

修士論文

巨視的量子現象の観測に向けた  
反磁性浮上による鏡懸架システムの開発

東京工業大学大学院  
理学院 物理学系 物理学コース 宗宮研究室

竹口浩太郎

2024年2月5日提出

2024年3月25日改稿

# 要旨

量子力学によれば、典型的な量子現象である重ね合わせ状態は質量スケールに依らず成立するはずである。しかし、現実にはプランク質量を超える巨視的な系において量子現象が観測されたことはなく、巨視的量子力学が成立するかどうかの検証は未だ成功していない。微視的なスケールの代表的な実験である、電子の二重スリット実験であっても、電子の軌道を調べることで外部環境と相互作用し、一度観測された干渉縞も消えてしまう。このような、状態の重ね合わせが破壊され、量子性が失われる現象をデコヒーレンスと呼ぶ。巨視的な物体は微視的な物体以上に外部環境と相互作用を起しやすく、デコヒーレンスが起きると考えられている。では、十分に外部環境から孤立させれば、重ね合わせ状態は維持されるだろうか。実は、物体自身の重力により重ね合わせが壊されるとする、重力デコヒーレンスという仮説が存在する。この理論によれば、重ね合わせが維持される時間は質量に依存するため、デコヒーレンスが起るまでの時間を様々な質量スケールで計測することが期待されている。巨視的な物体の重ね合わせ状態の生成手法として提案されているのが、レーザー干渉計を用いた実験である。

レーザー干渉計を用いた巨視的量子現象の観測に必要な条件は、鏡振動子の位置測定精度を Heisenberg の不確定性原理から導かれる標準量子限界に到達させることである。本研究で対象にするミリグラムスケールの鏡の場合、従来の振り子型の懸架方法では懸架線の熱雑音により制限され、標準量子限界に到達できない。そこで先行研究では反磁性体であるグラファイトが磁気浮上することに着目し、鏡を浮上させたグラファイトに積載した振動子の作成を目指した。また、リング型磁石にリング型グラファイトを浮上させることで、渦電流熱雑音を低減できる可能性を検討したが、安定的な浮上が困難であり、浮上シミュレーションとの間に齟齬が生じていた。本研究では、単純化した直線状のハルバツハ配列を用い、水平方向の安定性について実験結果と合致するよう理論式を補正した。また、渦電流熱雑音の理論式から予想される、 $Q$  値のスケールリングについて実験的に確かめた。さらに、浮上させた鏡を制御するために必要なアクチュエータについて、静電アクチュエータの利用を検討した。

# Abstract

According to quantum mechanics, quantum superposition, which is typical quantum phenomenon, should be independent of the mass scale. However, in reality, quantum phenomena have never been observed in macroscopic systems beyond the Planck mass, and the verification whether macroscopic quantum mechanics is valid or not has not yet been successful. Even in the electron double-slit experiment, which is a typical experiment on the microscopic scale, the interaction of the electron with the external environment by examining its orbit causes the interference pattern once observed to disappear. This phenomenon, in which the superposition of states is destroyed and quantum nature is lost, is called decoherence. It is believed that macroscopic objects interact with the external environment more easily than microscopic objects, causing decoherence. Then, if the object is sufficiently isolated from the external environment, will the superposition state be maintained? In fact, there is a hypothesis called gravitational decoherence, which states that the superposition is broken by the gravity of the object itself. According to this theory, the time for the superposition to be maintained depends on the mass of the object, and it is hoped that the time until decoherence occurs can be measured at various mass scales. A proposed method for generating superposition states of macroscopic objects is an experiment using laser interferometry.

A necessary condition for observing macroscopic quantum phenomena using laser interferometry is that the position measurement accuracy of the mirror oscillator must reach the standard quantum limit derived from Heisenberg's uncertainty principle. In the case of milligram-scale mirrors, which are the subject of this study, the conventional pendulum-type suspension method is limited by the thermal noise of the suspension line and cannot reach the standard quantum limit. Therefore, in the previous study, we focused on the magnetic levitation of graphite, which is a diamagnetic material, and aimed to create an oscillator loaded on levitated graphite with a mirror. The possibility of reducing eddy current thermal noise by levitating ring-shaped graphite on a ring-shaped magnet was also investigated, but stable levitation was difficult to achieve, resulting in discrepancies with levitation simulations. In this study, a simplified linear Halbach array was used and the theoretical equation was corrected to match the experimental results for horizontal stability. We also experimentally confirmed the scaling of the Q-value, which is expected from the theoretical expression for eddy current thermal noise. Furthermore, the use of an electrostatic actuator was investigated as an actuator necessary to control the levitated mirror.

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
<b>第 2 章</b>	<b>背景</b>	<b>2</b>
2.1	巨視的量子力学	2
2.1.1	巨視的物体の重ね合わせ状態	2
2.1.2	重力デコヒーレンス	3
2.1.3	フォノンとフォトンのエンタングルメント	4
2.2	オプトメカニクスの基礎	6
2.2.1	光共振器	6
2.2.2	機械振動子	11
2.2.3	オプトメカニカル カップリング	16
2.3	雑音	18
2.3.1	量子雑音	18
2.3.2	古典雑音	19
<b>第 3 章</b>	<b>反磁性浮上</b>	<b>25</b>
3.1	磁性	25
3.2	磁性の分類	26
3.2.1	常磁性体	26
3.2.2	強磁性体	26
3.2.3	反強磁性	27
3.2.4	反磁性	28
3.3	浮上原理	28
3.4	反磁性体の磁化率	31
3.5	磁石の配列と形状	32
<b>第 4 章</b>	<b>【実験 1】反磁性浮上実験</b>	<b>34</b>
4.1	先行実験	34
4.1.1	浮上シミュレーション	34
4.1.2	リング型磁石と直方体型グラファイト	37
4.1.3	リング型磁石とリング型グラファイト	41
4.2	新型磁石配列による浮上実験	47
4.2.1	新型浮上シミュレーション	48

4.2.2	治具の設計	56
4.2.3	グラファイトの設計	57
4.2.4	浮上実験	61
<b>第 5 章</b>	<b>渦電流熱雑音</b>	<b>64</b>
5.1	ジュール熱によるエネルギー散逸	64
5.2	渦電流熱雑音の寄与	66
<b>第 6 章</b>	<b>【実験 2】 Q 値測定実験</b>	<b>67</b>
6.1	Q 値測定	67
6.1.1	シャドウセンシング	67
6.1.2	Q 値測定結果	69
6.1.3	グラファイトの大きさと Q 値の相関	71
6.2	磁石の磁場の偏り	73
6.3	磁場の偏りによる Q 値への影響	76
<b>第 7 章</b>	<b>静電アクチュエータ</b>	<b>78</b>
7.1	平行平板型	78
7.2	楕形電極型	79
<b>第 8 章</b>	<b>その他の想定される雑音</b>	<b>82</b>
8.1	磁場揺らぎが生み出す雑音	82
8.1.1	磁石の熱雑音	83
8.1.2	環境磁場雑音	85
8.2	その他の振動など	86
<b>第 9 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>87</b>
9.1	結論	87
9.2	今後の展望	88
<b>付録 A</b>	<b>治具の各パーツの設計図</b>	<b>90</b>
	<b>参考文献</b>	<b>94</b>
	<b>謝辞</b>	<b>97</b>

# 目次

2.1.1	二重スリット実験	3
2.1.2	巨視的物体の重ね合わせ状態を生成するための実験系	4
2.1.3	干渉ヴィジビリティの1周期中の変化	5
2.2.1	Fabry-Pérot 共振器	6
2.2.2	レーザー周波数の変化に対する Fabry-Pérot 共振器の透過光強度 ( $r_F = r_E$ , $\mathcal{F} = 10$ )	8
2.2.3	各 Q 値における変位スペクトルの周波数応答	13
2.2.4	機械振動子のインパルス応答	13
2.2.5	光共振器と機械振動子の間のオプトメカニカルカップリングの関係図	17
2.3.1	2mg の石英鏡を懸架したときの鏡の熱雑音と懸架線の熱雑音	24
3.2.1	磁区	26
3.2.2	永久磁化	27
3.2.3	永久磁石の B-H 曲線	27
3.2.4	スピンの向き	28
3.5.1	反磁性浮上によく使われる磁石配列の概略図	33
3.5.2	直線ハルバツハ配列の作り出す非対称な磁場マップ	33
4.1.1	先行研究におけるシミュレーションの流れ	34
4.1.2	Poisson Superfish が出力する磁場データの概観	37
4.1.3	直方体グラファイトの浮上高さ [1]	41
4.1.4	直方体型グラファイトの浮上の様子	41
4.1.5	リング型グラファイトの浮上高さ	45
4.1.6	リング型グラファイトの浮上の様子	45
4.1.7	リング型磁石の浮上高さとポテンシャルの模式図	46
4.1.8	リング型磁石の上でリング型グラファイトが安定的に浮上せず中心がずれて接触する様子	46
4.1.9	対角直線配列における浮上高さとポテンシャル	47
4.2.1	ハルバツハ直線配列における浮上高さとポテンシャル	47
4.2.2	1 × 5 × 1mm グラファイトの浮上の様子	48
4.2.3	新型浮上シミュレーションの結果	55
4.2.4	ハルバツハ配列組み立て用の 3 種類の磁石	56
4.2.5	治具の模式図	56
4.2.6	治具によるハルバツハ配列組み立て時の流れ	57

