

修士論文

重力波望遠鏡 KAGRA における
非一様複屈折の影響下での
機械学習を用いた鏡の角度制御法の開発

東京科学大学理学院物理学系物理学コース

宗宮研究室

竹下 賢徳

2026年2月2日

概要

重力波とは時空の歪みが波となり、光速で伝播する現象である。その存在は A. Einstein が提唱した一般相対性理論の帰結として、1916 年に予言された [1, 2]。重力波は物質との相互作用が極めて弱く、高い透過性を有する。この性質により、超新星爆発やブラックホール連星系の内部、宇宙の晴れ上がり以前の初期宇宙など電磁波では観測困難である情報を捉えることのできる新たな手段として期待されている。

A. Einstein が予言してから約 100 年後である 2015 年 9 月 14 日にアメリカの重力波望遠鏡 LIGO [3] の 2 基により直接観測が達成された [4]。それ以降、重力波の検出は次々と報告されており、特に 2017 年には連星中性子星合体からの重力波 (GW170817) が、欧州の Virgo [5] を含む 3 台のネットワークによって捉えられ、電磁波との同時観測によるマルチメッセンジャー天文学が確立された [6]。

岐阜県神岡に建設された日本の検出器 KAGRA [7] は、LIGO や Virgo とともに重力波を観測し、波源の位置推定精度の向上や重力波の偏極情報の解明に寄与することが期待されている。これらの重力波検出器は、光共振器を有するレーザー干渉計であり、重力波による時空の歪みを光路長の変化として検出する原理に基づく。高感度な観測を実現するためには、共振器を構成する鏡の角度を高精度に制御することが求められる。KAGRA は地面振動雑音低減のため地下に建設され、熱雑音を低減するために鏡を 20 K まで冷却するという先進的な特徴をもつ。鏡の基材には低温での熱伝導率に優れたサファイアが採用された。サファイアは結晶構造に由来する複屈折性を持ち、現行の鏡ではこの複屈折が非一様に分布していることが確認されている。この非一様性は、レーザー光の揺らぎと結合して従来 of 角度制御信号に誤差を生じさせ、制御精度を低下させる。これが感度を制限する要因となる可能性が指摘されている [8]。

本研究では、シミュレーションを用いて非一様な複屈折を含む光共振器モデルを構築した。この環境下で機械学習を用いた制御手法を適用し、複屈折に起因する角度制御ノイズを低減できることを示した。

第 1 章では、一般相対性理論に基づいた重力波の表式を導く。第 2 章では、重力波検出器の基本的な原理と KAGRA の構成について述べる。第 3 章では、Maxwell 方程式から始まり、鏡の角度制御の手法である Wavefront Sensing 法の導出、鏡のミスアライメントによる影響まで述べる。第 4 章では、KAGRA で用いられるサファイア鏡に存在する複屈折性の理論について述べる。第 5 章では、本研究で用いた機械学習の理論と重力波分野での機械学習の活用について述べる。第 6 章では、本研究で行った手順について記述し、実際に実験を行った結果を示し、その考察を行う。最後に第 7 章で本研究の結論をまとめ、今後の課題について述べる。

Abstract

Gravitational waves are ripples in spacetime that propagate at the speed of light. Their existence was predicted by Einstein in 1916 as a consequence of general relativity [1, 2]. Because gravitational waves interact only weakly with matter, they can traverse intervening material with little absorption or scattering. This property makes gravitational-wave observations a powerful probe of otherwise inaccessible phenomena, such as the interiors of supernova explosions and compact binaries, as well as the early Universe before recombination.

Approximately a century after Einstein's prediction, gravitational waves were first directly observed on September 14, 2015 (GW150914) with the two Advanced LIGO detectors in the United States [3, 4]. Since then, many gravitational-wave detections have been reported. In particular, in 2017, gravitational waves from a binary neutron-star merger (GW170817) were observed by a three-detector network including Virgo in Europe [5, 6], establishing multi-messenger astronomy through simultaneous observations of gravitational-wave and electromagnetic signals.

KAGRA, a Japanese detector in Kamioka [7], is expected to contribute to the global network with LIGO and Virgo by improving source localization and enhancing polarization measurements. These gravitational-wave detectors are laser interferometers with optical cavities that detect spacetime distortions induced by gravitational waves as differential changes in the optical path length. To achieve high-sensitivity observations, it is essential to control the angular alignment of the cavity mirrors with high precision. KAGRA is built underground to reduce seismic noise and uses cryogenic mirrors cooled to 20 K to suppress thermal noise. Sapphire, which has high thermal conductivity at cryogenic temperatures, was chosen as the mirror substrate. Sapphire exhibits birefringence originating from its crystal structure, and non-uniform birefringence has been reported in the current mirrors. Such non-uniformity can couple to laser-field fluctuations and introduce errors in conventional alignment-sensing signals. This degrades the control precision and has been identified as a potential sensitivity-limiting factor [8].

In this study, we constructed an optical-cavity model including non-uniform birefringence using numerical simulations. In this simulated environment, we applied a machine-learning-based control method and demonstrated that alignment noise arising from birefringence can be reduced.

Chapter 1 derives the formulation of gravitational waves based on general relativity. Chapter 2 describes the basic principles of gravitational-wave detectors and the configuration of KAGRA. Chapter 3 derives the wavefront sensing method for mirror alignment control from Maxwell's equations and discusses the effects of mirror misalignment. Chapter 4 presents the theory of birefringence in the sapphire mirrors used in KAGRA. Chapter 5 describes the machine-learning theory employed in this study and reviews applications of machine learning in gravitational-wave research. Chapter 6 details the procedures carried out in this work, presents the simulation results, and discusses them. Finally, Chapter 7 summarizes the conclusions of this study and outlines future work.

目次

図目次	vi
表目次	viii
第 1 章 重力波の理論	1
1.1 一般相対性理論の基礎	1
1.2 線形化重力理論	2
1.3 平面波解と偏光モード	3
1.4 重力波の放射	4
第 2 章 重力波検出器	6
2.1 Michelson 干渉計による重力波の検出	6
2.2 Fabry-Perot 共振器	8
2.3 重力波検出器の雑音源	12
2.4 大型低温重力波検出器 KAGRA	13
第 3 章 レーザー光学と鏡の角度制御	16
3.1 Gaussian ビーム	16
3.2 ビームパラメータ	19
3.3 Hermite Gaussian モード	21
3.4 Pound-Drever-Hall (PDH) 法	25
3.5 Wavefront Sensing (WFS) 法	28
3.6 鏡のミスアライメントによる影響	32
第 4 章 複屈折	35
4.1 複屈折の理論	35
4.2 KAGRA における複屈折	38
第 5 章 機械学習	44
5.1 問題の定式化	44
5.2 ニューラルネットワーク	44
5.3 教師あり学習	46
5.4 強化学習	47

5.5	Soft Actor-Critic	49
5.6	重力波研究における機械学習の活用	51
第 6 章	実験	52
6.1	光学シミュレーション	52
6.2	教師あり学習	56
6.3	強化学習	65
6.4	結果のまとめ	72
第 7 章	結論	75
付録 A	種々の計算	77
A.1	Triple Mach-Zehnder 干渉計	77
A.2	多重分割 PD による信号取得手法	79
A.3	ビームジッタースペクトルの計算	83
付録 B	開発環境	85
B.1	使用ソフトウェア環境	85
B.2	ソースコード	85
謝辞	102
参考文献	104

目次

1.1	重力波の偏光モードによる自由質点の変化	5
2.1	Michelson 干渉計	6
2.2	Fabry-Perot 共振器における電場の定義	8
2.3	FP 共振器の透過光強度と位相	10
2.4	FP 共振器の応答特性	11
2.5	KAGRA の設計感度	14
2.6	KAGRA の光学的な構成の模式図	15
3.1	Gaussian ビーム	19
3.2	角度による反射光の DC 強度と PDH エラー信号	28
3.3	Sidles-Sigg 効果	33
4.1	屈折率楕円体	35
4.2	入射光と屈折率楕円体	36
4.3	入射光に垂直な面による屈折率楕円体の切断楕円面	37
4.4	異なる複屈折性を持つ複数の板を通過する光	39
4.5	サファイア鏡の複屈折マップ	39
4.6	ITM 上のビームジッター	41
4.7	複屈折がない場合の直接的なカップリングと複屈折がある場合でのビーム ジッター雑音の比較	42
5.1	多層パーセプトロンの構造例	45
5.2	活性化関数の形状	46
6.1	光学シミュレーションのセットアップの模式図	52
6.2	角度変化に対する WFS 信号 (X arm, HARD, yaw)	54
6.3	ビームスポットの配置と測定された角度オフセットの分布	54
6.4	各ビームスポットでの角度のオフセット (X arm, HARD, yaw)	55
6.5	フィードバックループ	57
6.6	ビームスポットの座標	58
6.7	予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw, ショット雑音あり)	59

6.8	予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw, ショット雑音なし)	59
6.9	ニューラルネットワークの構成	60
6.10	学習曲線 (X arm, HARD, yaw)	61
6.11	検証データの予測傾向 (± 300 nrad, X arm, HARD, yaw)	61
6.12	検証データの予測傾向 (± 0.05 nrad, X arm, HARD, yaw)	61
6.13	範囲を拡大したモデルでの検証データの予測傾向 (± 3000 nrad, X arm, HARD, yaw)	63
6.14	範囲を拡大したモデルでの予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw)	63
6.15	範囲を縮小したモデルでの検証データの予測傾向 (± 0.05 nrad, X arm, HARD, yaw)	64
6.16	範囲を縮小したモデルでの予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw)	64
6.17	強化学習の環境のイメージ	65
6.18	報酬関数の可視化	67
6.19	再現した ITM 上のビームジッター (時系列)	68
6.20	学習の推移	69
6.21	鏡の角度の推移の一例 (800 エピソード学習済み)	69
6.22	鏡の角度の推移の一例 (学習途中のモデル)	70
6.23	ショット雑音の有無による制御点の比較 (QPD, X arm, HARD, yaw)	70
6.24	各手法による角度制御揺らぎの改善倍率 (X arm)	74
6.25	各手法による角度制御揺らぎの改善倍率 (Y arm)	74
A.1	Triple Mach-Zehnder 干渉計	77
A.2	DC 強度の測定範囲ごとの比較 (X arm)	81
A.3	復調信号の測定範囲ごとの比較 (X arm)	82
A.4	KAGRA のパワーリサイクリングミラー手前の光学配置	83
A.5	簡略化した配置	83
A.6	dcqpd2 上のビームジッター	84

表目次

6.1	Gouy 位相	53
6.2	復調位相	53
6.3	角度制御オフセットの平均と標準偏差	55
6.4	ハイパーパラメータ設定	60
6.5	教師あり学習による角度制御揺らぎ	62
6.6	報酬関数のパラメータ	67
6.7	強化学習による角度制御揺らぎ	71
6.8	重み付け手法による角度制御揺らぎ	72
6.9	各手法による角度制御揺らぎの改善倍率	73
B.1	使用したソフトウェアおよびライブラリのバージョン	85

第 1 章

重力波の理論

重力波は Einstein が提唱した一般相対性理論から記述される物理現象である。ここでは一般相対性理論を用いて重力波の方程式を導出し、Michelson 干渉計の応答を概算するための基礎を与える。

1.1 一般相対性理論の基礎

本節では、重力波の導出に Einstein 方程式を導入する。一般相対性理論において、重力は時空の幾何学的な歪みとして記述される。4次元時空上の点の座標は以下のように表し、ギリシャ文字の添字は 0, 1, 2, 3 の値を取ることとする。

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \quad (1.1)$$

近接する 2 点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の微小変位ベクトルの大きさの二乗である線素 ds^2 は、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて次のように定義される。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

ここで Einstein の縮約記法を用いた。すなわち、上下に同じ添字が現れた場合はその添字について和をとるものとする（例： $A_\mu B^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu$ ）。

重力場が存在しない平坦な時空（Minkowski 時空）において、計量テンソルは Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ となり、以下のように表される。

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

一般の曲がった時空における微積分を定義するために、共変微分を導入する。これに伴い、接続係数である Christoffel 記号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は計量テンソルを用いて次のように定義される。

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (1.4)$$

ここで、 $g^{\lambda\rho}$ は計量テンソルの逆行列であり、 $g^{\lambda\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\lambda_\nu$ を満たす。また、 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ は偏微分を表す。

時空の曲率を表す Riemann テンソル $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ は、Christoffel 記号を用いて次のように構成される。

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (1.5)$$

さらに、Riemann テンソルを縮約することで、Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ および Ricci スカラー R が定義される。

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (1.6)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

これらを用いると、時空の幾何学構造（左辺）と物質のエネルギー・運動量（右辺）を結びつける Einstein 方程式は次のように記述される。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

ここで、 G は万有引力定数、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルである。左辺の $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ は Einstein テンソルと呼ばれ、Bianchi 恒等式より共変保存則 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ を満たす。これに対応して、右辺のエネルギー・運動量テンソルも保存則 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ を満たす。

1.2 線形化重力理論

重力波は時空の微小な揺らぎであるため、重力場が弱い極限（弱場近似）を考えることでその性質を解析的に考えることができる。本節では、計量テンソルを平坦な Minkowski 計量からの微小な摂動として展開し、Einstein 方程式を線形化する。

1.2.1 線形近似

重力場が弱い領域において、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ と、微小な摂動項 $h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) の和として表される。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

ここで、添字の上げ下げは 0 次のオーダーである $\eta_{\mu\nu}$ および $\eta^{\mu\nu}$ を用いる。また、 $h_{\mu\nu}$ の 2 次以上の項を無視する線形近似を適用する。計量の逆行列 $g^{\mu\nu}$ は、条件 $g^{\lambda\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\lambda_\nu$ より、1 次のオーダーで次のように近似される。

$$g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (1.10)$$

この近似のもとで、Christoffel 記号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を計算すると、 h の微分を含む項のみが残り、以下のように書ける。

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \quad (1.11)$$

同様に Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ を 1 次のオーダーまで計算する。Riemann テンソルの定義において $\Gamma\Gamma$ の項は 2 次のオーダーとなるため無視でき、微分項のみが寄与する。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\simeq \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

ここで、 $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ 、 $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -c^{-2} \partial_t^2 + \nabla^2$ である。また、Ricci スカラー R は次のようになる。

$$R \equiv \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \simeq \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (1.13)$$

得られた Ricci テンソルと Ricci スカラーの結果を、Einstein 方程式 (1.8) に代入して整理すると次式を得る。

$$\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

1.2.2 トレース反転摂動とゲージ固定

この方程式を簡単にするために、通常の摂動 $h_{\mu\nu}$ の代わりに、以下のトレース反転テンソル $\bar{h}_{\mu\nu}$ を導入する。

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.15)$$

この変数のトレースをとると $\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h$ という関係がある。これを用いて式 (1.14) を書き換えると、

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\nu\alpha} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

さらに以下のような Lorentz ゲージ条件を課す、

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

このゲージ条件を適用すると、式 (1.16) の左辺の第 2 項から第 4 項はすべて 0 となり、単純な波動方程式の形に帰着する。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

これが線形化重力理論における基本方程式である。重力波源から十分に離れた真空領域 ($T_{\mu\nu} = 0$) においては、次のような斉次波動方程式となる。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.19)$$

この式は、時空の歪み $\bar{h}_{\mu\nu}$ が光速 c で伝播する波、すなわち重力波として振る舞うことを示している。

1.3 平面波解と偏光モード

真空中 ($T_{\mu\nu} = 0$) における線形化された Einstein 方程式は、式 (1.19) で示したように波動方程式となる。この方程式の最も基本的な解として、波数ベクトル k_λ を持つ平面波解を考える。以下では位相を $\omega t - kz$ の形に統一し、物理量は必要に応じて実部を取るものとする。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp[i(\omega t - kz)] \quad (1.20)$$

ここで、 $A_{\mu\nu}$ は定数振幅テンソル。この解を波動方程式に代入すると、 $k_\lambda k^\lambda = 0$ が得られ、これは重力波は光速 c で伝播することを表している。

この平面波解に対して、Lorentz ゲージ条件 (1.17) を適用すると、振幅テンソルと波数ベクトルの間に以下の直交条件が課される。

$$k^\mu A_{\mu\nu} = 0 \quad (1.21)$$

これは重力波が横波的性質を持つことを表している。さらに以下の2つの条件を追加で満たすような座標系を選択することが可能であり、

$$\bar{h}_{0\mu} = 0 \quad (1.22)$$

$$\bar{h}^\mu{}_\mu = 0 \quad (1.23)$$

これらの条件を満たすゲージをトランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ) と呼ぶ。TT ゲージにおいては、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ のトレースがゼロであるため、 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ となり、トレース反転の区別がなくなる。以下、TT ゲージにおける摂動を $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ と表記する。

いま、重力波が z 軸の正の方向に伝播する場合を考える。波数ベクトルは $k^\mu = (\omega/c, 0, 0, \omega/c)$ となる。TT ゲージの条件および Lorentz ゲージ条件を考慮すると、振幅テンソルの独立な成分は x, y 成分のみとなり、計量摂動 $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ は以下の行列形式で表される。

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - kz)] \quad (1.24)$$

ここで、 h_+ (プラスモード) および h_\times (クロスモード) は、重力波の2つの独立な偏光状態を表す振幅である。

重力波が通過するとき、時空の距離がどのように変動するかを確認する。 z 軸方向に進むプラスモード ($h_+ \neq 0, h_\times = 0$) の重力波を考えると、線素 ds^2 は次のように書ける。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [1 + h_+ \cos(\omega t - kz)] dx^2 + [1 - h_+ \cos(\omega t - kz)] dy^2 + dz^2 \quad (1.25)$$

ここで指数の実部をとった。この式は、 x 軸方向の固有距離が伸びるとき ($1 + h_+$)、同時に y 軸方向の固有距離が縮む ($1 - h_+$) ことを示している。半周期後にはこの関係が逆転する。一方、クロスモード ($h_+ = 0, h_\times \neq 0$) の場合は、 x 軸と y 軸に対して 45° 傾いた軸方向で同様の伸縮が起こる。これら2つのモードによる自由質点の配置の変化を図 1.1 に示す。

1.4 重力波の放射

前節までは真空中の重力波の伝播について議論したが、ここではその発生源について考える。重力波は物質のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を源として生成される。重力波源が存在する領域の外部における波形を見積もるために、線形化 Einstein 方程式 (1.18) を解く。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

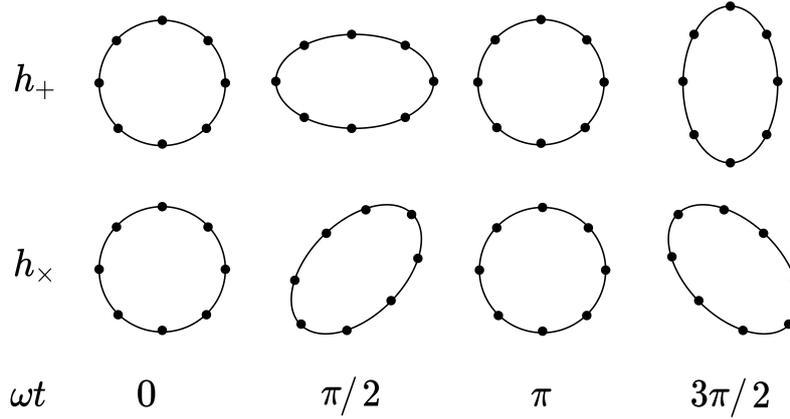


図 1.1: 重力波の偏光モードによる自由質点の変化

この方程式は Green 関数を用いることで、以下のような解が得られる。

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad (1.26)$$

ここで、 \mathbf{x} は観測点、 \mathbf{y} は波源の位置を表す。観測点が波源から十分に遠い ($|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$) という近似と、波源の速度が光速に比べて遅い ($v \ll c$) という近似を適用すると、 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \simeq r$ と近似でき、重力波の空間成分 h_{ij} (ここで $i, j = 1, 2, 3$) は、

$$\bar{h}_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(t - r/c, \mathbf{y}) d^3y \quad (1.27)$$

さらに、エネルギー・運動量保存則 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を用いて空間成分の積分を変形すると、質量分布に対する四重極モーメント

$$I_{ij}(t) \equiv \int \rho(t, \mathbf{y}) y_i y_j d^3y \quad (1.28)$$

の時間 2 階微分を用いて次のように表される。

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}(t - r/c) \quad (1.29)$$

これを重力波の四重極公式と呼ぶ。ここで、 $\rho \simeq T_{00}/c^2$ は質量密度である。この式から、四重極放射が重力波の主要な成分となる事がわかる。また、式に含まれる係数 G/c^4 は極めて小さい値 ($\sim 10^{-44} \text{ s}^2/\text{kg} \cdot \text{m}$) である。したがって、検出可能な振幅の重力波を発生させるには、巨大な質量 M を持ち、かつ激しく運動する (大きな加速度 \ddot{I}_{ij} を持つ) 天体が必要となる。

例として、連星中性子星や連星ブラックホールのような系は、互いの重心周りを高速で公転するため、時間的に大きく変動する大きな四重極モーメントを持ち、強力な重力波源となる。この四重極公式から算出される重力波放出に伴うエネルギー損失率は、

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle \quad (1.30)$$

として知られる (ここで Q_{ij} はトレースレス四重極モーメント)。このエネルギー放出により連星系の公転軌道は徐々に縮小する。この現象は Hulse と Taylor による連星パルサー PSR B1913+16 の観測によって間接的に実証され、一般相対性理論の正当性を示す強力な証拠となった [9, 10]。

第 2 章

重力波検出器

前章で示したような微小な時空の歪みである重力波を直接的に検出するために、レーザー干渉計を用いる手法がある。

2.1 Michelson 干渉計による重力波の検出

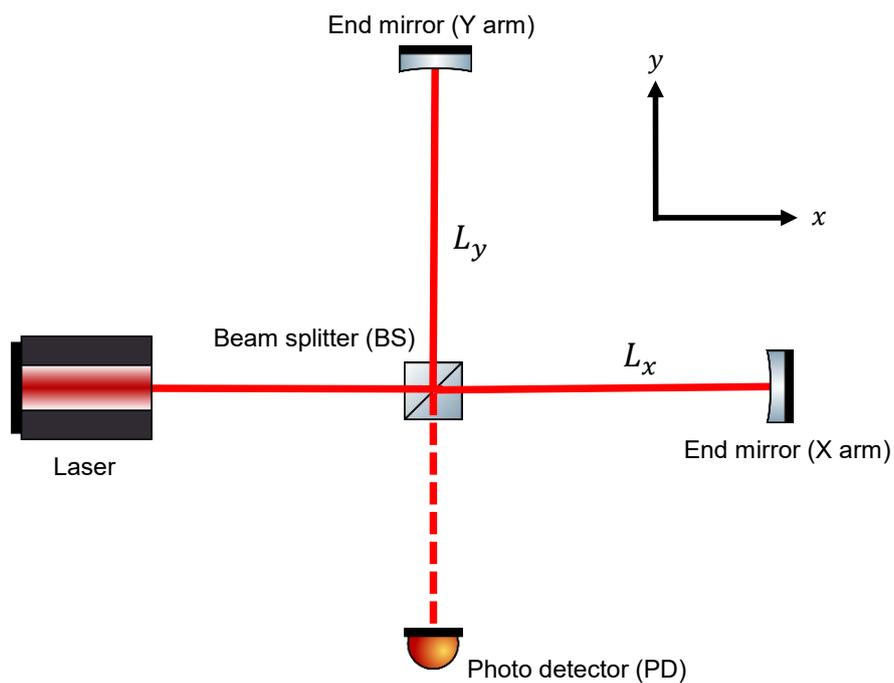


図 2.1: Michelson 干渉計

重力波の空間の歪みを検出するために図 2.1 のような Michelson 干渉計が用いられる。ビームスプリッターへ以下のような電場が入射するときを考える。

$$E_{\text{in}} = E_0 \exp(i\omega_0 t) \quad (2.1)$$

x, y 方向にそれぞれ分離した光がビームスプリッタで合流したときの光の電場は、

$$E_{\text{out}} = \frac{E_0}{2}(e^{i(\omega_0 t - \phi_x)} - e^{i(\omega_0 t - \phi_y)}) \quad (2.2)$$

となる。ここで、 ϕ_x, ϕ_y はそれぞれの腕を往復したときに発生する位相の変化。フォトディテクタで検出される光の強度 $P_{\text{out}} = |E_{\text{out}}|^2$ は、

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{2}P_{\text{in}}(1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \quad (2.3)$$

と計算できる。通常、 $P_{\text{out}} = 0$ となるように調整しておき、重力波により空間が歪んだときのみ信号が発生するよう制御する。

ここで、 z 軸方向からプラスモードの重力波が到来する状況を考える。このときの線素は (1.25) である。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [1 + h_+ \cos(\omega t - kz)]dx^2 + [1 - h_+ \cos(\omega t - kz)]dy^2 + dz^2 \quad (1.25)$$

光速度は不変であり、光子が進む微小距離 ds は常に 0 である。 $h(t) = h_+ \cos(\omega t)$ とおき、 x 軸方向に進む光を考えると、

$$dx = \left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right)cdt \quad (2.4)$$

という関係が導かれる。光が干渉計の x 軸方向の腕の長さ L_x を往復するのに要する時間を δt_x とする。式 (2.4) の両辺を積分して、

$$\frac{2L_x}{c} = \int_{t-\delta t_x}^t \left(1 - \frac{1}{2}h(t')\right) dt' \quad (2.5)$$

となる、ここで $|h| \ll 1$ であるので、二次の微小量を見捨てるため積分区間において $\delta t_x \simeq \frac{2L_x}{c}$ と近似すると、

$$\delta t_x \simeq \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.6)$$

y 軸方向でも同様に、

$$\delta t_y \simeq \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.7)$$

となる。このとき x 軸方向の腕と y 軸方向の腕の位相差は、

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \omega_0(\delta t_x - \delta t_y) \\ &\simeq \frac{2(L_x - L_y)\omega_0}{c} + \frac{\omega_0}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' - \left(-\frac{\omega_0}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t h(t') dt'\right) \\ &= \frac{2(L_x - L_y)\omega_0}{c} + \omega_0 \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \end{aligned} \quad (2.8)$$

のように表される。ここで $L \simeq L_x \simeq L_y$ とした。式 (2.8) の第 1 項目は重力波が入射していない場合にも生じる位相差であり、第 2 項目は重力波による位相差 $\delta\phi_{\text{GW}}$ である。 $h(t)$ の逆フーリエ変換

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.9)$$

を用いると $\delta\phi_{\text{GW}}$ は、

$$\delta\phi_{\text{GW}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{MI}}(\Omega) h(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.10)$$

$$H_{\text{MI}}(\Omega) = \frac{2\omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{L\Omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\Omega}{c}} \quad (2.11)$$

と書ける。ここで $H_{\text{MI}}(\Omega)$ は干渉計の重力波に対する周波数応答関数である。この関数は特定の周波数 Ω に対して

$$\frac{L\Omega}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (2.12)$$

を満たすとき感度が最も良くなる。例として、周波数が 100 Hz の重力波に対して応答を最大にするためには、干渉計の腕の長さとして約 750 km が必要となる。しかし、KAGRA のような現実的な地上の干渉計の腕の長さは 3 km 程度に限られている。そのため、2.2 節で紹介するような Fabry-Perot 共振器を用いて光を腕の中で往復させ、実効的な腕の長さを稼いでいる。

2.2 Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot (FP) 共振器の光学応答に関する理論について記述する。

2.2.1 透過光と反射光の導出

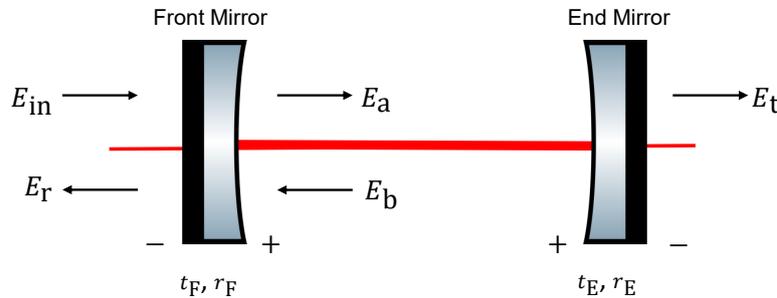


図 2.2: Fabry-Perot 共振器における電場の定義

図 2.2 に示すように、フロントミラーとエンドミラーからなる共振器を考える。レーザー光源からの入射光を、

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

とする。フロントミラーに E_{in} が入射したときの反射光 E_r と透過光 E_t は定常状態において以下の関係式を満たす。ここで、各ミラーの振幅反射率を r_F, r_E 、振幅透過率を t_F, t_E とする。なお、ここではミラーによる損失を無視し ($|r|^2 + |t|^2 = 1$)、反射の位相変化については共振器の内側からの反射を正 ($r > 0$)、外側からの反射を負 ($-r$) と定義する。

$$E_a = t_F E_{\text{in}} + r_F E_b \quad (2.14)$$

$$E_b = r_E e^{-i\frac{2L\omega}{c}} E_a \quad (2.15)$$

$$E_r = -r_F E_{\text{in}} + t_F E_b \quad (2.16)$$

$$E_t = t_E e^{-i\frac{L\omega}{c}} E_a \quad (2.17)$$

ここで、 E_a, E_b は共振器内部のフロントミラー直近での電場である。これらの連立方程式を解くと、各電場は以下のように求まる。

$$E_a(\phi) = \frac{t_F}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} E_{\text{in}} \quad (2.18)$$

$$E_b(\phi) = \frac{t_F r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} E_{\text{in}} \quad (2.19)$$

$$E_r(\phi) = \left(-r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \right) E_{\text{in}} \quad (2.20)$$

$$E_t(\phi) = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} E_{\text{in}} \quad (2.21)$$

ここで、 ϕ は光が共振器内を往復する際の位相変化

$$\phi \equiv \frac{2\omega L}{c} \quad (2.22)$$

である。共振器全体を一つの光学素子とみなした場合の反射率 $r_{\text{cav}}(\phi)$ と透過率 $t_{\text{cav}}(\phi)$ は、式 (2.20), (2.21) より、

$$r_{\text{cav}}(\phi) \equiv \frac{E_r}{E_{\text{in}}} = \frac{-r_F + r_E(r_F^2 + t_F^2)e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} = \frac{-r_F + r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \quad (2.23)$$

$$t_{\text{cav}}(\phi) \equiv \frac{E_t}{E_{\text{in}}} = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \quad (2.24)$$

ここで、式 (2.23) の変形においてエネルギー保存則 $r_F^2 + t_F^2 = 1$ を用いた。

さらに、共振器の内部光、反射光、透過光の強度 P_{cav}, P_r, P_t はそれぞれ、

$$\begin{aligned} P_{\text{cav}} &= |E_a|^2 = \frac{t_F^2}{1 + r_F^2 r_E^2 - 2r_F r_E \cos \phi} P_{\text{in}} \\ &= \frac{t_F^2}{(1 - r_F r_E)^2 \left[1 + F \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]} P_{\text{in}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 = \frac{r_F^2 + r_E^2 - 2r_F r_E \cos \phi}{1 + r_F^2 r_E^2 - 2r_F r_E \cos \phi} P_{\text{in}} \\ &= \frac{(r_F - r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}{(1 - r_F r_E)^2 \left[1 + F \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]} P_{\text{in}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$P_t = |E_t|^2 = \frac{t_F^2 t_E^2}{(1 - r_F r_E)^2 \left[1 + F \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]} P_{\text{in}} \quad (2.27)$$

ここで、 F はフィネス係数と呼ばれる量で、以下のように定義される。

$$F \equiv \frac{4r_{\text{F}}r_{\text{E}}}{(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})^2} \quad (2.28)$$

透過光強度 P_{t} が最大となるのは $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0$ 、すなわち

$$\phi = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.29)$$

のときである。このとき共振器内部の光強度も最大となり、共振状態にあるという。

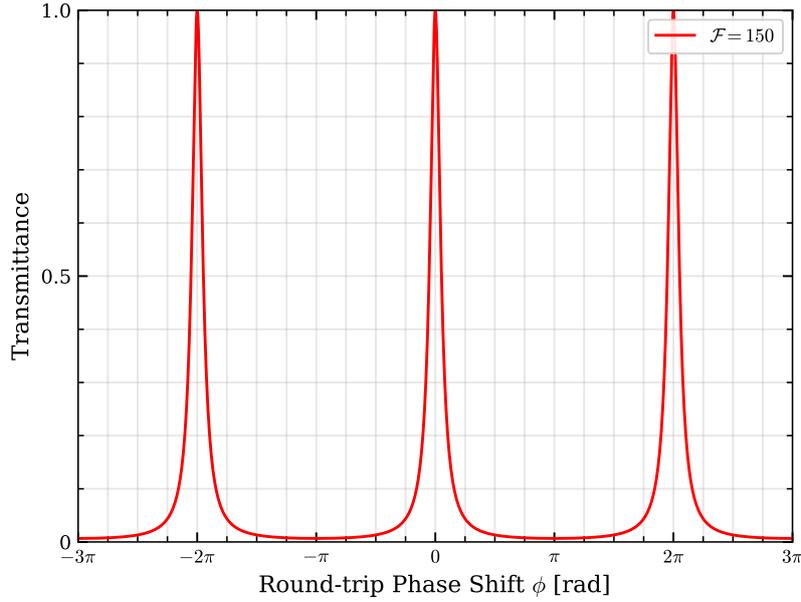


図 2.3: FP 共振器の透過光強度と位相

2.2.2 Free Spectral Range とフィネス

共振器長 L を一定とした場合、式 (2.27) は角周波数 ω の周期関数となる。隣り合う共振ピークの間隔を Free Spectral Range (FSR) と呼ぶ。 ϕ が 2π 変化する周波数間隔であるため、FSR は以下のように求まる。

$$f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L} \quad (2.30)$$

次に、共振ピークの鋭さを評価する。透過光強度が最大値の $1/2$ となる半値全幅 (Full Width at Half Maximum, FWHM) を f_{FWHM} とする。透過光強度が最大値の半分となる条件は式 (2.27) より、

$$1 + F \sin^2\left(\frac{\pi L f_{\text{FWHM}}}{c}\right) = 2 \quad (2.31)$$

$f_{\text{FWHM}} \ll f_{\text{FSR}}$ であるとき、

$$f_{\text{FWHM}} \simeq \frac{c}{2L} \frac{1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}}}{\pi\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}} \quad (2.32)$$

となる。この FSR に対する FWHM の比をフィネス \mathcal{F} は共振の鋭さを表す値である。

$$\mathcal{F} \equiv \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}}{1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}}} \quad (2.33)$$

フィネスは鏡の反射率のみによって決まるパラメータであり、共振器内に光が閉じ込められる平均的な折り返し回数の目安となる。

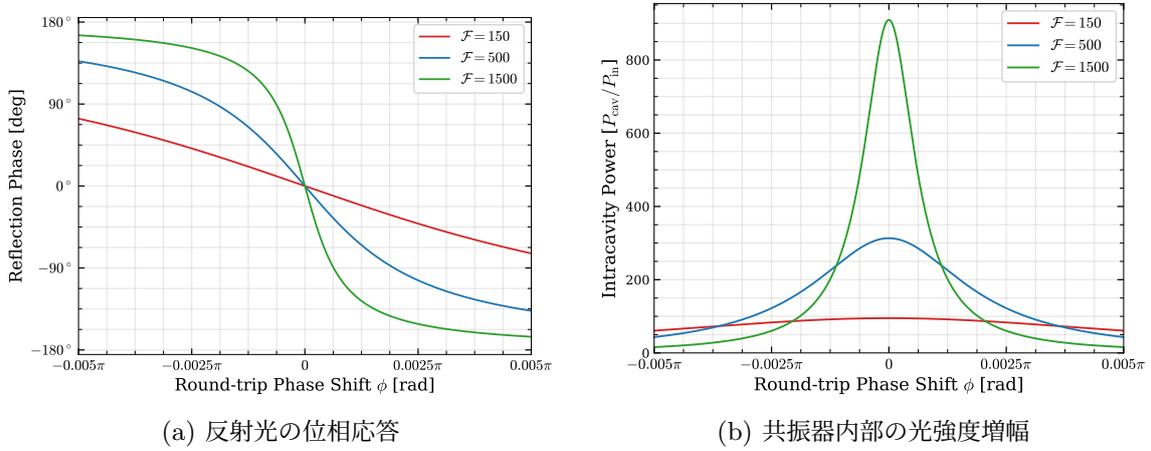


図 2.4: オーバーカップリング条件 $r_t < r_e$ における FP 共振器の応答特性。フィネス \mathcal{F} をパラメータとしてプロット (a) 反射光の位相変化：共振点 ($\phi = 0$) 近傍での急峻な変化を示す (b) 共振器内部の光強度：フィネスが高いほど共振ピークは鋭く、増幅率は高くなる

