学術出版会, 1998).
- [2] 苔山圭以子, 重力波検出器と重力波天文学 (2016).
- [3] LIGO 公式ホームページ, (<https://www.ligo.caltech.edu/>).
- [4] 川村静児, 重力波物理の最前線 (共立出版, 2018).
- [5] 柴田大/久徳浩太郎, 重力波の源 (朝倉書店, 2018).
- [6] 鈴木孝典, 流体シミュレーションを用いた重力波望遠鏡 KAGRA の地下水がもたらす重力勾配雑音の推定.
- [7] 鈴木海堂, 次世代重力波検出器のための非線形光学効果を用いた信号増幅技術の開発, Master's thesis, 東京工業大学 (2023).
- [8] 黒田和男, 非線形光学 (コロナ社, 2008).
- [9] 小田部荘達, Photothermal and Nonlinear Optical Effects in the Signal Amplification System for a Gravitational Wave Detector.
- [10] S. Otabe, W. Usukura, K. Suzuki, K. Komori, Y. Michimura, K.-i. Harada, and K. Somiya, Kerr-Enhanced Optical Spring, arXiv preprint arXiv:2310.18828 (2023).
- [11] H. Rehbein, H. Müller-Ebhardt, K. Somiya, S. L. Danilishin, R. Schnabel, K. Danzmann, and Y. Chen, Double optical spring enhancement for gravitational-wave detectors, *Physical Review D* **78**, 062003 (2008).
- [12] A. Buonanno and Y. Chen, Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs, *Physical Review D* **65**, 042001 (2002).
- [13] K. Somiya, Y. Kataoka, J. Kato, N. Saito, and K. Yano, Parametric signal amplification to create a stiff optical bar, *Physics Letters A* **380**, 521–524 (2016).
- [14] K. Somiya, K. Suzuki, S. Otabe, and K. Harada, Intracavity signal amplification system for next-generation gravitational-wave detectors, *Physical Review D* **107**, 122005 (2023).
- [15] 南. 裕樹, *Python* による制御工学入門 (オーム社, 2019).
- [16] 佐藤和也/平元和彦/平田研二, 初めての制御工学 (講談社, 2018).
- [17] 小田部荘達, 高硬度光ばねを用いた重力波信号増幅システムの開発.
- [18] S. Otabe, K. Komori, K.-i. Harada, K. Suzuki, Y. Michimura, and K. Somiya, Photothermal effect in macroscopic optomechanical systems with an intracavity nonlinear optical crystal, *Optics Express* **30**, 42579 (2022).
- [19] A. Koike and N. Sugimoto, *Temperature Dependences of Optical Path Length in In-*

- organic Glasses* (Reports Res. Lab. Asahi Glass Co., Ltd., 2006).
- [20] M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann, and M. Pinard, Thermoelastic effects at low temperatures and quantum limits in displacement measurements, *Physical Review D* **63**, 082003 (2001).
- [21] 松本伸之, 物理実験 2・3 テキスト テーマ: 光計測 (学習院大学, 2024).
- [22] 道村唯太, 光共振器基礎 (東京大学, 2012).
- [23] 道村唯太, *Mode Matching と Wavefront Sensing* (東京大学, 2009).
- [24] W. J. Tropf, M. E. Thomas, and T. J. Harris, Properties of crystals and glasses, *Handbook of optics* **2**, 33 (1995).
- [25] 道村雄太, *Notes on the Pound-Drever-Hall technique* (東京大学, 2010).