4.2.7	組み立てた 4 種類の磁石配列	57
4.2.8	磁石配列 1 に対する浮上可能なグラファイトの検証	58
4.2.9	発注したグラファイト	58
4.2.10	磁石配列 1 に対する各種グラファイトの浮上シミュレーション	59
4.2.11	磁石配列 2 に対する各種グラファイトの浮上シミュレーション	59
4.2.12	磁石配列 3 に対する各種グラファイトの浮上シミュレーション	60
4.2.13	磁石配列 4 に対する各種グラファイトの浮上シミュレーション	60
4.2.14	HOPG が磁石配列 1 に浮上する様子	61
4.2.15	ハルバツハ配列に対するグラファイトのサイズの違い	62
4.2.16	浮上要件	62
5.1.1	グラファイト中の渦電流	65
5.2.1	渦電流熱雑音の見積もり	66
6.1.1	シャドウセンシング法	67
6.1.2	理想的なシャドウセンシングのデータ	68
6.1.3	実際の実験系	69
6.1.4	Q 値測定のためのデータ処理	70
6.1.5	規格化した Q 値とグラファイトの幅の相関	72
6.2.1	磁場測定の様子	73
6.2.2	磁場測定点の模式図	74
6.2.3	磁石配列 1 の奥行きに対する磁場の各成分	74
6.2.4	磁石配列 2 の奥行きに対する磁場の各成分	75
6.2.5	磁石配列 3 の奥行きに対する磁場の各成分	75
6.2.6	磁石配列 4 の奥行きに対する磁場の各成分	76
6.3.1	y 方向の磁場勾配とグラファイト	77
6.3.2	xz 平面上に発生する渦電流	77
6.3.3	磁場勾配の Q 値測定実験への影響	77
7.1.1	平板電極の帯電と静電気力	78
7.2.1	楕形電極型静電アクチュエータの模式図	79
7.2.2	$d = 1\text{mm}$ のときの発生力	80
7.2.3	$w = 0.1\text{mm}$ のときの発生力	80
8.1.1	浮上高さに対する磁力の変化率 $\alpha$	85
8.1.2	磁石の熱雑音	85
8.2.1	真空槽内の水平計	86
9.2.1	幅 1mm の 5 層ハルバツハ配列を幅 6mm の磁石で挟み上げた配列	89
9.2.2	2mm×2mm×0.5mm のグラファイトの浮上シミュレーション	89
9.2.3	小型グラファイトの浮上可能性	89

A.0.1	Bottom . . . . .	90
A.0.2	Side . . . . .	91
A.0.3	Front . . . . .	91
A.0.4	Partition . . . . .	92
A.0.5	Lid . . . . .	92
A.0.6	Connector . . . . .	93

# 表目次

2.3.1	コーティング鏡の物性値 . . . . .	24
3.4.1	主な反磁性体の磁化率 [2] . . . . .	31
3.4.2	HOPG と CIP 材の比較 [3] [2] [4] . . . . .	32
4.2.1	シミュレーションによる 4 種の磁石配列に対する各種グラファイトの浮上可能性 . . . . .	60
4.2.2	4 種の磁石配列に対する各種グラファイトの浮上 . . . . .	61
6.1.1	Q 値の導出 . . . . .	70
6.1.2	磁石配列 1 に対する各グラファイトの Q 値 . . . . .	71
6.1.3	磁石配列 2 に対する各グラファイトの Q 値 . . . . .	71
6.1.4	磁石配列 3 に対する各グラファイトの Q 値 . . . . .	71
6.1.5	磁石配列 4 に対する各グラファイトの Q 値 . . . . .	71
6.2.1	磁石配列 1 の平均磁場勾配 . . . . .	74
6.2.2	磁石配列 2 の平均磁場勾配 . . . . .	75
6.2.3	磁石配列 3 の平均磁場勾配 . . . . .	75
6.2.4	磁石配列 4 の平均磁場勾配 . . . . .	76
8.1.1	ネオジム磁石の温度依存性 . . . . .	84

# 第 1 章

## はじめに

巨視的な物体の運動が古典力学により記述される一方、量子力学は原子などの微視的な物体の運動を記述する。微視的な世界では、この量子力学に特有な現象として、重ね合わせ状態と呼ばれる現象が観測されるが、巨視的な系において観測された例はなく、巨視的な世界でも量子力学が成立するかは未解決問題となっている。巨視的な系でデコヒーレンスが起る理由として、外部環境から十分に系を孤立させることが困難であるという技術的な問題が考えられる。では、十分に孤立させることに成功した場合、重ね合わせ状態は観測できるであろうか。現実には不可能であるとする、重力デコヒーレンスと呼ばれる仮説が存在する。[5] [6]

この仮説を実験的に検証する手法として、巨視的な機械振動子と光共振器を組み合わせた Fabry-Pérot マイケルソン干渉計による実験が提案されている。[7] [8] この干渉計において重ね合わせ状態になるのは、光共振器内の光子と機械振動子のフォノンである。特に巨視的な機械振動子を用いることで巨視的な重ね合わせ状態が成立する。ただし、機械振動子の位置測定精度を標準量子限界 (SQL<sup>\*1</sup>) に到達させることが必要になる。微視的で共振周波数の高い振動子では実現されている。[9] [10] [11] [12] [13] 一方、本研究で対象にするミリグラムスケールにおける観測例はない。

そこで本論文ではミリグラムスケールの振動子を対象に、古典雑音を標準量子限界以下に到達させることを目標とし、そのためのいくつかの検証を行なった。第 2 章では Fabry-Pérot マイケルソン干渉計によって巨視的重ね合わせ状態の生成と重力デコヒーレンスが検証できるメカニズムについて説明し、ミリグラムスケールの振動子の作成のためには懸架線に代わる新たな支持方法が必要になる理由を記す。第 3 章、第 4 章では反磁性浮上の原理と浮上実験について述べ、実験結果に即した理論式の修正とシミュレーション方法について説明する。第 5、第 6 章では反磁性体としてグラファイトを用いた場合に生じる渦電流熱雑音の影響と、グラファイトの大きさに対するスケールリングについて実験的な知見を述べる。第 7 章では浮上させたグラファイトの制御方法として静電アクチュエータを提案する。第 8 章では Q 値測定実験中に想定されるその他の雑音源と、その影響について考えた。第 9 章で本論文の結論、および今後の展望について記す。また、付録 A では本実験に用いた磁石の組み立てに要する治具の設計図を記載した。本実験に用いたような直線状ハルバツハ配列を組み立てる場合に適宜参照されたい。

---

\*1 SQL = Standard Quantum Limit

## 第 2 章

# 背景

巨視的量子現象の観測に有効な実験系と、それを実現するための方法として反磁性浮上を採用するに至った背景を説明する。

### 2.1 巨視的量子力学

本節では観測が困難であるマクロなスケールでの量子現象を観測するための検証条件を述べる。

#### 2.1.1 巨視的物体の重ね合わせ状態

まず微視的な物体の量子現象として重ね合わせ状態について述べる。微視的な世界では粒子が波の性質を持ち、重ね合わせの原理が働く。シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi \quad (2.1.1)$$

は線形の偏微分方程式であるから、重ね合わせが成立する。ある量子状態  $|\psi_1\rangle$  と  $|\psi_2\rangle$  がシュレディンガー方程式の解であるとする、任意の複素数  $c_1$ 、 $c_2$  を用いてこれらを重ね合わせた状態

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \quad (2.1.2)$$

もシュレディンガー方程式の解になっている。

この重ね合わせ状態を観測した有名な実験として二重スリット実験 [14] を紹介する。これはヤングの実験で用いられた光の代わりに、1 個の電子を用いた実験である。実験の様子を図 2.1.1 に示す。この実験では、電子銃から電子をスクリーンに向かって発射して、電子の通り道となる場所に 2 本のスリットが開けられた板を置き、スクリーンに生じる輝点を観測したものである。するとスクリーンには濃淡の干渉縞が像として描かれ、電子の波動性を示している。

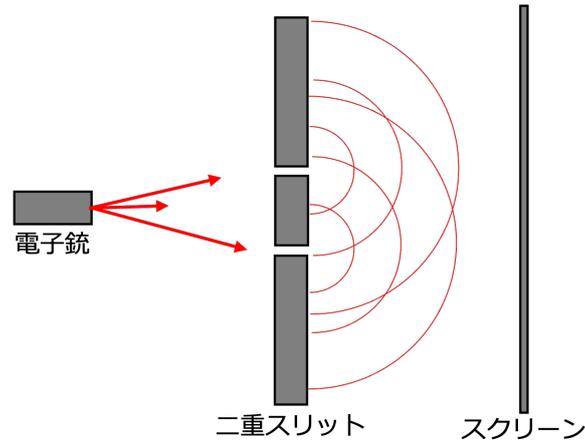


図 2.1.1: 二重スリット実験

この実験は電子を1個ずつ照射しても、同じ結果が得られる。つまりスリットを抜けてスクリーンに生じる電子の状態  $|\psi\rangle$  は、式 (2.1.2) のように左右のスリットを通り抜けた電子の状態  $|\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_2\rangle$  の重ね合わせで表される。このことから干渉縞が重ね合わせ状態によるものであるとわかる。