2.2.3 共振器の周波数応答

Fabry-Perot 共振器は光を内部に蓄積することで位相変化を増幅させるが、共振器内の光が入れ替わるには有限の時間が必要である。一般に共振器は周波数に対して有限の帯域幅を持ち、一次のローパス特性を持つ。

まず、時間領域での応答を考える。共振器長を L とすると、光の往復時間は $2L/c$ である。高フィネスな共振器において、光が閉じ込められる平均的な往復回数は \mathcal{F}/π に比例するため、共振器内の平均滞在時間 τ_s は以下のように見積もられる。

$$\tau_s \simeq \frac{2L}{c} \frac{\mathcal{F}}{\pi} \quad (2.34)$$

この τ_s は、入力光を遮断した後内部の光が指数関数的に減衰する際の時定数に相当する。

次に、周波数領域での応答を考える。重力波等により共振器の光学長が微小変調を受けるとき、その振幅応答関数 $H_{\text{cav}}(f)$ は、時定数 τ_s を持つ一次ローパスフィルタとして近似できる。

$$H_{\text{cav}}(f) \propto \frac{1}{1 + i \frac{f}{f_p}}, \quad f_p = \frac{1}{2\pi\tau_s} \quad (2.35)$$

ここで f_p はカットオフ周波数と呼ばれ、振幅が $1/\sqrt{2}$ (-3 dB) へ低下する時の周波数である。上式に τ_s を代入することで、 f_p はフィネスを用いて次のように表される。

$$f_p \simeq \frac{c}{4L\mathcal{F}} \quad (2.36)$$

これは先程で求めた半値全幅 f_{FWHM} のちょうど半分（半値半幅）に相当する。

この関係式は、検出器設計におけるトレードオフを示している。 $f \ll f_p$ の低周波領域では共振器は一定の増幅率を持つが、 $f \gg f_p$ の高周波領域では、光の入れ替えが追いつかず、応答は周波数に反比例して低下する ($|H_{\text{cav}}| \propto f_p/f$)。すなわち、フィネス \mathcal{F} を高めれば光の平均滞在時間 τ_s が増えて低周波感度は向上するが、一方でカットオフ周波数 f_p は低下し、信号帯域幅は狭くなる。重力波検出器では、ターゲットとする周波数帯域に応じて最適なフィネスを選択する必要がある。

2.3 重力波検出器の雑音源

重力波検出器の感度は、重力波信号 $h(t)$ に重なる様々な雑音 $n(t)$ によって制限される。検出器の性能は、通常、雑音の振幅スペクトル密度 $\sqrt{S_n(f)}$ によって評価される。感度を制限する主要な雑音源として、以下のものが挙げられる。

2.3.1 量子雑音

量子雑音は、光の粒子性およびハイゼンベルクの不確定性原理に起因する雑音であり、高周波側を支配するショット雑音と、低周波側を支配する輻射圧雑音が存在する。

ショット雑音

レーザー光は多数の光子の流れであるが、フォトディテクタに到達する光子の到達タイミングはポアソン分布に従うランダムな揺らぎを持つ。これをショット雑音と呼ぶ。光子数 N のとき、その揺らぎは \sqrt{N} に比例する。光パワー P は光子数 N に比例するため、パワーのゆらぎとしてのショット雑音の振幅スペクトル密度は、パワーの平方根に比例して増加する。

$$\sqrt{S_{\text{shot}}(f)} \propto \sqrt{P} \quad (2.37)$$

一方で、重力波信号による信号強度の変化は入力パワー P に比例する。したがって、信号対雑音比 (SNR) は $P/\sqrt{P} = \sqrt{P}$ となり、レーザーパワーを上げることで改善する。これを重力波ひずみ感度に換算すると、ひずみ感度の振幅スペクトル密度はパワーの平方根に反比例する。

$$\sqrt{S_h(f)} \propto \frac{1}{\sqrt{P}} \quad (2.38)$$

このように、高出力レーザーを用いることでショット雑音による感度制限を低減できる。

また、ショット雑音は周波数に依存しないホワイトノイズであるが、共振器の光学的応答 (2.2.3) の影響で、信号が低下する高周波帯域において、ショット雑音は感度を制限する主要な要因となる。

輻射圧雑音

鏡は光子から運動量を受け取り、輻射圧を受ける。鏡に当たる光子数の揺らぎは輻射圧の変動となり、鏡をランダムに揺らす力として働く。力の揺らぎ δF は \sqrt{P} に比例する。鏡 (質量

m) の運動方程式 $m\ddot{x} = \delta F$ より、変位の振幅スペクトル密度は周波数の二乗に反比例する。

$$\sqrt{S_{\text{rp}}(f)} \propto \frac{\sqrt{P}}{mf^2} \quad (2.39)$$

これはショット雑音とは逆に、レーザーパワーを上げると輻射圧雑音は増大する。このショット雑音と輻射圧雑音のトレードオフにより、不確定性原理に基づく測定精度の限界が存在し、これを標準量子限界 (Standard Quantum Limit, SQL) と呼ぶ。

2.3.2 熱雑音

鏡や懸架系を構成する原子は、有限温度 T において熱振動を行っている。この微視的な振動が鏡表面の巨視的な変位揺らぎとして現れるものを熱雑音と呼ぶ。熱雑音のパワースペクトル密度 $S_x(f)$ は、揺動散逸定理 [11] によって記述される。

$$S_x(f) = \frac{4k_B T}{(2\pi f)^2} \text{Re}[Y(f)] = \frac{k_B T}{\pi^2 f^2} \text{Re}[Y(f)] \quad (2.40)$$

ここで k_B はボルツマン定数、 T は温度、 $Y(f)$ は系の構造や素材から決定される機械的なアドミタンスである。この式は、系の機械損失が大きいほど、熱雑音も大きくなることを示している。

重力波検出器において特に問題となるのは懸架系熱雑音と鏡面熱雑音である。前者は鏡を吊るすファイバの振動モードに起因し、低周波域 (数 Hz ~ 数十 Hz) の感度を制限する。後者は鏡のコーティングの機械損失に起因し、最も感度が良い帯域 (数十 Hz ~ 数百 Hz) の主要な雑音源となる。式 (2.40) から分かるように、熱雑音を低減するためには機械損失の小さい材料を用いることと温度 T を下げることが有効である。

2.3.3 地面振動雑音

干渉計の設置される地面は常に微小振動している。これを地面振動雑音と呼ぶ。地面振動の振幅スペクトルはおおよそ、

$$\sqrt{S_{\text{seis}}(f)} \sim 10^{-7} \left(\frac{1 \text{ Hz}}{f} \right)^2 [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (2.41)$$

に従うことが知られている。この変位量は重力波による変位に比べて大きいため、防振システムが必要不可欠である。干渉計の鏡は多段振り子によって懸架される。振り子は共振周波数より高い周波数では振動を $1/f^2$ で遮断するローパスフィルタとして働くため、多段にすることで地面振動を減衰させている。

また、地面振動は地表よりも地下の方が小さいため、KAGRA では神岡鉱山の地下 200m に建設することで、このスペクトルから 2 桁ほど低い雑音に押さえている。

2.4 大型低温重力波検出器 KAGRA

KAGRA は、岐阜県飛騨市神岡町に建設された基線長 3km の大型重力波検出器である。米国の LIGO、欧州の Virgo に続く重力波検出器として開発された。KAGRA の最大の特徴は、

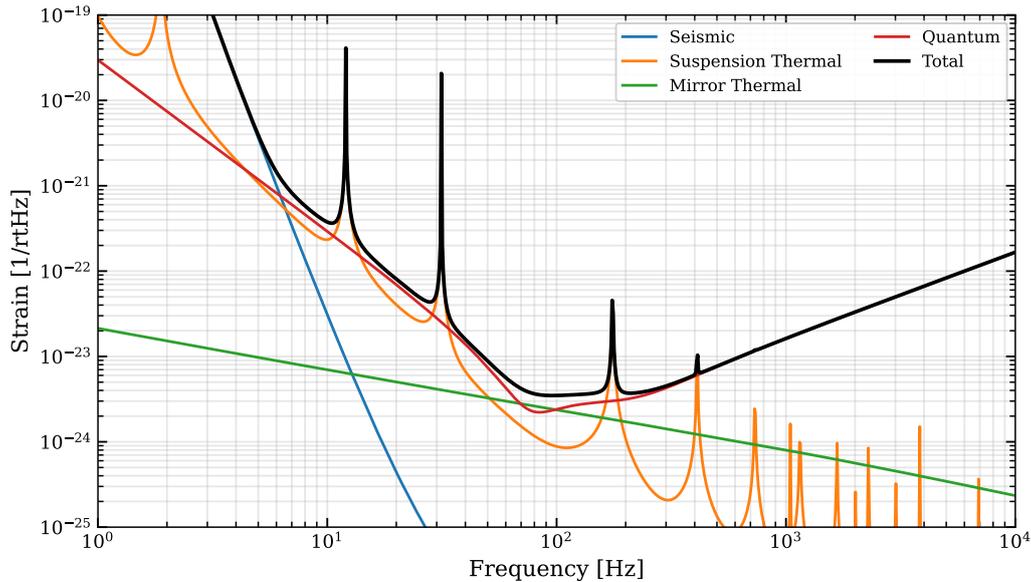


図 2.5: KAGRA の設計感度 [12]

地下建設と極低温鏡の 2 つの技術を採用している点にあり、これらは将来の第 3 世代検出器 (Einstein Telescope など) の先駆けとなる技術である。

2.4.1 光学構成

KAGRA の光学構成は、Michelson 干渉計と Fabry-Perot 共振器を組み合わせた、Fabry-Perot Michelson 干渉計を基礎としつつ、さらに 2 つのリサイクリングミラーを加えた Dual Recycled FPMI と呼ばれる構成を採用している (図 2.6)。

パワーリサイクリング

ビームスプリッタの手前にパワーリサイクリングミラーを設置し、干渉計から光源側に戻ってくる光を再び干渉計内部へ反射させる。これにより、レーザーの実効的なパワーを増大させ、ショット雑音を低減させる。

シグナルリサイクリング

干渉計の出力ポートにシグナルリサイクリングミラーを設置し、信号を含んだ光を共振器内に戻す。シグナルリサイクリングミラーの位置を調整することで、検出器の帯域幅やピーク感度周波数を操作することができる。KAGRA では、特に Resonant Sideband Extraction と呼ばれるモードを採用し、観測帯域の最適化を行う設計となっている。

2.4.2 地下環境による地面振動の低減

KAGRA は、地表から 200 m 以上深い地下トンネル内に設置されている。地下環境における地面振動は地表と比較して約 1/100 に低減できる。これにより、制御の困難な低周波の地面振動雑音を物理的に遮断し、安定した干渉計の動作を実現している。また、地下は年間を通じ

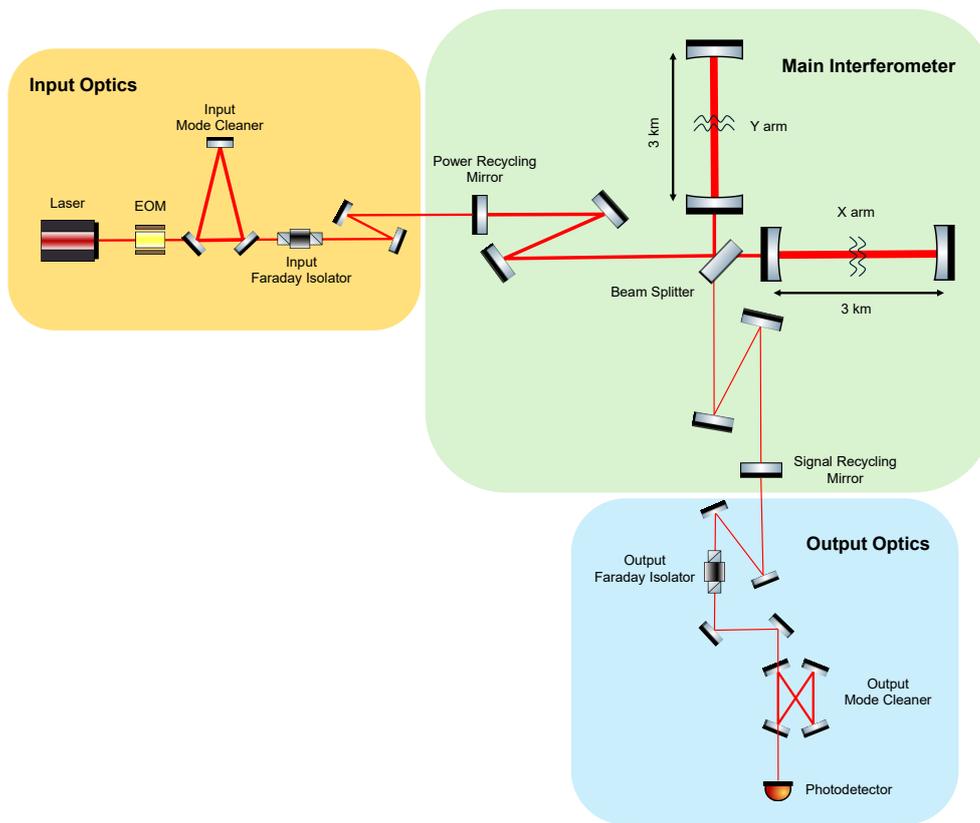


図 2.6: KAGRA の光学的な構成の模式図

て温度変化が小さく、鏡や懸架系の熱ドリフトを抑制できるという利点もある。

2.4.3 極低温冷却による熱雑音の低減

KAGRA の最も挑戦的な特徴は、熱雑音低減のため FP 共振器の 4 つの主要な鏡を約 20 K という極低温まで冷却することである。

極低温環境を実現するために、鏡の基材としてサファイア単結晶 (Al_2O_3) が採用された。シリカ (LIGO などで使用) は極低温で機械損失が増大するのに対し、サファイアは低温で低い機械損失と優れた熱伝導率を持つためである [13]。しかし、サファイアは結晶構造に由来する複屈折を持つという特性があり、これが干渉計の制御に影響を与えることが課題となっている (第 4 章で詳述する)。

第3章

レーザー光学と鏡の角度制御

微小な空間の歪みである重力波の検出にはレーザー光を用いる。本章では、Fabry-Perot 共振器の鏡の姿勢制御に必要な知識について記述する。

3.1 Gaussian ビーム

まず、以下の真空中の Maxwell 方程式から Gaussian ビームの導出を行う。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

これらより、電場に関する波動方程式は、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (3.5)$$

のように記述される。電場の進行方向を z 軸方向とし、波動方程式 (3.5) の解として次のような平面波解を仮定する。

$$\mathbf{E}(x, t) = u(x, y, z) \exp\{i(\omega t - kz)\} \quad (3.6)$$

この平面波解 (3.6) を波動方程式 (3.5) へ代入する。計算していくと、この波動方程式は u に関する条件として、

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = 0 \quad (3.7)$$

のように記述できる。計算中では、 $k = \omega/c$ を用いた。

ここで波の振幅 u の変化が z 方向に関して緩やかであるという近似、 $|\partial u / \partial z| \ll ku$ を行うと、次の方程式が得られる

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = 0 \quad (3.8)$$

この近似は近軸近似と呼ばれ、得られた方程式 (3.8) を近軸 Helmholtz 方程式と呼ぶ。この方程式の解の一つである次の Gaussian 分布を考える。

$$u(r, z) = A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \quad (3.9)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3.10)$$

これを近軸 Helmholtz 方程式 (3.8) に代入すると、左辺は

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \\ &= \left(-\frac{k^2}{q^2} A + 2i \frac{k}{q} A - 2ik \frac{dA}{dz} + \frac{k^2}{q^2} A \frac{dq}{dz} r^2 \right) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] \\ &= \left(\frac{k^2}{q^2} \left(-1 + \frac{dq}{dz} \right) r^2 - 2ik \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} \right) \right) A \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

のように変形できる。この式が全ての x, y に対して恒等的に 0 になるという条件より、次の 2 つの微分方程式が得られる。

$$-1 + \frac{dq}{dz} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} = 0 \quad (3.13)$$

式 (3.12) を解くと、

$$q(z) = z + q_0 \quad (3.14)$$

式 (3.13) は変数分離法により、

$$A(z)q(z) = A_0q_0 \quad (3.15)$$

が得られる。ここで $q_0 = q(0)$ 、 $A_0 = A(0)$ とした。

境界条件としてビームが光軸から十分離れたところでは強度が十分小さい、すなわち $r \rightarrow \infty$ であるとき $|u| \rightarrow 0$ であることを考える。 $|u|$ は、

$$\begin{aligned} |u|^2 &\propto \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \left(\exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \right)^* \\ &= \exp \left[-\frac{kr^2}{|q|^2} \text{Im} q \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

よって、 $r \rightarrow \infty$ であるとき $|u| \rightarrow 0$ を満たすには $\text{Im} q > 0$ である必要がある。したがって、 $q(z)$ の虚部を正の定数 z_R とする。

$$q_0 = iz_R \quad (3.17)$$

z_R は Rayleigh レンジと呼ばれるパラメータである。式 (3.14)、(3.15) より $q(z)$ 、 $A(z)$ を書き直すと、

$$q(z) = z + iz_R \quad (3.18)$$

$$A(z) = A_0 \frac{iz_R}{z + iz_R} \quad (3.19)$$

である。これを Gaussian 分布の式 (3.9) に代入すると、

$$u = A_0 \frac{iz_R}{z + iz_R} \exp \left[-i \frac{k}{2(z + iz_R)} r^2 \right] \quad (3.20)$$

のように書ける。係数部分を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{iz_R}{z + iz_R} &= \frac{iz_R(z - iz_R)}{(z + iz_R)(z - iz_R)} \\ &= \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + iz) \\ &= \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \sqrt{z^2 + z_R^2} \exp \left[i \arctan \frac{z}{z_R} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}} \exp \left[i \arctan \frac{z}{z_R} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

と書ける。また、Rayleigh レンジ z_R は正の定数であったので、適当な実数 w_0 を用いて、

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} \quad (3.22)$$

と表すことにする。すると、 e の指数部分は、

$$\begin{aligned} -i \frac{k}{2(z + iz_R)} r^2 &= -\frac{k}{2} \frac{i(z - iz_R)}{(z + iz_R)(z - iz_R)} r^2 \\ &= -\frac{1}{w_0^2} \frac{1 + i \frac{z}{z_R}}{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} r^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

と変形できる。したがって、式 (3.20) は以下のように書き直せる。

$$u(r, z) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}} \exp \left[-\frac{1}{w_0^2} \frac{1 + i \frac{z}{z_R}}{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} r^2 + i \arctan \frac{z}{z_R} \right] \quad (3.24)$$

ここで、ビームの特徴を表すパラメータとして、スポットサイズ w 、曲率半径 R 、Gouy 位相 η をそれぞれ次式で定義する。

$$w(z) \equiv w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (3.25)$$

$$R(z) \equiv z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (3.26)$$

$$\eta(z) \equiv \arctan \frac{z}{z_R} \quad (3.27)$$

これらのパラメータを用いて式 (3.24) を書き直すと、

$$u(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w} \exp \left[-\left(\frac{1}{w^2} + i \frac{k}{2R} \right) r^2 + i\eta \right] \quad (3.28)$$

となる。これが Gaussian ビームの一般的な表式である。

ここで、スポットサイズ w はビームの太さを表すパラメータであり、式 (3.25) を見ると $z = 0$ で最小となっているが実際にこの位置は一定ではないのでより一般性をもたせるために z についての平行移動を考え $z \rightarrow z - z_0$ とする。ここで z_0 はビームウエストと呼ばれ、スポットサイズが最小となる位置を表している。この変換を行うとそれぞれのパラメータは、

$$w(z) \equiv w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} \quad (3.29)$$

$$R(z) \equiv (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right] \quad (3.30)$$

$$\eta(z) \equiv \arctan \frac{z - z_0}{z_R} \quad (3.31)$$

となる。これらパラメータは z_0 、 z_R を定めると一意に定まることがわかる。

3.2 ビームパラメータ

ここでは、先程定義したビーム特徴を表すパラメータがどのような物理的な意味を持つのかを示す。

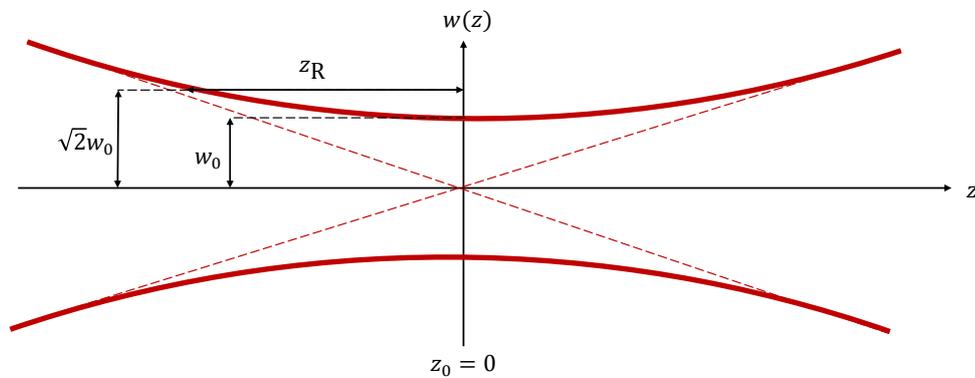


図 3.1: Gaussian ビーム

3.2.1 スポットサイズ $w(z)$

スポットサイズ $w(z)$ は先程も述べた通り、位置 z におけるビームの太さを表す。更に詳しく説明するために、Gaussian ビームの各点での強度 $I(r, z)$ は、

$$\begin{aligned} I(r, z) &= |u(r, z)|^2 \\ &= A_0^2 \frac{w_0^2}{w^2} \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2}\right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。これは r が大きくなるほど強度が弱くなる Gaussian 分布である。次に z 軸を中心とした半径 r_0 の円内でのパワー $P(r_0)$ は、

$$\begin{aligned} P(r_0) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} I(r, z) r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2 \left(1 - \exp\left[-\frac{2r_0^2}{w^2}\right]\right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$r_0 \rightarrow \infty$ のときのパワー P_0 は、

$$P_0 = \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2 \quad (3.34)$$

である。これと $r_0 = w$ のときのパワーの比率を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{P(w(z))}{P_0} &= 1 - e^{-2} \\ &\simeq 0.864 \end{aligned} \quad (3.35)$$

すなわち $w(z)$ はパワーが約 86.4% 含まれるときの半径である。

3.2.2 ビームウエスト z_0

スポットサイズ $w(z)$ は、

$$w(z) \equiv w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2} \quad (3.29)$$

であった。これは $z = z_0$ のときに最小の値をとり、このときの位置 z_0 をビームウエスト、太さ w_0 をビームウエスト半径と呼ぶ。

3.2.3 Rayleigh レンジ z_R

ビームウエストから z_R だけ離れた位置 $z = z_0 \pm z_R$ でのスポットサイズは、式 (3.29) より、

$$w(z_0 \pm z_R) = \sqrt{2} w_0 \quad (3.36)$$

となる。Rayleigh レンジとはビームウエストから離れたときスポットサイズが $\sqrt{2}$ 倍となる距離である。 z_R が長いほどビームは広がりにくくなる。一方で、 z_R を長くすると式 (3.22) より、ビームウエスト径 w_0 が大きくなるのでビームウエストでビームを絞り込みたい場合は z_R を小さくする必要がある。

3.2.4 曲率半径 $R(z)$

曲率半径 $R(z)$ は、

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right] \quad (3.30)$$

での式で表された。ビームウエスト付近での曲率半径と十分遠方での曲率半径は以下のようになる。

$$\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = \infty \quad (3.37)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = z - z_0 \quad (3.38)$$

したがって、ビームはビームウエスト付近で平面波、十分遠方では球面波に近似できる。

3.2.5 Gouy 位相 $\eta(z)$

式 (3.28) より、Gouy 位相は Gaussian ビームの位相のずれを表す。Gouy 位相 $\eta(z)$ の表式は、

$$\eta(z) \equiv \arctan \frac{z - z_0}{z_R} \quad (3.31)$$

であったので、位置 z におけるビームウエスト付近の平面波に対する位相のずれを意味している。ビームウエストから z_R だけ離れた位置では $\frac{\pi}{4}$ 、更に離れると最大で $\frac{\pi}{2}$ だけ変化する。

3.3 Hermite Gaussian モード

Gaussian ビームは近軸 Helmholtz 方程式 (3.8) の解として Gaussian 分布を仮定したときのビームであった。この時の解を基本モードと呼ぶ。この節では、Hermite Gaussian モードと呼ばれる更に高次の解まで考える。Hermite Gaussian モードの一般的な表式は Hermite 多項式を用いて次のように表される。

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp(-ik(z - z_0) + i(l + m + 1)\eta) \quad (3.39)$$

$$U_n(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \exp \left[-\frac{x^2}{w^2} - \frac{ikx^2}{2R} \right] \quad (3.40)$$

ここで、 $H_n(x)$ は n 次の Hermite 多項式であり、以下のロドリゲスの公式によって定義される。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (3.41)$$

具体的な形式は、 $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, ... である。また、Hermite 多項式は重み関数 e^{-x^2} に関して以下の直交関係を満たす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_l(x) H_m(x) dx = 2^l l! \sqrt{\pi} \delta_{lm} \quad (3.42)$$

この性質により、式 (3.40) で定義された各モード関数 $U_n(x, z)$ は、空間的に互いに直交する基底関数系をなす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_l(x, z) U_m^*(x, z) dx = \delta_{lm} \quad (3.43)$$

また、式 (3.39) において基本モード ($l = 0, m = 0$) のときは Gaussian ビームであり、

$$U_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp \left[-i(k(z - z_0) - \eta) - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} \right) \right] \quad (3.44)$$

基本モードを用いて高次モード ($l > 0, m > 0$) は次のように表される。

$$U_{lm}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) U_{00}(x, y, z) \exp[i(l + m)\eta] \quad (3.45)$$

3.3.1 ビームの平行移動と回転移動

以下ではビームの平行移動と回転移動について考える。簡単のためにビームウエストの位置に z 軸の原点をとる ($z_0 = 0$)。このとき、 $w = w_0$ 、 $R = \infty$ 、 $\eta = 0$ であるから、式 (3.44)(3.45) はそれぞれ、

$$U_{00}(x, y, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right] \quad (3.46)$$

$$U_{lm}(x, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0} \right) U_{00}(x, y, 0) \quad (3.47)$$

のように表される。

平行移動

ここではビームの光軸が理想的な状態から平行方向にずれている状態を考える。元の座標系を (x', y', z') とし、そこから x 方向に微小な距離 δx だけ移動した座標系を (x, y, z) とする。ビームウエスト ($z' = 0$) において、 $x = x' - \delta x$ の関係がある。

まず、基本モード (00 モード) について考える。 $z' = 0$ における基本モードの分布は Gaussian 分布である。

$$U_{00}(x', y', 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp \left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2} \right] \quad (3.48)$$

ここで座標を $x = x' - \delta x$ に置換し、 δx の 1 次の項まで Taylor 展開を行う。

$$\begin{aligned} U_{00}(x, y, 0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp \left[-\frac{(x' - \delta x)^2 + y'^2}{w_0^2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp \left[-\frac{x'^2 - 2x'\delta x + \delta x^2 + y'^2}{w_0^2} \right] \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp \left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2} \right] \exp \left[\frac{2x'\delta x}{w_0^2} \right] \\ &\simeq U_{00}(x', y', 0) \left(1 + \frac{2x'\delta x}{w_0^2} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

ここで、第2項の係数に注目する。式 (3.46)、(3.47) より、 $z = 0$ において 10 モードと 00 モードの間に、

$$U_{10}(x', y', 0) = \frac{2x'}{w_0} U_{00}(x', y', 0) \quad (3.50)$$

の関係が成り立つことを用いると、

$$\frac{2x'\delta x}{w_0^2} U_{00} = \frac{\delta x}{w_0} \left(\frac{2x'}{w_0} U_{00} \right) = \frac{\delta x}{w_0} U_{10} \quad (3.51)$$

と書き換えられる。したがって、00 モードの平行移動は次のように表される。

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', 0) \quad (3.52)$$

次に、10 モードについて同様の計算を行う。10 モードは $U_{10} = \frac{2x}{w_0} U_{00}$ の形をしているため、座標変換 $x \rightarrow x' - \delta x$ は、係数部分 (Hermite 多項式) と指数部分 (Gaussian 分布) の両方に影響を与える。

$$\begin{aligned} U_{10}(x, y, 0) &= \frac{2(x' - \delta x)}{w_0} U_{00}(x' - \delta x, y', 0) \\ &\simeq \left(\frac{2x'}{w_0} - \frac{2\delta x}{w_0} \right) \left(U_{00} + \frac{\delta x}{w_0} U_{10} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここで式 (3.52) の結果を用いた。括弧を展開し、 δx の2次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} U_{10}(x, y, 0) &\simeq \frac{2x'}{w_0} U_{00} + \frac{2x'}{w_0} \frac{\delta x}{w_0} U_{10} - \frac{2\delta x}{w_0} U_{00} \\ &= U_{10} + \frac{\delta x}{w_0} \left(\frac{2x'}{w_0} U_{10} \right) - \frac{2\delta x}{w_0} U_{00} \end{aligned} \quad (3.54)$$

第2項に含まれる $\frac{2x'}{w_0} U_{10}$ はさらに高次の 20 モードと 00 モードの結合として表される (Hermite 多項式の漸化式より $\frac{2x'}{w_0} U_{10} = \sqrt{2} U_{20} + U_{00}$ となる)。ここで、WFS の一次誤差信号に支配的な 00 \leftrightarrow 10 結合に注目し、 U_{20} 成分は高次モードとして無視する。したがって、10 モードの平行移動による変化は以下ようになる。

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y', 0) \quad (3.55)$$

以上の (3.52) と (3.55) をまとめることで、ビームの平行移動に伴うモード結合則が得られる。

回転移動

元の座標系を (x', y', z') とし、 y 軸に平行な直線 (y 軸そのもの) 周りに微小角 $\delta\theta$ だけ回転させた座標系を (x, y, z) とする。座標変換は回転行列を用いて次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta\theta & \sin \delta\theta \\ -\sin \delta\theta & \cos \delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

ここで、ビームウエスト位置 ($z' = 0$) における断面内の振幅分布を考える。 $z' = 0$ を代入し、 $\delta\theta \ll 1$ の近似 ($\cos \delta\theta \simeq 1, \sin \delta\theta \simeq \delta\theta$) を行うと、座標の関係は以下ようになる。

$$x \simeq x' \quad (3.57)$$

$$z \simeq -x' \delta\theta \quad (3.58)$$

すなわち、回転した座標系から見ると、元のビームの波面は z 方向に傾斜している (x に依存して z が変わる) ように見える。

まず、00 モードについて考える。ビームウエスト ($z' = 0$) では曲率半径 $R \rightarrow \infty$ 、Gouy 位相 $\eta = 0$ であるため、元の場合は平面波に近い。

$$U_{00}(x, z)|_{z'=0} \simeq \left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] \exp[-ikz] \quad (3.59)$$

ここで、振幅項の x に $x \simeq x'$ を代入し、位相項の z に $z \simeq -x'\delta\theta$ を代入する。振幅項に含まれる x のずれによる影響は $\delta\theta$ の 2 次オーダーとなるため無視すると、位相項の変化のみが支配的となる。

$$\begin{aligned} U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} &\simeq U_{00}(x', y', 0) \exp[-ik(-x'\delta\theta)] \\ &= U_{00}(x', y', 0) \exp[ikkx'\delta\theta] \\ &\simeq U_{00}(x', y', 0) + ik\delta\theta x' U_{00}(x', y', 0) \end{aligned} \quad (3.60)$$

ここで第 2 項に現れた $x'U_{00}$ を 10 モードで書き換える。 $U_{10} = \frac{2x'}{w_0}U_{00}$ であったので、00 モードの回転移動は、

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}U_{10}(x', y', 0) \quad (3.61)$$

ここで $\alpha_0 = \frac{2}{kw_0}$ とおいた。

次に、10 モードについて考える。同様に位相項 $\exp[ikkx'\delta\theta]$ を展開すると、

$$\begin{aligned} U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} &\simeq U_{10}(x', y', 0) \exp[ikkx'\delta\theta] \\ &\simeq U_{10}(x', y', 0) + ik\delta\theta x' U_{10}(x', y', 0) \end{aligned} \quad (3.62)$$

ここで $\frac{2x'}{w_0}U_{10} = \sqrt{2}U_{20} + U_{00}$ であり、平行移動の時と同様に U_{20} 成分は無視する。したがって、10 モードの回転移動は次式で近似される。

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}U_{00}(x', y', 0) \quad (3.63)$$

以上の (3.61) と (3.63) より、ビーム軸の微小な回転 $\delta\theta$ は、純虚数の係数を持つモード間結合を引き起こすことが示された。

3.3.2 ビームの行列表現

ビームが 00 モードと 10 モードの重ね合わせで表されるとき、その電場 E は展開係数ベクトル $\mathbf{a} = (a_0, a_1)^T$ を用いて記述できる。

$$E = (U_{00} \quad U_{10}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.64)$$

ビームが平行移動または回転移動した際の新しい係数を a'_0, a'_1 とおく。まず平行移動については、式 (3.52)、(3.55) より、以下の行列形式で表される。

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

次に回転移動については、式 (3.61)、(3.63) より、次式で表される。

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

平行移動と回転移動が同時に存在する場合、微小量であることを考慮してこれらの行列の積をとることで、全体の変換行列 $M(\delta x, \delta\theta)$ が得られる。

$$\begin{aligned} M(\delta x, \delta\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.67)$$

ここで、複素変位パラメータ γ を以下のように定義した。

$$\gamma \equiv \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \quad (3.68)$$

この γ を用いることで、位置ずれと角度ずれを統一的に扱うことが可能となる。

また、後の WFS 信号の計算において重要となる、逆行するビーム (z 軸の負の方向に進むビーム) の性質について述べる。逆行ビームの空間分布を $U'_{lm}(x, y, z)$ とすると、これは順行ビームの z を $-z$ に置き換えたものに相当する。

$$\begin{aligned} U'_{lm}(x, y, z) &= U_{lm}(x, y, -z) \\ &= U_l(x, -z)U_m(y, -z) \exp[-ik(-z) + i(l+m+1)\eta(-z)] \end{aligned} \quad (3.69)$$