では、巨視的な物体の重ね合わせ状態は観測について考える。現実には巨視的な物体を外部環境から孤立させるのが難しく、重ね合わせ状態が観測できなくなる。つまりデコヒーレンスが起こると考えられる。では、古典的な雑音を低減しデコヒーレンスの要因を排除した場合には、重ね合わせ状態が維持されるかという、これを否定する重力デコヒーレンスと呼ばれる仮説が存在する。[5] [6] この仮説では物体自身の重力の効果によりデコヒーレンスが起こると考える。この重力デコヒーレンスなどの未知のデコヒーレンス要因を検証し、質量依存性を調べることで量子力学と古典力学の境界を探ることができる。

### 2.1.2 重力デコヒーレンス

量子力学では位置の重ね合わせが起こるが、一般相対論では異なる時空点では固有時が異なるため重ね合わせ状態の時間発展は非自明である。Diósi-Penrose のモデル [15] によれば、質量  $m$  の物体の重ね合わせ状態の持続時間、つまりデコヒーレンスが起こるまでの時間  $\tau$  は

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar}{U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - U(\mathbf{0})} \quad (2.1.3)$$

$$U(\mathbf{x}) = -Gm^2 \frac{\text{Erf}(|\mathbf{x}|/R_0)}{|\mathbf{x}|} \quad (2.1.4)$$

と表せる。ただし、 $G$  は万有引力定数で、 $R_0 = \frac{2\pi\hbar}{mc}$  はコンプトン波長、 $\text{Erf}(\mathbf{x})$  はガウスの誤差関数である。そこで、物体の重力エネルギーを  $\Delta E$  とすれば、デコヒーレンス時間  $\tau$  はより簡単に

$$\tau \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} \quad (2.1.5)$$

程度であると言える。

通常、量子的な性質を表す電子や原子のスケールではこのデコヒーレンス時間  $\tau$  が非常に長く、重力デコヒーレンスの効果が現れるよりも早く熱的でコヒーレンスなど他の要因によりデコヒーレンスが起こると考え

られる。一方、質量の大きい物体を重ね合わせ状態にした上で、既知のデコヒーレンス要因から想定されるデコヒーレンス時間よりも早く重ね合わせ状態が消えた場合、重力デコヒーレンスの効果が示唆される。

デコヒーレンス時間について、Diósi-Penrose モデルと異なる質量依存性を提唱するモデルも存在する。例えば、デコヒーレンス時間  $\tau$  を最短コヒーレンス距離  $a_c$  を用いて

$$\tau = \frac{ma_c^2}{\hbar} \quad (2.1.6)$$

$$a_c \simeq \frac{\hbar}{G} \frac{1}{m^3} \quad (\text{for an elementary particle}) \quad (2.1.7)$$

と表す Károlyházy のモデル [16] [17] や、プランク質量  $m_{\text{pl}} = 22[\mu\text{g}]$  を境に急激にデコヒーレンス時間が変化するモデル [18] などである。重力によるデコヒーレンスがどのような質量依存性を持つのか様々なモデルを検証するには、様々な質量スケールで実験を行いデコヒーレンス時間を調べる必要がある。

### 2.1.3 フォノンとフォトンのエンタングルメント

2.1.2 節で述べたように、巨視的な物体の重ね合わせ状態を生成してその持続事件であるデコヒーレンス時間  $\tau$  を測定することで、実験的検証が可能になる。そこで、巨視的な物体の重ね合わせ状態の生成方法として提案されているのが Marshall ら [7] や Müller ら [8] の Fabry-Pérot マイケルソン干渉計を用いた実験系である。

Marshall の提案する系を例に巨視的な物体の重ね合わせ状態を説明する。図 2.1.2 のような Fabry-Pérot マイケルソン干渉計に単一光子を入射させることを考える。

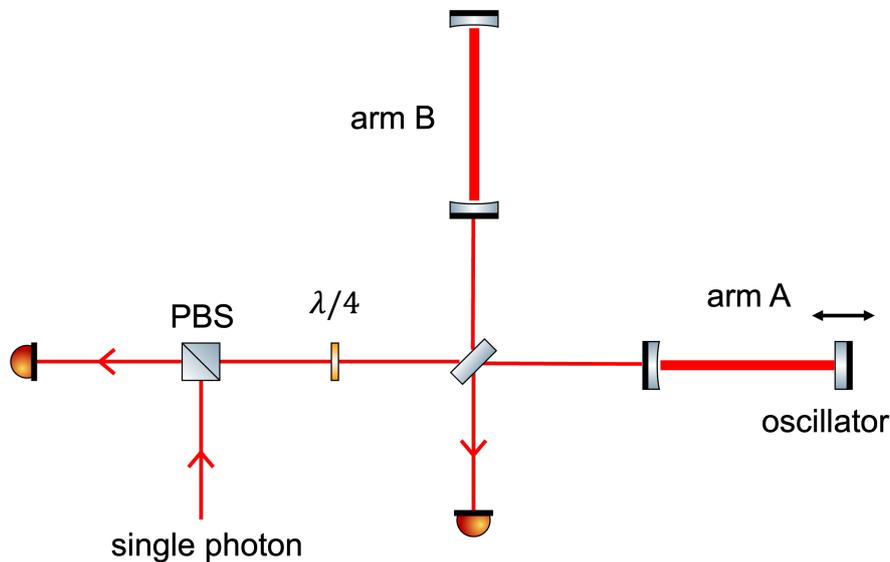


図 2.1.2: 巨視的物体の重ね合わせ状態を生成するための実験系

単一光子がマイケルソン干渉計に入射すると、量子的な干渉が起こりフォトディテクターで電圧の波として観測できる。なお干渉計の腕が Fabry-Pérot 共振器で構成されているのは、単一光子による輻射圧の効果を増幅させるためである。

腕 A のエンドミラー側に配置された機械振動子の振動モードのコヒーレント状態を  $|\beta\rangle_m$  とする。初期状態  $t = 0$  で単一光子が腕 A に存在する状態と腕 B に存在する場合の重ね合わせ状態になっているとき、波動関数は

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) |\beta\rangle_m \quad (2.1.8)$$

と書ける。この時間発展は

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_c t} \left[ |0\rangle_A |1\rangle_B |\beta e^{-i\omega_m t}\rangle_m + e^{i\zeta^2(\omega_m t - \sin \omega_m t)} |1\rangle_A |0\rangle_B |\beta e^{-i\omega_m t} + \zeta(1 - e^{-i\omega_m t})\rangle_m \right] \quad (2.1.9)$$

となる。ただし、 $\omega_c$  は光子の角周波数、 $\omega_m$  は機械振動子の角周波数、 $\zeta$  は光子と機械振動子のカップリングの強さを表すパラメータである。式 (2.1.9) より、単一光子と機械振動子の振動モードのフォノンが量子もつれ状態になっていることが分かる。機械振動子の振動モードの 1 周期  $T = 2\pi/\omega_m$  が経過すると、式 (2.1.8) で表される初期状態に戻るようになる。

このときの単一光子の干渉ヴィジビリティ  $R_{\text{vis}}$  は、外部の熱浴との相互作用を考慮すると

$$R_{\text{vis}} = \exp[-\zeta^2(2n_{\text{th}} + 1)(1 - \cos \omega_m t)] \quad (2.1.10)$$

と時間変化する。ここで、 $n_{\text{th}} = k_B T_{\text{th}}/\hbar\omega_m$  は熱浴の熱的フォノン数である。 $\zeta = 1$  を仮定し、各フォノン数についてヴィジビリティ  $R_{\text{vis}}$  の 1 周期内の変化をプロットすると図 2.1.3 となる。

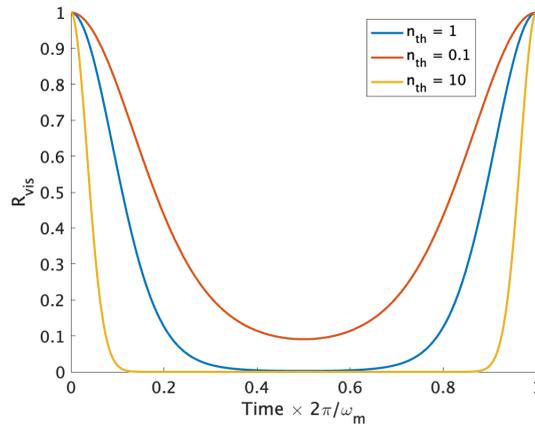


図 2.1.3: 干渉ヴィジビリティの 1 周期中の変化

1 周期経過後にヴィジビリティが復活することは、エンタングルメントが少なくとも 1 周期維持されたことを意味する。そこで、ヴィジビリティの復活が持続する時間を測定することで、エンタングルメントの持続時間を測定でき、デコヒーレンス時間を求めることができる。ただし、フォノン数が大きいとヴィジビリティが極大値を取れる時間が短くなり、測定が困難になる。そこで外部の熱浴からの雑音の流入を抑制し、機械振動子を十分に冷却することがデコヒーレンス時間測定実験において必要条件となる。この雑音についての要件について 2.3 節で説明する。

## 2.2 オプトメカニクスの基礎

デコヒーレンス時間測定のための干渉実験では Fabry-Pérot マイケルソン干渉計を用いる。特に光共振器中の光子と機械振動子のフォノンの交換が巨視的な重ね合わせ状態の実現に不可欠である。本節では光共振器と機械振動子により構成されるオプトメカニクスの基礎について確認する。

### 2.2.1 光共振器

光共振器を特徴付けるパラメータを導入するため、単純な共振器として図 2.2.1 のような Fabry-Pérot 共振器の古典的な応答を考察する。Fabry-Pérot 共振器は距離  $L$  だけ離れた 2 つの高反射率ミラーから構成され、内部では角周波数  $\omega_{\text{cav},m} \simeq m \cdot \pi(c/L)$  で与えられる光の共振が生じる。ここで  $m$  はモード数を表す整数である。以下では、単一の光モードに焦点をあて、その角周波数を  $\omega_{\text{cav}}$  とする。

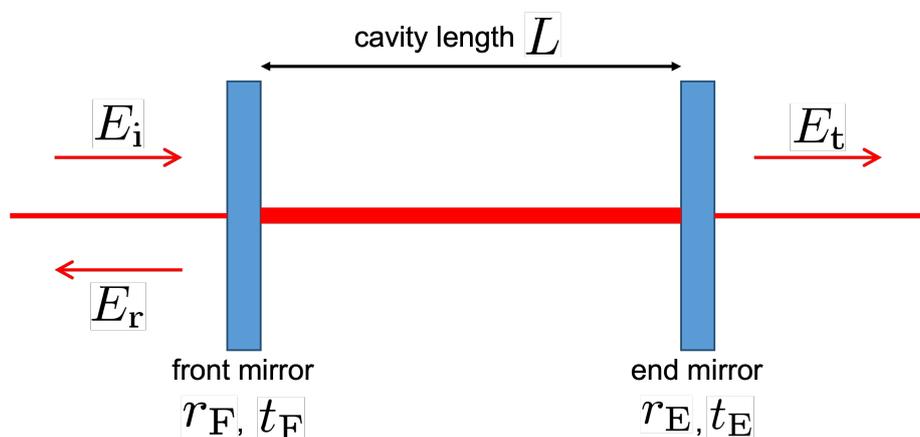


図 2.2.1: Fabry-Pérot 共振器

#### 2.2.1.1 共振器の反射率と透過率

図 2.2.1 の Fabry-Pérot 共振器におけるフロントミラーの反射率と透過率をそれぞれ  $r_F$ 、 $t_F$  とし、エンドミラーの反射率と透過率をそれぞれ  $r_E$ 、 $t_E$  とする。このとき、光が共振器内部を往復する時の位相変化は

$$\phi = \frac{2L\omega_{\text{cav}}}{c} \quad (2.2.1)$$

と表される。フロントミラーに入射するレーザー光の電場振幅を  $E_i$  とすると、共振器からの反射光の振幅は

$$\begin{aligned} E_r &= E_i(-r_F) + E_i t_F^2 r_E e^{-i\phi} + E_i t_F^2 r_E^2 r_F e^{-2i\phi} + \dots \\ &= E_i \left( -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \right) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

となる。また同様に共振器からの透過光の振幅は

$$\begin{aligned} E_t &= E_i t_F t_E e^{-i\frac{\phi}{2}} + E_i t_F r_E r_F t_E e^{-i\frac{3\phi}{2}} + E_i t_F r_E^2 r_F^2 t_E e^{-i\frac{5\phi}{2}} \\ &= E_i \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

となる。よって Fabry-Pérot 共振器全体の反射率  $r_{\text{cav}}$  と透過率  $t_{\text{cav}}$  は

$$r_{\text{cav}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \quad (2.2.4)$$

$$t_{\text{cav}} = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \quad (2.2.5)$$

とかける。さらに、反射光と透過光の強度は

$$P_r = |E_r|^2 = \frac{[(t_F^2 + r_F^2)r_E - r_F]^2 + 4r_F r_E (t_F^2 + r_F^2) \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2(\phi/2)} |E_i|^2 \quad (2.2.6)$$

$$P_t = |E_t|^2 = \frac{(t_F t_E)^2}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2(\phi/2)} |E_i|^2 \quad (2.2.7)$$

と求まる。透過光強度が最大になるとき共振器内部の光強度が最大になり、入射レーザー光と Fabry-Pérot 共振器が共振しているという。つまり Fabry-Pérot 共振器の共振条件は

$$\phi = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (2.2.8)$$

とわかる。この条件は式 (2.2.1) と光の周波数と波長の関係を用いて

$$2L = m\lambda \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (2.2.9)$$

と書き直せる。これより、共振器の往復長がレーザーの波長  $\lambda$  の整数倍のとき共振条件を満たすことがわかる。

### 2.2.1.2 共振器を特徴付ける量

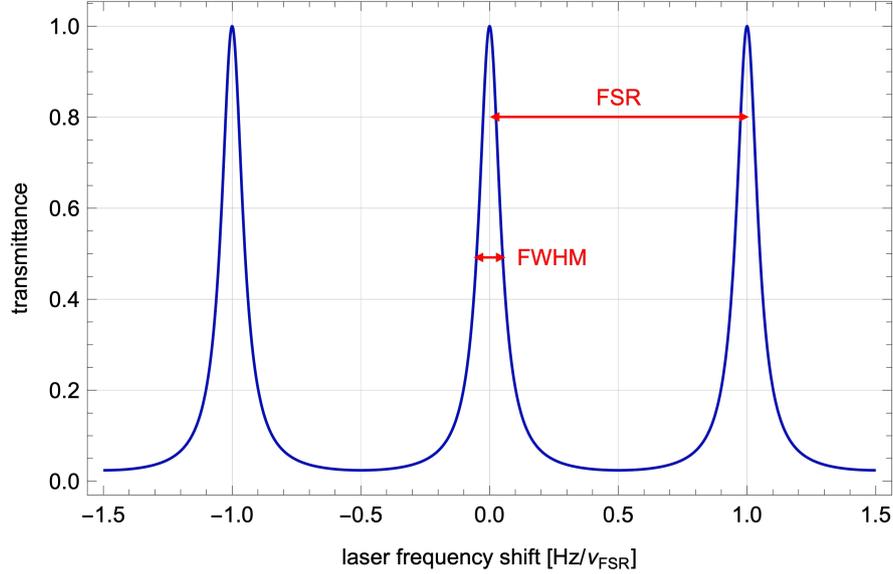


図 2.2.2: レーザー周波数の変化に対する Fabry-Pérot 共振器の透過光強度 ( $r_F = r_E$ ,  $\mathcal{F} = 10$ )

共振器長  $L$  を固定してレーザーの周波数  $\omega_{\text{cav}}$  を変化させると、透過光強度は周期的に変化する。式 (2.2.1)(2.2.7) を用いて  $P_t/|E_i|^2$  を  $\omega_{\text{cav}}$  に対してプロットすることで、この変化を図にすると図 2.2.2 となる。この周期を Free Spectral Range (FSR) といい、式 (2.2.1)(2.2.8) より

$$\Delta\phi = \frac{2L\Delta\omega_{\text{FSR}}}{c} = 2\pi \quad (2.2.10)$$

$$\therefore \Delta\omega_{\text{FSR}} = \pi \frac{c}{L} \quad (2.2.11)$$

よって

$$\Delta\nu_{\text{FSR}} = \frac{\Delta\omega_{\text{FSR}}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \quad (2.2.12)$$

となる。また、透過光強度ピークの半値全幅  $\Delta\nu_{\text{FWHM}}$  は式 (2.2.7) より

$$\frac{1}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2\left(\frac{\pi L \Delta\nu_{\text{FWHM}}}{c}\right)} = \frac{1}{2} \quad (2.2.13)$$

を解けば良い。 $\frac{\pi L \Delta\nu_{\text{FWHM}}}{c} = \frac{\pi \nu_{\text{FWHM}}}{2\nu_{\text{FSR}}} \ll 1$  のとき

$$\Delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{c(1 - r_F r_E)}{2\pi L \sqrt{r_F r_E}} = \frac{1 - r_F r_E}{\pi \sqrt{r_F r_E}} \Delta\nu_{\text{FSR}} \quad (2.2.14)$$

となる。 $\Delta\nu_{\text{FSR}}$  と  $\Delta\nu_{\text{FWHM}}$  の比は共振の鋭さを表わし、フィネス (Finesse) という。

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}}}{\Delta\nu_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \quad (2.2.15)$$