ここで、Gouy 位相は奇関数 $\eta(-z) = -\eta(z)$ であり、波面の曲率半径も $R(-z) = -R(z)$ となる (収束・発散が逆転する) ことから、空間分布関数の複素共役 U'_{lm} との間に以下の関係が成り立つことがわかる。

$$U'_{lm}(x, y, z) = U_{lm}^*(x, y, z) \quad (3.70)$$

すなわち、逆行するビームは、順行するビームの複素共役として表される。

3.4 Pound-Drever-Hall(PDH) 法

共振器の長さ方向を制御する手法として、Pound-Drever-Hall 法 (PDH 法) が広く用いられている。PDH 法の原理は、式 (2.23) より、共振器の反射率が共振器長 L および入射光の周波数 ω に鋭敏に依存することを利用する。入射光に位相変調を加えることで、共振周波数から少し外れた周波数の光 (サイドバンド光) を発生させる。これを参照光として、反射光を変調周波数で復調することによって、共振点からのずれに比例した線形なエラー信号を得る仕組みである。位相変調には主に電気光学変調器 (Electro-Optic Modulator, EOM) が用いられる。

3.4.1 エラー信号の定義

エラー信号とは、制御対象となる光学部品の自由度 (位置や角度など) に対する検出器の応答関数のことである。一般的な手法として、キャリア光の位相に対して変調をかけてサイドバ

ンド光を生成し、検出器信号を変調周波数で復調することで誤差信号を取得する変調復調方式が主流である。干渉計を安定に制御するためには、目標とする共振点の近傍において、エラー信号が自由度の変位に対して線形であることが求められる。

3.4.2 位相変調

角周波数 ω_c の入射光に対して、変調指数 m 、変調周波数 ω_m の位相変調を加える。変調後の電場 E_{mod} は以下のように表される。

$$\begin{aligned} E_{\text{mod}} &= E_0 \exp[i(\omega_c t + m \sin(\omega_m t))] \\ &= E_0 \exp[i\omega_c t] \exp[im \sin(\omega_m t)] \end{aligned} \quad (3.71)$$

ここで位相変調項 $\exp[im \sin(\omega_m t)]$ は、Bessel 関数 $J_n(m)$ を用いて展開できる。Bessel 関数は以下で与えられる。

$$\exp\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) x^n \quad (3.72)$$

ここで $x = \exp[i\omega_m t]$ とおくと、

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) = i \sin(\omega_m t) \quad (3.73)$$

となるので、式 (3.71) は次のように書き直せる。

$$E_{\text{mod}} = E_0 e^{i\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp[in\omega_m t] \quad (3.74)$$

さらに、Bessel 関数の性質 $J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$ を用いる。変調指数が十分小さく ($m \ll 1$)、 m の2次以上の項を無視できると仮定すると、 $n = 0, \pm 1$ の項のみが支配的となり、式 (3.74) は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} E_{\text{mod}} &\simeq E_0 e^{i\omega_c t} \{J_0(m) + J_1(m) e^{i\omega_m t} - J_1(m) e^{-i\omega_m t}\} \\ &= E_0 J_0 e^{i\omega_c t} + E_0 J_1 e^{i(\omega_c + \omega_m)t} - E_0 J_1 e^{i(\omega_c - \omega_m)t} \end{aligned} \quad (3.75)$$

第1項はキャリア光、第2項と第3項は周波数 $\omega_c \pm \omega_m$ を持つサイドバンド光である。

3.4.3 サイドバンド光に対する共振器の応答

共振器長 L を一定とみなした場合、共振器の反射率 r_{cav} は光の周波数 ω の関数となる。したがって、反射光 E_r は各周波数成分ごとの反射率を乗じた線形和として表される。

$$E_r = E_0 [J_0 r_{\text{cav}}(\omega_c) e^{i\omega_c t} + J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) e^{i(\omega_c + \omega_m)t} - J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m) e^{i(\omega_c - \omega_m)t}] \quad (3.76)$$

フォトディテクタで検出される反射光強度 $P_r = |E_r|^2$ を計算する。 $P_0 = |E_0|^2$ とおくと、

$$\begin{aligned} P_r &= P_0 [J_0^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)|^2] \\ &\quad + 2P_0 J_0 J_1 \text{Re} [r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)] \cos(\omega_m t) \\ &\quad + 2P_0 J_0 J_1 \text{Im} [r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)] \sin(\omega_m t) \\ &\quad + \mathcal{O}(2\omega_m) \end{aligned} \quad (3.77)$$

ここで第1項は DC (直流) 成分、第2項と第3項は変調周波数 ω_m で振動する RF 成分、第4項は $2\omega_m$ で振動する倍周波成分である。制御信号として必要なのは ω_m の成分である。

3.4.4 復調

強度信号から共振点周りでのエラー信号を得るために、ミキサーを用いて変調周波数と同じ周波数 $\sin(\omega_m t)$ 、あるいは位相を $\pi/2$ ずらした $\cos(\omega_m t)$ を掛け合わせ、ローパスフィルタを通すことで復調をする。 $\sin(\omega_m t)$ で復調した信号 (In phase) は以下ようになる。

$$V_{\text{RF}}^{\text{I}} = P_0 J_0 J_1 \text{Im} [r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)] \quad (3.78)$$

同様に $\cos(\omega_m t)$ で復調した信号 (Quadrature phase) は以下ようになる。

$$V_{\text{RF}}^{\text{Q}} = P_0 J_0 J_1 \text{Re} [r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)] \quad (3.79)$$

実際の実験系やシミュレーションにおいては、ケーブルや回路の遅延や Gouy 位相などの影響を補正し、誤差信号の傾きを最大化するために、最適な復調位相を選択する必要がある。

3.4.5 共振点付近での PDH 信号

共振点付近 ($\phi = 2n\pi + \delta\phi$) における挙動を考える。キャリア光は共振状態に近いが、サイドバンド周波数は共振器の線幅 (FWHM) よりも十分に離れている ($\omega_m \gg \Delta\omega_{\text{cav}}$) と仮定する。このとき、サイドバンド光は共振器でほぼ全反射されるため、

$$r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) \simeq r_{\text{cav}}^*(\omega_c - \omega_m) \simeq r_s \simeq -1 \quad (3.80)$$

と近似できる (r_s は定数)。これを式 (3.78) に代入すると、I 相信号は以下ようになる。

$$\begin{aligned} V_{\text{RF}}^{\text{I}} &\simeq P_0 J_0 J_1 \text{Im} [r_{\text{cav}}(\omega_c) r_s^* - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_s] \\ &= P_0 J_0 J_1 r_s \text{Im} [r_{\text{cav}}(\omega_c) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c)] \\ &= 2P_0 J_0 J_1 r_s \text{Im}[r_{\text{cav}}(\omega_c)] \end{aligned} \quad (3.81)$$

ここで、共振点近傍における反射率の虚部を計算する。式 (2.23) に $r_{\text{F}} \approx 1, r_{\text{E}} \approx 1$ および $\phi \ll 1$ を適用して展開すると、

$$\text{Im}[r_{\text{cav}}(\omega_c)] \simeq \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} \sin \phi}{(1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2 + F \sin^2(\phi/2)} \simeq \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{(1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2} \delta\phi \quad (3.82)$$

となる。したがって、最終的な PDH エラー信号は次式で与えられる。

$$V_{\text{PDH}} = 4\pi P_0 J_0 J_1 r_s \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{\lambda(1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2} \delta L \quad (3.83)$$

この式は、共振点からの微小な変位 δL に対して電圧信号が線形に応答することを示している。この信号をフィードバック制御に用いることで、共振器長を共振点に固定 (ロック) することが可能となる。

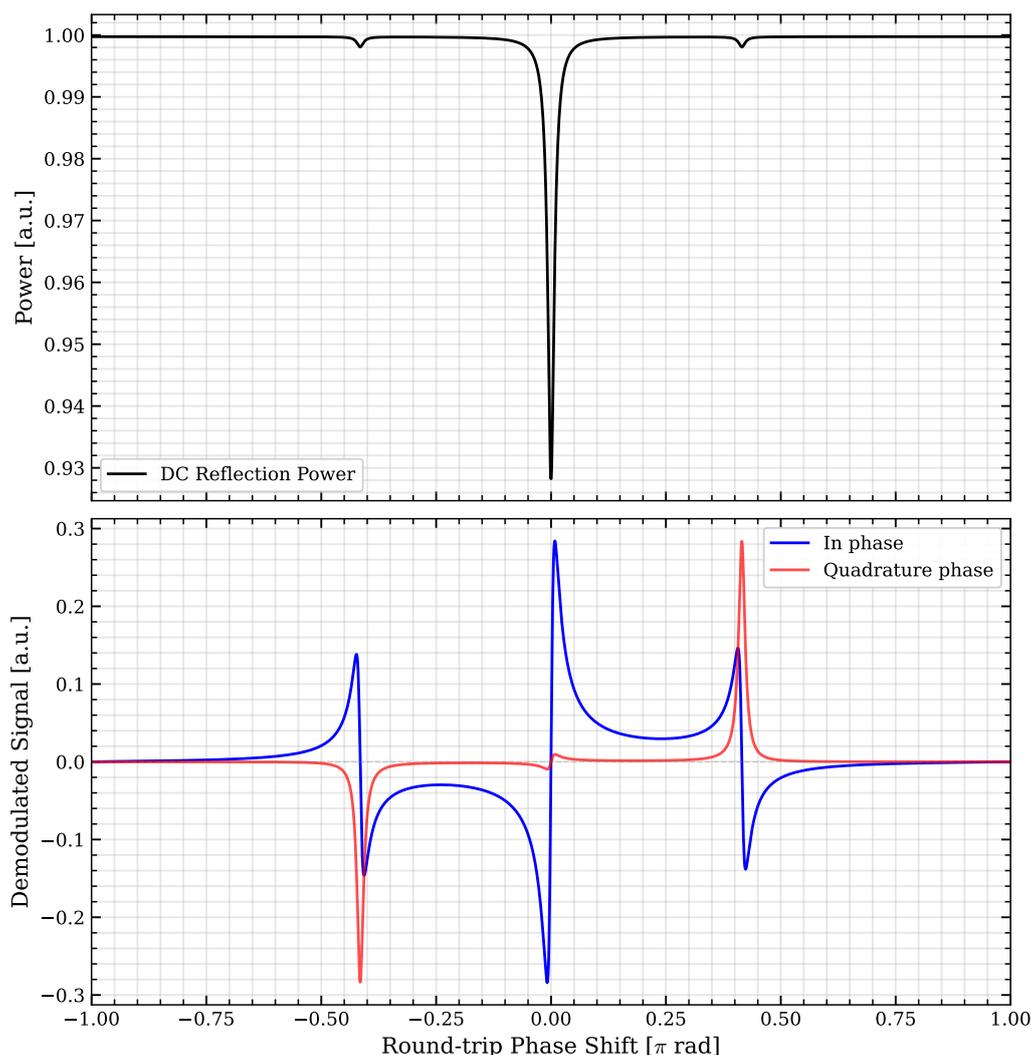


図 3.2: 上の図は反射光の DC 強度を示しており、中央の深いディップはキャリア光の共振、左右の小さなディップは変調によって生じたサイドバンド光の共振をそれぞれ表している。下の図は復調後の PDH エラー信号である。キャリアの共振点付近の線形領域を長さ制御のエラー信号として利用する。

3.5 Wavefront Sensing (WFS) 法

PDH 法が光軸と平行な方向（長さ）のずれの信号を得る手法であったのに対し、Wavefront Sensing (WFS) 法は、光軸と垂直な方向のずれ（位置）および鏡の回転方向のずれ（角度）の信号を得る手法である。3.3.1 項で述べた通り、ビームの座標ずれは 00 モードへの 10 モードの混入として記述できる。WFS 法では、共振器の鏡の傾き等に応じて発生する 10 モードと 00 モードの干渉を検出することで、エラー信号を取得する。

3.5.1 反射行列

00 モードの共振器の反射率は式 (2.23) であった。以下ではモードを区別するために共振器の、00 モードの反射率を r_{00} 、10 モードの反射率を r_{10} とする。式 (3.39) で表されるように 10 モードでは 00 モードに対して Gouy 位相の分だけ位相がずれる。また、Gouy 位相とは式 3.2.5 項のとおり、ビーム距離による位相のずれを表すのであった。

Fabry-Perot 共振器を片道進んだときの Gouy 位相を η_{FP} とすると、10 モードの反射率は、

$$r_{10}(\phi) = -r_{\text{F}} + \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} e^{-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})}}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}} e^{-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})}} \quad (3.84)$$

と表される。また、ビームウエスト ($z = 0$) からフロントミラー ($z = z_{\text{f}}$) までの Gouy 位相を η_{f} とする。00 モードと 10 モードの変換行列を反射行列 $R_{\text{FP}}^{\text{align}}$ として表現すると以下のようになる。

$$R_{\text{FP}}^{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{00} & 0 \\ 0 & r_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\eta_{\text{f}}} & 0 \\ 0 & e^{2i\eta_{\text{f}}} \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

続いてミスアライメントされた状態、つまり入射光軸と共振器軸が一致しておらず、ずれが生じている状態を考える。このときの反射行列 $R_{\text{FP}}^{\text{miss}}$ は式 (3.67) を用いることで、

$$\begin{aligned} R_{\text{FP}}^{\text{miss}} &= M^*(\gamma_{\text{r}}) R_{\text{FP}}^{\text{align}} M(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{\text{r}}^* \\ -\gamma_{\text{r}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} & 0 \\ 0 & r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} - r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}}^* \gamma^* & r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} \gamma + r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}}^* \\ -r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}} - r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma^* & -r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} \gamma \gamma_{\text{r}} + r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}}^* \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} & r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} \gamma + r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}}^* \\ -r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}} - r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma^* & r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.86)$$

のように計算できる。ここで $\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i \frac{\delta \theta}{\alpha_0}$ であり、ずれは微小であるとして γ の 2 次の項は無視した。

入射光が 00 モードのみであるとする。このとき、式 (3.64) において $a_0 = 1$ 、 $a_1 = 0$ であるので、ミスアライメントされた反射光 E_r^{miss} は、

$$\begin{aligned} E_r^{\text{miss}} &= (U_{00} \ U_{10}) \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} & r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} \gamma + r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}}^* \\ -r_{00} e^{i\eta_{\text{f}}} \gamma_{\text{r}} - r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \gamma^* & r_{10} e^{2i\eta_{\text{f}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \\ &= \{r_{00} U_{00} - (r_{00} \gamma_{\text{r}} e^{i\eta_{\text{f}}} + r_{10} \gamma_{\text{r}}^* e^{2i\eta_{\text{f}}}) U_{10}\} E_0 e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (3.87)$$

のように表される。これより、ミスアライメントされた状態の共振器の反射率は次のように表される。

$$r^{\text{miss}} = r_{00} U_{00} - (r_{00} \gamma_{\text{r}} e^{i\eta_{\text{f}}} + r_{10} \gamma_{\text{r}}^* e^{2i\eta_{\text{f}}}) U_{10} \quad (3.88)$$

3.5.2 WFS 信号

位相変調をかけた光がミスアライメント状態の共振器へ入射した時の反射光を考える。これは、PDH 信号 (3.78) に対して式 (3.88) を代入すれば良く、

$$V_{\text{RF}}^{\text{miss}} = J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[r^{\text{miss}}(\omega_{\text{c}}) r^{\text{miss}*}(\omega_{\text{c}} + \omega_{\text{m}}) - r^{\text{miss}*}(\omega_{\text{c}}) r^{\text{miss}}(\omega_{\text{c}} - \omega_{\text{m}}) \right] \quad (3.89)$$

と表されるここで簡略化のため以下を定義する。

$$c_0 \equiv r_{00}(\omega_c)\gamma_r e^{i\eta_f} + r_{10}(\omega_c)\gamma^* e^{2i\eta_f} \quad (3.90)$$

$$s_{\pm} \equiv r_{00}(\omega_c \pm \omega_m)\gamma_r e^{i\eta_f} + r_{10}(\omega_c \pm \omega_m)\gamma^* e^{2i\eta_f} \quad (3.91)$$

これを用いると各周波数での反射率はそれぞれ、

$$r^{\text{miss}}(\omega_c) = r_{00}(\omega_c)U_{00} - c_0U_{10} \quad (3.92)$$

$$r^{\text{miss}}(\omega_c \pm \omega_m) = r_{00}(\omega_c \pm \omega_m)U_{00} - s_{\pm}U_{10} \quad (3.93)$$

のように表される。このとき、ミスアライメントされたエラー信号 $V_{\text{RF}}^{\text{miss}}$ を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} V_{\text{RF}}^{\text{miss}} &= J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[\{r_{00}(\omega_c)U_{00} - c_0U_{10}\} \{r_{00}(\omega_c + \omega_m)U_{00} - s_+U_{10}\}^* \right. \\ &\quad \left. - \{r_{00}(\omega_c)U_{00} - c_0U_{10}\}^* \{r_{00}(\omega_c - \omega_m)U_{00} - s_-U_{10}\} \right] \\ &= J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[r_{00}(\omega_c)r_{00}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{00}^*(\omega_c)r_{00}(\omega_c - \omega_m) \right] |U_{00}|^2 \\ &\quad - J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[\{s_+^* r_{00}(\omega_c) - c_0^* r_{00}(\omega_c - \omega_m)\} U_{00} U_{10}^* \right] \\ &\quad + J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[\{s_- r_{00}^*(\omega_c) - c_0 r_{00}^*(\omega_c + \omega_m)\} U_{00}^* U_{10} \right] \\ &\quad + J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[c_0 s_+^* - c_0^* s_- \right] |U_{10}|^2 \end{aligned} \quad (3.94)$$

ここで RF 信号 (3.94) における第1項の $|U_{00}|^2$ の係数は式 (3.78) と一致しており、PDH 信号である。第2項と第3項は 00 モードと 10 モードの干渉を表しており、これが WFS 信号 V_{WFS} である。第4項は γ の2次を含むので無視する。

WFS 信号を c_0, s_{\pm} を展開して記述する。共振点付近 ($\phi = 2n\pi + \delta\phi$) においては $r_{00}(\omega_c) = r_{00}^*(\omega_c)$ 、 $r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) \simeq r_{\text{cav}}^*(\omega_c - \omega_m)$ であることを用いて、(3.90)、(3.91) より、

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}} &\simeq -J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[\{[r_{00}(\omega_c - \omega_m)\gamma_r^* e^{-i\eta_f} + r_{10}(\omega_c - \omega_m)\gamma e^{-2i\eta_f}]r_{00}(\omega_c) \right. \\ &\quad \left. - [r_{00}(\omega_c)\gamma_r^* e^{-i\eta_f} + r_{10}(\omega_c)\gamma e^{-2i\eta_f}]r_{00}(\omega_c - \omega_m)\} U_{00} U_{10}^* \right. \\ &\quad \left. - \{[r_{00}(\omega_c - \omega_m)\gamma_r e^{i\eta_f} + r_{10}(\omega_c - \omega_m)\gamma^* e^{2i\eta_f}]r_{00}(\omega_c) \right. \\ &\quad \left. - [r_{00}(\omega_c)\gamma_r e^{i\eta_f} + r_{10}(\omega_c)\gamma^* e^{2i\eta_f}]r_{00}(\omega_c - \omega_m)\} U_{00}^* U_{10} \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

この式をさらに整理すると、 γ_r または γ_r^* を含む項は相殺されるので。

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}} &= -J_0 J_1 P_0 \text{Im} \left[\{r_{10}(\omega_c - \omega_m)r_{00}(\omega_c) - r_{10}(\omega_c)r_{00}(\omega_c - \omega_m)\} \gamma e^{-2i\eta_f} U_{00} U_{10}^* \right. \\ &\quad \left. - \{r_{10}(\omega_c - \omega_m)r_{00}(\omega_c) - r_{10}(\omega_c)r_{00}(\omega_c - \omega_m)\} \gamma^* e^{2i\eta_f} U_{00}^* U_{10} \right] \end{aligned} \quad (3.96)$$

ここで、以下のように R_0 を定義する。(共振点付近では $R_0 > 0$)

$$R_0 \equiv r_{10}(\omega_c)r_{00}(\omega_c - \omega_m) - r_{10}(\omega_c - \omega_m)r_{00}(\omega_c) \quad (3.97)$$

これを用いると、WFS 信号 V_{WFS} は複素数 $Z = -R_0\gamma e^{-2i\eta_f}U_{00}U_{10}^*$ を用いて $V_{\text{WFS}} \simeq J_0 J_1 P_0 \text{Im}[Z - Z^*]$ と書けるため、次のように簡略化される。

$$V_{\text{WFS}} = -2J_0 J_1 P_0 R_0 \text{Im}[\gamma^* e^{2i\eta_f} U_{00}^* U_{10}] \quad (3.98)$$

ここで、ミスアライメント量 $\gamma^* = \frac{\delta x}{w_0} - i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}$ である。また QPD をおいた検出位置において Gouy 位相を $e^{i\eta_{\text{QPD}}}$ とおくと $U_{00}^*U_{10} = U(x, y, z)e^{i\eta_{\text{QPD}}}$ と表される。これらを代入すると以下のような WFS 信号の表式が得られる。

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}} &= -2J_0J_1P_0R_0U \cdot \text{Im} \left[\left(\frac{\delta x}{w_0} - i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) e^{i(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f)} \right] \\ &= -2J_0J_1P_0R_0U \left[\frac{\delta x}{w_0} \sin(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) - \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \cos(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) \right] \end{aligned} \quad (3.99)$$

ただし、 $U = U_0^*(x, z)U_0^*(y, z)U_1(x, z)U_0(y, z)$ である。

3.5.3 PDH 信号と WFS 信号の分離

エラー信号は PDH 信号と WFS 信号の和で表される。

$$V_{\text{RF}}^{\text{miss}} = V_{\text{PDH}} + V_{\text{WFS}} \quad (3.100)$$

これらを分離して長さ方向の信号である PDH 信号と角度方向の信号である WFS 信号を別々に取得したい。式 (3.40) より、

$$U_0(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{x^2}{w^2} - \frac{ikx^2}{2R} \right] \quad (3.101)$$

$$U_1(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{2x}{w} \exp \left[-\frac{x^2}{w^2} - \frac{ikx^2}{2R} \right] \quad (3.102)$$

であった。つまり、WFS 信号 (3.99) は x に関する奇関数である。フォトディテクタ (PD) は領域内で取得した信号について積分を行うので単一の PD を用いた場合、WFS 信号は 0 になる。このとき PDH 信号のみを取り出すことができる。

また、WFS 信号の抽出には左右に分割された PD を用いる。長さ制御を行い PDH 信号を 0 にした上で、分割 PD による左右の信号の差を取ることで WFS 信号を取得する手法を用いる。求まる信号強度 P_{WFS} は、

$$\begin{aligned} P_{\text{WFS}} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}} - \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}} \\ &= -4J_0J_1P_0R_0 \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) - \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \cos(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) \right) \\ &\quad \int_0^\infty dx U_0^*(x, z)U_1(x, z) \int_{-\infty}^\infty dy |U_0(y, z)|^2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

ここで積分は、

$$\int_{-\infty}^\infty dy |U_0(y, z)|^2 = 1 \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx U_0^*(x, z)U_1(x, z) &= \sqrt{\frac{4}{\pi w^2(z)}} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \exp \left[-\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned} \quad (3.105)$$

となるので、最終的な WFS 信号強度は、

$$P_{\text{WFS}} = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} J_0 J_1 P_0 R_0 \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta - \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) \quad (3.106)$$

となる。適当な Gouy 位相 η を選ぶことで δx の $\delta \theta$ どちらかの線形なエラー情報を得る事ができる。

3.6 鏡のミスアライメントによる影響

前節まで述べた WFS 法を用いることで、鏡の角度状態をモニタリングし制御することが可能となる。本節では、鏡の角度揺らぎ（ミスアライメント）が干渉計の感度性能に与える物理的な影響について述べる。

3.6.1 長さ方向への結合

重力波検出器において最も致命的な影響は、鏡の角度揺らぎ θ_{mirror} が、重力波信号である光軸方向の長さ変化 ΔL として現れてしまうカップリング現象である。理想的な場合、鏡の回転中心とビームスポットが完全に一致していれば、微小な角度回転による光路長変化は2次のオーダー ($\Delta L \propto \theta^2$) となり無視できる。しかし、現実にはビームスポットが鏡の中心から距離 d_{spot} だけずれている（オフセットを持っている）場合が多い。このとき、幾何学的な考察により、鏡の角度変化 θ_{mirror} は以下の線形な長さ変化 ΔL を引き起こす。

$$\Delta L = d_{\text{spot}} \times \theta_{\text{mirror}} \quad (3.107)$$

この式は、角度揺らぎが長さ雑音に変換されることを意味している。実際にはビームスポット位置 $d(t)$ と鏡角度 $\theta(t)$ はともに時間的に揺らぎ、 $\Delta L(t) = d(t)\theta(t)$ は双線形な過程となる。周波数領域では $\hat{\Delta L}(f) = \hat{d}(f) * \hat{\theta}(f)$ と畳み込みで表されるが、雑音評価では近似的に

$$\hat{\Delta L}(f) \simeq d_{\text{RMS}} \hat{\theta}(f) + \theta_{\text{RMS}} \hat{d}(f) \quad (3.108)$$

として見積もることが多い [14]。したがって、干渉計の制御においては鏡の角度揺らぎ $\delta \theta$ とビームスポットのオフセット d_{off} を同時に最小化することが重要である。

3.6.2 モードマッチングの悪化

3.3.1 項で示したように、ミスアライメントは共振器内部で 10 モードなどの高次モードを励起する。これにより、入射ビームと共振器固有モードとの空間的な重なりであるモードマッチング率が悪化する。角度ずれ $\delta \theta$ を持つ入射ビームの電場 E_{in} を共振器の固有モードで展開すると、式 (3.61) より次のように近似される。

$$E_{\text{in}} \simeq U_{00} + i \frac{\delta \theta}{\alpha_0} U_{10} \quad (3.109)$$

ここでモードマッチング率を、入射場のうち共振器の基本固有モード U_{00} に投影されるパワーの割合として

$$\mathcal{M} \equiv \frac{|\langle U_{00} | E_{\text{in}} \rangle|^2}{\langle E_{\text{in}} | E_{\text{in}} \rangle} \quad (3.110)$$

と定義する。 U_{00} と U_{10} の直交性 $\langle U_{00}|U_{10}\rangle = 0$ を用いると、

$$\mathcal{M} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0}\right)^2} \simeq 1 - \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0}\right)^2 \quad (3.111)$$

となる。したがって、角度ずれに伴う共振器内（00モードとして蓄積される）パワーの変化率は

$$\frac{\Delta P}{P} \simeq - \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0}\right)^2 \quad (3.112)$$

で与えられる。このような共振器内パワーの低下はショット雑音の相対的な増大を招く。さらに、長さ制御におけるエラー信号の感度を低下させるため、外乱に対する堅牢性が損なわれ、共振状態の不安定性を引き起こす要因となる。

3.6.3 輻射圧による角不安定性

高強度レーザーを蓄積する共振器においては、光子の衝突による輻射圧が懸架系の力学的な安定性に影響を及ぼす。これを Sidles-Sigg 効果と呼ぶ [15]。

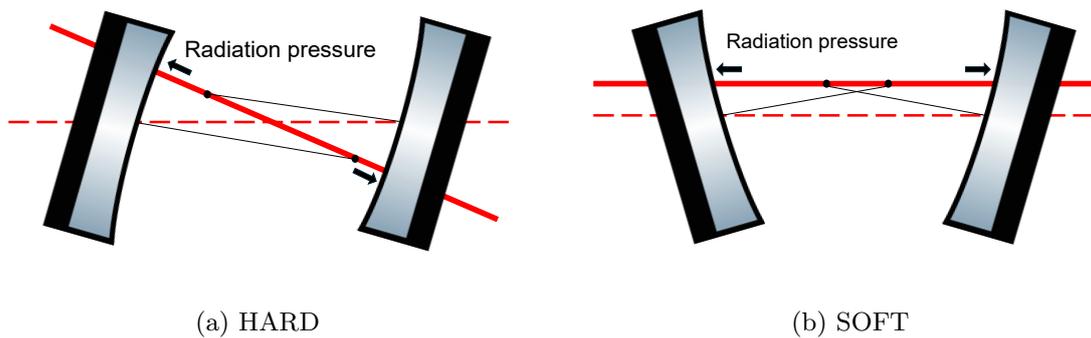


図 3.3: Sidles-Sigg 効果

共振器を構成する鏡が角度 θ だけ傾くと、共振器内の光軸は鏡の表面上で距離 d だけ移動する。この移動量 d は、共振器長 L および鏡の曲率半径 (g-factor) に依存する。共振器内循環パワー P_{cav} が存在する場合、ビームスポットの変位は鏡に対して以下の放射圧トルク N を誘発する。

$$N = \frac{2P_{\text{cav}}}{c} \cdot d(\theta) \quad (3.113)$$

ここで c は光速である。このトルクは角度 θ に比例するため、実効的な光学的バネ定数 $K_{\text{opt}} = -\partial N/\partial\theta$ として振る舞う。

Fabry-Perot 共振器では、両者の角度揺らぎが結合し、2つの固有モードを形成する。鏡が同じ方向に傾いた場合、共振器内を循環する光の輻射圧は、鏡を元の角度へと押し戻すように働く。このとき、輻射圧トルクが振り子の機械的な復元トルクを強める方向に働くため HARD モードと呼ばれる。一方、鏡が互いに逆方向に傾いた場合、輻射圧は鏡をさらに押し出し、アライメントのずれを増幅させるように働く。このとき、輻射圧が振り子の機械的な復元トルク

を弱める方向に働くため SOFT モードと呼ばれる。このモードを抑制するためには、アライメント制御の帯域幅を SOFT モードの固有振動数よりも広くする必要がある。

第 4 章

複屈折

4.1 複屈折の理論

複屈折とは、光学的異方性を持つ媒質内において、光の偏光成分に依存して異なる屈折率が生じる現象を指す。これにより、入射光は媒質内で異なる位相速度を持つ 2 つの固有偏光成分（常光線と異常光線）として伝播することになる。KAGRA のテストマスに用いられているサファイアもまた、この性質を持つ一軸性結晶の一種である。本章では、まず複屈折現象を記述するための数学的記法を導入する。その上で、複屈折が引き起こす偏光状態の回転について Jones 計算法を用いて定式化し、現在 KAGRA で用いられているサファイア鏡に分布する非一様な複屈折の影響について記述する。

4.1.1 複屈折の記法

複屈折を記述するために図 4.1 のような屈折率楕円体を考える。これは最も高い屈折率を持つ方向、最も低い屈折率を持つ方向、この 2 つに直交する方向の 3 方向を主軸とした楕円体であり、軸の長さが屈折率の大きさに対応している。複屈折性を持つ物質に光が入射した場合、入射光の光軸に対して垂直な面で楕円体を切断し、切断面の楕円の短軸と長軸の長さに対応した屈折率が観測されることになる。

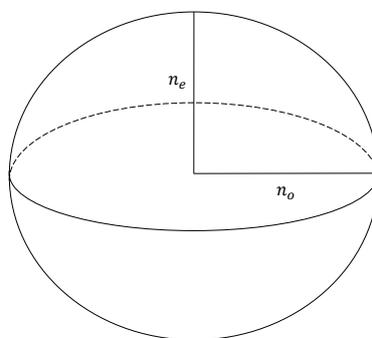


図 4.1: 屈折率楕円体

本章ではサファイアに主眼を置いた議論を行う。サファイアは負の一軸性結晶であり、常光線屈折率 n_o と異常光線屈折率 n_e を半径とする面で屈折率楕円体が描かれる。一軸性結晶の持つ軸を c 軸と呼び、 c 軸に平行な光に対しては複屈折性を示さない。これは、光軸に垂直な切断面が円となるためである。

図 4.2 のように一軸性結晶に光軸が c 軸に対して ϕ だけ傾いた光が入射した場合を考える。入射光の進行方向に対して垂直な面（波面）での楕円体の切断面において、短軸を高速軸、長軸を低速軸と呼ぶ（屈折率の大きさと光の速度は反比例するため）。サファイアのような負の一軸性結晶では、 $n_o > n_e$ であるため、切断面の楕円の長軸（低速軸）方向の屈折率は、常に n_o である。一方、短軸（高速軸）方向の屈折率 n'_e は光の入射角 ϕ に依存する。

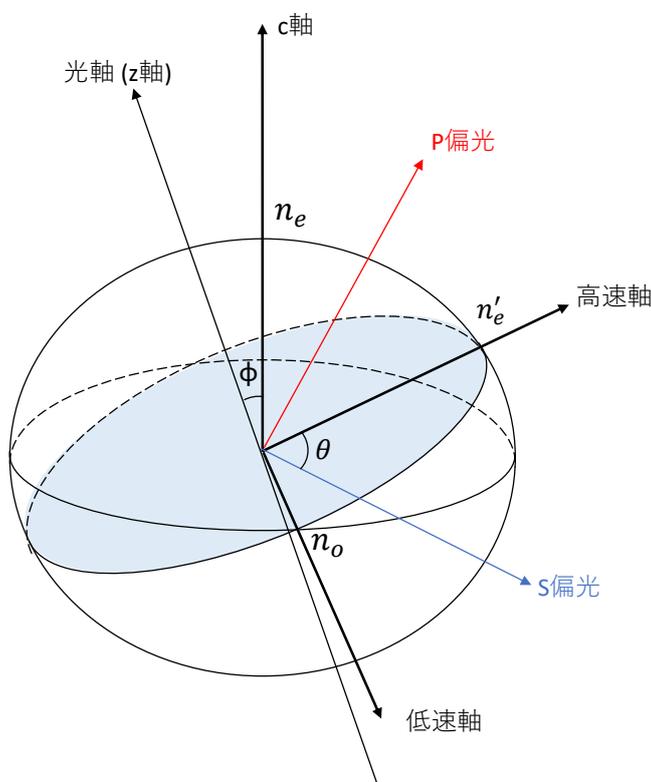


図 4.2: 入射光と屈折率楕円体

ここで、光軸と c 軸を含むように屈折率楕円体を切断した楕円面を考えることにより n'_e と ϕ の関係は、

$$\frac{1}{(n'_e)^2} = \frac{\cos^2 \phi}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \phi}{n_e^2} \tag{4.1}$$

のように表される。

次節で偏光の回転を議論する際に必要となるパラメータは n_o と n'_e 、そして S 偏光方向と高速軸のなす角 θ である。 n_o に関しては一軸性結晶の物質固有の値であり既知である。したがって、 n'_e と θ の 2 自由度の値を求めることが重要となる。ここで、 n'_e の代わりに、

$$\Delta n \equiv n'_e - n_o \tag{4.2}$$

が用いられることがある。これは、低速軸、高速軸方向にそれぞれ平行な直線偏光が入射したとき (つまり $\theta = \frac{n\pi}{2}$ のとき) に分かれた2つの光の位相差は Δn を用いて、

$$R = \frac{2\pi d \Delta n}{\lambda} \quad (4.3)$$

と表されるからである。ここで、 λ は入射光の波長、 d は媒質の厚さである。

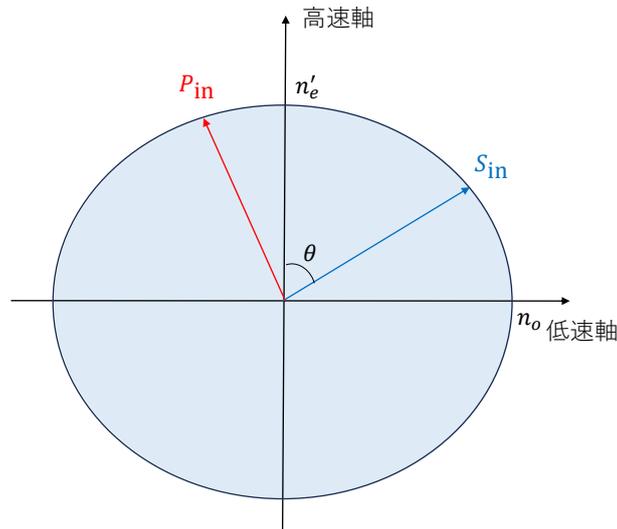


図 4.3: 入射光に垂直な面による屈折率楕円体の切断楕円面

4.1.2 偏光の回転

光の偏光状態を記述するために Jones 計算法 [16] を用いる。これは光の電場の複素振幅の x 成分と y 成分を二次元の Jones ベクトル \mathbf{V} で記述し、光学素子の効果を 2×2 の Jones 行列 \mathbf{M} で記述する手法である。光が光学素子を通過するとき、その出射光の偏光は光学素子の Jones 行列と入射光の Jones ベクトルの積となる。入射光の x 成分が S 偏光、 y 成分が P 偏光となるように軸をとると Jones ベクトル \mathbf{V} は、

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} S_{\text{in}} \\ P_{\text{in}} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

のように表される。この光が光学素子を透過したときの光の偏光 \mathbf{V}' は、光学素子の Jones 行列 \mathbf{M} との積であり、

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} S_{\text{out}} \\ P_{\text{out}} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V} \quad (4.5)$$

のようになる。

次に、一様な複屈折性を持つ物体の Jones 行列 $M(\Delta n)$ は次式で表される。

$$M(\Delta n) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi d \Delta n}{\lambda}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi d \Delta n}{\lambda}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi d \Delta n}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi d \Delta n}{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

ここで定数倍部分 $e^{i\frac{\pi d \Delta n}{\lambda}}$ は偏光を考える上で影響はないため無視する。S 偏光方向の軸に対して高速軸が θ 傾いている状態を考えると Jones 行列 $M(\theta, \Delta n)$ は、

$$\begin{aligned} M(\theta, \Delta n) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi d \Delta n}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi d \Delta n}{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi \Delta n d}{\lambda}} \cos^2 \theta + e^{-i\frac{\pi \Delta n d}{\lambda}} \sin^2 \theta & i \sin 2\theta \sin \frac{\pi \Delta n d}{\lambda} \\ i \sin 2\theta \sin \frac{\pi \Delta n d}{\lambda} & e^{-i\frac{\pi \Delta n d}{\lambda}} \cos^2 \theta + e^{i\frac{\pi \Delta n d}{\lambda}} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

のように表される。ここで、 $\alpha = \frac{\pi \Delta n d}{\lambda}$ とおくと、複屈折は次のように表される。

$$M(\theta, \Delta n) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos^2 \theta + e^{-i\alpha} \sin^2 \theta & i \sin 2\theta \sin \alpha \\ i \sin 2\theta \sin \alpha & e^{-i\alpha} \cos^2 \theta + e^{i\alpha} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ここで、入射される光が純粋な S 偏光のみである $\mathbf{V} = (S_{\text{in}}, 0)^T$ のような状況を考える。この入射光が複屈折物質を透過した際の偏光状態は、式 (4.7) との積を計算して、

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} S_{\text{out}} \\ P_{\text{out}} \end{pmatrix} = S_{\text{in}} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos^2 \theta + e^{-i\alpha} \sin^2 \theta \\ i \sin 2\theta \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となる。これは、入射される光が純粋な S 偏光であっても複屈折性により偏光が回転され P 偏光成分が発生することを表している。

4.1.3 Jones 行列の一意性と内部の複屈折非一様性

前節の計算では光路上では一様な複屈折 ($\Delta n, \theta$) をもつという仮定で計算を進めた。しかし、非一様な複屈折の議論の際には光路上での複屈折が一様ではない、すなわち光が物質を進むにつれて複屈折が変化することも考慮するべきである。このとき、図 4.4 のように、複数の板を透過するモデルを考える。このとき、偏光の計算はそれぞれの Jones 行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} S_{\text{out}} \\ P_{\text{out}} \end{pmatrix} = M(\theta_1, \Delta n_1, d_1) M(\theta_2, \Delta n_2, d_2) \cdots M(\theta_m, \Delta n_m, d_m) \begin{pmatrix} S_{\text{in}} \\ P_{\text{in}} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

のように計算する必要がある。しかし、Jones 行列はそれぞれ正則で行列式が 1 であるため、入射光と出射光の偏光状態さえ定まれば以下の式を満たすパラメータ $\theta, \Delta n$ が必ず存在する。したがって、単一の Jones 行列 $M(\theta, \Delta n, d)$ を用いて計算を進めても問題はない。

$$M(\theta, \Delta n, d) = M(\theta_1, \Delta n_1, d_1) M(\theta_2, \Delta n_2, d_2) \cdots M(\theta_m, \Delta n_m, d_m) \quad (4.11)$$

4.2 KAGRA における複屈折

前述の通り KAGRA の鏡には低温で熱的性質の良いサファイアが用いられる。しかし、その内部には図 4.5 のように複屈折が存在していることが確認されている。この節ではその測定や影響、抑制のための研究について記述する。

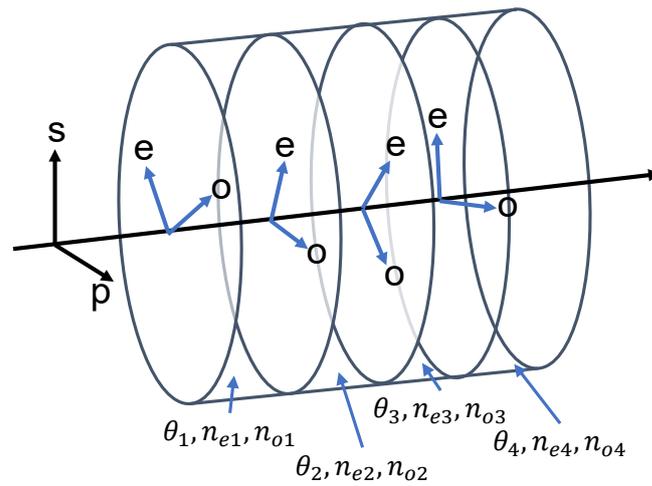


図 4.4: 異なる複屈折性を持つ複数の板を通過する光 [17]

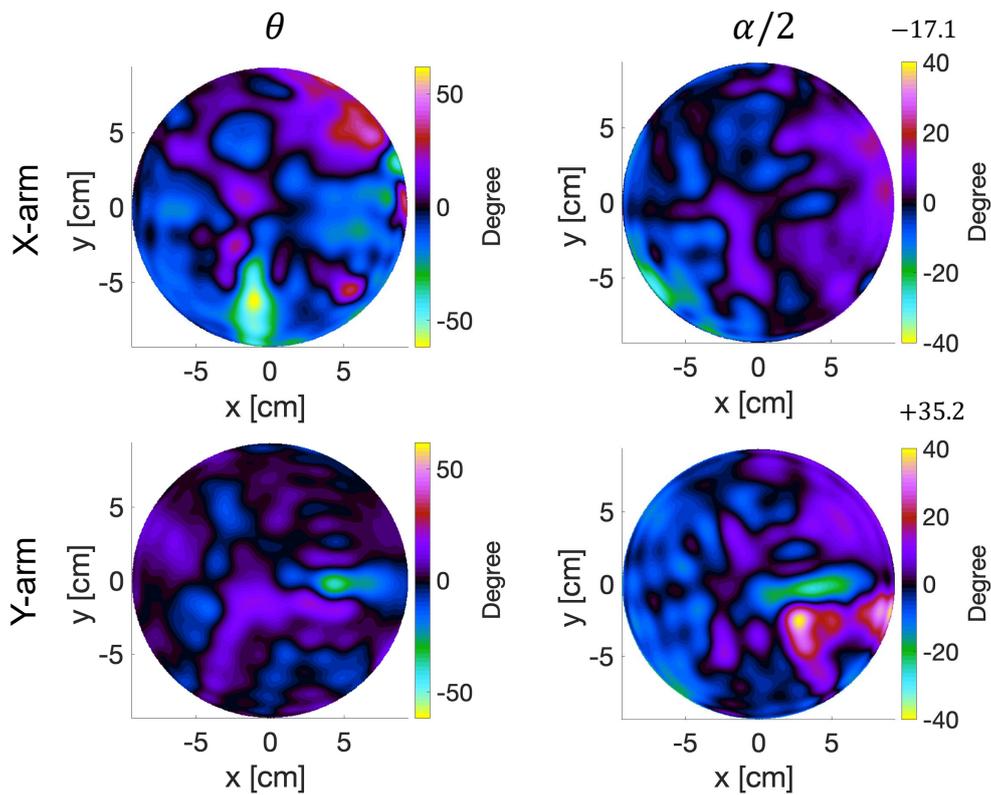


図 4.5: サファイア鏡の複屈折マップ (ITMX and ITMY) [18]

4.2.1 透過波面誤差と IBF 処理

KAGRA の腕共振器に用いられるサファイア基板は、シリカと比較して内部の屈折率の不均質性が大きいことが知られている。この不均質性は、透過した光の位相を空間的に歪ませる透

過波面誤差 (Transmitted Wavefront Error, TWE) を引き起こす要因となる。この TWE を抑制するため、基板表面をイオンビームで削り、物理的な厚みを調整することで屈折率のムラを相殺する Ion Beam Figuring (IBF) 処理が導入された。KAGRA の仕様では、中央部 (直径 140 mm) において TWE を 6 nm 以下に抑えるように設計されていた。

4.2.2 研磨工程における偏光依存性の問題

実際の製造過程において、IBF 処理後の鏡 (ITMX および ITMY) の TWE を直線偏光で測定したところ、それぞれ 25.9 nm および 30.1 nm に達し、仕様を大幅に上回る誤差が確認された。この原因として、サファイア基板が理想的な c 軸結晶からわずかにずれており、複屈折性を持っていたことが挙げられる。研磨ベンダーが IBF 処理中の評価に円偏光を用いたため、直線偏光を使用する KAGRA の実環境下とは異なる補正が行われたことが原因だと考えられている [19]。

4.2.3 干渉計性能への影響評価

先行研究ではこの不均一な TWE が干渉計の感度および制御に与える影響を評価するため、実測マップを用いたシミュレーション (FINESSE) が行われた。解析の結果、以下の影響が明らかとなった [8]。

- ショット雑音の相対的な増加: TWE の不均一性により光が散乱され、出力ポートにおける高次モード光のパワーが約 16 倍に増大した。これにより信号強度が低下し、ショット雑音が低周波側で 7.1%、高周波側で 16% 増加する。
- 雑音の感度への結合の増大: 2 本の腕に異なる TWE の分布が存在しており、これによりレーザー周波数雑音の結合が 1 桁以上増大し、KAGRA の設計感度を制限する主要な要因となる可能性がある。
- 制御信号の歪み: 透過波面の非対称な構造により、鏡の傾きを検知する WFS 信号が変形し、制御点において角度のオフセットが発生する。
- OMC での傾きによる雑音の増大: Output Mode Cleaner (OMC) において、傾きによる信号への雑音混入が x 方向で 16 倍程度増大し、姿勢制御の要求精度がより厳しいものとなる。

4.2.4 複屈折の非一様性による制御信号への影響

本論文で注目するのは制御信号の歪みについてである。共振器から出てきた光は逆行波の防止のため Faraday isolator を通り、一部の偏光以外は遮断される。KAGRA では S 偏光のみを用いる設計となっており P 偏光は損失となる。この非対称な損失により、角度の制御信号にオフセットが発生する。

また、複屈折分布が非一様であることからビームスポットの位置変化に従って混入する P 偏光の割合は変化する。この変化は共振器に入射する光の強度を変化させる。これは、3.4 節

以降で示したような線形なエラー信号に対してビーム位置 (X, Y) の依存性を与える。ビームジッターが存在する場合、オフセットの値が揺らぐ。これによる角度制御が揺らぎが長さ方向の揺らぎに結合して、最終的には KAGRA の感度を制限する可能性が指摘されている。

4.2.5 ビームジッター雑音

図 4.6 は 2024 年時点の KAGRA における推定ビームジッタースペクトルである [20]。これは ITM 上のビームジッター雑音は図 2.6 における Input Faraday Isolator 系内のステアリングミラーに起因するものである仮定のもと計算されている (A.3)。

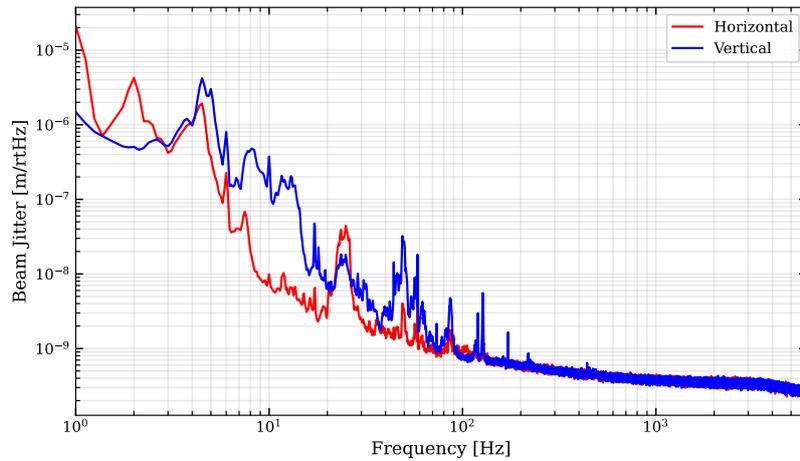


図 4.6: ITM 上のビームジッター

これらの自由度に対するビームジッター由来の雑音 $\theta^{(\text{jitter})}$ は、制御ループを介して以下の式で与えられる。

このビームジッターを元に複屈折がない状況で発生するビームジッター雑音と複屈折に起因する角度の揺らぎから生まれるビームジッター雑音の比較を行う。ここで、アライメント制御の対象となる自由度 k は、共振器を構成する鏡の連動モード (HARD/SOFT) と回転方向 (Pitch/Yaw) を組み合わせた 4 つの成分 ($\theta_{\text{HY}}, \theta_{\text{HP}}, \theta_{\text{SY}}, \theta_{\text{SP}}$) のいずれかを指す。

k 番目の自由度における WFS 信号が $\Delta n'_k$ だけオフセットされていると仮定する。このオフセットは入力鏡上でのビーム位置 (X, Y) に依存するため、ビームジッター δX および δY に伴って変動する。 $\Delta n'_k$ の変動を $\delta n'_k$ と定義すると、アライメント制御ループを介して鏡の傾きへと変換される雑音 $\theta^{(\text{jitter})}$ は以下の式で計算される。

$$\theta^{(\text{jitter})} = -(\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{n}' \quad (4.12)$$

ここで、 \mathbf{G} は開ループ伝達関数行列、 \mathbf{D} はセンシング行列を表す。この式は、ビーム位置の変動が複屈折による空間的な不均一性を介して、疑似的なアライメント信号として制御系に混入することを示している。

図 4.7 は、単一の共振器におけるビームジッター雑音のシミュレーション結果である。図中の赤い点線は複屈折がない場合の直接的な長さへの結合 (Direct Coupling) を示している。こ

れに対し、青線および緑線は、非一様な複屈折が存在する場合の従来の WFS 制御によるビームジッター雑音 (SOFT および HARD) を示している。

この図からわかるように、制御帯域 (数 Hz 以下) においては非一様な複屈折の影響下で生まれる間接的なビームジッター雑音が直接結合による雑音を上回る。これは、鏡の物理的な揺れを抑制するための制御系が、複屈折由来の雑音に反応することで、かえって過剰な揺れを引き起こしていることを意味する。したがって、この複屈折影響下でのビームジッター雑音を抑制することは低周波での感度向上につながる。

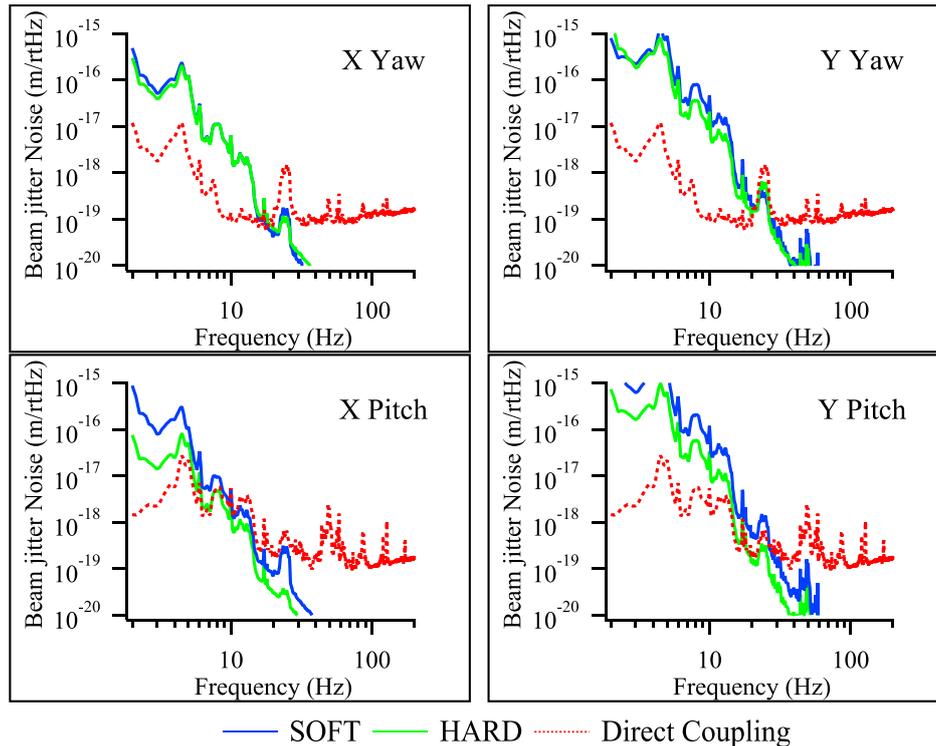


図 4.7: 複屈折がない場合の直接的なカップリングと複屈折がある場合でのビームジッター雑音の比較 [18]

4.2.6 複屈折についての先行研究と本研究

KAGRA の複屈折について現在でも様々な研究が進められている。TWE の測定データから 2 次元の複屈折分布を再構成する手法が提案されており、KAGRA の実機で観測されたビームプロファイルと良い一致を示している [21]。本研究でもこの手法により計算された複屈折分布をシミュレーションに導入している。また、複屈折の影響の抑制という観点で、偏光生成機である液晶素子を用いることで偏光の回転を相殺する手法も提案されている [22]。

次世代重力波検出器 (Cosmic Explorer, Einstein Telescope など) においても熱雑音低減のための低温化が行われる予定である。その際のテストマスには結晶シリコンや結晶コーティングといった新たな技術の導入が検討されている。結晶シリコンや結晶コーティングにおいても製造過程で複屈折が発生し得る。複屈折による位相差の揺らぎは干渉計の位相雑音とし

て感度を制限する可能性があることが示されている。次世代の検出器を想定した要求値として、その位相差の揺らぎの要求値は基材に対して約 $10^{-8}\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ 、コーティングに対して約 $10^{-10}\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ であると計算されている [23]。このように複屈折の影響の抑制は KAGRA だけではなく今後の重力波検出器の設計にも関与する重要なテーマである。

当研究室では角度制御のオフセットの揺らぎの抑制について、QPD の各信号や更に分割数を増やした多重分割 PD に対して適切に重み付けをすることで揺らぎを抑制するという手法が提案されている [18, 24, 25]。本論文ではこの線形の重み付けを更に発展させた、機械学習による手法を用いて実験を行う。機械学習の手法の一つであるニューラルネットワークはアフィン変換と非線形変換を繰り返す合成関数であり、原理的に非線形的な近似が可能である。複屈折による偏光回転やビームジッターに伴う非線形な結合は、線形結合のみの最適化でしきれない可能性がある。ニューラルネットワークは高い非線形表現力を持つため、このような系における最適化に適していると考えられる。

先行研究ではミラーマップ無しでの教師あり学習による鏡の角度の回帰予測 [26] やランダムに生成したミラーマップ影響下での教師あり学習の分類や回帰予測などが行われた [27, 28]。本研究では光学系のセットアップや複屈折の影響を再現したシミュレーションで機械学習による制御を行う。また、教師あり学習に加えて制御のタスクによく用いられる強化学習による検証を行った。機械学習については次章で詳しく説明する。

第5章

機械学習

本章では、本研究における機械学習の基礎となるニューラルネットワークおよび教師あり学習、強化学習について記述する。

5.1 問題の定式化

機械学習とは、与えられたデータ集合 \mathcal{D} に基づき、ある評価関数 \mathcal{L} を最適化するように、入力空間 \mathcal{X} から出力空間 \mathcal{Y} への写像関数 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を決定する問題である。本研究では、この写像関数 f の近似器としてニューラルネットワークを用いる。

5.2 ニューラルネットワーク

ニューラルネットワークは、生体の神経網を模倣した非線形関数近似器である。数学的には、アフィン変換と非線形変換を繰り返す合成関数として定義される。

5.2.1 多層パーセプトロン

L 層からなる多層パーセプトロンを考える。第 l 層 ($l = 1, \dots, L$) における入力ベクトルを $\mathbf{h}^{(l-1)} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}}$ 、出力ベクトルを $\mathbf{h}^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_l}$ とする。ここで、 $\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{x}$ はネットワークへの入力、 $\mathbf{h}^{(L)} = \mathbf{y}$ は最終出力である。隣接する層間の信号伝播は以下の漸化式で記述される。

$$\mathbf{u}^{(l)} = \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{h}^{(l-1)} + \mathbf{b}^{(l)} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{h}^{(l)} = \varphi^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) \quad (5.2)$$

ここで、 $\mathbf{W}^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_l \times N_{l-1}}$ は第 l 層の重み行列、 $\mathbf{b}^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_l}$ はバイアスベクトルである。また、 $\varphi^{(l)}$ は活性化関数であり、ベクトル $\mathbf{u}^{(l)}$ の各成分に対して要素ごとに作用する。このモデルのパラメータ集合 θ は、すべての層の重みとバイアスである。

$$\theta = \{\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{W}^{(L)}, \mathbf{b}^{(L)}\} \quad (5.3)$$

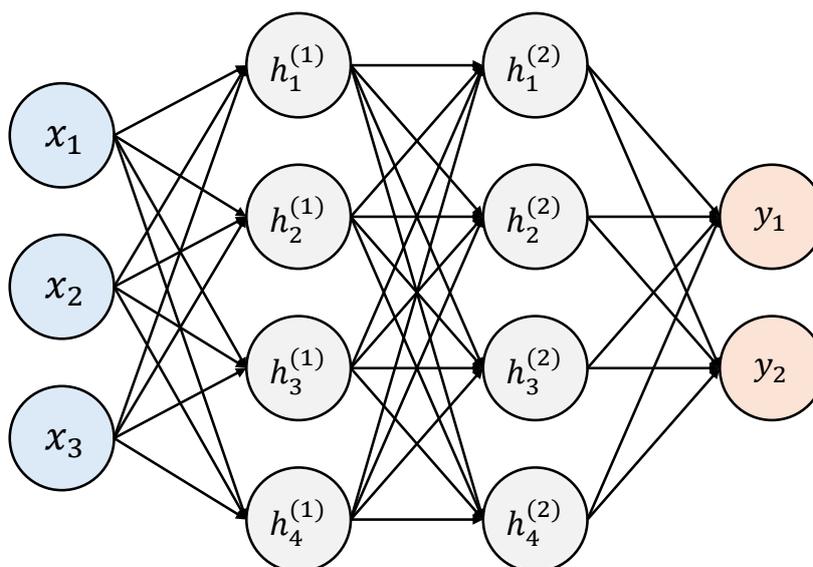


図 5.1: 多層パーセプトロンの構造例

5.2.2 活性化関数

活性化関数はニューラルネットワークの非線形性を担う関数である。本研究では、ReLU (Rectified Linear Unit) [29] および SeLU (Scaled Exponential Linear Units) [30] を用いた。以下にそれぞれの定義と特徴を述べる。

ReLU

ReLU は深層学習において標準的に用いられる活性化関数であり、関数 $f(x)$ は以下のように定義される。

$$f(x) = \max(0, x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (5.4)$$

ReLU は、入力が正の領域において勾配が常に 1 となるため、層が深くなっても勾配消失問題が起きにくいという特徴を持つ。また、単純な最大値関数であるため計算コストが低く、学習の収束が早いことが知られている。

SeLU

SeLU 関数 $\varphi(x)$ は以下のように定義される。

$$\varphi(x) = \lambda \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ \alpha(e^x - 1) & (x < 0) \end{cases} \quad (5.5)$$

ここでパラメータは $\lambda \approx 1.0507, \alpha \approx 1.6733$ に設定される。SeLU は、層ごとの出力分布の平均と分散をそれぞれ 0 と 1 に収束させる自己正規化という数学的性質を持つことが証明されており、深層学習における勾配消失・爆発問題を回避できる。

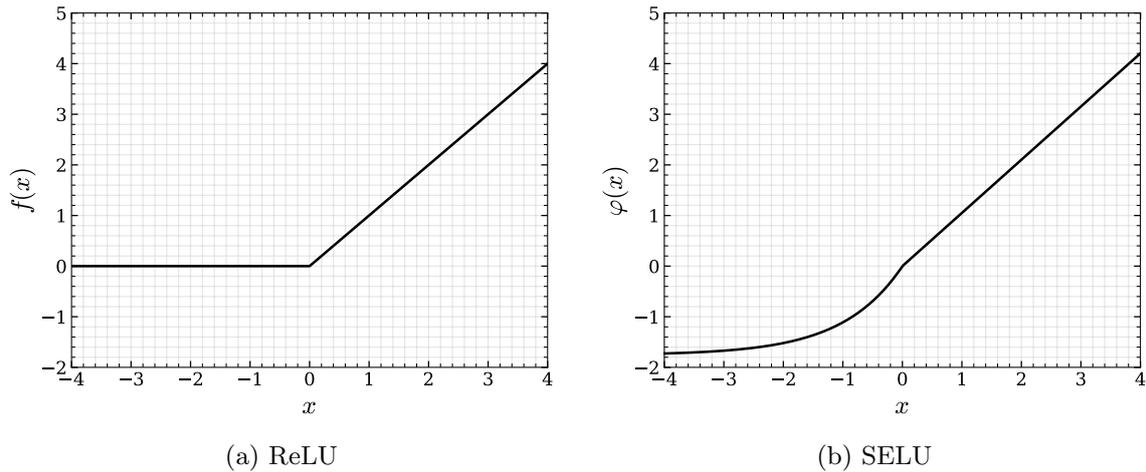


図 5.2: 活性化関数の形状

5.3 教師あり学習

教師あり学習は、訓練データセット $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)\}_{i=1}^N$ が与えられたとき、損失関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ を最小化するパラメータ $\boldsymbol{\theta}^*$ を求める最適化問題に帰着する。

$$\boldsymbol{\theta}^* = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \quad (5.6)$$

5.3.1 損失関数

回帰問題において、モデルの出力 $\hat{\mathbf{y}}_i = f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta})$ と正解データ \mathbf{y}_i との誤差を測る指標である。次の式のような平均二乗誤差を用いる事が多い。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i\|^2 \quad (5.7)$$

5.3.2 勾配降下法と誤差逆伝播法

損失関数の最小化には、勾配降下法に基づく反復アルゴリズムを用いる。時刻 t におけるパラメータ更新式は以下で与えられる。

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_t) \quad (5.8)$$

ここで η は学習率である。勾配 $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}$ の計算には、連鎖律を利用した誤差逆伝播法が用いられる。出力層から入力層に向かって誤差信号 $\boldsymbol{\delta}^{(l)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^{(l)}}$ を以下の漸化式により伝播するようにして計算できる。

$$\boldsymbol{\delta}^{(l-1)} = (\mathbf{W}^{(l)})^T \boldsymbol{\delta}^{(l)} \odot \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u}^{(l-1)}) \quad (5.9)$$

ここで \odot はアダマール積を表す。これにより、各層の重みに対する勾配は $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^{(l)}} = \boldsymbol{\delta}^{(l)} (\mathbf{h}^{(l-1)})^T$ として効率的に計算される。

5.4 強化学習

強化学習は、エージェントが未知の環境下で試行錯誤を繰り返し、累積報酬を最大化するような方策を学習する機械学習の一分野である。教師あり学習のように正解データが与えられるのではなく、自身の行動に対する環境からのフィードバック（報酬）を手がかりに学習を進める点が特徴である。[31]。

5.4.1 マルコフ決定過程

本研究の目的である鏡の制御問題をマルコフ決定過程として定式化する。マルコフ決定過程は、状態空間 \mathcal{S} 、行動空間 \mathcal{A} 、遷移確率 \mathcal{P} 、報酬関数 \mathcal{R} 、割引率 γ の5つ組 $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma)$ で定義される。

- \mathcal{S} : 状態空間。
- \mathcal{A} : 行動空間。
- \mathcal{P} : 遷移確率密度関数 $p(s_{t+1}|s_t, a_t)$ 。現在の状態 s_t で行動 a_t を取ったとき、次の状態 s_{t+1} へ遷移する確率。
- \mathcal{R} : 報酬関数 $r(s_t, a_t)$ 。行動の結果得られる即時報酬。
- γ : 割引率 ($0 \leq \gamma < 1$)。将来の報酬をどれだけ重視するかを表す定数。

5.4.2 目的関数

強化学習の目的は、ある方策 $\pi(a|s)$ に従ったときに得られる割引累積報酬（収益）の期待値を最大化することである。 $\pi(a|s)$ とは状態 s において行動 a を選択する確率分布である。ここで時刻 t における報酬関数を $r_t \equiv r(s_t, a_t)$ とすると、収益 G_t は以下のように定義される。

$$G_t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k} \quad (5.10)$$

最適な方策 π^* は、この収益の期待値 $J(\pi) = \mathbb{E}_{\pi}[G_0]$ を最大化するものである。

ここで、一般的な期待値の定義について述べる。確率変数 X が確率分布 P_X に従う ($X \sim P_X$) とき、ある関数 $g(X)$ の期待値 (X に関する平均値) は次式で定義される。

$$\mathbb{E}_{P_X}[g(X)] = \sum_x P_X(x) g(x) = \int P_X(x) g(x) dx \quad (5.11)$$

(変数が離散値の場合は総和、連続値の場合は積分で表される。)

5.4.3 価値関数と Bellman 方程式

最適方策を見つけるために、行動価値関数 (Q 関数) $Q^{\pi}(s, a)$ を定義する。これは時刻 t における状態 s でまず行動 a を取り、その後は方策 π に従って行動を選び続けたときに得られ

る割引累積報酬の期待値として定義される。

$$Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k} \mid s_t = s, a_t = a \right] \quad (5.12)$$

この定義式における収益の項を $r_t + \gamma G_{t+1}$ と分解することで、現在の報酬と次状態以降の価値に関係づけることができる。状態・行動が連続の場合、遷移確率密度 $p(s'|s, a)$ と方策 $\pi(a'|s')$ を用いると、以下の再帰的な関係式 (Bellman 方程式) が導かれる。

$$\begin{aligned} Q^\pi(s, a) &= \int p(s'|s, a) \left[r(s, a) + \gamma \int \pi(a'|s') Q^\pi(s', a') da' \right] ds' \\ &= \mathbb{E}_{p(s'|s, a)} [r(s, a) + \gamma \mathbb{E}_{\pi(a'|s')} [Q^\pi(s', a')]] \end{aligned} \quad (5.13)$$

式 (5.13) は、現在の状態 s で行動 a を取った際の即時報酬 $r(s, a)$ と、遷移した次の状態 s' 以降で得られる将来の価値 (の割引) の和について、遷移分布および方策に関して期待値を取ったものである。

強化学習の最終的な目標は、あらゆる方策の中で最大の期待収益を与える最適行動価値関数 $Q^*(s, a)$ を求めることである。

$$Q^*(s, a) = \max_{\pi} Q^\pi(s, a) \quad (5.14)$$

もし $Q^*(s, a)$ が求めれば、各状態 s において $Q^*(s, a)$ を最大化する行動 a を選択するだけで、最適方策 π^* が決定される。

$$\pi^*(s) = \operatorname{argmax}_a Q^*(s, a) \quad (5.15)$$

この $Q^*(s, a)$ は、将来にわたって常に最適な行動を選択し続けるという仮定に基づき、以下の Bellman 最適方程式を満たす。通常の Bellman 方程式との違いは、次状態の価値計算において、方策による期待値 \mathbb{E}_π ではなく、可能な行動の中での最大値 \max を用いる点にある。

$$Q^*(s, a) = \mathbb{E}_{p(s'|s, a)} \left[r(s, a) + \gamma \max_{a'} Q^*(s', a') \right] \quad (5.16)$$

本研究で扱う干渉計の制御入力 (鏡角度の補正量) は連続値であり、状態空間 \mathcal{S} および行動空間 \mathcal{A} は共に連続である。状態空間が連続であるため、全ての状態に対して価値を計算して記録することは不可能である。したがって、行動価値関数をニューラルネットワークによって近似する必要がある。また、行動空間も連続であることから、式 (5.16) に含まれる最大化演算 $\max_{a'} Q(s', a')$ を各ステップで厳密に計算することは解析的に困難である。そのため、離散行動を前提として最大値を探索する価値ベースの手法 (DQN 等) をそのまま適用することはできない。

そこで本研究では、Actor-Critic 法を採用する。これは、強化学習エージェントを以下の2つの独立したニューラルネットワークに分離して学習させる手法である。

- **Critic:** 行動価値関数 $Q_\theta(s, a)$

現在の環境の状態 s と、そこで取られた行動 a を入力とし、その行動が将来どれだけの報酬をもたらすかを推定して出力する役割を担う。これは、Actor の選択した行動の良し悪しを評価するためのものであり、主に Bellman 方程式の誤差を最小化するように学習される。

- **Actor:** 方策 $\pi_\phi(a|s)$

現在の状態 s を入力とし、取るべき行動 a を出力する役割を担う。Actor は、Critic によって高く評価される行動を選択するように、勾配法を用いてパラメータを更新する。

5.5 Soft Actor-Critic

本研究では、干渉計の連続値制御を行う強化学習アルゴリズムとして Soft Actor-Critic (SAC) [32] を採用した。SAC は従来の報酬最大化に加え、方策のエントロピーも同時に最大化する最大エントロピー強化学習の枠組みに基づいている。高次元かつ連続的な状態空間を持つ問題において、高いサンプル効率と安定した収束性を示すことが知られている。

5.5.1 最大エントロピー強化学習

一般的な強化学習の目的は、累積報酬の期待値を最大化することである。これに対し、最大エントロピー強化学習では、各ステップにおける報酬と方策のエントロピーの和の期待値を最大化することを目的とする。最適な方策 π^* は以下のように定義される。

$$\pi^* = \arg \max_{\pi} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}_{\pi} [\gamma^t (r(s_t, a_t) + \alpha \mathcal{H}(\pi(a_t|s_t)))] \quad (5.17)$$

ここで $\mathcal{H}(\pi(a_t|s_t))$ は状態 s_t における方策のエントロピーであり、以下のように定義される。

$$\mathcal{H}(\pi(a_t|s_t)) = -\mathbb{E}_{a_t \sim \pi} [\log \pi(a_t|s_t)] \quad (5.18)$$

また、 α は温度パラメータと呼ばれる係数であり、報酬の最大化（活用）とエントロピーの最大化（探索）のトレードオフを決定するハイパーパラメータである。エントロピー項を導入することで、エージェントは可能な限りランダムに行動しながら高い報酬を目指すようになり、局所最適解を回避するとともに、雑音に対してロバストな制御則を獲得できる。