鏡の反射率を大きくするほどフィネスは大きくなり、共振が鋭くなることが分かる。

また光共振器を特徴付ける量として共振器光子の寿命  $\tau_c$  がある。寿命とはいえ、実際にはその逆数をとった共振器光子の損失率  $\kappa_c = 1/\tau_c$  で考えることが多い。本稿では振幅の損失率が  $\kappa_c/2$  で与えられるように、光子 (エネルギー) の損失率に  $\kappa_c$  を使用している。いくつかの論文では後者を  $\kappa_c$  とする場合もあるため注意が必要である。まとめると、共振器内の電場は周波数  $\omega_{\text{cav}}$  で振動し、レート  $\kappa_c/2$  で減衰する。このような光共振モードの周波数スペクトル  $S_c(\omega)$  は、指数関数の Fourier 変換が Lorentz 関数であることから

$$S_c(\omega) \propto \frac{1}{(\omega - \omega_{\text{cav}})^2 + (\kappa_c/2)^2} \quad (2.2.16)$$

という形になると予測される。これより、損失率  $\kappa_c$  はこの Lorentzian スペクトルの半値全幅となっていることが分かる。つまり、損失率  $\kappa_c$  は透過光強度ピークの半値全幅  $\Delta\nu_{\text{FWHM}}$  に対応し、同様にフィネスを表せる。

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\omega_{\text{FSR}}}{\kappa_c} \quad (2.2.17)$$

また光共振器を特徴付ける量として Q 値 (Quality factor) を導入できる。

$$Q_{\text{opt}} = \frac{\omega_{\text{cav}}}{\kappa_c} \quad (2.2.18)$$

Q 値は  $\tau_c$  の間に電磁波が何回振動できるかを表す量である。Q 値は機械振動子 (2.2.2 節参照) の減衰率を特徴付ける量でもあることに注意したい。

Fabry-Pérot 共振器のロスの原因は、主にミラーにおける共振器外への散乱と、ミラーの反射率の不完全さである。つまり、Fabry-Pérot 共振器の損失率は 1 秒間に何回ミラーによる反射が起きるかに比例する。このとき、共振器長が長くなればなるほど損失率が減り、Q 値が大きくなる。このような状況では Q 値は損失率を表わす量ではあるが、Fabry-Pérot 共振器の特性を表すには不十分である。このように光子の寿命ではなく共振器内を光子が何往復できるかで評価するための量がフィネスである。

一般に、共振器光子の損失率  $\kappa_c$  には 2 つの要素が関与している。1 つは入力または出力時の機械振動子とのカップリングの際に生じる損失、もう 1 つは共振器内部での損失である。高 Q 値共振器の場合、共振器の全損失率はこの要素の和としてかける。

$$\kappa_c = \kappa_{\text{ex}} + \kappa_0 \quad (2.2.19)$$

図 2.2.1 のような Fabry-Pérot 共振器の場合、 $\kappa_{\text{ex}}$  はフロントミラーにおける損失率を表し、 $\kappa_0$  は内部での損失率をまとめたもので、エンドミラーでの透過時の損失やフロントミラーの後ろで起こる全ての散乱による損失と吸収による損失を含んでいる。厳密には損失の要因はより細かく区別できるが、上のように 2 つに区別することで  $\kappa_0$  に分類される光子は測定されないものとして仮定していることに注意する。

### 2.2.1.3 入出力理論

入出力理論とはハイゼンベルグ描像により定式化されたもので、共振器内の電磁場振幅  $\hat{a}$  の時間発展を記述する理論である。2.2.1.2 節で見たように振幅  $\hat{a}$  は  $\kappa_c/2$  の速度で減衰する。同時に、その揺らぎは共振器の様々なポートから流入する。今回の場合、 $\kappa_{\text{ex}}$  で減衰する入力カップリングに関連するチャンネルと、エンドミラーでのロスを含む損失率  $\kappa_0$  で表されるその他の損失過程を区別する。また、以下の議論における反射や透過の意味は考慮する実験方法に厳格に依存するが、以下では Fabry-Pérot 共振器であることを想定して考える。このとき、運動方程式は次で表される。

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{\kappa_c}{2}\hat{a} + i\Delta\hat{a} + \sqrt{\kappa_{\text{ex}}}\hat{a}_{\text{in}} + \sqrt{\kappa_0}\hat{f}_{\text{in}} \quad (2.2.20)$$

古典的な場合、 $\hat{a}$  は共振器モードの電場の複素振幅を正規化したものに置き換わる。実際、この方程式の古典的な描像は  $\hat{a} \mapsto \langle \hat{a} \rangle$  のように単に平均を取ることで得られる。ここではレーザー周波数  $\omega_L$  で回転する系、つまり  $\hat{a}^{\text{orig}} = e^{-i\omega_L t} \hat{a}^{\text{here}}$  とし、共振器モードに対するレーザーの離調度として  $\Delta = \omega_L - \omega_{\text{cav}}$  を導入した (2.2.3 節参照)。また機械振動子の散逸と外部雑音を記述するために、機械振動子についても同様の式が与えられることに注意する (2.2.2 節参照)。

入力場  $\hat{a}_{\text{in}}(t)$  は、単純な場合  $t$  における共振器とカップリングする揺らぎのある真空場とコヒーレントなレーザー光を表す。この入力場は

$$P = \hbar\omega_L \langle \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \hat{a}_{\text{in}} \rangle \quad (2.2.21)$$

と正規化され、これは共振器への入射光強度を表す。つまり  $\langle \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \hat{a}_{\text{in}} \rangle$  は共振器に到達する光子の割合を意味する。 $\hat{f}_{\text{in}}$  についても、外部雑音など望ましくない経路についても同様の説明が成り立つ。入出力理論によると Fabry-Pérot 共振器から反射される場合は

$$\hat{a}_{\text{out}} = \hat{a}_{\text{in}} - \sqrt{\kappa_{\text{ex}}}\hat{a} \quad (2.2.22)$$

で表される。ここで式 (2.2.20)(2.2.22) の平均を取ることで、古典的な量に注目する。まず、振幅が  $\langle \hat{a}_{\text{in}} \rangle$  で与えられる単色レーザー光を用いた場合の定常状態にある振幅として式 (2.2.20) を解くことができ、 $\langle \hat{f}_{\text{in}} \rangle = 0$  であることに注意すれば

$$\langle \hat{a} \rangle = \frac{\sqrt{\kappa_{\text{ex}}}\langle \hat{a}_{\text{in}} \rangle}{\kappa_c/2 - i\Delta} \quad (2.2.23)$$

となる。入力場を  $\sqrt{\kappa_{\text{ex}}}\langle \hat{a}_{\text{in}} \rangle$  とみなしたとき、入力場と共振器内場を繋ぐ係数は光感受率 (optical susceptibility) とい

$$\chi_{\text{opt}}(\omega) = \frac{1}{-i(\omega + \Delta) + \kappa_c/2} \quad (2.2.24)$$

とわかる。このとき  $\omega$  はレーザー周波数  $\omega_L$  を中心とした入力場の揺らぎのフーリエ変換を表す。また、定常状態の共振器内の光子の総数  $\overline{n_{\text{cav}}} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ 、つまり共振器内を往復する光子の平均数は式 (2.2.21) を用いて

$$\overline{n_{\text{cav}}} = |\langle \hat{a} \rangle|^2 = \frac{\kappa_{\text{ex}}}{\Delta^2 + (\kappa_c/2)^2} \frac{P}{\hbar\omega_L} \quad (2.2.25)$$

と表せる。さらに、反射光 (または透過光) 振幅は式 (2.2.23) に式 (2.2.24) を代入して計算でき、入力場の平均と反射場の平均の比を表す  $\mathcal{R}$  を導入すると

$$\mathcal{R} = \frac{\langle \hat{a}_{\text{out}} \rangle}{\langle \hat{a}_{\text{in}} \rangle} = \frac{(\kappa_0 - \kappa_{\text{ex}})/2 - i\Delta}{(\kappa_0 + \kappa_{\text{ex}})/2 - i\Delta} \quad (2.2.26)$$

を得る。この絶対値の2乗  $|\mathcal{R}|^2$  は共振器からの反射確率を表し、 $\kappa_0$  と  $\kappa_{\text{ex}}$  の大小関係によりいくつかの場合に分けることができる。

まず、外部とのカップリング  $\kappa_{\text{ex}}$  が全損失の中で支配的な要因であるとき ( $\kappa_{\text{ex}} \simeq \kappa_c \gg \kappa_0$ )、共振器は”オーバーカップリング”状態と呼ばれ、 $|\mathcal{R}|^2 \simeq 1$  のときには2枚の鏡の間で吸収も損失もなく光子が共振器か

ら現れる。次に  $\kappa_0 = \kappa_{\text{ex}}$  の場合、共振器は”クリティカルカップリング”状態と呼ばれている。この場合、共振時には  $\mathcal{R}(\Delta = 0) = 0$  となる。このことは入力パワーが共振器内で完全に散逸するか、またはエンドミラーから完全に透過することを意味する。Fabry–Pérot 共振器の場合は、 $\kappa_0$  はエンドミラーを通じた損失を意味する。最後に、 $\kappa_{\text{ex}} \ll \kappa_0$  の場合、共振器は”アンダーカップリング”状態と呼ばれ、共振器内部での損失が全損失の中で支配的であることを意味している。大抵の実験ではこの状況は情報の損失を意味するため有意義でなく、避けられるべきである。