5.5.2 Soft Q 関数と Soft Bellman 方程式

5.4.3 節で導いた Bellman 方程式にエントロピーを導入する。最大エントロピーの枠組みにおいて、行動価値関数 (Soft Q 関数) は通常の報酬に加え、将来のエントロピー項も含めた期待収益を表す。この関数は、以下の再帰的な関係式 (Soft Bellman 方程式) を満たす。

$$Q(s, a) = \mathbb{E}_{p(s'|s, a)} [r(s, a) + \gamma V(s')] \quad (5.19)$$

ここで $V(s)$ は Soft 状態価値関数であり、エントロピー項 $\alpha \log \pi$ を含んで次式で定義される。

$$V(s) = \mathbb{E}_{\pi(a|s)} [Q(s, a) - \alpha \log \pi(a|s)] \quad (5.20)$$

これらを組み合わせることで、SAC における Soft Bellman 方程式が導かれる。

$$Q(s, a) = \mathbb{E}_{p(s'|s, a)} [r(s, a) + \gamma \mathbb{E}_{\pi(a'|s')} [Q(s', a') - \alpha \log \pi(a'|s')]] \quad (5.21)$$

5.5.3 ネットワークの更新則

SAC は Actor-Critic 構造を持ち、Q 関数を近似する Critic ネットワーク (パラメータ θ) と、方策を近似する Actor ネットワーク (パラメータ ϕ) を同時に学習させる。

Critic の学習

Critic の学習は、Soft Bellman 方程式の二乗誤差の最小化によって行われる。学習の安定化のため、2つの Q ネットワーク $Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}$ を用いる Clipped Double Q-learning を採用する。損失関数 $J_Q(\theta_i)$ は以下で定義される。

$$J_Q(\theta_i) = \mathbb{E}_{(s,a,r,s') \sim \mathcal{D}} \left[(Q_{\theta_i}(s,a) - y)^2 \right] \quad (i = 1, 2) \quad (5.22)$$

ここで \mathcal{D} は過去の遷移データ (s, a, r, s') を蓄積したバッファである。また、ターゲット y は、次状態 s' において現在のポリシーからサンプリングされた行動 $a' \sim \pi_\phi(\cdot|s')$ を用いて、以下のように計算される。

$$y = r + \gamma \left(\min_{j=1,2} Q_{\theta_j}(s', a') - \alpha \log \pi_\phi(a'|s') \right) \quad (5.23)$$

なお、ターゲット計算には過大評価を防ぐために2つの Q 値の最小値を用い、 θ'_j は学習を安定させるために指数移動平均によって緩やかに更新されるターゲットネットワークのパラメータである。

Actor の学習

Actor は、現在の Q 値とエントロピーの和を最大化するように、すなわち以下の目的関数 $J_\pi(\phi)$ を最小化するように学習される。

$$J_\pi(\phi) = \mathbb{E}_{s \sim \mathcal{D}} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi_\phi} \left[\alpha \log \pi_\phi(a|s) - \min_{j=1,2} Q_{\theta_j}(s,a) \right] \right] \quad (5.24)$$

ここで、行動 a は確率分布 π_ϕ からサンプリングされるため、そのままでは誤差逆伝播法を適用できない。そこで、Reparameterization Trick を用いる。方策がガウス分布 $\mathcal{N}(\mu_\phi(s), \sigma_\phi(s))$ を出力する場合、ノイズ $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, I)$ を用いて行動 a を以下のように変換する。

$$a = f_\phi(\epsilon; s) = \tanh(\mu_\phi(s) + \sigma_\phi(s) \cdot \epsilon) \quad (5.25)$$

この変換により、行動 a はパラメータ ϕ に関して微分可能となり、Q 関数の勾配を Actor ネットワークへ伝播させることが可能となる。なお、 \tanh 関数は行動を干涉計のアクチュエータの動作範囲 $[-1, 1]$ に制限するために適用される。

温度パラメータの自動調整

本研究では学習の進行に応じて温度パラメータ α を自動調整する手法を採用した。目標とするエントロピー値 \bar{H} を設定し、以下の損失関数を最小化することで α を更新する。

$$J(\alpha) = \mathbb{E}_{s \sim \mathcal{D}, a \sim \pi_\phi(\cdot|s)} \left[-\alpha \log \pi_\phi(a|s) - \alpha \bar{H} \right] \quad (5.26)$$

これにより、学習初期は探索を優先し (α が増大)、方策が収束するにつれて活用を優先する (α が減少) というバランス調整が自動的に行われる。

5.6 重力波研究における機械学習の活用

近年、LIGO、Virgo、KAGRA をはじめとする重力波検出器の高感度化に伴い、取得されるデータ量は増大し、その複雑性も増している。これに対応するため、計算機能力の向上を背景として、データ解析や信号処理、さらには装置制御の分野において機械学習の導入が進められている [33]。本節では、重力波研究における機械学習の主な応用例を紹介する。

5.6.1 信号検出や雑音除去

信号検出・分類の分野では CNN 等を用いた信号検知の高速化 [34] や、突発性雑音の自動分類 (Gravity Spy[35]) など多方面で成果を上げている。また雑音除去の分野においても、DeepClean [36] に代表される深層学習モデルが、従来の線形フィルタでは困難であった非線形な環境雑音を高精度に推定・除去する手法として確立され、観測感度の向上に貢献している。

5.6.2 干渉計の制御と自動化

光学系の制御に関しても様々な分野で機械学習の応用が進められている [37]。重力波検出器の鏡は、自由落下に近い状態を保つため多段振り子によって懸架されているが、地震雑音の抑制と制御ノイズの低減というトレードオフを解決するために、高度な制御手法が求められている。例えば非線形の領域でのロック取得については、シミュレーションでの理論検証や [38] テーブルトップでの検証 [39] などの研究が進められている。特に後者の検証において、学習データはシミュレータにより生成されたものを用いており、Sim-to-Real という手法が共振器の制御という分野でも有効なことを示している。

大型検出器への適用例としてはドイツにある 600m の腕を持つ GEO 600 において、機械学習を用いたアライメント制御の実証が行われた [40]。彼らは、ダークポートのカメラ画像からアライメント誤差を推定するニューラルセンシング (CNN-LSTM) と、連続値制御に優れた強化学習の SAC アルゴリズムを組み合わせることで、シグナルリサイクリングミラーのドリフト問題を抑制し、熟練したオペレータによる調整と同等以上の感度維持が可能であることを示した。これは、連続行動空間を持つ干渉計制御において SAC が有効であることを示している。

また、LIGO Livingston においても Deep Loop Shaping と呼ばれる手法を導入し、制御ノイズの劇的な低減に成功している [41]。これは強化学習における MPO アルゴリズムを用い、周波数領域での報酬設計を行うことで、最も感度が要求される 10-30 Hz 帯域における制御ノイズを従来比で 30 倍以上低減させ、観測可能領域の拡大に成功した。この研究は、強化学習が単なる自動化だけでなく、検出器の到達感度そのものを向上させうることを実証している。

第6章

実験

6.1 光学シミュレーション

本研究では光学シミュレーションとして FINESSE3 [42] を用いた。これは周波数領域での光学シミュレータであり定常状態の仮想的なレーザー干渉計を計算できる。

6.1.1 セットアップ

今回の研究で用いたセットアップを図 6.1 に示す。

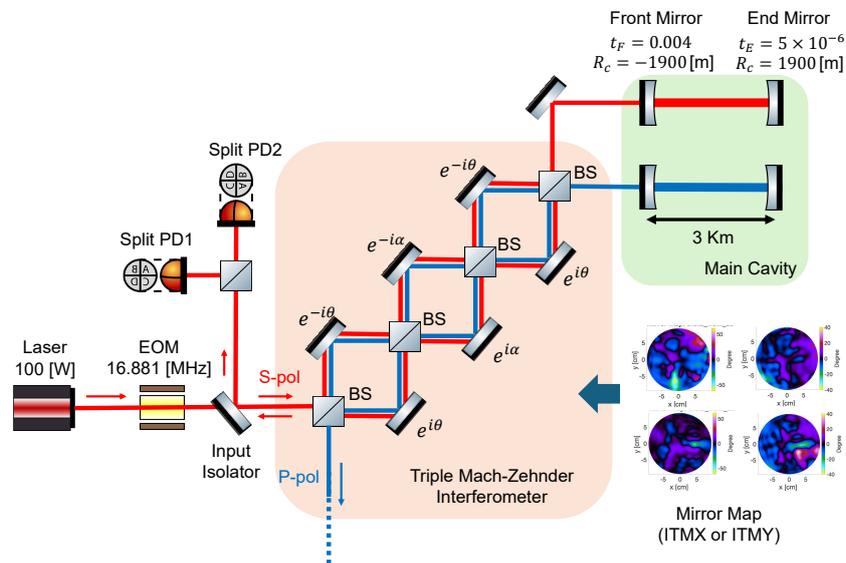


図 6.1: 光学シミュレーションのセットアップの模式図

赤い線を S 偏光、青い線を P 偏光と想定して計算している。各鏡の透過率や曲率半径、変調位相などは KAGRA の設計に合わせたものになっている。レーザーパワーは 100W とし、それぞれの PD に入る前にビームスプリッターで反射を行い、約 50mW まで強度を落としている。また、複屈折を再現するために Triple Mach-Zehnder 構成を用いた。各鏡に貼り付けるミラーマップを切り替えることで X arm と Y arm を再現できる。(詳細は付録 A.1 を参照。) 共振器の長さ方向については pseudolockcavity というコマンドを用いて常に共振状態を維持

するようにした。

また、分割 PD には現在 KAGRA で使用されている QPD の他に 16 分割 PD、64 分割 PD を用意して検証した。自由度が増えることで、複屈折の影響をより大きく抑制できると考えられる。実際、S13620-02 のように 64 素子 Si フォトダイオードアレイが市販で発売されている。このような多重分割 PD を KAGRA に導入する必要があるか検証することも本研究の目的の一つである。

6.1.2 Gouy 位相と復調位相の最適化

共振器の角度制御において放射圧によるトルクの固有モードとして、HARD モードと SOFT モードの 2 つの自由度が存在する。これらを分離して読み出すため、2 台の分割 PD (PD1, PD2) を用い、設置位置を調整することでビームの Gouy 位相を最適化した。具体的には、PD1 では HARD モードに対する感度が支配的となり SOFT モードの寄与が最小となるように、PD2 ではその逆 (SOFT が支配的で HARD の寄与が最小) となるように配置した。

鏡の回転自由度は yaw・pitch・roll の 3 つであるが、鏡形状が回転対称であり、かつ入射ビームが対称軸近傍にある場合には roll の結合は十分小さいため、一般に制御対象としない。本研究では KAGRA の取り扱いに倣い、yaw 方向で設定した Gouy 位相分離の条件を、光学系の対称性を仮定して pitch 方向にも適用した。また、同様に復調位相についても最適化を行った。最適化した Gouy 位相と復調位相を表 6.1、表 6.2 にまとめた。

表 6.1: Gouy 位相

arm	HARD	SOFT
X arm	46.728°	135.288°
Y arm	42.208°	135.752°

表 6.2: 復調位相

arm	HARD	SOFT
X arm	-1.834°	-1.834°
Y arm	-1.834°	-1.834°

6.1.3 ビームジッターによるオフセットとその揺らぎ

4.2.4 節で述べた通り、KAGRA には制御信号のオフセットとその揺らぎが存在する。ビームが鏡の中心にあったとしても図 6.2 に示す通り制御点に角度のオフセットが約 30 nrad 存在していることが分かる。

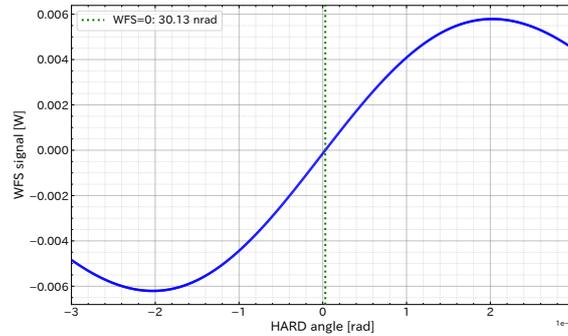
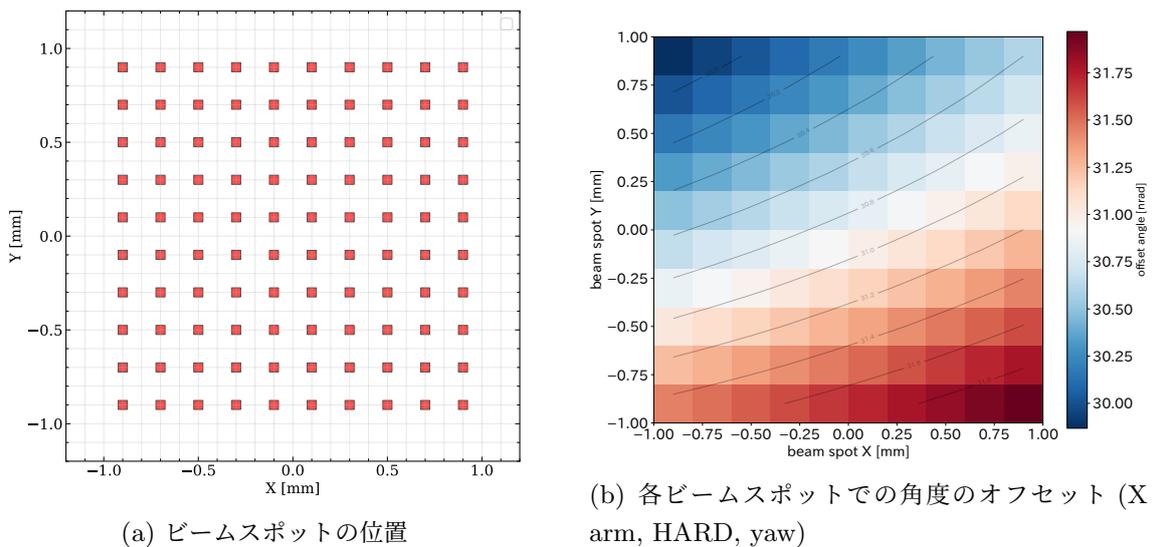


図 6.2: 角度変化に対する WFS 信号 (X arm, HARD, yaw)

ITM 上でのビームジッターは図 4.6 であった。これを見ると低周波になるにつれてビームジッターは大きくなっている。本研究では定常的 (0 Hz のとき) に約 ± 1 mm 程度のビームスポットのずれが存在していると仮定する。ビームスポットのずれは Triple Mach-Zehnder 干渉計上のミラーマップを全て同じ位置だけずらすことで再現しており、その座標は図 6.23a のように設定した。オフセットは図 6.23b や図 6.4 のようになる。この結果から鏡の中心付近で複屈折による定常的なオフセットが約 30 nrad 存在し、更にビームジッターにより 0.513 nrad 程度のオフセット揺らぎが存在していることが分かる。



(a) ビームスポットの位置

(b) 各ビームスポットでの角度のオフセット (X arm, HARD, yaw)

図 6.3: ビームスポットの配置と測定された角度オフセットの分布

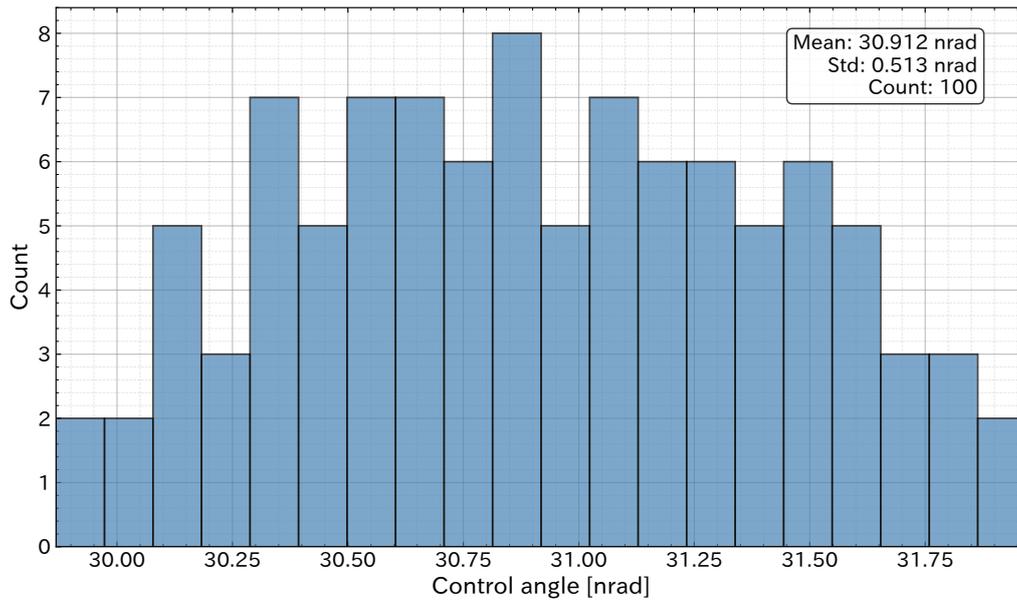


図 6.4: 各ビームスポットでの角度のオフセット (X arm, HARD, yaw)

各自由度の定常的なオフセット (平均) とその揺らぎ (標準偏差) を表 6.3 にまとめる。ここで定常的なオフセットに関しては事前にその値がわかっているならば、信号から定数を差し引くことで補正可能である。したがって、今回はビームジッタに起因する揺らぎの値を小さくすることが目的となる。

表 6.3: 角度制御オフセットの平均と標準偏差

DOF	平均	標準偏差
X arm		
HARD yaw	3.09×10^{-8} rad	5.13×10^{-10} rad
HARD pitch	3.08×10^{-8} rad	7.92×10^{-10} rad
SOFT yaw	1.73×10^{-7} rad	1.97×10^{-9} rad
SOFT pitch	-2.32×10^{-7} rad	2.00×10^{-9} rad
Y arm		
HARD yaw	-1.13×10^{-7} rad	3.10×10^{-9} rad
HARD pitch	-1.11×10^{-7} rad	2.00×10^{-9} rad
SOFT yaw	1.53×10^{-7} rad	7.35×10^{-9} rad
SOFT pitch	-6.15×10^{-8} rad	1.35×10^{-8} rad

6.1.4 ショット雑音の再現

角度制御は分割 PD によって行うが、ショット雑音により PD に入射する光子数は量子的な揺らぎが存在する。この揺らぎは角度制御信号の揺らぎとして伝播し、制御雑音となる。

ニューラルネットワークはアフィン変換と非線形変換を繰り返す合成関数であった。その過程でショット雑音による信号の揺らぎが増幅される恐れがある。この影響も考慮して学習するために、ショット雑音の再現を行った。

本シミュレーションにおいては、このショット雑音を白色ガウス雑音としてモデル化し、理想的な計算結果に加算することで再現を行う。ショット雑音の振幅スペクトル密度は、入射する光の DC パワーを P 、プランク定数を h 、光の周波数を ν とすると、以下の式で与えられる。

$$S_{\text{shot}}(f) = \sqrt{2h\nu P} \quad [\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (6.1)$$

ショット雑音の分散 σ_{shot}^2 は、測定系の周波数応答を $H(f)$ とすると、パワースペクトル密度を周波数で積分することで得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{shot}}^2 &= \int_0^{\infty} S_{\text{shot}}^2(f) |H(f)|^2 df \\ &= 2h\nu P \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \\ &\equiv 2h\nu P \Delta f \quad [\text{W}^2] \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで、 Δf はシミュレーションにおけるサンプリング周波数や、想定するローパスフィルタのカットオフ周波数などによって決定される測定帯域である。角度制御の制御帯域は数 Hz 程度であり、復調後にローパスフィルタを通した信号を用いると仮定して本論文では $\Delta f = 10 \text{ Hz}$ とした。

具体的な実装手順は以下の通りである。

1. 光学シミュレーション (FINESSE3) により、各時刻において PD に入射する DC 強度 $P(t)$ を算出する。(例：図 A.2)
2. その $P(t)$ を用いて、ショット雑音の標準偏差 $\sigma_{\text{shot}}(t)$ を計算する。
3. 平均 0、分散 σ_{shot}^2 のガウス分布に従う乱数 $n(t)$ を生成する。

$$n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{shot}}^2(t)) \quad (6.3)$$

4. これをシミュレータが算出した理想的な信号出力 $V_{\text{ideal}}(t)$ に加算し、最終的な観測信号 $V_{\text{obs}}(t)$ とする。

$$V_{\text{obs}}(t) = V_{\text{ideal}}(t) + n(t) \quad (6.4)$$

この手法により、ビーム位置の変動やミラー角度の変化によってフォトダイオードへの入射パワー P が変化した場合でも、それに応じた適切な強度のショット雑音を動的に再現することが可能となる。

6.2 教師あり学習

前節の光学シミュレーションを用いてデータセットを作成する。雑音としてビームジッターやショット雑音が存在しており、その中で分割 PD の信号から鏡の真の角度を予測する。

フィードバックループ内の機械学習の位置づけ

KAGRA などの検出器において鏡の角度制御は図 6.5 のようなフィードバックループによって行われる。 D [W/rad] は物理的な傾きを電気的な信号に変換する感度行列、 I [rad/W] は電気的な信号を傾きに変換する入力行列である。理想的に入力行列は $I = D^{-1}$ のように D の逆行列であり、感度行列 D が完全な線形応答であれば容易に求まる。しかし、実際の環境では複雑屈折による波面の汚れやビームジッターなどの影響により実行的な D は変化しうる。さらにショット雑音などのセンシング雑音加わるため完璧な I を計算することはできない。本研究で作成した分割 PD の信号から鏡の真の角度を予測する機械学習モデルは、この入力行列 I に相当する写像であると捉えることができる。

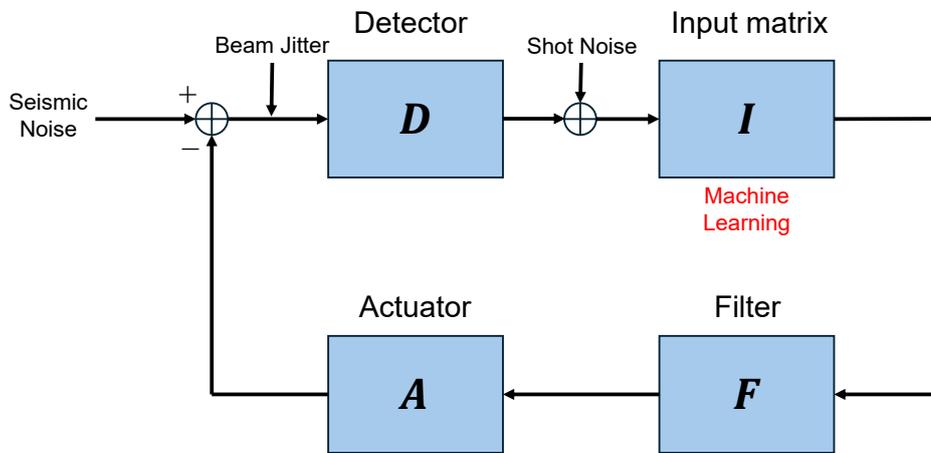


図 6.5: フィードバックループ

6.2.1 データセットの生成

ビームスポット

目標はビームスポットの揺らぎの影響を最小化して、角度を正確に予測することであった。そのため訓練用のデータと検証、テスト用のデータにおけるビームスポットの座標を設定する。本研究では定常的に ± 1 mm 程度の揺らぎが存在しているという仮定のもと座標を設定した。訓練用のデータでは $(-1 \text{ mm}, 1 \text{ mm})$ において 11×11 の 121 点、検証とテスト用のデータには $(-0.9 \text{ mm}, 0.9 \text{ mm})$ において 10×10 の 100 点を設定した (図 6.6)。これらの座標について鏡の角度をスイープしながらシミュレーションを実行し、データセットを作成する。

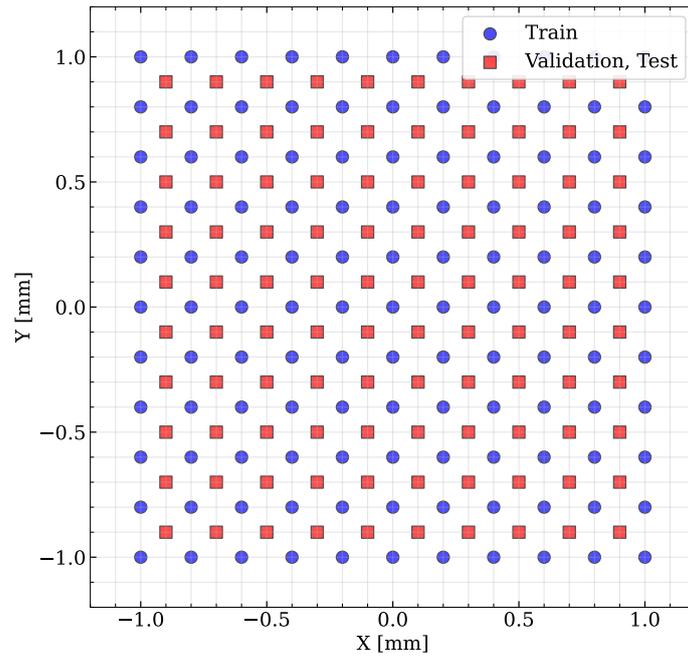


図 6.6: ビームスポットの座標

鏡の角度

これまで述べた通り、鏡の角度の自由度としては X arm と Y arm にそれぞれ輻射圧による固有モードである HARD、SOFT と鏡の回転方向である yaw、pitch という自由度が存在する。したがって自由度は $2^3 = 8$ 個存在することになる。

今回学習データを生成する際にはそれぞれの自由度に対してビームスポットと鏡の角度を同時に変化させる。今回は主に線形領域での制御を対象とした。したがって図 6.2 より、 ± 300 nrad 間の範囲で制御することを目的として設定した。

角度は各自由度で各ビームスポットに対して訓練用、検証用のデータは以下の設定でスイープする。

- ± 300 nrad 間で等間隔に 31 点
- ± 15 nrad 間で等間隔に 31 点
- ± 0.75 nrad 間で等間隔に 101 点

精度点での精度を高めるため 0 rad 付近のデータを多めにした。また、テスト用のデータでは制御点の揺らぎを測定するために各ビームスポットに対して 0 rad のデータのみを生成した。訓練用は $121 \times (31 + 31 + 101) = 19723$ 個、検証用は $100 \times (31 + 31 + 101) = 16300$ 個、テスト用のデータは 100 個のデータ存在することになる。

ショット雑音の有無

精度は学習後のモデルに対してテストデータ（鏡の角度は 0 rad、ビームジッターあり）での予測値の分布を制御時の角度揺らぎと考え、その平均二乗誤差 (Root Mean Square, RMS) を

指標とする。

ここで、ショット雑音ありのデータとなしのデータでの比較を行う。ショット雑音の計算は6.1.4節のとおりである。それぞれの結果を図6.7と図6.8に示す。RMSを比較するとショット雑音ありのほうが精度が良くなっているところもある。何度か計算を行ったところショット雑音の有無より学習ごとの振れ幅のほうが大きく、ショット雑音の有無による有意な差はあまり見られなかった。

一般にニューラルネットワークのような非線形モデルを用いる場合、入力に含まれる微小な雑音が出力に対して複雑な影響を与える可能性がある。特にモデルが教師データに対して過学習などを行っている場合は、雑音により大きく予測値が外れるということが起こり得る。しかし今回はそのような過学習は起きておらず、モデルは微小な雑音に対してはロバストであることが確認された。なお今回は6.1.4節において、 $\Delta f = 10 \text{ Hz}$ としたが、更に範囲を広げた場合については今後検証が必要となるだろう。

以降の結果は、より現実に即した状況にするためショット雑音ありのデータで学習と評価を行ったものとする。

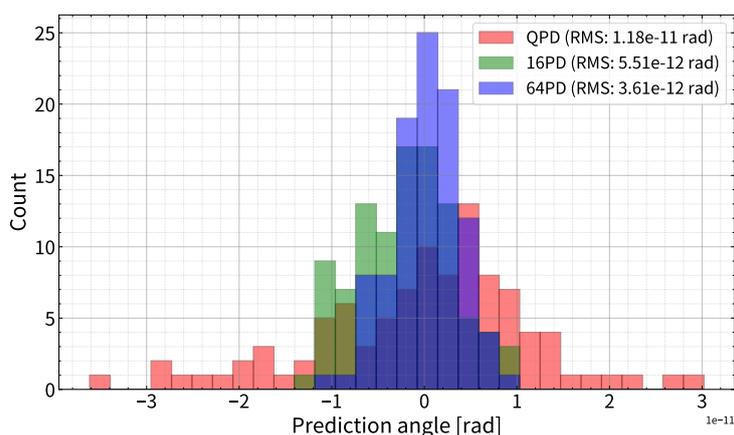


図 6.7: 予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw, ショット雑音あり)

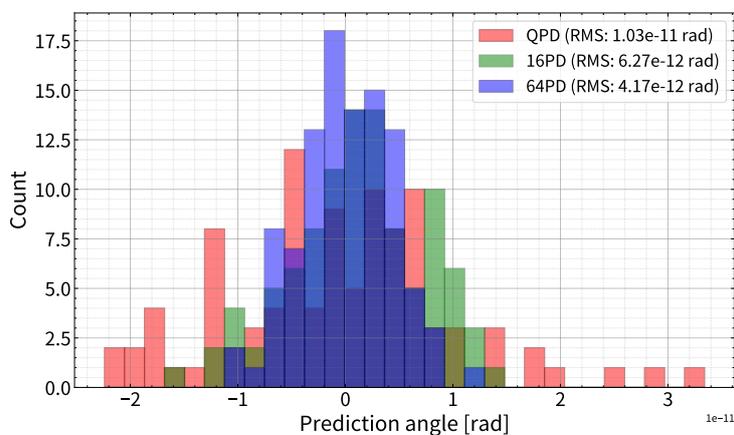


図 6.8: 予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw, ショット雑音なし)

6.2.2 教師あり学習による学習

学習時の環境

今回の学習に使用したニューラルネットワークの構成は図 6.9 の通りである。インプットは復調後の分割 PD の各出力であり、アウトプットは真の鏡の角度である。その他ハイパーパラメータは表 6.4 にまとめた。

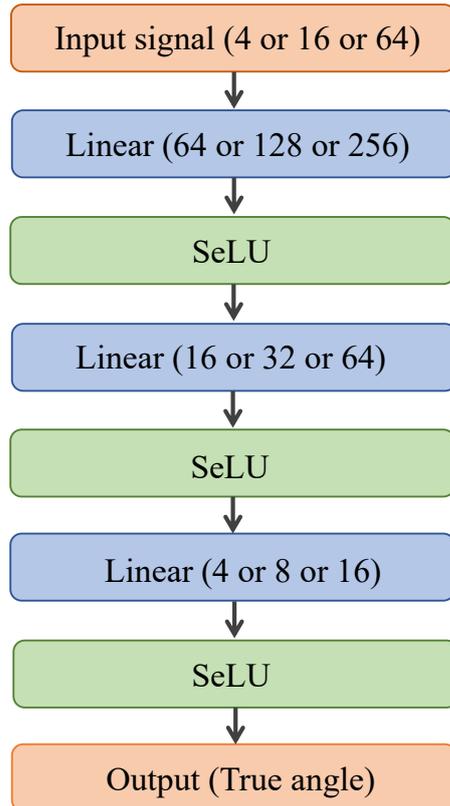


表 6.4: ハイパーパラメータ設定

パラメータ	設定値
Max Epochs	1550
Batch Size	512
Learning Rate	1×10^{-3}
Loss Function	Huber Loss ($\delta = 1.0$)
Optimizer	Adam
Scheduler	CosineAnnealingWarmRestarts ($T_0 = 50, T_{\text{mult}} = 2, \eta_{\text{min}} = 10^{-8}$)

図 6.9: ニューラルネットワークの構成

学習時

図 6.10 は学習曲線でありエポックが進む事に誤差が小さくなっているのが分かる。ある間隔で誤差が大きくなり、だんだん小さくなるというのを繰り返しているような形状をしているのは CosineAnnealingWarmRestarts というスケジューラーの影響であり、最終的な誤差が最も小さくなるようにパラメータを設定している。訓練時より検証時のデータのほうが誤差が小さい傾向があるのは、図 6.6 において、ビームスポットの範囲が検証用のデータのほうが狭く、訓練用と比較すると予測しやすいデータセットになっているからだと考えられる。

また、検証用のデータ予測傾向を図 6.11、図 6.12 に示す。図 6.11 を見るといずれも ± 300 nrad の範囲で角度を正確に予測できており、制御に使えるモデルとなっていることが分かる。また、この図を ± 0.05 nrad まで拡大したのが図 6.12 である。同じ角度で縦に並んでい

る点があるが、これはビームスポットの座標によるものである。この分散が小さいほどビームジッターの影響を抑えることができていると考えられる。

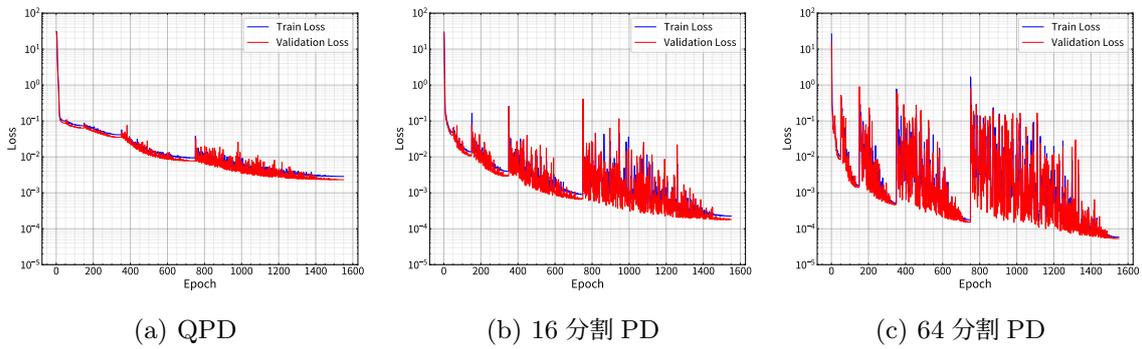


図 6.10: 学習曲線 (X arm, HARD, yaw)

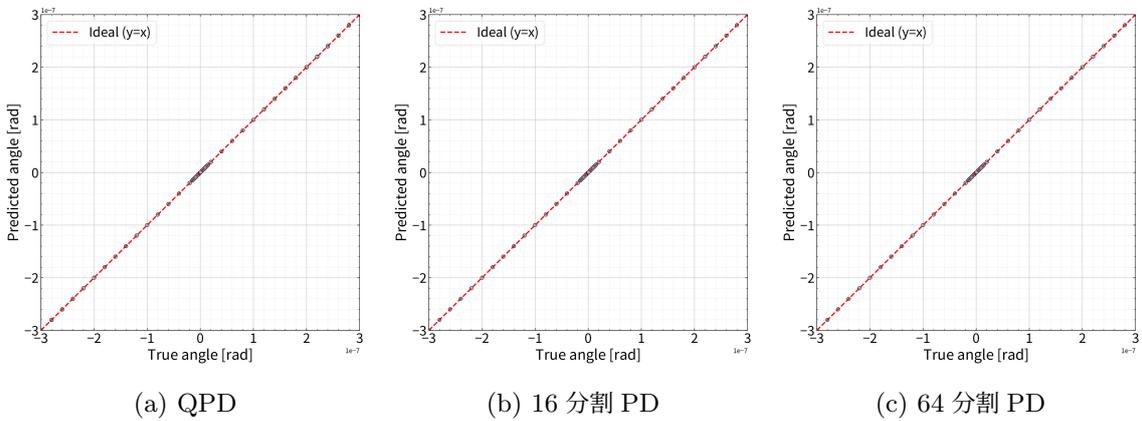


図 6.11: 検証データの予測傾向 (± 300 nrad, X arm, HARD, yaw)

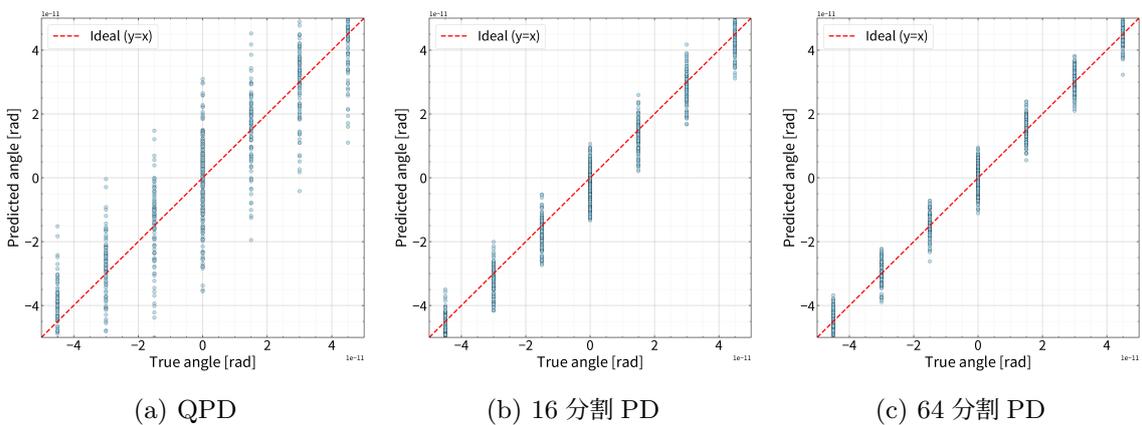


図 6.12: 検証データの予測傾向 (± 0.05 nrad, X arm, HARD, yaw)

結果

各自由度に対して独立した教師データを生成して学習モデルを構築し、テストデータに対する予測値の分布を制御角度の揺らぎと定義して評価を行った。教師あり学習による評価結果を表 6.5 に示す。本結果より、いずれの自由度においても数倍から数千倍の精度向上が達成されていることが確認できる。また、PD の分割数が増加するにつれて改善率が向上しており、鏡の非一様な複屈折分布の条件下では解像度の上昇が角度制御の精度の向上に寄与するということが分かる。

表 6.5: 教師あり学習による角度制御揺らぎ

DOF	Conventional	Supervised Learning		
		QPD	16PD	64PD
X arm				
HARD yaw	5.13×10^{-10} rad	1.18×10^{-11} rad	5.51×10^{-12} rad	3.61×10^{-12} rad
HARD pitch	7.92×10^{-10} rad	1.07×10^{-11} rad	7.02×10^{-12} rad	5.00×10^{-12} rad
SOFT yaw	1.97×10^{-9} rad	1.78×10^{-10} rad	1.32×10^{-11} rad	7.43×10^{-12} rad
SOFT pitch	2.00×10^{-9} rad	1.63×10^{-9} rad	8.12×10^{-12} rad	6.86×10^{-12} rad
Y arm				
HARD yaw	3.10×10^{-9} rad	9.07×10^{-12} rad	7.49×10^{-12} rad	6.00×10^{-12} rad
HARD pitch	2.00×10^{-9} rad	2.14×10^{-11} rad	7.75×10^{-12} rad	6.05×10^{-12} rad
SOFT yaw	7.35×10^{-9} rad	1.57×10^{-11} rad	8.24×10^{-12} rad	8.11×10^{-12} rad
SOFT pitch	1.35×10^{-8} rad	4.34×10^{-11} rad	8.42×10^{-12} rad	5.99×10^{-12} rad

6.2.3 異なる角度範囲での学習を行った結果

これまでの結果は線形領域での制御を目的とした ± 300 nrad 間でのデータで学習した結果であった。ここでは、非線形領域まで制御範囲を拡大したり、逆に縮小した結果を示す。

学習範囲を ± 3000 nrad まで拡大

図 6.13、図 6.14 は ± 3000 nrad 間でのデータで学習した結果である。 ± 300 nrad のもの比べて精度は低下しているが、非線形領域でも制御可能であることを確認できる。

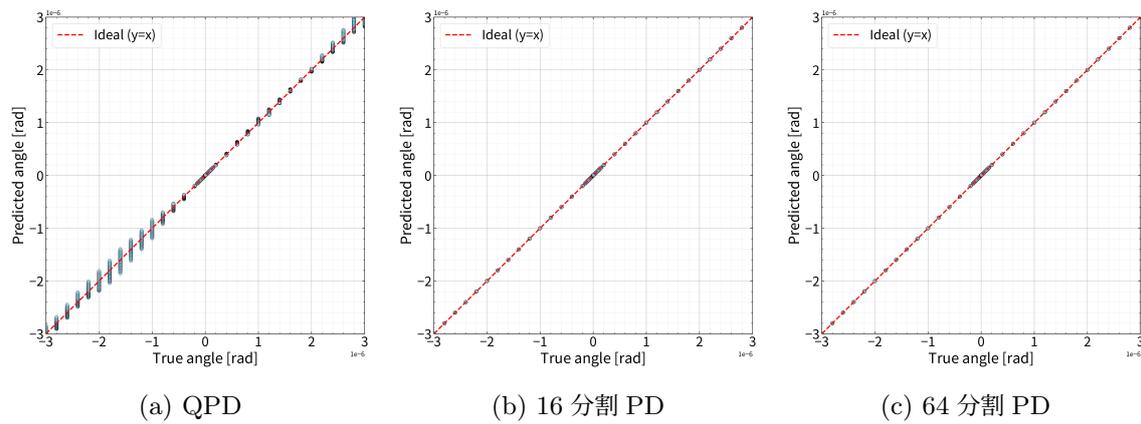


図 6.13: 範囲を拡大したモデルでの検証データの予測傾向 (± 3000 nrad, X arm, HARD, yaw)

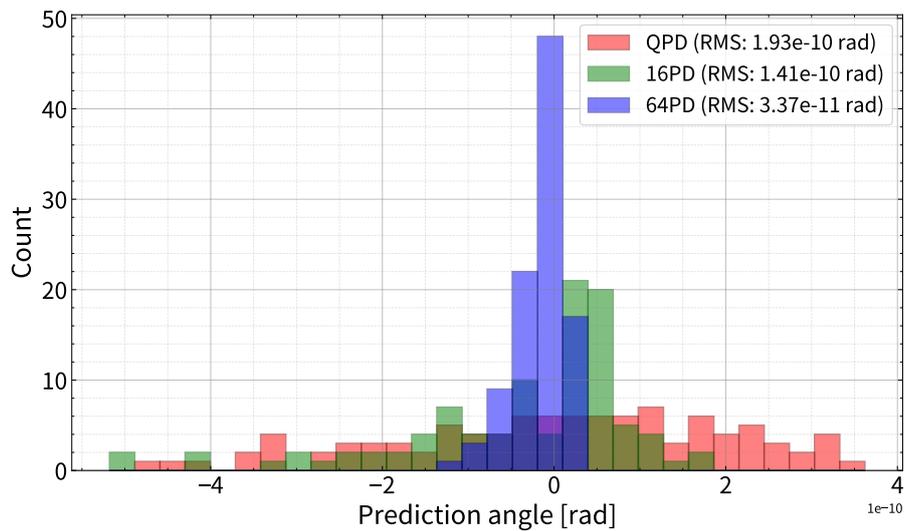


図 6.14: 範囲を拡大したモデルでの予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw)

学習範囲を ± 0.75 nrad まで縮小

図 6.15、図 6.16 は ± 0.75 nrad 間のデータで学習した結果である。図 6.12 と図 6.15 を比較すると、学習範囲を縮小したモデルのほうが縦方向の揺らぎが小さくなっていることが分かる。このように小さい角度に特化させたモデルを構築することで更に予測精度の向上を見込める。

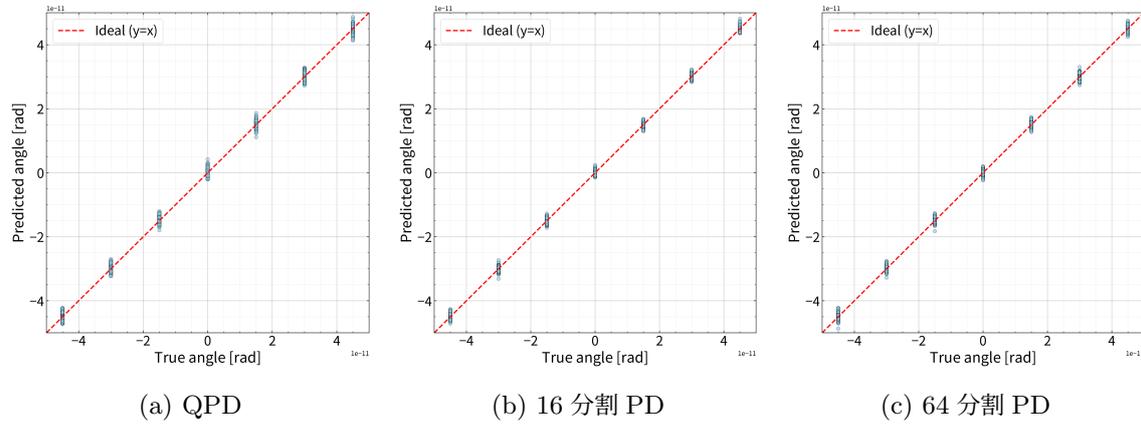


図 6.15: 範囲を縮小したモデルでの検証データの予測傾向 (± 0.05 nrad, X arm, HARD, yaw)

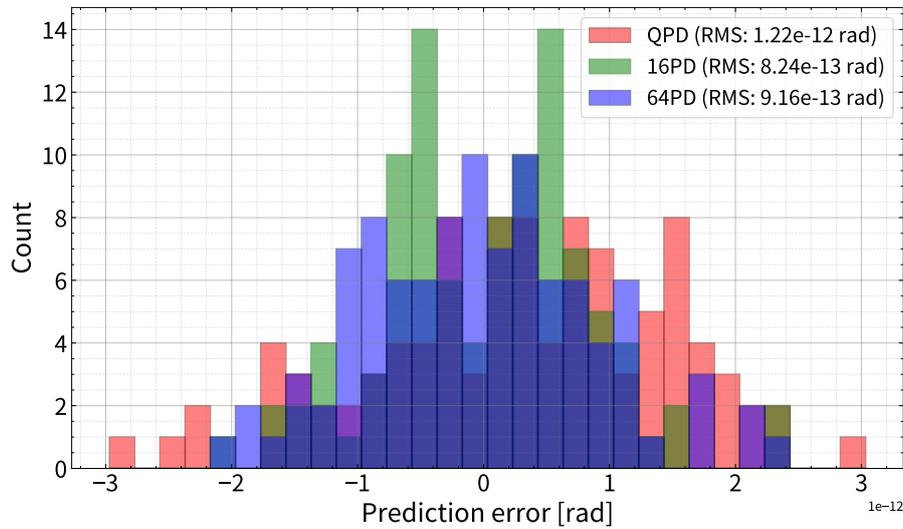


図 6.16: 範囲を縮小したモデルでの予測角度の分布 (X arm, HARD, yaw)

これらの結果は機械学習を用いることで非線形領域まで制御範囲を広げたり、現在角度によってモデルを切り替えることで制御精度を向上させたりすることができる可能性を示している。

6.3 強化学習

強化学習の学習環境には FINESSE3 を用いる。FINESSE3 は定常状態の光学系を計算する周波数領域のシミュレータである。強化学習は未知の環境下で試行錯誤を繰り返し、環境からフィードバックを得ながら学習を進める手法であり、学習のためには時系列を再現可能な環境が必要となる。

そこで本研究では時間軸を任意のサンプリング間隔で離散化し、各時刻 ($t = 0, 1, \dots, N$) において定常状態の計算を逐次実行することで、FINESSE3 を準静的過程に従った時間領域シミュレータであるとして運用している。また、学習アルゴリズムには SAC を使用するが、その実装には PyTorch ベースの強化学習ライブラリである Stable Baselines3 を用いた。

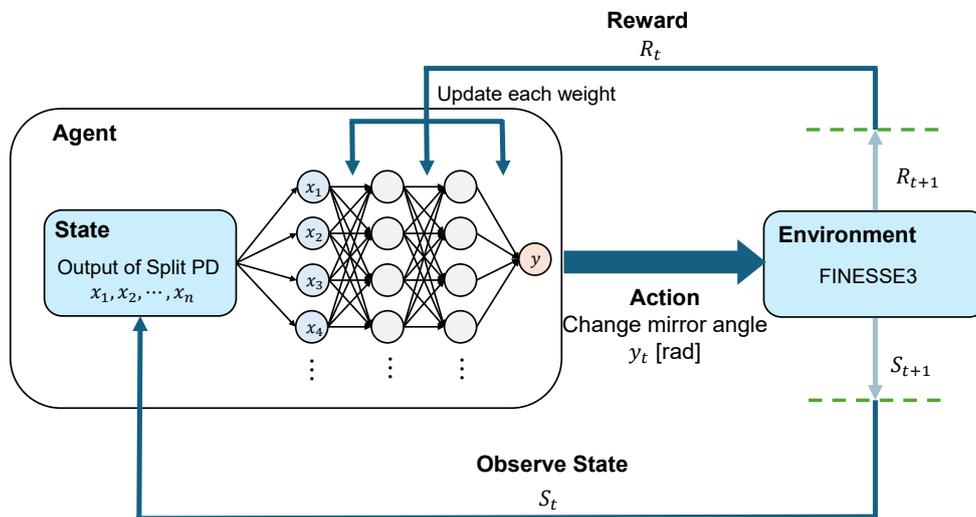


図 6.17: 強化学習の環境のイメージ

6.3.1 状態空間と行動空間の定義

本研究における強化学習エージェントの状態空間 \mathcal{S} および行動空間 \mathcal{A} を以下のように定義する。

状態空間

時刻 t における状態ベクトル s_t は、分割 PD (QPD、16 分割 PD、64 分割 PD) からの信号や過去の履歴、補助の情報によって構成される。

$$s_t = [q_t, q_{t-1}, \theta_{\text{target}}, a_{t-1}, \tau_t] \quad (6.5)$$

ここで、各要素の定義は以下の通りである。

- q_t : 時刻 t における分割 PD の信号。 $q_t = (q_t^0, q_t^1, q_t^2, q_t^3)$ 。

- \mathbf{q}_{t-1} : 時刻 $t-1$ における分割 PD の信号。 $\mathbf{q}_t = (q_{t-1}^0, q_{t-1}^1, q_{t-1}^2, q_{t-1}^3)$ 。 速度情報。
- θ_{target} : 目標角度。
- a_{t-1} : 1 ステップ前の行動値。 制御の滑らかさを学習するために用いる。
- $\tau_t \in [0, 1]$: 現在のエピソードにおける経過ステップ。 $\tau_t = \frac{t}{t_{\text{max}}}$ 。

行動空間

行動空間 \mathcal{A} は連続値であり、エージェントは各時刻において正規化された行動値 $a_t \in [-1, 1]$ を出力する。鏡の角度変化量 $y_t = \Delta\theta_t$ は、スケーリング係数 k を用いて次式で物理量に変換される。

$$\Delta\theta_t = k \cdot a_t \quad (6.6)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta_t \quad (6.7)$$

本実験において、スケーリング係数は $k = 10$ [nrad] に設定した。エージェントは現在の角度に対する相対変位を制御する。

6.3.2 報酬関数

強化学習では狙い通りの制御を行うために適切な報酬関数を設定することが重要となる。広範な初期誤差から微小な角度制御までエージェントを連続的に誘導するために、以下のような関数を用意した。時間ステップ t における報酬 r_t は、対数報酬 R_{\log} 、LQR コスト項 C_{LQR} 、および境界ペナルティ P_{boundary} の和として、以下の式 (6.8) で定義する。

$$r_t(e_t, a_t) = R_{\log}(e_t) - C_{\text{LQR}}(e_t, \Delta a_t) - P_{\text{boundary}}(\theta_t) \quad (6.8)$$

ここで、 $e_t = \theta_t - \theta_{\text{target}}$ は現在の角度誤差、 $a_t \in [-1, 1]$ は正規化されたアクション、 $\Delta a_t = a_t - a_{t-1}$ はアクションの変化量を表す。

対数報酬

誤差がゼロに近づくと対数的に増大する報酬項であり、特定の収束点を持たない勾配を生成する。

$$R_{\log}(e_t) = \alpha \cdot \log_{10} \left(\frac{\theta_{\text{ref}}}{|e_t|} \right) \quad (6.9)$$

ここで、 θ_{ref} は報酬が発生する基準の誤差範囲、 α は桁ごとの報酬スケーリング係数である。

LQR コストおよび境界ペナルティ

大域的な誘導と滑らかな角度制御を行うために、 e_t^2 と Δa_t^2 の線形結合となる LQR コストを導入する。また、制御範囲から大きく外れたときに罰則を与えるための境界ペナルティ項を

導入する。

$$C_{\text{LQR}}(e_t, \Delta a_t) = w_e \left(\frac{e_t}{s_{\text{norm}}} \right)^2 + w_a (\Delta a_t)^2 \quad (6.10)$$

$$P_{\text{boundary}}(\theta_t) = \begin{cases} w_p \left(\frac{|\theta_t| - \theta_{\text{limit}}}{s_{\text{norm}}} \right)^2 & (|\theta_t| > \theta_{\text{limit}}) \\ 0 & (|\theta_t| < \theta_{\text{limit}}) \end{cases} \quad (6.11)$$

ここで、 s_{norm} は正規化のための基準定数、 θ_{limit} は許容される物理的な角度制限である。

これらを可視化すると図 6.18 のようになる。大域的には境界ペナルティによる制限と LQR コストにより中心に誘導し、中心付近では対数報酬によって、高精度に制御できているほど報酬が増大するような設計になっている。

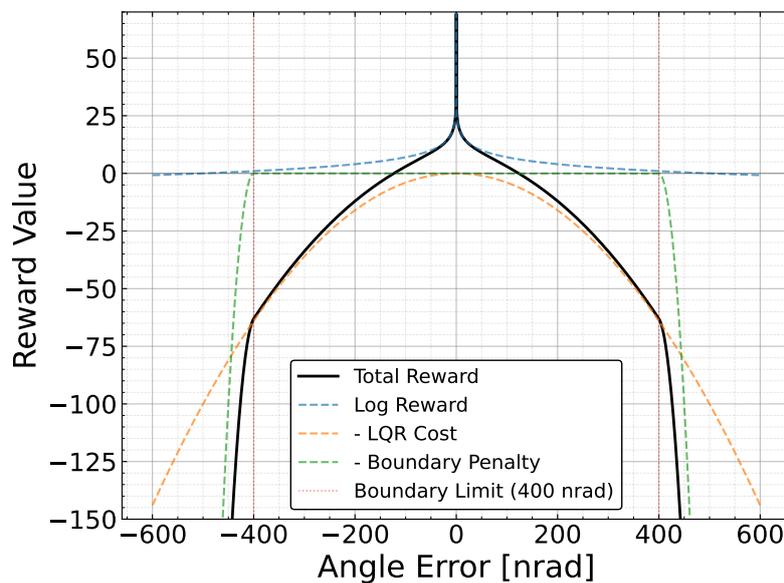


図 6.18: 報酬関数の可視化

表 6.6: 報酬関数のパラメータ

パラメータ	Log Reward		LQR Cost			Boundary Penalty	
	θ_{ref}	α	w_e	w_a	s_{norm}	θ_{limit}	w_p
設定値	500 nrad	10	1.0	0.1	50.0 nrad	400.0 nrad	100.0

6.3.3 ビームジッター

ビームジッターの初期値 ($t = 0$) には教師あり学習の時と同様の分布を用いた (図 6.6)。更にそこから時間によって変化するビームジッターを再現するために、測定された振幅スペクトル密度 (図 4.6) を逆フーリエ変換を用いて時系列信号 $x(t)$ に変換した。その生成手順は以下の通りである。

実測ビームジッタースペクトルに基づく時系列ビームジッターの生成手法

まず、離散化された周波数 f_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) における実測 ASD データを $B(f_k)$ [$\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$] とする。周波数分解能を Δf としたとき、各周波数成分における正弦波の振幅係数 A_k は次式で算出される。

$$A_k = B(f_k)\sqrt{\Delta f} \quad (6.12)$$

ここで、実際のジッターはランダムな変動を持つ確率過程であるため、各周波数成分に対して独立した位相を与える。そこで、区間 $[0, 2\pi)$ の一様分布に従うランダムな初期位相 ϕ_k を各成分に付与する。

$$\phi_k \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \quad (6.13)$$

最終的な時刻 t におけるビーム位置 $x(t)$ は、これら全ての周波数成分を持つ正弦波の総和として、次式のように定義される。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \quad (6.14)$$

これに従って時系列ビームジッターを再現した結果は図 6.19 となる。今回はサンプリング周波数を 10 Hz とし、その値に沿ってビームスポットを動かした。

また、エピソードごとに与える初期位相を変化させることで、毎エピソードごとに異なるビームジッターを再現でき、ロバスト性を高めることができる。

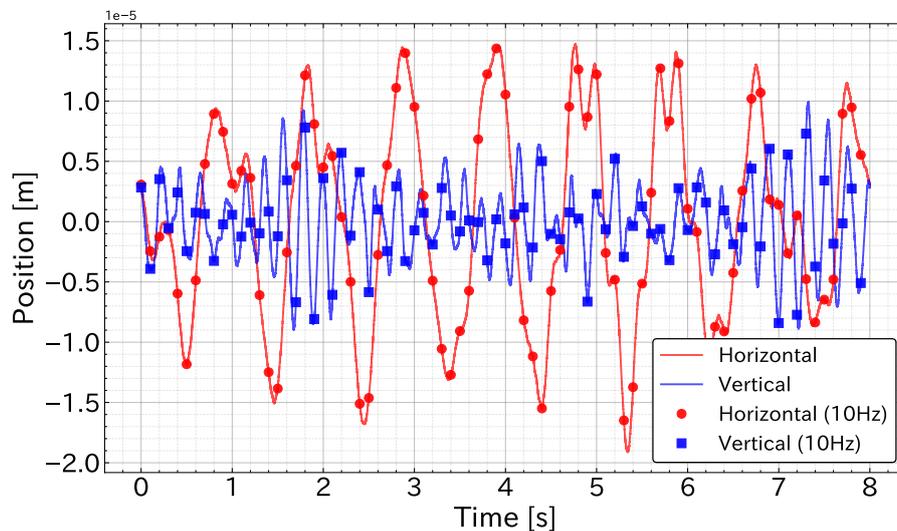


図 6.19: 再現した ITM 上のビームジッター (時系列)

6.3.4 学習の実行

学習時に初期角度は $\pm 300 \text{ nrad}$ の間でランダムに与えられる。また、1 エピソードは 50 ステップとした。1 エピソードが終了するとまた新たなエピソードが始まり、これを指定した総ステップ数まで繰り返す。

学習の推移

学習時の報酬の推移と最終的な角度誤差を図 6.20 に示す。400 エピソード付近までは報酬が上昇しており、その後はほぼ横ばいになっている。

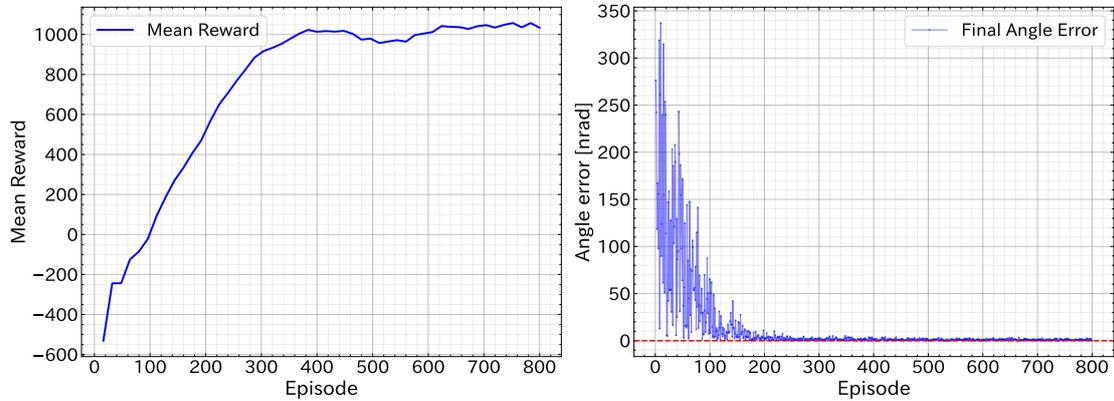
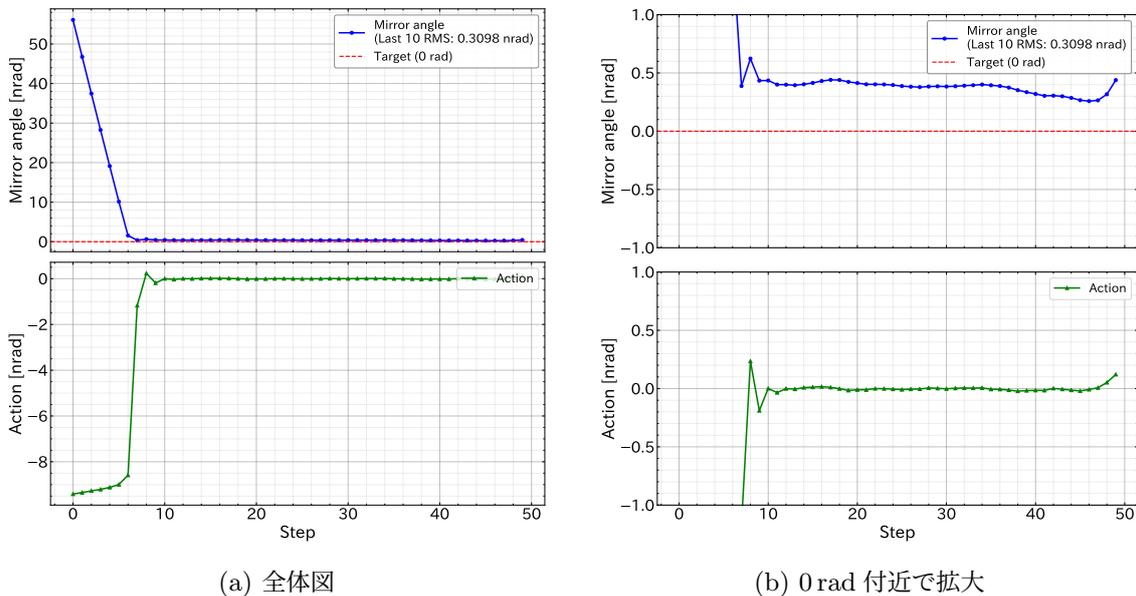


図 6.20: 学習の推移

800 エピソード (=40000 ステップ) 学習後のモデルに対して初期角度 65.5 nrad から制御を行う時の一例を図 6.21 示す。0rad 付近で nrad 単位の制御に成功していることが分かる。



(a) 全体図

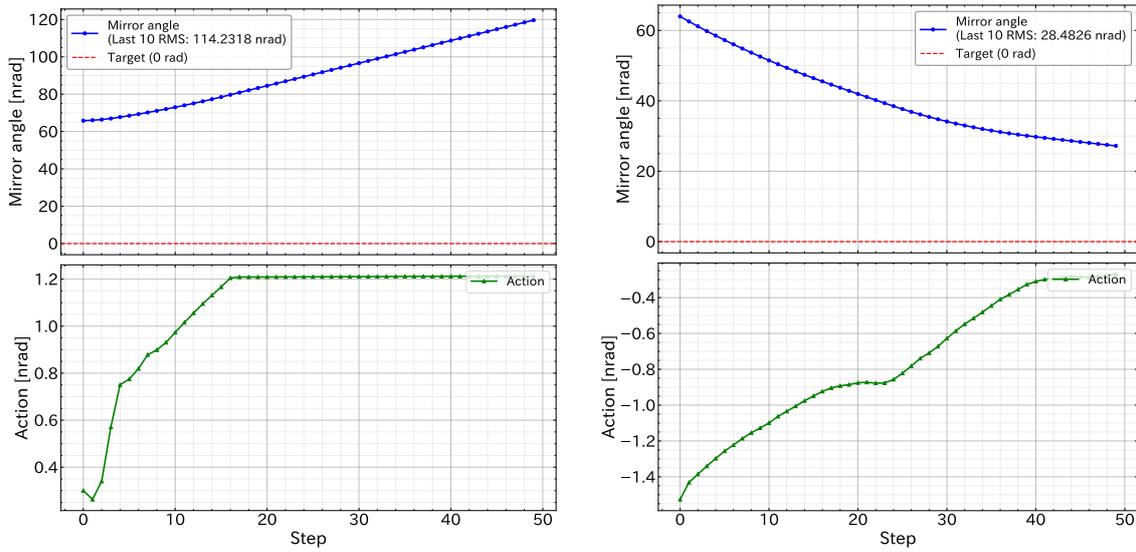
(b) 0 rad 付近で拡大

図 6.21: 鏡の角度の推移の一例 (800 エピソード学習済み)

学習の過程を示すために学習途中のモデルで初期角度 65.5 nrad から制御を行う時の例を図 6.22 に示す。図 6.22a は 1 エピソードだけ学習したモデルであり、0 rad から遠ざかる方向へ鏡を動かしている。図 6.22b は 50 エピソード学習したモデルであり、角度は小さくなる方向に向かっているがアクションの値が小さく、角度誤差は大きいままとなっている。

学習が進む事で、0rad 付近までは大きく変化させ、その後微小角度内で制御することで累

計報酬が最大化されることを学習する。最終的には図 6.21 のような挙動になることが分かる。



(a) 1 エピソードだけ学習

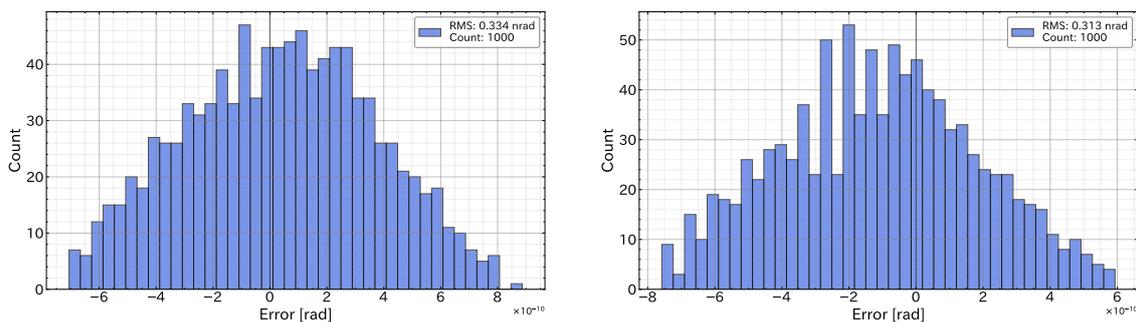
(b) 50 エピソードだけ学習

図 6.22: 鏡の角度の推移の一例 (学習途中のモデル)

ショット雑音の有無

教師あり学習と同様に強化学習でもショット雑音の有無による比較を行う。各離散時間で各セグメントの信号に対して DC 強度に応じたショット雑音を足したものである。こちらでもショット雑音の有無による有意な差は余り見られなかった。

以降の結果は、より現実に即した状況にするためショット雑音ありのデータで学習と評価を行ったものとする。



(a) ショット雑音有り

(b) ショット雑音なし

図 6.23: ショット雑音の有無による制御点の比較 (QPD, X arm, HARD, yaw)

6.3.5 結果

学習後のモデルに対して初期角度を 0rad とし、最後の 10 ステップの RMS を角度制御の揺らぎとして考えることとする。結果は表 6.7 のようになる。いずれについても従来手法に比べて数倍から数百倍程度改善できている事がわかる。また、何れの自由度においても分割数を増やすほど改善倍率が向上していることが分かる。

表 6.7: 強化学習による角度制御揺らぎ

DOF	Conventional	Reinforcement Learning		
		QPD	16PD	64PD
X arm				
HARD yaw	5.13×10^{-10} rad	3.34×10^{-10} rad	5.88×10^{-11} rad	2.23×10^{-11} rad
HARD pitch	7.92×10^{-10} rad	2.45×10^{-10} rad	1.08×10^{-10} rad	4.43×10^{-11} rad
SOFT yaw	1.97×10^{-9} rad	4.62×10^{-10} rad	3.41×10^{-10} rad	3.25×10^{-10} rad
SOFT pitch	2.00×10^{-9} rad	1.06×10^{-9} rad	3.88×10^{-10} rad	1.85×10^{-10} rad
Y arm				
HARD yaw	3.10×10^{-9} rad	2.78×10^{-10} rad	6.36×10^{-11} rad	2.93×10^{-11} rad
HARD pitch	2.00×10^{-9} rad	1.87×10^{-9} rad	1.12×10^{-10} rad	9.44×10^{-11} rad
SOFT yaw	7.35×10^{-9} rad	3.43×10^{-10} rad	3.32×10^{-10} rad	2.38×10^{-10} rad
SOFT pitch	1.35×10^{-8} rad	8.54×10^{-10} rad	1.87×10^{-10} rad	4.31×10^{-11} rad

6.4 結果のまとめ

6.4.1 重み付け手法（先行研究）

先行研究によると、重み付け手法による結果は表 6.8 のようにまとめられる。表中の従来手法の値が、本研究で用いた従来手法の値と一致していないのは、ビームスポット位置の違い等に起因している。

表 6.8: 重み付け手法による角度制御揺らぎ [18]

DOF	Conventional	Weighted	
		QPD	16PD
X arm			
HARD yaw	4.8×10^{-10} rad	5.0×10^{-11} rad	3.5×10^{-13} rad
HARD pitch	2.9×10^{-10} rad	7.7×10^{-11} rad	5.9×10^{-13} rad
SOFT yaw	2.4×10^{-9} rad	1.8×10^{-9} rad	8.2×10^{-12} rad
SOFT pitch	2.0×10^{-9} rad	1.3×10^{-9} rad	1.6×10^{-11} rad
Y arm			
HARD yaw	3.0×10^{-9} rad	2.7×10^{-10} rad	5.1×10^{-12} rad
HARD pitch	4.0×10^{-9} rad	3.9×10^{-9} rad	3.1×10^{-11} rad
SOFT yaw	8.2×10^{-9} rad	4.0×10^{-9} rad	1.1×10^{-10} rad
SOFT pitch	1.5×10^{-8} rad	3.2×10^{-9} rad	1.3×10^{-10} rad

6.4.2 各手法の改善倍率のまとめ

表 6.5、表 6.7、表 6.8 はそれぞれの手法での制御点の揺らぎである。これらの結果を

$$\text{改善倍率} = \frac{\text{従来手法の揺らぎ}}{\text{各手法の揺らぎ}} \quad (6.15)$$

としてまとめると表 6.9、図 6.24、図 6.25 のようになる。

3つの手法を比較して、QPD を使用する場合は多くの自由度で教師あり学習の精度が最も高い傾向にある。また、QPD の一部自由度 (X arm, SOFT, yaw) や 16 分割 PD のいくつかの自由度では、重み付けの改善倍率が教師あり学習を上回っている。これは、教師あり学習の学習データや構成等が不十分であり、サンプル数を増やしたりハイパーパラメータの最適化を行うことで改善する可能性がある。

全体の傾向として、機械学習手法において X arm に比べて Y arm のほうが改善倍率が大きい。これは、ITMY 上の複屈折分布のほうが非線形性が大きく現れ、機械学習の強みが活かされたためではないかと考えられる。

今回のような複屈折分布が明確に存在し、その分布に対応した最適化を行うような条件下では、未知の状態から探索を行う強化学習よりも正解データが与えられる教師あり学習のほうが精度が高い傾向があることが分かる。