## 2.2.2 機械振動子

物体の振動モードは形状によって決まる境界条件の下で線形弾性方程式を解くことで得られる。この固有値問題を解けば、固有モードとそれに対応する固有周波数  $\Omega_{(n)}$  が得られる。機械振動子の変位の変化は変位場  $\vec{u}_n(\vec{r})$  で与えられる。2.2.2 節以下では周波数  $\Omega_m$  で表される単一の固有周波数モードに注目し、機械振動子のエネルギー損失を減衰項の比例定数として  $\Gamma_m$  で表すことにする。このとき変位場  $\vec{u}_n(\vec{r}, t)$  を振動の振幅  $x(t)$  を用いて正規化  $\vec{u}_n(\vec{r}, t) = x(t) \cdot \vec{u}_n(\vec{r})$  することで、 $x(t)$  の時間変化を調和振動子の運動方程式により求めることができる。有効質量を  $m_{\text{eff}}$  とすると

$$m_{\text{eff}} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \Gamma_m \frac{dx(t)}{dt} + k_m x(t) = F_{\text{ex}}(t) \quad (2.2.27)$$

となる。ここで  $F_{\text{ex}}$  は機械振動子に作用する全ての外力の和を意味し、剛体の質点の運動の場合  $x(t)$  の定義は質点の変位であって、有効質量  $m_{\text{eff}}$  も剛体全体の質量に対応する。また、 $k_m$  は機械的なバネ定数であり、共振周波数  $\Omega_m$  を用いて

$$k_m = m_{\text{eff}} \Omega_m^2 \quad (2.2.28)$$

と表せる。振動子の散逸  $\gamma_m$  [Hz] を

$$\gamma_m \equiv \frac{\Gamma_m}{2m_{\text{eff}}} \quad (2.2.29)$$

定義すると、式 (2.2.27) は

$$m_{\text{eff}} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2m_{\text{eff}} \gamma_m \frac{dx(t)}{dt} + m_{\text{eff}} \Omega_m^2 x(t) = F_{\text{ex}}(t) \quad (2.2.30)$$

となる。ここでフーリエ変換

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} x(t) \quad (2.2.31)$$

を導入する。式 (2.2.30) をフーリエ変換して運動方程式を書き直せば

$$m_{\text{eff}} (-\omega^2 + 2i\gamma_m \omega + \Omega_m^2) = F_{\text{ex}}(\omega) \quad (2.2.32)$$

を得る。また変位の外力に対する応答として

$$x(\omega) = \chi_m(\omega) F_{\text{ex}}(\omega) \quad (2.2.33)$$

で定義される感受率  $\chi_m$  を導入すると

$$\chi_m(\omega) = \frac{1}{m_{\text{eff}} (\Omega_m^2 - \omega^2 + 2i\gamma_m \omega)} \quad (2.2.34)$$

となる。低周波数での応答はバネ定数  $k$  を用いて

$$\chi_m(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{m_{\text{eff}}\Omega_m^2} = \frac{1}{k} \quad (2.2.35)$$

と表せる。共振点近く ( $\omega \simeq \Omega_m$ ) の高 Q 値振動子の応答は  $\chi_m$  をローレンチアンに近似でき、 $\Omega_m^2 - \omega^2 = (\Omega_m - \omega)(\Omega_m + \omega) \simeq 2(\Omega_m - \omega)\Omega_m$  を用いて

$$\chi_m(\omega) \simeq \frac{1}{2m_{\text{eff}}\Omega_m\{(\Omega_m - \omega) + i\gamma_m\}} \quad (2.2.36)$$

となる。

次に、熱雑音による変位スペクトルを求める。熱浴から物体に熱雑音が流入する過程は、物体から外部に熱振動を放出する散逸過程の逆であるため、振動の減衰の大きな振動子は外部からの熱雑音の流入が大きくなる。これを揺動散逸定理という。これによれば熱揺動力のスペクトルは

$$S_{f,\text{th}}(\omega) \simeq 4k_B T_{\text{th}} \gamma_m m_{\text{eff}} \quad (2.2.37)$$

と表せるから [19]、熱雑音による振動子の変位スペクトル  $S_{x,\text{th}}(\omega)$  [m<sup>2</sup>/Hz] は

$$\begin{aligned} S_{x,\text{th}}(\omega) &= |\chi(\omega)|^2 S_{f,\text{th}}(\omega) \\ &= \frac{1}{m_{\text{eff}}} \frac{4k_B T_{\text{th}} \gamma_m}{(\Omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_m^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

となる。熱雑音は具体的には粒子のランダムな衝突によって生じるブラウン運動由来の熱雑音やレーザー光の輻射圧揺らぎが相当する。

ここで、機械振動子における Q 値を定義する。Q 値とは機械振動子の共振角周波数  $\Omega_m$  と散逸  $\gamma_m$  の比で表される。ただし機械振動子の散逸  $\gamma_m$  には周波数依存しない viscous モデルと周波数依存する structure モデルの 2 つが存在し、それぞれの場合で Q 値は次のように定義される。

$$Q_m \equiv \begin{cases} \frac{\Omega_m}{2\gamma_m} & (\text{viscous - damping model}) \\ \frac{\Omega_m^2}{2\gamma_m(\omega) \cdot \omega} & (\text{structure - damping model}) \end{cases} \quad (2.2.39)$$

以降では断りがない限り、周波数依存しない viscous モデルに従うものとして考える。式 (2.2.38) で表される変位のパワースペクトル密度\*1の平方根で定義される変位の振幅スペクトル密度\*2  $\sqrt{S_{x,\text{th}}(\omega)}$  [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ] について、いくつかの特徴的な Q 値における周波数依存性を調べる。

\*1 PSD = Power Spectral Density(パワースペクトル密度)

\*2 ASD = Amplitude Spectral Density(振幅スペクトル密度)

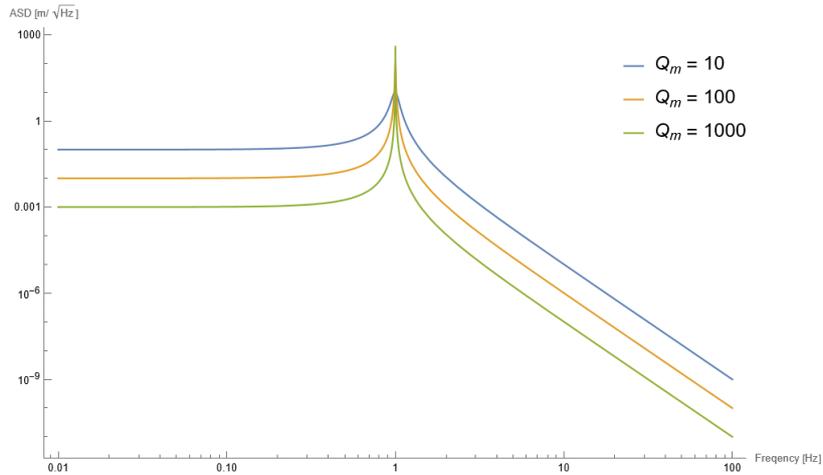


図 2.2.3: 各 Q 値における変位スペクトルの周波数応答

図 2.2.3 は Q 値が 10、100、1000 のときの変位スペクトルの周波数依存性を表したものである。共振周波数を  $\Omega_m/2\pi = 1$  とし、適当に規格化することで得た。図からわかるように Q 値が高いほどピークが鋭くなっている。このことは Q 値がスペクトルのフロアレベル  $\sqrt{S_{x,th}(\omega = 0)}$  とピーク  $\sqrt{S_{x,th}(\omega = \Omega_m)}$  の比で与えられることと合致する。また、機械振動子の散逸  $\gamma_m$  が Q 値の逆数に比例することを考えると、Q 値が高いほど共振ピークが鋭くなることと合致する。

様々なエネルギーの散逸過程は全体の機会損失に対して独立に寄与する。そのため機械振動子全体としての Q 値  $Q_{total}$  は以下のように与えられる。

$$\frac{1}{Q_{total}} = \sum \frac{1}{Q_i} \quad (2.2.40)$$

ここで  $i$  は異なる散逸過程を表している。

また、外力として式 (2.2.27) に  $F_{ex}(t) = \delta(t)$  を加えた場合、つまりインパルス応答を見ると、熱平衡状態に至るまでの変位の時間変化は以下の通り。