表 6.9: 各手法による角度制御揺らぎの改善倍率

DOF	Weighted		Supervised Learning			Reinforcement Learning		
	QPD	16PD	QPD	16PD	64PD	QPD	16PD	64PD
X arm								
HARD yaw	9.60	1371	43.5	93.1	142	1.54	8.72	23.0
HARD pitch	3.77	492	74.0	112	158	3.23	7.33	17.9
SOFT yaw	1.33	293	11.1	149	265	4.26	5.78	6.06
SOFT pitch	1.54	125	1.23	246	291	1.89	5.15	10.8
Y arm								
HARD yaw	11.1	588	341	413	516	11.2	48.7	106
HARD pitch	1.03	129	93.5	258	330	1.07	17.9	21.2
SOFT yaw	2.05	74.5	468	892	906	21.4	22.1	30.9
SOFT pitch	4.69	115	311	1603	2253	15.8	72.2	313

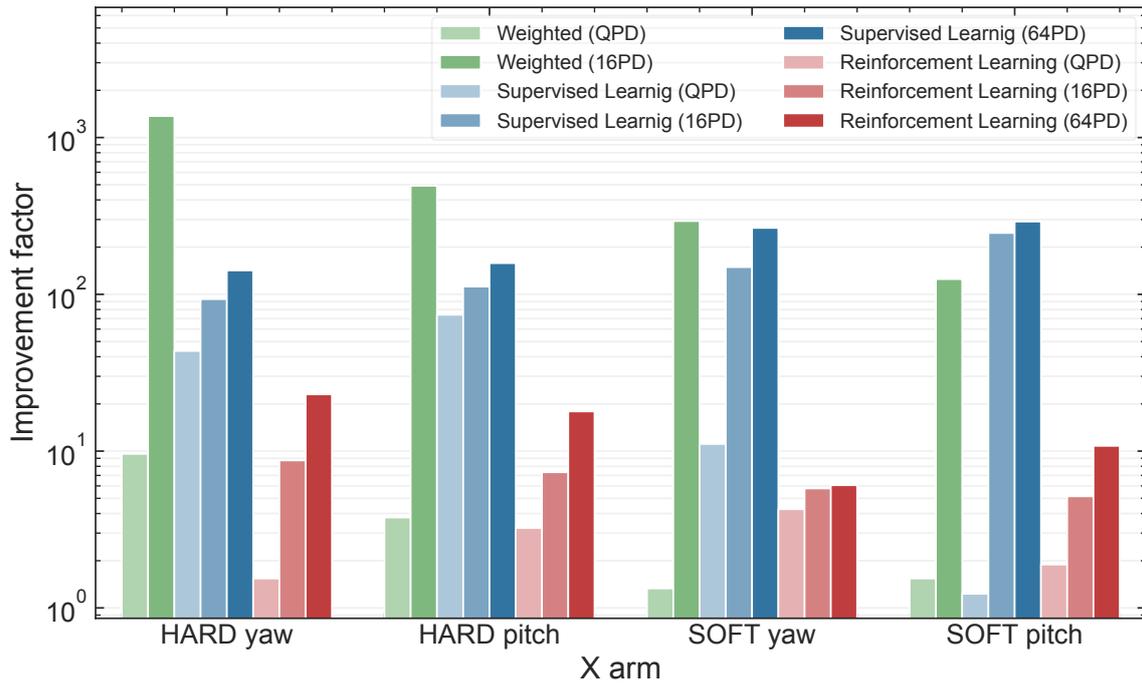


図 6.24: 各手法による角度制御揺らぎの改善倍率 (X arm)

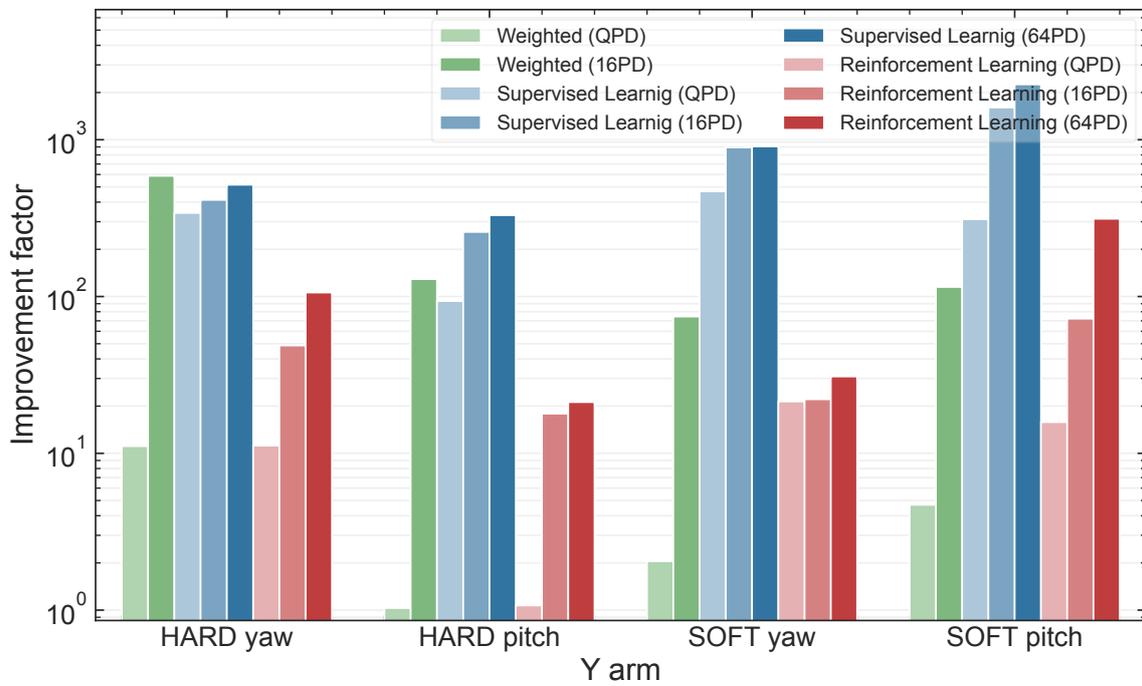


図 6.25: 各手法による角度制御揺らぎの改善倍率 (Y arm)

第7章

結論

本研究では重力波検出器 KAGRA における新たな角度制御手法を開発した。サファイア鏡に由来する非一様な複屈折影響下での角度制御の揺らぎを低減させることを目的とした。先行研究では分割 PD での各信号に線形の重み付けをすることで、揺らぎの低減が実現可能であることが示された。

本研究ではこの線形の重み付けを拡張したニューラルネットワークを用いることで、非線形性を表現し、更に精度が向上できるのではないかと考えた。実際に FINESSE という光学シミュレーションを用いて KAGRA の複屈折を再現した共振器モデルを構築した。この環境において教師あり学習による角度の予測と強化学習による角度の制御という2つの機械学習手法での最適化を試みた。結果として、どちらの手法でも揺らぎの低減が実現可能であることを確認にした。QPD を用いる場合多くの自由度で教師あり学習の制御が最も高精度で、重み付け手法と比較しても数倍から数十倍程度改善できることが確認された。また、6.2.3 節において非線形領域での制御や場面によるモデルの切り替えによって機械学習手法の強みを更に活かせる可能性を示した。

なお、本研究を実機に適用する事を考えた場合、現時点ではシミュレーションで学習を行い、そのモデルを実機に適用するという Sim-to-Real という手法を想定している。実際にはシミュレーションと実機の間にはギャップがあるので、そのギャップにも対応できるようなロバスト性を高めたモデルを構築し、そのモデルが実機でも実際に高精度で制御できることを確認するような実験が求められる。

ここで、実機導入の段階においては、教師あり学習よりも強化学習が有効となる可能性も考えられる。教師あり学習は教師データのみをもとに学習を行うので、環境の違い等に大きく影響を受ける可能性がある。一方、強化学習は未知の環境であっても、試行錯誤を通じて最適な方策を学習できるという利点を持つ。真の角度そのものが測定できないような実機環境であっても、光量やエラー信号など角度情報を持つ実測可能な値を報酬として設定することで、直接的にシステムの最適化を行うことが可能である。シミュレーション済みのモデルを実機で追加学習させるといったことを行うのであれば、明確な正解ラベルを必要としない強化学習のアプローチが有効だろう。

実際に KAGRA に導入を行うとしたら、まずは QPD を用いた重み付け手法や教師あり学習手法を試してみるのが良いのではないかと考える。厳密には、ビームジッターノイズと

KAGRA の他のノイズとを比較して、感度を制限するときの要求値を計算し、実現性などを鑑みながら、適切な手法を選択する必要があるだろう。

また、今回は PD の分割数を増やしたシミュレーションを行うことで、ビームの空間分布に関する情報量の増加により、高精度な角度推定や制御が可能となることを示した。機械学習、その中でも CNN に代表される畳み込みモデルは、高次元な観測データから有用な特徴を自動的に抽出できるため、手動では扱いきれない高次元の入力情報に対しても適用可能である。近年では、位相カメラ [43] のように高い空間分解能で位相分布を取得できる検出器も開発されている。これらを QPD の代替、もしくは補助的なセンサとして併用し、機械学習による解析を行うことで、さらなる制御精度の向上が期待される。

付録 A

種々の計算

A.1 Triple Mach-Zehnder 干渉計

今回のシミュレータには FINESSE3 を用いた。しかし、FINESSE3 ではミラーマップを用いた空間的な位相誤差を入れることはできるが、複数の偏光状態を直接扱う機能をサポートしていない。4章で記述した通り、複屈折の影響 $M(\theta, \alpha)$ は θ と α の 2 変数で特徴付けられる。これを FINESSE3 で再現するために図 A.1 で示すような Triple Mach-Zehnder 干渉計という構成を用いた [44]。

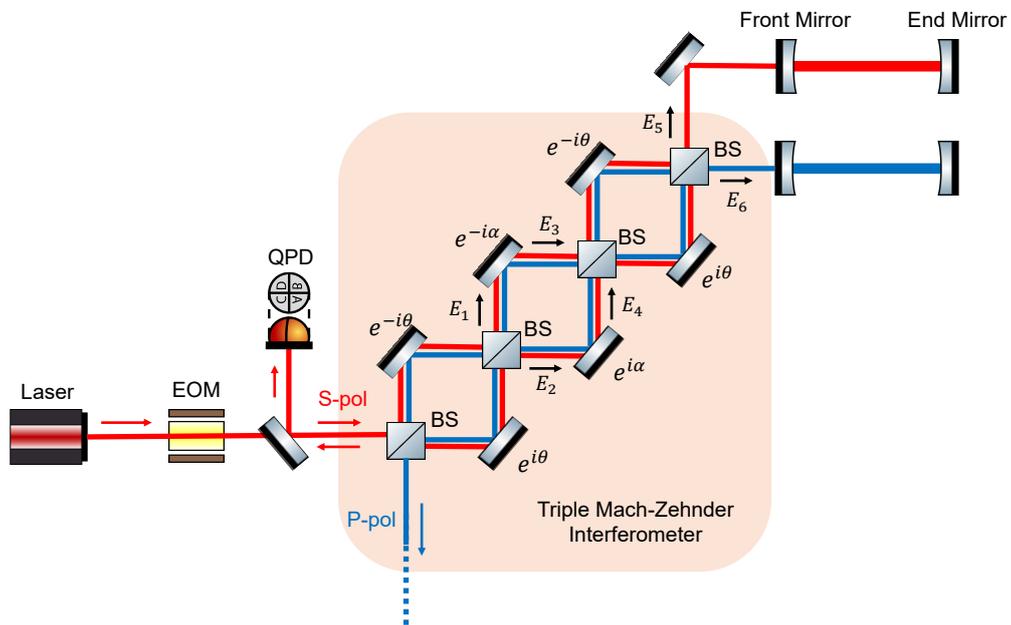


図 A.1: Triple Mach-Zehnder 干渉計

4.1.2 節の後半と同様に、入射される光が純粋な S 偏光のみである $\mathbf{V} = (S_{in}, 0)^T$ のような状況を考える。このとき図中のビームスプリッタはの透過率と反射率は $t^2 = r^2 = 0.5$ とした。このとき E_1, E_2 は、

$$E_1 = (r^2 e^{-i\theta} - t^2 e^{i\theta}) S_{in} = -i \sin \theta S_{in} \quad (\text{A.1})$$

$$E_2 = (irte^{-i\theta} + irte^{i\theta})S_{in} = i \cos \theta S_{in} \quad (\text{A.2})$$

ここで、ビームスプリッタの透過は it 、反射は r をかけている。鏡の反射の際にはそれぞれのミラーマップにより位相 ϕ が変化するので $e^{i\phi}$ をかけ合わせている。続けて E_3, E_4 については、

$$E_3 = -ie^{-i\alpha} \sin \theta S_{in} \quad (\text{A.3})$$

$$E_4 = ie^{i\alpha} \cos \theta S_{in} \quad (\text{A.4})$$

最終的な出力 E_5, E_6 は、

$$\begin{aligned} E_5 &= (r^2 e^{-i\theta} - t^2 e^{i\theta})E_3 + (irte^{-i\theta} + irte^{i\theta})E_4 \\ &= -i \sin \theta E_3 + i \cos \theta E_4 \\ &= -(e^{i\alpha} \cos^2 \theta + e^{-i\alpha} \sin^2 \theta)S_{in} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} E_6 &= (irte^{-i\theta} + irte^{i\theta})E_3 + (r^2 e^{i\theta} - t^2 e^{-i\theta})E_4 \\ &= i \cos \theta E_3 + i \sin \theta E_4 \\ &= -i \sin 2\theta \sin \alpha S_{in} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

この結果をまとめると、

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} S_{\text{out}} \\ P_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_5 \\ E_6 \end{pmatrix} = -S_{in} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos^2 \theta + e^{-i\alpha} \sin^2 \theta \\ i \sin 2\theta \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

これは式 (4.9) の結果の符号を反転させたものとなっており、Triple Mach-Zehnder 干渉計によりミラーマップによる位相誤差のみで複屈折の影響を再現できていることが分かる。

A.2 多重分割 PD による信号取得手法

A.2.1 信号の復調

FINESSE3 の標準コマンドでは、QPD や 16 分割 PD といった任意の形状を持つ検出器の空間的な信号分布を直接取得することが困難である。そこで本研究では、ビーム断面内の各点における電場の複素振幅（振幅と位相）を出力する `fcam` コマンドを用いた。

FINESSE3 のシミュレーションにおいて、キャリア光とサイドバンド光は異なる周波数成分として個別に計算される。検出面上の座標 (x, y) におけるキャリア光の複素振幅を $E_0(x, y)$ 、変調角周波数 ω_m を持つアップーサイドバンド光の複素振幅を $E_+(x, y)$ 、ローアサイドバンド光の複素振幅を $E_-(x, y)$ とする。これらが `fcam` コマンドによって直接取得可能な物理量である。

時刻 t における検出面上の全電場 $E_{\text{total}}(x, y, t)$ は、これらの重ね合わせとして次式で表される。

$$E_{\text{total}}(x, y, t) = E_0(x, y) + E_+(x, y)e^{i\omega_m t} + E_-(x, y)e^{-i\omega_m t} \quad (\text{A.8})$$

フォトダイオードで検出される信号強度 $P(x, y, t)$ は、全電場の絶対値の二乗に比例するので、

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &\propto |E_{\text{total}}|^2 = E_{\text{total}} \cdot E_{\text{total}}^* \\ &= (E_0 + E_+e^{i\omega_m t} + E_-e^{-i\omega_m t}) \cdot (E_0^* + E_+^*e^{-i\omega_m t} + E_-^*e^{i\omega_m t}) \\ &= \underbrace{|E_0|^2 + |E_+|^2 + |E_-|^2}_{\text{DC 成分}} \\ &\quad + \underbrace{(E_+E_0^* + E_0E_-^*)e^{i\omega_m t} + (E_0^*E_+ + E_-E_0^*)e^{-i\omega_m t}}_{\text{変調周波数 } \omega_m \text{ 成分}} \\ &\quad + \underbrace{E_+E_-^*e^{i2\omega_m t} + E_-E_+^*e^{-i2\omega_m t}}_{2\omega_m \text{ 成分}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ここで、本研究における信号取得では変調周波数 ω_m での復調を行うため、 ω_m で振動する項のみを抽出する。第 2 項の括弧内において、後半部分は前半部分の複素共役 (c.c.) となっていることに注意すると、 $P_{\omega_m}(x, y, t)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} P_{\omega_m}(x, y, t) &= (E_+E_0^* + E_0E_-^*)e^{i\omega_m t} + (E_0^*E_+ + E_-E_0^*)e^{-i\omega_m t} \\ &= 2 \operatorname{Re}[(E_+E_0^* + E_0E_-^*)e^{i\omega_m t}] \\ &= 2 \operatorname{Re}[E_+E_0^* + E_0E_-^*] \cos \omega_m t - 2 \operatorname{Im}[E_+E_0^* + E_0E_-^*] \sin \omega_m t \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

最終的な復調信号 $D(x, y)$ は、任意の復調位相 ϕ を用いて、 $\cos(\omega_m t + \phi)$ をかけることで得られる。

$$D(x, y) = \operatorname{Re}[E_+E_0^* + E_0E_-^*] \cos \phi + \operatorname{Im}[E_+E_0^* + E_0E_-^*] \sin \phi \quad (\text{A.11})$$

多重分割 PD の各セグメント出力は、この $D(x, y)$ を該当する領域内で空間積分することで得られる。

A.2.2 レーザー光強度の空間積分

復調処理によって得られる各点での信号 $D(x, y)$ の物理単位は強度 $[\text{W}/\text{m}^2]$ に相当するため、これを PD の出力 $[\text{W}]$ に変換するには空間積分を行う必要がある。本シミュレーションでは、測定範囲を $N \times N$ のグリッドに分割し、各グリッドが持つ微小面積 ΔS を信号強度に乗じて総和をとることでパワーへの変換を行った。

具体的には、測定範囲の一辺の長さを $2L_{\text{image}}$ 、分割数を N とし、グリッド点 (i, j) における信号強度を $D(x_i, y_j)$ としたとき、積分値 P_{demod} は以下のように計算される。

$$P_{\text{demod}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D(x_i, y_j) \Delta S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D(x_i, y_j) \left(\frac{2L_{\text{image}}}{N} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

なお、分割 PD の個別のセグメント出力を得る場合には、この和を取る範囲 (i, j) を各セグメントに対応する領域に限定して計算すればよい。ここで N は小さすぎると信号強度が小さくなり、大きすぎると計算が重くなる。ここでは $N = 128$ とした。測定範囲 L_{image} は小さすぎると光が PD 外に漏れてしまい、大きすぎると 16 分割 PD や 64 分割 PD など分割数を増やしたときに各セグメントでの強度が偏ってしまう (図 A.2, A.3 を参照)。復調信号を機械学習の入力としており測定範囲が広すぎると 16 分割 PD、64 分割 PD の学習時に精度が低下する。今回は、分割 PD 設置位置でのビームサイズ $w = 0.004435 [\text{m}]$ に対し、 $L_{\text{image}} = 2w$ とするよう設定している。

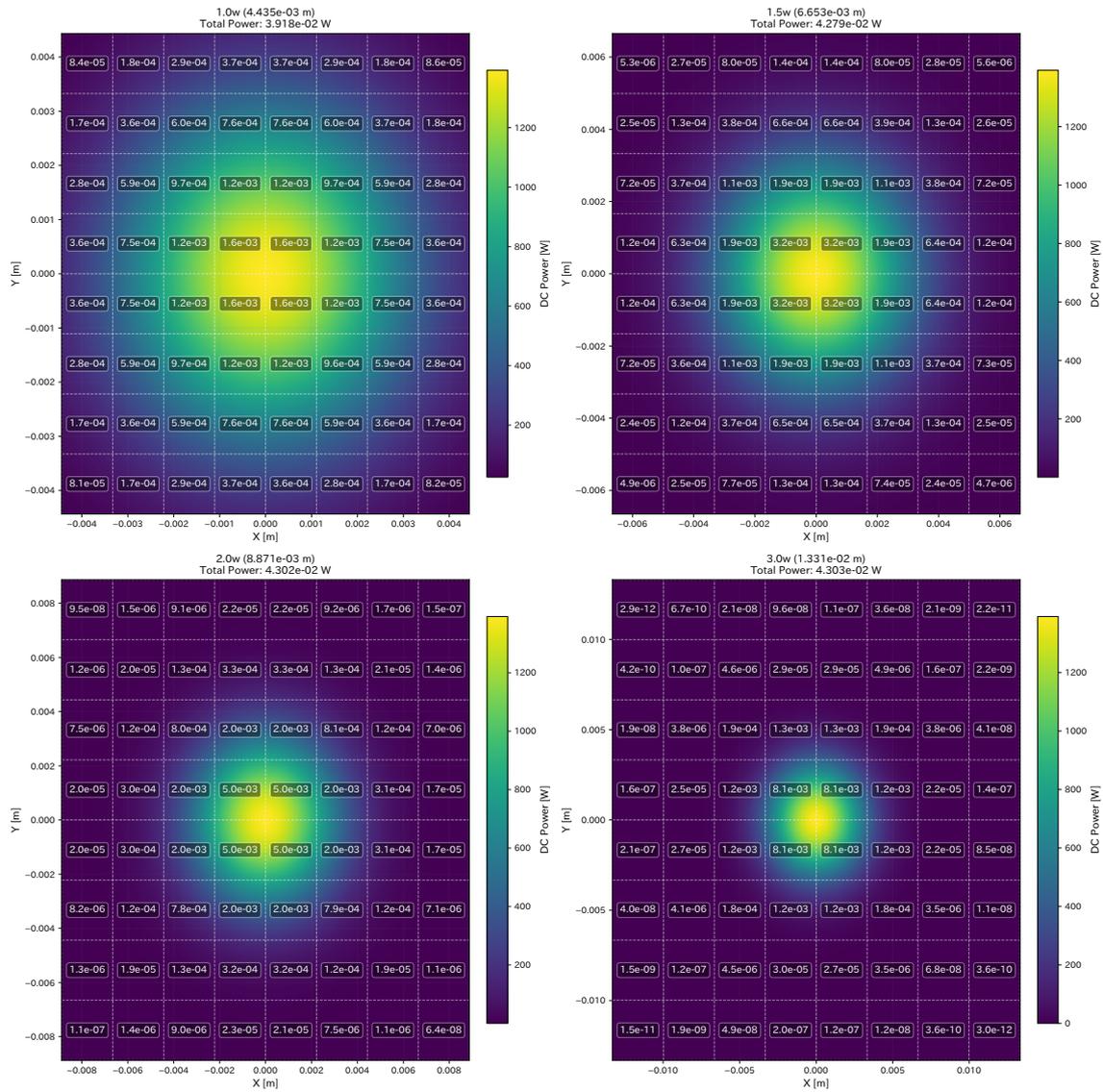


図 A.2: DC 強度の測定範囲ごとの比較 (X arm)

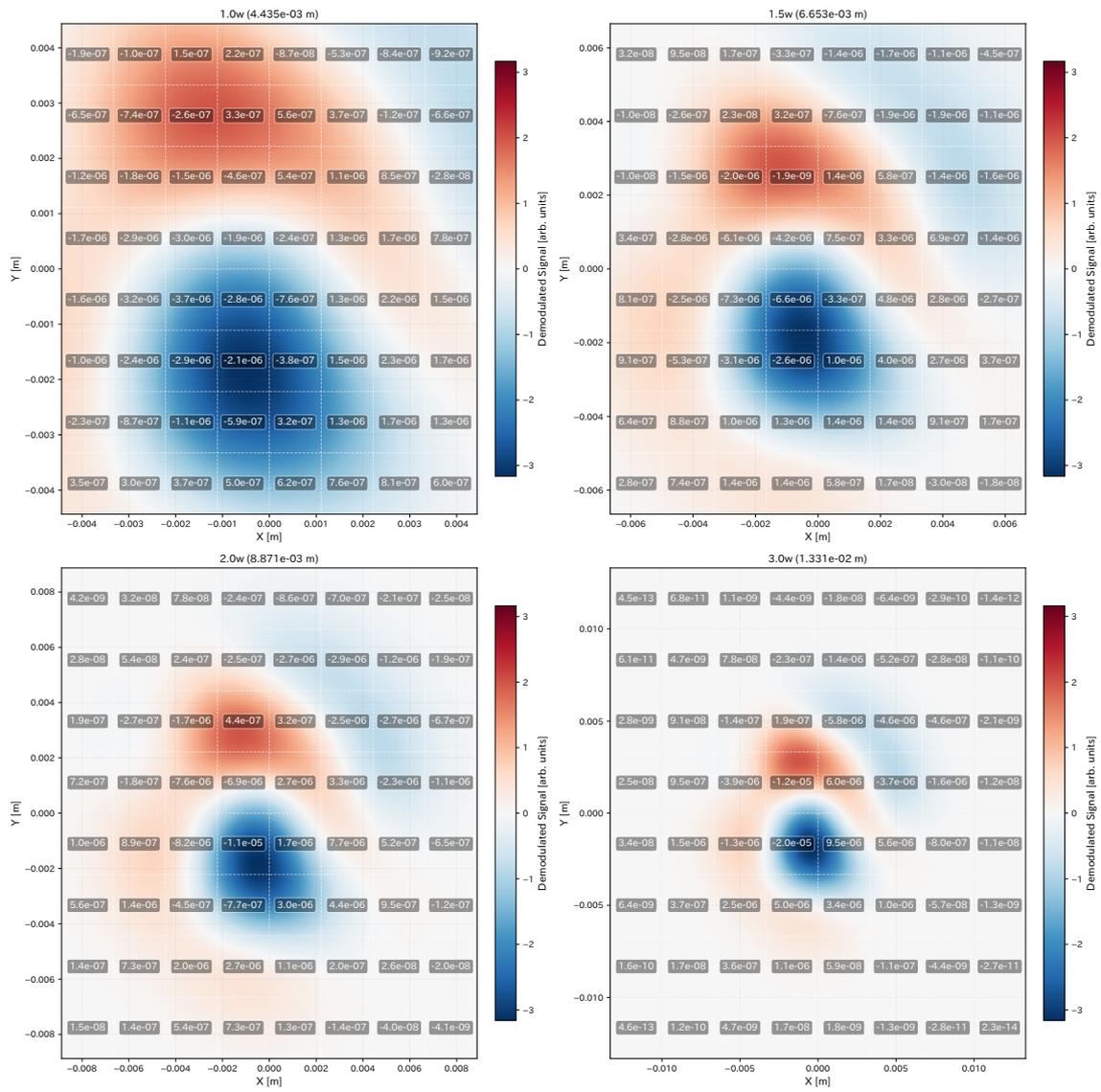


図 A.3: 復調信号の測定範囲ごとの比較 (X arm)

A.3 ビームジッタースペクトルの計算

KAGRA の光学構成は図 2.6 で示されていた。この図におけるパワーリサイクリングミラーの手前の配置をさらに詳細に図示すると図 A.4 のようになる。ここで、QPDDC2 上のビームジッターから STM の揺れを計算するために図 A.5 のような簡略化を行う。

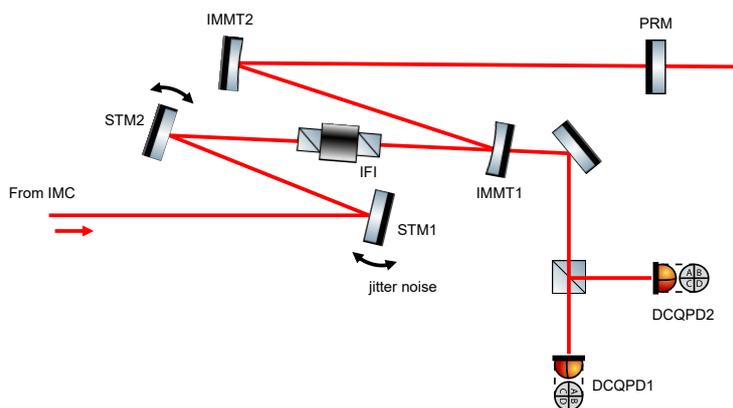


図 A.4: KAGRA のパワーリサイクリングミラー手前の光学配置

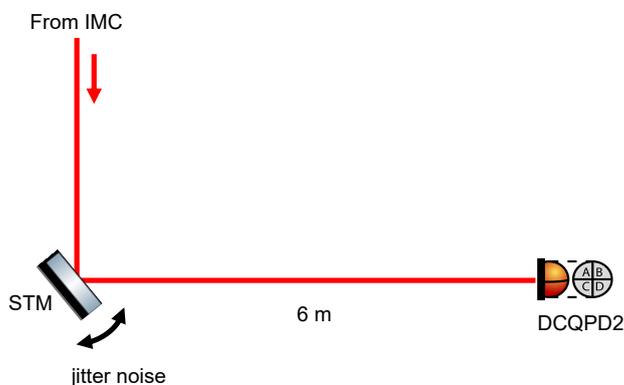


図 A.5: 簡略化した配置

図 A.5 において、STM の鏡の揺れが ITM 上でのビームジッターを引き起こしていると考えられる。図 A.6 は DCQPD2 上でのビームジッターのスペクトルである。QPD 上でのビームジッターのスペクトルを $Q(\omega)$ [$\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$]、STM の角度揺らぎのスペクトルを $S(\omega)$ [$1/\sqrt{\text{Hz}}$] とする。STM から QPD までの距離は約 6 m であるから、

$$S(\omega) = \frac{Q(\omega)}{6} \tag{A.13}$$

となる。さらに ITM でのビームジッターのスペクトルを $B(\omega)$ [$\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$] とおく。STM から ITM までの距離は約 78.3 m であるので、

$$B(\omega) = 78.3 \times S(\omega) \tag{A.14}$$

のように計算できる。DCQPD2 上から ITM 上でのビームジッタースペクトルに変換した結果は図 4.6 のようになる。

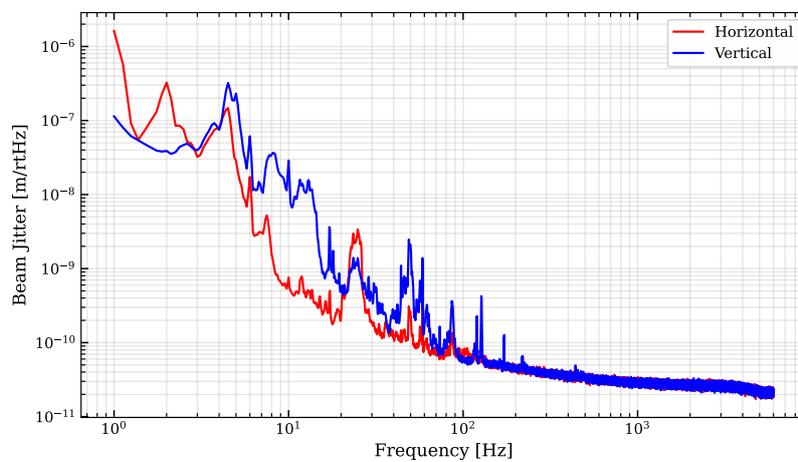


図 A.6: dcqpd2 上のビームジッター

付録 B

開発環境

B.1 使用ソフトウェア環境

本研究で使用した主要なソフトウェア及びライブラリのバージョンを表 B.1 に示す。特に Finesse などはバージョンによる計算結果の相違が発生する事があるため注意が必要である。

表 B.1: 使用したソフトウェアおよびライブラリのバージョン

Software / Library	Version
Python	3.12.3
Finesse	3.0a33
NumPy	2.2.6
Pandas	2.3.3
PyTorch	2.9.1
Gymnasium	1.2.2
Stable Baselines3	2.7.0

B.2 ソースコード

B.2.1 光学系のセットアップ

Finesse で用いた光学系のセットアップ用のコードは B.1 である。Triple Mach-Zehnder 干渉計の構成を基本としており、検出器は fcam コマンドを用いて分割 PD を再現している。

また、110 行目の maxtem は高次モードの最大次数を指定するコマンドであり、複屈折の影響を詳細に計算する場合には高いほうが望ましい。一方で次数を増やすほど計算量は指数関数的に増える。教師あり学習で教師データを作る際や強化学習の学習の際には大量の計算を必要とするため、計算速度と精度の兼ね合いから maxtem=5 とした。

ソースコード B.1: 光学系のセットアップ

```
1 variable f1 16.881M # modulation phase
```

```
2 variable PR_angle 0.686
3 variable PRM_phi -16
4 variable TMloss 40e-6 # Loss for each TM
5 variable T_ETM 5e-6 # Transmission of ETM
6
7 variable PRM_tilt 0
8 variable PR2_tilt 0
9 variable PR3_tilt 0
10 variable HARD 0
11 variable SOFT 0
12 variable HARD_P 0
13 variable SOFT_P 0
14
15 variable PHI_CARM 0
16 variable PHI_DARM 0
17 variable PHI_MICH 0
18
19 variable PHI_demod -1.834
20 variable gouy_x_1 46.728 # XHARD
21 variable gouy_x_2 135.288 # XSOFTE
22 variable gouy_y_1 42.208 # YHARD
23 variable gouy_y_2 135.752 # YSOFT
24
25 # ===== Input optics =====
26 l i1 P=100
27 mod eo1 f1 0.3
28 link(i1, eo1, InputIsolator.p1)
29
30 # Add a directional beamsplitter (Faraday Isolator)
31 # One way beam propagation: p1->p3, p3->p4, p4->p2, p2->p1
32 dbs InputIsolator
33 s s_in InputIsolator.p3 PRMs.p1
34
35 ## ===== S-pol PRC =====
36 m PRMs T=1 L=0 phi=PRM_phi xbeta=PRM_tilt
37 s sLpr1s PRMs.p2 PR2s.p2 L=14.7615
38 bs PR2s T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=-3.0764 xbeta=PR2_tilt
39 s sLpr2s PR2s.p1 PR3s.p3 L=11.0661
40 bs PR3s T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=-24.9165 xbeta=PR3_tilt
41 s sLpr3s PR3s.p4 bs1.p1 L=15.7638+25-0.15*1.754
42
43 ## ===== P-pol PRC =====
44 s sLpr3p bsp.p1 PR3p.p1 L=15.7638+25-0.15*1.754
45 bs PR3p T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=24.9165 xbeta=-PR3_tilt
46 s sLpr2p PR3p.p2 PR2p.p2 L=11.0661
47 bs PR2p T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=-3.0764 xbeta=-PR2_tilt
48 s sLpr1p PR2p.p1 PRMp.p1 L=14.7615
49 m PRMp T=1 L=0 phi=-PRM_phi xbeta=-PRM_tilt
```

```

50
51 # ===== Triple MZ =====
52 bs bsp R=1 T=0
53 s sp bsp.p2 bs1.p4
54
55 bs bs1 R=0.5 T=0.5
56
57 s s11 bs1.p2 bs11.p4
58 bs bs11 R=1 T=0
59 s s12 bs11.p3 bs2.p1
60
61 s s13 bs1.p3 bs12.p1
62 bs bs12 R=1 T=0
63 s s14 bs12.p2 bs2.p4
64
65 bs bs2 R=0.5 T=0.5
66
67 s s21 bs2.p2 bs21.p4
68 bs bs21 R=1 T=0
69 s s22 bs21.p3 bs3.p1
70
71 s s23 bs2.p3 bs22.p1
72 bs bs22 R=1 T=0
73 s s24 bs22.p2 bs3.p4
74
75 bs bs3 R=0.5 T=0.5
76
77 s s31 bs3.p2 bs31.p4
78 bs bs31 R=1 T=0
79 s s32 bs31.p3 bs4.p1
80
81 s s33 bs3.p3 bs32.p1
82 bs bs32 R=1 T=0
83 s s34 bs32.p2 bs4.p4
84
85 bs bs4 R=0.5 T=0.5
86
87 s s41 bs4.p2 bss.p4
88 bs bss R=1 T=0
89 s ss bss.p3 ITMARs.p1
90 s s42 bs4.p3 ITMARp.p1
91
92 # ===== S/P cavities =====
93 m ITMARs R=0 T=1 phi=PHI_MICH xbeta=HARD-SOFT ybeta=HARD_P-SOFT_P
94 s thick_s ITMARs.p2 ITMs.p1 L=0.15 nr=1.754
95 m ITMs T=0.004 L=TMloss phi=0 Rc=-1900 xbeta=HARD-SOFT ybeta=HARD_P-SOFT_P
96 s sarms ITMs.p2 ETMs.p1 L=3000
97 m ETMs T=T_ETM L=TMloss phi=0 Rc=1900 xbeta=HARD+SOFT ybeta=HARD_P+SOFT_P

```

```

98
99 m ITMARp R=0 T=1 phi=ITMARs.phi xbeta=ITMARs.xbeta
100 s thick_p ITMARp.p2 ITMp.p1 L=0.15 nr=1.754
101 m ITMp T=0.004 L=TMloss phi=ITMs.phi Rc=-1900 xbeta=ITMs.xbeta
102 s sarmp ITMp.p2 ETMp.p1 L=3000
103 m ETMp T=T_ETM L=TMloss phi=ETMs.phi Rc=1900 xbeta=ETMs.xbeta
104
105 cav cavs ITMs.p2.o priority=2
106 cav cavp ITMp.p2.o priority=2
107
108 cav sarm ETMs.p1.o
109
110 modes(maxtem=5)
111
112 # ===== RF QPDs =====
113 s s_REFL_pre InputIsolator.p4 refl_att.p1
114 bs refl_att R=0.999 T=0.001
115 s s_REFL_post refl_att.p3 bs_REFL_QPD.p1
116
117 bs bs_REFL_QPD R=0.5 T=0.5
118 s s_REFL_QPD1 bs_REFL_QPD.p2 n_REFL_QPD1.p1 L=0.1 user_gouy_x=gouy_x_1 user_gouy_y
    =gouy_x_1
119 s s_REFL_QPD2 bs_REFL_QPD.p3 n_REFL_QPD2.p1 L=0.1 user_gouy_x=gouy_x_2 user_gouy_y
    =gouy_x_2
120
121 nothing n_REFL_QPD1
122 nothing n_REFL_QPD2
123
124 fcam pd_car node=n_REFL_QPD1.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} f=0 w0_scaled=False
125 fcam pd_upper node=n_REFL_QPD1.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} f=f1 w0_scaled=False
126 fcam pd_lower node=n_REFL_QPD1.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} f=-f1 w0_scaled=False
127
128 fcam pd_car_2 node=n_REFL_QPD2.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} f=0 w0_scaled=False
129 fcam pd_upper_2 node=n_REFL_QPD2.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} f=f1 w0_scaled=False
130 fcam pd_lower_2 node=n_REFL_QPD2.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} f=-f1 w0_scaled=False

```

B.2.2 多重分割 PD の信号取得

fcam の出力から復調信号を取得してショットノイズ加えた信号を出力するコードは B.2 である。

ソースコード B.2: 多重分割 PD の信号取得

```
1 def _get_qpd_signals(self):
2     try:
3         # Get detector outputs
4         car = self.finesse_out['pd_car']
5         upper = self.finesse_out['pd_upper']
6         lower = self.finesse_out['pd_lower']
7
8         # Demodulation
9         complex_signal = upper * np.conj(car) + car * np.conj(lower)
10        demod = np.real(complex_signal * np.exp(-1j * self.PHI_demod))
11
12        # Flatten
13        demod_flat = demod.T.flatten()
14
15        # Add shot noise
16        h = 6.626e-34 # Planck constant [· Js]
17        c = 299792458 # Speed of light [m/s]
18        lambda_ = 1064e-9 # Laser wavelength [m]
19        freq = c / lambda_ # Frequency [Hz]
20
21        dc_map = np.abs(car)**2 + np.abs(upper)**2 + np.abs(lower)**2
22        dc_power_flat = dc_map.T.flatten()
23
24        pixel_area = ((self.image_size * 2) / self.split_size) ** 2
25        dc_power_flat_W = dc_power_flat * pixel_area
26
27        shot_noise_std_W = np.sqrt(2 * h * freq *
28                                   np.maximum(dc_power_flat_W, 1e-20) *
29                                   self.bandwidth)
30        shot_noise_std = shot_noise_std_W / pixel_area
31
32        shot_noise = np.random.normal(0, shot_noise_std, size=demod_flat.shape
33    )
34
35        demod_flat = demod_flat + shot_noise
36
37        # Reshape and process
38        img_data = demod_flat.reshape(self.split_size, self.split_size)
39
40        # Sensor configuration
41        pd_configs = {
42            '4PD': (4, 2),
43            '16PD': (16, 4),
44            '64PD': (64, 8)
45        }
46
47        pixel_count, blocks_per_side = pd_configs[self.sensor_config]
```

```
46         block_size = self.split_size // blocks_per_side
47
48         # Block sum
49         reshaped = img_data.reshape(blocks_per_side, block_size,
50                                     blocks_per_side, block_size)
51         block_sums = reshaped.sum(axis=(1, 3))
52         pd_signals_raw = block_sums.flatten()
53
54         # Scaling
55         scaling_factor = (self.image_size * 2)**2 / (self.split_size**2)
56         pd_signals = pd_signals_raw * scaling_factor
57
58         return pd_signals.astype(np.float32)
```

B.2.3 教師あり学習用のデータ作成

教師あり学習用のデータ作成を [B.3](#) のように行った。

ソースコード B.3: 教師あり学習用のデータ作成

```
1 import numpy as np
2 from typing import List, Tuple, Dict
3
4 import finesse
5 from finesse.knm import Map
6 finesse.configure(plotting=False)
7
8 from basekat import get_base_kat, get_detectors_kat
9 from modules.mirror_map import load_mirror_map
10
11
12 def generate_grid_2d(grid_points: int, position_range_mm: float) -> List[Tuple[
13     float, float]]:
14     """
15     Generate a simple 2D grid of beam positions.
16
17     Returns:
18         List of (x_mm, y_mm) positions.
19     """
20     xs = np.linspace(-position_range_mm, position_range_mm, grid_points)
21     ys = np.linspace(-position_range_mm, position_range_mm, grid_points)
22     return [(x, y) for x in xs for y in ys]
23
24 def run_optical_simulation(position_mm: Tuple[float, float],
25                             angle_range_nrad: float,
26                             angle_divisions: int,
27                             mirror_map_params: Dict,
```

```

28         finesse_code: Tuple[str, str]) -> Dict:
29     """
30     Run Finesse optical simulation for a given beam position and angle range.
31
32     This function:
33         1. Creates a Finesse model
34         2. Updates mirror maps based on beam position
35         3. Sets up angle sweep if needed
36         4. Executes the simulation
37         5. Returns raw detector outputs
38
39     Args:
40         position_mm: (x_mm, y_mm) beam position
41         angle_range_nrad: angular sweep range [nrad]
42         angle_divisions: number of angle samples
43         mirror_map_params: dict with keys: x_index, y_index, center, step, theta,
44         alpha
45         finesse_code: tuple of (code_base, code_detectors)
46
47     Returns:
48         Dictionary with simulation outputs (detector signals)
49     """
50     x_pos, y_pos = position_mm
51     code_base, code_detectors = finesse_code
52
53     # Create Finesse model
54     kat = finesse.Model()
55     kat.parse(code_base + code_detectors)
56
57     # Update mirror maps based on beam position
58     miscenter_size = 2.5
59     x = (mirror_map_params['x_index'] -
60         (mirror_map_params['center'][0] + x_pos * miscenter_size)) *
61         mirror_map_params['step'][0]
62     y = (mirror_map_params['y_index'] -
63         (mirror_map_params['center'][1] + y_pos * miscenter_size)) *
64         mirror_map_params['step'][1]
65
66     # Set surface maps for beam splitters
67     kat.bs11.surface_map = Map(x, y, opd=mirror_map_params['theta']/2)
68     kat.bs12.surface_map = Map(x, y, opd=mirror_map_params['theta']/2)
69     kat.bs31.surface_map = Map(x, y, opd=mirror_map_params['theta']/2)
70     kat.bs32.surface_map = Map(x, y, opd=mirror_map_params['theta']/2)
71     kat.bs21.surface_map = Map(x, y, opd=mirror_map_params['alpha']/2)
72     kat.bs22.surface_map = Map(x, y, opd=mirror_map_params['alpha']/2)
73
74     kat._settings.phase_config.zero_k00 = False

```

```
73     # Set up angle sweep if needed
74     if angle_range_nrad > 0:
75         kat.parse(f"""
76             xaxis(HARD, lin, -{angle_range_nrad}n, {angle_range_nrad}n, {
77             angle_divisions},
78             pre_step=series(noxaxis(), pseudo_lock_cavity(sarm, mode=[0, 0])))
79             """)
80
81     # Execute Finesse simulation
82     output = kat.run()
83
84     return output
85
86 def extract_pd_features(simulation_output, pd_size: int) -> np.ndarray:
87     """
88     Extract PD features from Finesse simulation output.
89
90     This function represents the PD signal processing pipeline:
91     - Demodulation of photodiode signals
92     - Shot noise addition
93     - Spatial integration over PD pixels
94
95     The detailed implementation is shown elsewhere in the thesis.
96
97     Args:
98         simulation_output: output from run_optical_simulation
99         pd_size: number of PD channels (4, 16, or 64)
100
101     Returns:
102         1D feature vector of length 'pd_size'.
103     """
104     # In the actual implementation, this processes the Finesse output:
105     # - Extracts car, upper, lower detector signals
106     # - Performs demodulation with phase rotation
107     # - Adds shot noise based on DC power
108     # - Integrates over PD pixel blocks
109     # For illustration, we return dummy values with the correct shape.
110     return np.zeros(pd_size, dtype=np.float32)
111
112
113 class BeamDatasetGenerator:
114     """
115     Generate supervised learning datasets from an optical simulation.
116
117     Three difficulty levels are used:
118     - easy : wide angular range  $\pm$  (300 nrad)
119     - medium : intermediate angular range  $\pm$  (15 nrad)
```

```
120     - hard : very narrow angular range  $\pm$  (0.75 mrad)
121
122 For each level we generate datasets by:
123     1. Sampling beam positions on a 2D grid.
124     2. Sweeping the mirror angle in a small range.
125     3. Running Finesse simulation at each (position, angle).
126     4. Extracting PD features from simulation outputs.
127     """
128
129 def __init__(self) -> None:
130     # Load mirror map data
131     x, y, theta, center, step, x_index, y_index = load_mirror_map(
132         'mirror_map/map_ITMY_theta_Zn24_nm.txt')
133     _, _, alpha, _, _, _ = load_mirror_map(
134         'mirror_map/map_ITMY_alpha_Zn24_nm.txt')
135
136     self.mirror_map_params = {
137         'x_index': x_index,
138         'y_index': y_index,
139         'center': center,
140         'step': step,
141         'theta': theta,
142         'alpha': alpha
143     }
144
145     # Detector parameters
146     optimal_phase = -0.011774019164178908
147     image_size = 0.004435386559218215 * 2
148     split_size = 128
149
150     # Generate Finesse model code
151     self.code_base = get_base_kat(maxtem=5)
152     self.code_detectors = get_detectors_kat(optimal_phase, image_size,
153 split_size)
154     self.finesse_code = (self.code_base, self.code_detectors)
155
156     # Configuration for all levels
157     self.stages = {
158         "easy": {
159             "angle_range_nrad": 300.0,
160             "angle_divisions": 30,
161             "position_range_mm": 1.0,
162             "grid_points": 11
163         },
164         "medium": {
165             "angle_range_nrad": 15.0,
166             "angle_divisions": 30,
167             "position_range_mm": 1.0,
```

```
167         "grid_points": 11
168     },
169     "hard": {
170         "angle_range_nrad": 0.75,
171         "angle_divisions": 100,
172         "position_range_mm": 1.0,
173         "grid_points": 11
174     }
175 }
176
177 def generate_dataset(self, level: str, pd_size: int) -> List[np.ndarray]:
178     """
179     Generate dataset for a given level and PD size.
180
181     Args:
182         level: "easy", "medium", or "hard".
183         pd_size: number of PD channels (4, 16, or 64).
184
185     Returns:
186         List of PD feature vectors.
187     """
188     cfg = self.stages[level]
189     positions = generate_grid_2d(cfg["grid_points"], cfg["position_range_mm"])
190
191     results = []
192
193     for x_mm, y_mm in positions:
194         # Run Finesse simulation for this position
195         sim_output = run_optical_simulation(
196             position_mm=(x_mm, y_mm),
197             angle_range_nrad=cfg["angle_range_nrad"],
198             angle_divisions=cfg["angle_divisions"],
199             mirror_map_params=self.mirror_map_params,
200             finesse_code=self.finesse_code
201         )
202
203         # Extract PD features from simulation output
204         features = extract_pd_features(sim_output, pd_size)
205         results.append(features)
206
207     return results
```

B.2.4 ニューラルネットワークの構成

教師あり学習で角度を予測する際の構成は B.4 のようにした。入力次元に応じてモデルサイズを変更している。

ソースコード B.4: ニューラルネットワークの構成

```
1 class NeuralNetwork2(nn.Module):
2     def __init__(self, Init: int):
3         super().__init__()
4         self.flatten = nn.Flatten()
5
6         if Init == 4:
7             # 4PD: 64 → 16 → 4 → 1
8             hidden1, hidden2, hidden3 = 64, 16, 4
9         elif Init == 16:
10            # 16PD: 128 → 32 → 8 → 1
11            hidden1, hidden2, hidden3 = 128, 32, 8
12        elif Init == 64:
13            # 64PD: 256 → 64 → 16 → 1
14            hidden1, hidden2, hidden3 = 256, 64, 16
15
16        self.linear_relu_stack = nn.Sequential(
17            nn.Linear(Init, hidden1),
18            nn.SELU(),
19            nn.Linear(hidden1, hidden2),
20            nn.SELU(),
21            nn.Linear(hidden2, hidden3),
22            nn.SELU(),
23            nn.Linear(hidden3, 1),
24        )
25
26        def forward(self, x: torch.Tensor) -> torch.Tensor:
27            return self.linear_relu_stack(x)
```

B.2.5 強化学習の環境

強化学習は Gymnasium のカスタム環境として Finesse を組み込むことで構築を行った。Gymnasium とは、強化学習アルゴリズムの開発を行うための標準的なインターフェースを提供するオープンソースのライブラリである。簡略化したコードを B.5 に記載する。

ソースコード B.5: 強化学習の環境 (要約版)

```
1 import gymnasium as gym
2 import numpy as np
3 import finesse
4
5 class FinesseOpticalEnvironment(gym.Env):
6     """
7     Reinforcement Learning Environment for Optical Alignment using Finesse.
8     Simulates the cavity response with mirror maps, shot noise, and beam jitter.
9     """
10
```

```
11     def __init__(self, target_angle=0.0, max_steps=500, sensor_config="4PD", ...):
12         super().__init__()
13
14         # --- Initialization ---
15         self.target_angle = target_angle
16         self.sensor_config = sensor_config
17
18         # Define Action Space: Normalized range [-1, 1]
19         self.action_space = gym.spaces.Box(
20             low=-1.0, high=1.0, shape=(1,), dtype=np.float32
21         )
22
23         # Define Observation Space: [PD_Signals (t, t-1), Target, Action, Step]
24         # Frame stacking is used to capture velocity information
25         obs_dim = self._calculate_obs_dim()
26         self.observation_space = gym.spaces.Box(
27             low=-np.inf, high=np.inf, shape=(obs_dim,), dtype=np.float32
28         )
29
30         # Setup Finesse Simulation (Loading mirror maps and initial build)
31         self._setup_finesse_simulation()
32
33     def step(self, action):
34         """
35         Execute one step of the environment.
36         1. Apply action (mirror angle adjustment).
37         2. Run Finesse simulation with jitter.
38         3. Generate observation with shot noise.
39         4. Calculate reward.
40         """
41         # 1. Action Scaling: Normalized -> Physical (Radians)
42         action_physical = action[0] * self.constants.ACTION_SCALE_PHYSICAL
43
44         # 2. Run Simulation
45         # Updates mirror maps (Beam Jitter) and executes 'series' command
46         self._run_finesse_simulation(action_physical)
47
48         # 3. Get Observation
49         # Demodulate signals and add quantum shot noise
50         qpd_signals = self._get_qpd_signals()
51         self.qpd_signals_history.append(qpd_signals)
52         observation = self._build_observation()
53
54         # 4. Calculate Reward
55         wfs_sum = np.sum(qpd_signals)
56         reward = self._calculate_log_reward(wfs_sum, action)
57
58         # 5. Check Termination (Stability criterion)
```

```
59     true_error = self.current_HARD - self.target_angle
60     is_stable = abs(true_error) < self.constants.PRECISION_THRESHOLDS['ultra']
61
62     if is_stable:
63         self.stable_count += 1
64     else:
65         self.stable_count = 0
66
67     terminated = (self.stable_count >= self.stability_steps)
68     truncated = (self.step_count >= self.max_steps)
69
70     info = {
71         'true_angle': self.current_HARD,
72         'true_error': true_error,
73         'wfs_signal': wfs_sum
74     }
75
76     self.step_count += 1
77     return observation, reward, terminated, truncated, info
78
79     def _calculate_log_reward(self, wfs_signal, action):
80         """
81         Logarithmic reward function for high-precision control.
82         Combines precision reward with LQR-like cost penalties.
83         """
84         angle_error = self.current_HARD - self.target_angle
85         action_diff = action[0] - self.previous_action
86
87         # LQR Cost (State deviation + Control effort)
88         lqr_cost = (self.Q * (angle_error ** 2)) + (self.R * (action_diff ** 2))
89
90         # Logarithmic Precision Reward
91         # Increases linearly as the error decreases exponentially (order of
92         # magnitude)
93         abs_error = max(abs(angle_error), 1e-14)
94         log_score = np.log10(self.REFERENCE_LIMIT) - np.log10(abs_error)
95         precision_reward = self.POINTS_PER_ORDER * log_score
96
97         return precision_reward - lqr_cost
```

B.2.6 ビームジッターの時系列化

ビームジッターのスペクトルを時系列に変換するコードを以下に記載する。

ソースコード B.6: ビームジッターの時系列化

```
1 import numpy as np
2 import os
```

```
3
4
5 class BeamJitterSampler:
6     """
7     Beam jitter sampler based on real measurement data.
8
9     Generates time-correlated beam jitter by fixing phases at episode start
10    and evolving the signal over time.
11    """
12
13    def __init__(self, freq, asd_horizontal, asd_vertical, sampling_frequency=1.0)
14    :
15        """
16        Initialize beam jitter sampler.
17
18        Args:
19            freq: Frequency array [Hz]
20            asd_horizontal: Horizontal ASD [ $\text{m}\sqrt{\text{Hz}}$ ]
21            asd_vertical: Vertical ASD [ $\text{m}\sqrt{\text{Hz}}$ ]
22            sampling_frequency: Sampling frequency [Hz]
23        """
24        self.freq = freq
25        self.sampling_frequency = sampling_frequency
26        self.sampling_interval = 1.0 / sampling_frequency
27        self.df = freq[1] - freq[0]
28
29        # Precompute amplitudes:  $A_k = \text{ASD}(f) * \text{sqrt}(df)$ 
30        self.amplitude_h = asd_horizontal * np.sqrt(self.df)
31        self.amplitude_v = asd_vertical * np.sqrt(self.df)
32
33        self.current_time = 0.0
34        self.step_count = 0
35
36        # Phase storage (fixed per episode)
37        self.fixed_phase_h = None
38        self.fixed_phase_v = None
39
40    def reset(self, random_seed=None):
41        """
42        Reset sampler for new episode.
43        Generates and fixes random phases for time-correlated noise.
44
45        Args:
46            random_seed: Random seed for reproducibility
47        """
48        self.current_time = 0.0
49        self.step_count = 0
```

```
50     if random_seed is not None:
51         np.random.seed(random_seed)
52
53         # Generate random phases uniformly distributed in [0, π 2]
54         self.fixed_phase_h = np.random.uniform(0, 2*np.pi, len(self.freq))
55         self.fixed_phase_v = np.random.uniform(0, 2*np.pi, len(self.freq))
56
57         # DC component (0 Hz) has zero phase
58         self.fixed_phase_h[0] = 0
59         self.fixed_phase_v[0] = 0
60
61     def sample(self):
62         """
63         Sample beam jitter at current time step.
64
65         Uses fixed phases from reset() and current time to generate
66         time-correlated colored noise.
67
68         Returns:
69             jitter_h: Horizontal jitter [m]
70             jitter_v: Vertical jitter [m]
71             current_time: Current time [s]
72         """
73         # Initialize if reset() hasn't been called
74         if self.fixed_phase_h is None:
75             self.reset()
76
77         # Synthesize waveform:  $x(t) = \sum A_k * \cos \pi (2 f_k t + \phi_k)$ 
78         jitter_h = np.sum(self.amplitude_h * np.cos(2*np.pi*self.freq*self.
current_time + self.fixed_phase_h))
79         jitter_v = np.sum(self.amplitude_v * np.cos(2*np.pi*self.freq*self.
current_time + self.fixed_phase_v))
80
81         # Advance time
82         self.current_time += self.sampling_interval
83         self.step_count += 1
84
85         return jitter_h, jitter_v, self.current_time
86
87     def sample_trajectory(self, n_steps, random_seed=None):
88         """
89         Generate continuous trajectory for multiple steps.
90
91         Args:
92             n_steps: Number of sampling steps
93             random_seed: Random seed for phase initialization
94
95         Returns:
```

```
96         trajectory_h: Horizontal trajectory [m]
97         trajectory_v: Vertical trajectory [m]
98         times: Time array [s]
99     """
100     self.reset(random_seed)
101
102     trajectory_h = []
103     trajectory_v = []
104     times = []
105
106     for _ in range(n_steps):
107         jitter_h, jitter_v, t = self.sample()
108         trajectory_h.append(jitter_h)
109         trajectory_v.append(jitter_v)
110         times.append(t)
111
112     return np.array(trajectory_h), np.array(trajectory_v), np.array(times)
113
114
115 def load_jitter_data(filepath="IMMT1_QPD2_20241022.txt"):
116     """
117     Load beam jitter measurement data.
118
119     Args:
120         filepath: Path to data file
121
122     Returns:
123         freq_data: Frequency array [Hz]
124         asd_horizontal: Horizontal ASD [ $\text{m}\sqrt{\text{Hz}}$ ]
125         asd_vertical: Vertical ASD [ $\text{m}\sqrt{\text{Hz}}$ ]
126     """
127     if not os.path.exists(filepath):
128         raise FileNotFoundError(f>Data file not found: {filepath}")
129
130     data = np.loadtxt(filepath)
131     freq_data = data[:, 0] # Frequency [Hz]
132
133     # Convert to ASD: column 1=Vertical, column 2=Horizontal
134     scale_factor = 10**(-3) * 78.3 / 6
135     asd_horizontal = data[:, 2] * scale_factor
136     asd_vertical = data[:, 1] * scale_factor
137
138     return freq_data, asd_horizontal, asd_vertical
139
140
141 def generate_real_jitter_positions(n_samples, random_seed=None,
142                                   data_file="IMMT1_QPD2_20241022.txt",
143                                   sampling_freq=1.0):
```

```
144     """
145     Generate beam positions based on real jitter measurement data.
146
147     Args:
148         n_samples: Number of samples to generate
149         random_seed: Random seed for reproducibility
150         data_file: Path to jitter data file
151         sampling_freq: Sampling frequency [Hz]
152
153     Returns:
154         positions: Array of shape (n_samples, 2) with [x, y] coordinates [m]
155     """
156     freq, asd_h, asd_v = load_jitter_data(data_file)
157
158     sampler = BeamJitterSampler(freq, asd_h, asd_v, sampling_frequency=
159         sampling_freq)
160     traj_h, traj_v, _ = sampler.sample_trajectory(n_samples, random_seed=
161         random_seed)
162
163     return np.column_stack((traj_h, traj_v))
```

謝辞

本研究及び本論文執筆にあたり、多くの方から協力をいただきました。この場を借りて感謝を述べさせていただきます。

指導教員である宗宮健太郎教授には、本研究を進めるにあたり指針となる助言を何度もいただきました。私の興味に沿ったテーマを自由に研究させてくださり、非常に有意義な研究生生活を送ることができました。宗宮先生の指導や研究への取り組み方を通じて、科学的な姿勢とは何なのかを学ばせていただきました。また、KAGRA やオーストラリアなど国内外への貴重な出張の機会を何度も与えてくださり、私の人生にとって良い経験となりました。

研究員の山本博章さんにも多くの助力をいただきました。実際に LIGO で研究していた経験やシミュレーションに対する知見を共有していただく機会はとても貴重なものでした。また、私の研究についても一緒に考えてくださり、私自身が研究テーマについて考え直す機会となるありがたい意見をいただきました。

Haoyu Wang 特任助教には複雑折のシミュレーションについての助言をいただきました。また、光学系のセットアップなどは Haoyu さんのコードを流用させていただいた部分があります。同様に特任助教の Shilu Tian さんとは食事中の会話などを通じて、優しく接していただきました。

博士課程の阿部さん、鈴木海堂さん、Diego さんとは、様々な場面でお話させていただく機会が多く、楽しく研究生生活を送る上で欠かせない存在でした。ありがとうございました。皆さんのようなお手本となる先輩がいることは研究室全体に良い影響を与えていると思います。

学部からの同期となる井殿君とは、日本にいる頃に研究についてや大学生活、就活など様々な話題でお話させていただきました。オーストラリアに長期滞在し、研究を進める積極的な姿勢など見習わなければならない点が多くあると感じます。また、同様に同期となる M2 の正木君や Shalika さんとはコロキウムや出張などで同席することがあり、その際に大変お世話になりました。

M1 の吉留君や山口さん、B4 の江上君や川上君ともゼミや研究生生活を通じてお話をいただき、お陰で楽しい研究室生活を送ることができました。ありがとうございました。

卒業生の羽場さんとは、研究テーマが近く、先行研究として参考にさせていただいた部分が多くありました。また、議論やコードの共有などさせていただく機会も多く、研究を進めるうえでとても助けになりました。

他にも高橋弘毅さん、高野さん、Marc さん、Ruizhe 君、Yilung さん、白倉さん、笹岡さん、竹口さん、武田さんなど、大勢の方との繋がりのおかげで研究を進めることができました。

この場書き切れなかった多くの皆様に感謝申し上げます。皆様、誠にありがとうございました。

した。

参考文献

- [1] A. Einstein, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin , 688 (1916).
- [2] A. Einstein, Über Gravitationswellen, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin , 154 (1918), english translation: On Gravitational Waves.
- [3] J. Aasi, B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, *et al.*, Advanced ligo, *Class. Quantum Grav.* **32**, 074001 (2015).
- [4] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [5] F. Acernese, M. Agathos, K. Agatsuma, D. Aisa, N. Allemandou, A. Allocca, J. Amarni, P. Astone, G. Balestri, G. Ballardin, *et al.*, Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector, *Class. Quantum Grav.* **32**, 024001 (2014).
- [6] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 161101 (2017).
- [7] K. Somiya and KAGRA Collaboration, Detector configuration of KAGRA – the Japanese cryogenic gravitational-wave detector, *Class. Quantum Grav.* **29**, 124007 (2012).
- [8] K. Somiya, E. Hirose, and Y. Michimura, Influence of nonuniformity in sapphire substrates for a gravitational wave telescope, *Phys. Rev. D* **100**, 082005 (2019).
- [9] R. A. Hulse and J. H. Taylor, Discovery of a pulsar in a binary system, *The Astrophysical Journal Letters* **195**, L51 (1975).
- [10] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16, *The Astrophysical Journal* **253**, 908 (1982).
- [11] H. B. Callen and T. A. Welton, Irreversibility and Generalized Noise, *Phys. Rev.* **83**, 34 (1951).
- [12] Y. Enomoto, K. Komori, Y. Michimura, K. Somiya, K. Yamamoto, and T. Yamamoto, *Latest estimated sensitivity of KAGRA (v201708)*, Tech. Rep. JGW-T1707038 (2017).

- [13] T. Uchiyama, T. Tomaru, D. Tatsumi, S. Miyoki, M. Ohashi, K. Kuroda, T. Suzuki, A. Yamamoto, and T. Shintomi, Mechanical quality factor of a sapphire fiber at cryogenic temperatures, *Phys. Lett. A* **273**, 310 (2000).
- [14] L. Barsotti and M. Evans, *Modeling of Alignment Sensing and Control for Advanced LIGO*, Technical Note LIGO-T0900511-v4 (LIGO-MIT, 2011) IIGO Document T0900511-v4.
- [15] J. A. Sidles and D. Sigg, Optical torques in suspended Fabry-Perot interferometers, *Phys. Lett. A* **354**, 167 (2006).
- [16] R. C. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems I. Description and discussion of the calculus, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 488 (1941).
- [17] Y. Aso, *How to generate a birefringence map from TWE maps taken with linearly polarized light ?*, Tech. Rep. T2113368-v2 (JGW Documents, 2021).
- [18] D. Haba, K. Takeshita, R. Wan, H. Tanaka, S. Sasaoka, H. Wang, and K. Somiya, Mitigation of optics non-uniformity using optimally combined segmented photodetector, *Class. Quantum Grav.* **43**, 015017 (2025).
- [19] E. Hirose, G. Billingsley, L. Zhang, H. Yamamoto, L. Pinard, C. Michel, D. Forest, B. Reichman, and M. Gross, Characterization of Core Optics in Gravitational-Wave Detectors: Case Study of KAGRA Sapphire Mirrors, *Phys. Rev. Appl.* **14**, 014021 (2020).
- [20] H. Wang, K. Komori, K. Somiya, and Y. Michimura, *Stm jitter noise in the presence of birefringence*, Tech. Rep. JGW-T2415842-v5 (2024).
- [21] H. Wang, Y. Aso, M. Leonardi, M. Eisenmann, E. Hirose, G. Billingsley, K. Kokeyama, T. Ushiba, M. Tamaki, and Y. Michimura, Characterization of birefringence inhomogeneity of KAGRA sapphire mirrors from transmitted wavefront error measurements, *Phys. Rev. D* **110**, 082007 (2024).
- [22] M. Eisenmann, S. Singh, and M. Leonardi, Birefringence compensation method of test-mass substrates for gravitational wave detectors with arbitrary polarization states, *Opt. Lett.* **49**, 3404 (2024).
- [23] Y. Michimura, H. Wang, F. Salces-Carcoba, C. Wipf, A. Brooks, K. Arai, and R. X. Adhikari, Effects of mirror birefringence and its fluctuations to laser interferometric gravitational wave detectors, *Phys. Rev. D* **109**, 022009 (2024).
- [24] 田中颯, *非一様な複屈折の影響下における鏡の姿勢制御法の開発*, 卒業論文, 東京工業大学 (2023).
- [25] 羽場大起, *重力波望遠鏡 KAGRA における非一様複屈折の影響下での光共振器の新しい姿勢制御法の開発*, 修士論文, 東京科学大学 (2025).
- [26] 立原浩輝, *深層学習を用いた鏡の姿勢制御について*, 修士論文, 東京工業大学 (2022).
- [27] Y. Hou, *Control system for mirror tilting by deep learning*, Master's thesis, Tokyo Institute of Technology (2023).
- [28] 竹下賢徳, *ニューラルネットワークを用いた複屈折影響下における鏡の姿勢制御*, 卒業論

- 文, 東京工業大学 (2024).
- [29] V. Nair and G. E. Hinton, Rectified linear units improve restricted boltzmann machines, in *Proc. 27th Int. Conf. Mach. Learn. (ICML)* (Omnipress, Haifa, Israel, 2010) pp. 807–814.
- [30] G. Klambauer, T. Unterthiner, A. Mayr, and S. Hochreiter, [Self-Normalizing Neural Networks](#), [arXiv:1706.02515 \[cs.LG\]](#) .
- [31] K. Arulkumaran, M. P. Deisenroth, M. Brundage, and A. A. Bharath, Deep reinforcement learning: A brief survey, *IEEE Signal Process. Mag.* **34**, 26 (2017).
- [32] T. Haarnoja, A. Zhou, P. Abbeel, and S. Levine, Soft actor-critic: Off-policy maximum entropy deep reinforcement learning with a stochastic actor, in *Proc. 35th Int. Conf. Mach. Learn. (ICML)* (Pmlr, 2018) pp. 1861–1870.
- [33] E. Cuoco, M. Cavaglià, I. S. Heng, D. Keitel, and C. Messenger, Applications of machine learning in gravitational-wave research with current interferometric detectors, *Living Rev. Relativ.* **28**, 1 (2025).
- [34] H. Gabbard, M. Williams, F. Hayes, and C. Messenger, Matching Matched Filtering with Deep Networks for Gravitational-Wave Astronomy, [Phys. Rev. Lett.](#) **120**, 141103 (2018).
- [35] M. Zevin, S. Coughlin, S. Bahaadini, E. Besler, N. Rohani, S. Allen, M. Cabero, K. Crowston, A. K. Katsaggelos, S. L. Larson, T. K. Lee, C. Lintott, T. B. Littenberg, A. Lundgren, C. Østerlund, J. R. Smith, L. Trouille, and V. Kalogera, Gravity Spy: integrating advanced LIGO detector characterization, machine learning, and citizen science, [Class. Quantum Grav.](#) **34**, 064003 (2017).
- [36] R. Ormiston, T. Nguyen, M. Coughlin, R. X. Adhikari, and E. Katsavounidis, Noise reduction in gravitational-wave data via deep learning, [Phys. Rev. Res.](#) **2**, 033066 (2020).
- [37] I. Rakhmatulin, D. Risbridger, R. M. Carter, M. D. Esser, and M. S. Erden, A review of automation of laser optics alignment with a focus on machine learning applications, [Opt. Lasers Eng.](#) **173**, 107923 (2024).
- [38] P. Xiangyuan Ma and G. Vajente, A deep learning technique to control the non-linear dynamics of a gravitational-wave interferometer, [Class. Quantum Grav.](#) **41**, 045003 (2024).
- [39] J. Qin, K. Kinder, S. Jadhav, P. Chugh, and B. J. J. Slagmolen, Automated alignment of an optical cavity using machine learning, [Class. Quantum Grav.](#) **42**, 045003 (2025).
- [40] N. Mukund, J. Lough, A. Bisht, H. Wittel, S. Nadji, C. Affeldt, F. Bergamin, M. Brinkmann, V. Kringel, H. Lück, *et al.*, Neural sensing and control in a kilometer-scale gravitational-wave observatory, [Phys. Rev. Appl.](#) **20**, 064041 (2023).
- [41] J. Buchli, B. Tracey, T. Andric, C. Wipf, *et al.*, Improving cosmological reach of a gravitational wave observatory using Deep Loop Shaping, [Science](#) **389**, 1012 (2025), <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.adw1291> .

- [42] D. D. Brown, A. Freise, H. T. Cao, A. Ciobanu, J. Gobeil, A. Green, P. Hapke, P. Jones, M. van der Kolk, K. Kuns, S. Leavey, J. W. Perry, S. Rowlinson, and M. Sallé, [FINESSE](#).
- [43] A. W. Goodwin-Jones, R. Cabrita, M. Korobko, M. V. Beuzekom, D. D. Brown, V. Fafone, J. V. Heijningen, A. Rocchi, M. G. Schiworski, and M. Tacca, Transverse mode control in quantum enhanced interferometers: a review and recommendations for a new generation, [Optica](#) **11**, 273 (2024).
- [44] H. Wang, Modeling inhomogeneous birefringence of the input test mass in gravitational wave interferometers (in preparation), .
- [45] 安東正樹, [Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御](#), 修士論文, 東京大学 (1996).
- [46] 阿部誉, [透過位相誤差分布を使用したサファイア鏡の複屈折推定の検証](#), 修士論文, 東京工業大学 (2022).
- [47] 大島由佳, [重力波望遠鏡 TOBA のための結合光共振器を用いた角度信号増幅の実証](#), 修士論文, 東京大学 (2025).