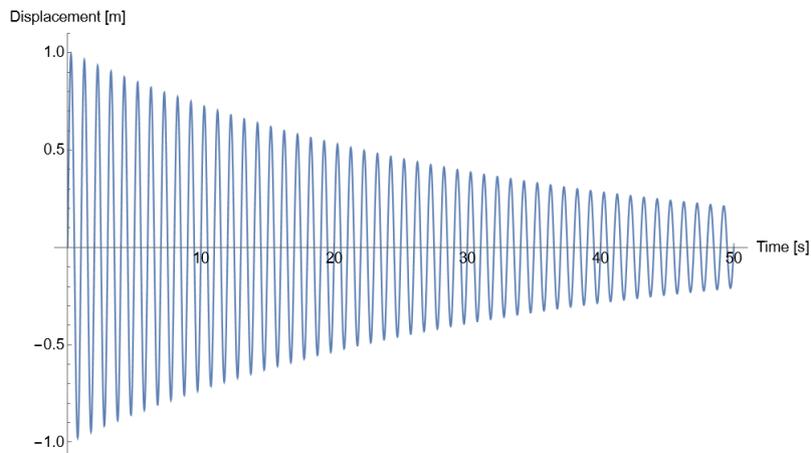


図 2.2.4: 機械振動子のインパルス応答

図 2.2.4 は  $\Omega_m/2\pi = 1$  として  $Q_m = 100$  であるような振動子の場合を描いたものである。変位  $x(t)$  は

$$\begin{aligned} x(t) &\propto \exp(-\gamma_m t) \sin(\Omega_m t) \\ &= \exp\left(-\frac{\Omega_m t}{2Q_m}\right) \sin(\Omega_m t) \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

と表すことができ、散逸  $\gamma_m$  が機械振動子の寿命の逆数、 $Q$  値がコヒーレントな振動回数を表すことが分かる。

2.3.2 節にて想定される種々の古典雑音の ASD を確認する。

### 2.2.2.1 フォノン

次に、機械調和振動子の量子力学的描像を考える。フォノンの生成 ( $\hat{b}^\dagger$ ) 消滅 ( $\hat{b}$ ) 演算子を以下のように定義する。

$$\hat{x} \equiv x_{\text{ZPF}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (2.2.42)$$

$$\hat{p} \equiv -im_{\text{eff}}\Omega_m x_{\text{ZPF}}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \quad (2.2.43)$$

ただし

$$x_{\text{ZPF}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\text{eff}}\Omega_m}} \quad (2.2.44)$$

は機械振動子のゼロ点振動における振幅を意味し、真空状態を  $|0\rangle$  と表したときに  $\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle = x_{\text{ZPF}}^2$  と表せる。このとき、機械調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\Omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2}\hbar\Omega_m \quad (2.2.45)$$

とかける。変位演算子と運動量演算子の交換関係は

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.2.46)$$

を満たす。また、 $\hat{b}^\dagger \hat{b}$  はフォノン数演算子を意味し、その平均によりフォノン数を定義できる。

$$n_{\text{pn}} \equiv \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \quad (2.2.47)$$

ここでフォノン数とは、振動子のエネルギーが 1 量子  $\hbar\Omega_m$  を単位として基底状態よりもどれだけ大きいかを表す物理量である。以下ではゼロ点エネルギーである  $(1/2)\hbar\Omega_m$  の振動子の屈エネルギーへの寄与は省略するものとする。

散逸の効果をフォノン数を通じて考える。まず熱浴のフォノン数  $n_{\text{th}}$  について考える。エネルギー等分配則より、振動子のある 1 つのモードは  $k_B T_{\text{th}}/2$  のエネルギーを持つため、次の等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}m_{\text{eff}}\Omega_m^2 \langle \hat{x}^2 \rangle_{\text{th}} = \frac{1}{2}k_B T_{\text{th}} \quad (2.2.48)$$

また、フォノン数は平均 2 乗変位置を用いて

$$n_{\text{th}} = \frac{m_{\text{eff}}\Omega_m}{\hbar} \langle \hat{x}^2 \rangle_{\text{th}} \quad (2.2.49)$$

ともかけるため、熱浴のフォノン数は

$$n_{\text{th}} = \frac{k_{\text{B}}T_{\text{th}}}{\hbar\Omega_{\text{m}}} \quad (2.2.50)$$

と求められる。つまり、熱的エネルギーと振動子の1量子エネルギーの比により与えられることが分かる。

散逸の効果を考えるため、機械振動子が外部の熱浴とカップリングしている状況を仮定する。フォノン数が次式

$$\frac{d}{dt}n_{\text{pn}} = -2\gamma_{\text{m}}(n_{\text{pn}} - n_{\text{th}}) \quad (2.2.51)$$

に従い時間発展するとし、初期状態を  $n_{\text{pn}}(t=0) = 0$  とすると、フォノン数の時間依存性は

$$n_{\text{pn}}(t) = n_{\text{th}}(1 - e^{-2\gamma_{\text{m}}t}) \quad (2.2.52)$$

と求められる。これにより基底状態からの変化率は以下のように与えられる。

$$\left. \frac{d}{dt}n_{\text{pn}} \right|_{t=0} = 2\gamma_{\text{m}}n_{\text{th}} \simeq \frac{k_{\text{B}}T_{\text{th}}}{\hbar Q_{\text{m}}} \quad (2.2.53)$$

後者の式はしばしば熱減衰率 (Thermal Decoherence Rate) と呼ばれ、量子1つが外部の熱浴から流入するのにかかる時間の逆数で与えられる。これは、よりデコヒーレンスを弱くするには機械振動子の  $Q$  値を高くし、外部の熱浴の低温にすることが有効であることを示している。

### 2.2.2.2 fQ 条件

別の有用な量として  $fQ$  値がある。これは機械振動子が外部の熱浴とのデカップリングを定量的に表すことができる。この  $fQ$  値の条件について考える。いま光子場が存在せず、機械振動子が  $T_{\text{th}}[\text{K}]$  の熱浴のみと相互作用すると仮定する。式 (2.2.51)~(2.2.53) の議論をそのまま用いることができる。振動子が1周期経過した後のフォノン数の増加量は式 (2.2.53) を用いて

$$n_{\text{pn},+} = \frac{\left. \frac{d}{dt}n_{\text{pn}} \right|_{t=0}}{\Omega_{\text{m}}} = \frac{k_{\text{B}}T_{\text{th}}}{\hbar\Omega_{\text{m}}Q_{\text{m}}} \quad (2.2.54)$$

と表せる。これが1を越えなければ、1周期の時間中は基底状態を保つことができる。この逆数を考える。つまり、フォノン数が1増加するまでの振動子の振動数  $N_{\text{osc}}$  が

$$N_{\text{osc}} = \frac{1}{n_{\text{pn},+}} = \frac{\hbar\Omega_{\text{m}}Q_{\text{m}}}{k_{\text{B}}T_{\text{th}}} > 1 \quad (2.2.55)$$

を満たせば、基底状態で1周期以上振動することが担保される。共振角周波数  $\Omega_{\text{m}}$  を共振周波数  $f_{\text{m}}$  に書き換えることで

$$f_{\text{m}} \cdot Q_{\text{m}} > \frac{k_{\text{B}}T_{\text{th}}}{h} \quad (2.2.56)$$

という条件が得られる。ここで熱浴が常温 ( $T_{\text{th}} = 300[\text{K}]$ ) であると仮定すると、

$$f_{\text{m}} \cdot Q_{\text{m}} > 6 \times 10^{12} \quad (2.2.57)$$

を達成することで、機械振動子を基底状態で振動させることができると分かる。

### 2.2.3 オプトメカニカル カップリング

光共振器と機械振動子のカップリングでは、輻射圧のような光子の運動量の転移によって行われる。輻射圧カップリングの最も単純な系は、Fabry-Pérot 共振器における反射によって発生する。単一光子の運動量は光の波長  $\lambda$  を用いて  $|\Delta p| = 2h/\lambda$  と与えられるため、輻射圧の力は

$$\langle \hat{F} \rangle = 2\hbar k \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{\tau_c} = \hbar \frac{\omega}{L} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \quad (2.2.58)$$

で与えられる。ここで  $\tau_c = 2L/c$  は共振器を光子が往復するのにかかる時間である。そのため、 $\hbar\omega/L$  が共振器中の単一光子による輻射圧力である。レーザー光が Fabry-Pérot 共振器内を往復することでカップリングを強力なものにする。

カップリングのない状態の光共振器のあるモード ( $\omega_{\text{cav}}$ ) と機械振動子のモード ( $\Omega_m$ ) は2つの調和振動子により表される。

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_{\text{cav}}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} \quad (2.2.59)$$

光共振器のエンドミラーが可動式のミラーである場合、光共振器の共振周波数はミラーの変位に依存する。

$$\omega_{\text{cav}}(x) \simeq \omega_{\text{cav}} + x \frac{\partial \omega_{\text{cav}}}{\partial x} + \dots \quad (2.2.60)$$

ここで共振周波数のシフトを

$$G \equiv -\frac{\partial \omega_{\text{cav}}}{\partial x} = -\frac{\omega_{\text{cav}}}{L} \quad (2.2.61)$$

とする。これはつまり、変位  $x > 0$  のとき共振器長が伸び、共振周波数  $\omega_{\text{cav}}(x)$  が小さくなることを意味する。これを用いて光共振器のハミルトニアンは

$$\hbar\omega_{\text{cav}}(x)\hat{a}^\dagger\hat{a} \simeq \hbar(\omega_{\text{cav}} - G\hat{x})\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (2.2.62)$$

と近似的に表せる。ここで  $\hat{x}$  は式 (2.2.42) の定義に従う。これにより、光共振器と機械振動子の相互作用項は

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hbar g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (2.2.63)$$

と表せる。ただし

$$g_0 = Gx_{\text{ZPF}} \quad (2.2.64)$$

は真空における機械光学系結合強度である。これによれば、輻射圧は変位に対する偏微分として与えられる。

$$\hat{F} = -\frac{d\hat{H}_{\text{int}}}{d\hat{x}} = \hbar G \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hbar \frac{\omega_{\text{cav}}}{L} \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.2.65)$$

フォトンとフォノンのエネルギー差が大きく、 $g_0$  は一般に小さいため実質的な相互作用は小さい。そこで、さらに外部から光共振器に  $\omega_{\text{opt}}$  から  $\Delta$  だけ離調した周波数  $\omega_L = \omega_{\text{cav}} + \Delta$  の外部光 (ポンプ光) を入れることで周波数差、つまりフォノンとフォトンのエネルギー差を補い、カップリングを強くする。ここでユニタリ変換  $\hat{U} = \exp(i\omega_L \hat{a}^\dagger \hat{a} t)$  を適用することで時間依存性のない新しいハミルトニアンが生成できる。

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{U} \hat{H}_{\text{old}} \hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \\ &= -\hbar \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \Omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + \dots \end{aligned} \quad (2.2.66)$$

第4項以降は駆動項、減衰項、揺らぎの項を省略した。

ここで、光共振器場を平均の振幅  $\langle \hat{a} \rangle = \bar{\alpha}$  と、揺らぎの項  $\delta \hat{a}$  に分けて

$$\hat{a} = \bar{\alpha} + \delta \hat{a} \quad (2.2.67)$$

と表すと、相互作用項は

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hbar g_0 (\bar{\alpha} + \delta \hat{a})^\dagger (\bar{\alpha} + \delta \hat{a}) (\hat{B}^\dagger + \hat{b}) \quad (2.2.68)$$

と書き直せる。第1項の  $-\hbar g_0 |\bar{\alpha}|^2 (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$  は平均輻射圧  $\bar{F} = \hbar G |\bar{\alpha}|^2$  が存在することを示している。これは、 $\delta \bar{x} = \bar{F} / m_{\text{eff}} \Omega_m^2$  によって変位の原点を適切にシフトし、補正した離調  $\Delta_{\text{new}} \equiv \Delta_{\text{old}} + G \delta \bar{x}$  を用いることで省略できる。 $|\bar{\alpha}|^1$  の次数の第2項は

$$-\hbar g_0 (\bar{\alpha}^* \delta \hat{a} + \bar{\alpha} \delta \hat{a}^\dagger) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (2.2.69)$$

の形を保ち残る。第3項の  $-\hbar g_0 \delta \hat{a}^\dagger \delta \hat{a}$  は  $|\bar{\alpha}|$  のオーダーで小さいため、省略できる。 $\bar{\alpha} = \sqrt{\bar{n}_{\text{cav}}}$  と仮定すると、ハミルトニアンは

$$\hat{H} \simeq -\hbar \Delta \delta \hat{a}^\dagger \delta \hat{a} + \hbar \Omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{H}_{\text{int}}^{(\text{lin})} + \dots \quad (2.2.70)$$

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(\text{lin})} = -\hbar g_0 \sqrt{\bar{n}_{\text{cav}}} (\delta \hat{a}^\dagger + \delta \hat{a}) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (2.2.71)$$

と近似的に表せる。係数部分の

$$g = g_0 \sqrt{\bar{n}_{\text{cav}}} \quad (2.2.72)$$

はしばしば機械光学系結合定数と呼ばれる。これは明らかにレーザー強度に依存しており、単一光子の場合 ( $\bar{n}_{\text{cav}}$ ) の結合定数  $g_0$  の方がより基本的である。

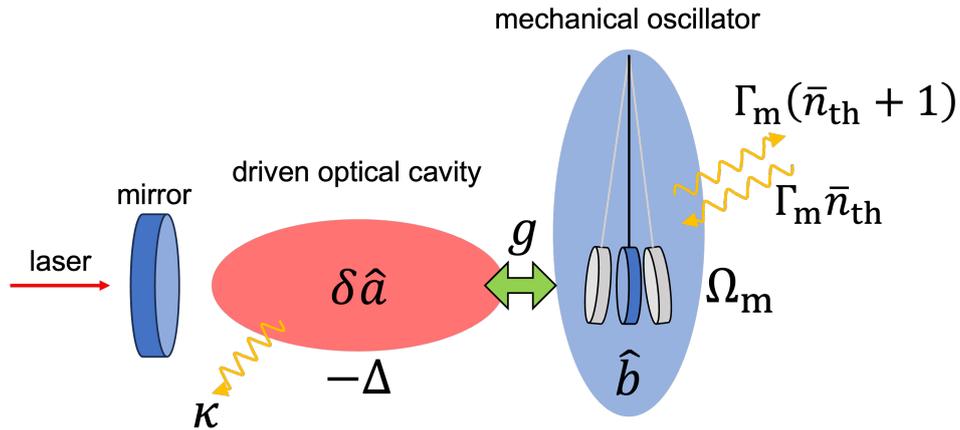


図 2.2.5: 光共振器と機械振動子間のオプトメカニカルカップリングの関係図

以下では光共振器の損失率が共振周波数より十分小さい場合 ( $\kappa \ll \Omega_m$ ) を仮定し、議論する。このとき、離調に応じて主に三つの領域に区別することができる。

$\Delta \simeq -\Omega_m$  のとき (red-detuned regime)、共振周波数がほとんど等しい 2 つの調和振動子、つまり機械振動子と光共振器の間で複数の量子エネルギーを交換することができる。この過程を説明するハミルトニアン of 相互作用項は

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(\Delta \simeq -\Omega_m)} = -\hbar g(\delta \hat{a}^\dagger \hat{b} + \delta \hat{a} \hat{b}^\dagger) \quad (2.2.73)$$

とかける。一方、生成と消滅させる項 ( $\delta \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$ ,  $\delta \hat{a} \hat{b}$ ) は、任意の状態に適用すると結合よりもはるかに大きな量で全エネルギーが変化することになるため、強く非共振であると言え、省略することができる。式 (2.2.73) の共振項のみを残すことは、回転波近似 (RWA<sup>\*3</sup>) と呼ばれ、 $\Delta \simeq -\Omega_m$  の場合、全ての熱フォノンを冷たい光子モードに移動させる「冷却」や、光と機械振動の間の量子状態移動に関連する。量子光学の分野では「ビームスプリッター」相互作用などと呼ばれる。

$\Delta \simeq +\Omega_m$  のとき (blue-detuned regime)、RWA の主要な項は

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(\Delta \simeq +\Omega_m)} = -\hbar g(\delta \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \delta \hat{a} \hat{b}) \quad (2.2.74)$$

とかけ、パラメトリック増幅の核となる「2-mode squeezing」相互作用を表す。散逸がない場合、これは機械振動モードと光共振モードの両方に蓄えられたエネルギーの指数的な成長をもたらす、両者の間に強い量子相関が成立する。つまり、両モードを効率的にもつれさせることができる。

最後に、 $\Delta \simeq 0$  のとき、相互作用項

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(\Delta \simeq 0)} = -\hbar g(\delta \hat{a}^\dagger + \delta \hat{a})(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (2.2.75)$$

は機械振動子の位置  $\hat{x} \propto \hat{b} + \hat{b}^\dagger$  が光子場の位相シフトにつながることを意味し、これはオプトメカニカル変位測定で遭遇する状況である。

## 2.3 雑音

機械振動子の位置測定には様々な雑音が流入する。これは量子雑音と古典雑音に大別することができる。量子雑音は Heisenberg の不確定性原理を根拠とする雑音で、量子現象の観測のためには古典雑音を量子雑音以下に抑える必要がある。以下では具体的な量子雑音と古典雑音の内訳について考える。

### 2.3.1 量子雑音

振動子の軌道を正弦と余弦に分割して考える。

$$\hat{x}(t) = \hat{X} \cos(\Omega_m t) + \hat{Y} \sin(\Omega_m t) \quad (2.3.1)$$

ここで、 $\hat{X}$  と  $\hat{Y}$  は振動の減衰時間より短い時間では一定である。 $\hat{X} = \hat{x}(0)$ 、 $\hat{Y} = \hat{p}(0)/m_{\text{eff}}\Omega_m$  であるため、交換関係  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  より、 $[\hat{X}, \hat{Y}] = i\hbar/m_{\text{eff}}\Omega_m$  となる。これより、Heisenberg の不確定性原理は以下を導く。

$$\Delta X \cdot \Delta Y \geq \frac{\hbar}{2m_{\text{eff}}\Omega_m} = x_{\text{ZPF}}^2 \quad (2.3.2)$$

---

\*3 RWA = Rotating-wave approximation

つまり、振動子の位置と運動量の両方を等しい精度で同時に測定すると、その揺らぎは  $\Delta X = \Delta Y = x_{\text{ZPF}}$  に制限されることがわかる。

量子雑音はフォトディテクターに入射する光子数が統計的に揺らぐことで生じる散乱雑音と、鏡が光子から受ける輻射圧が統計的に揺らぐことで生じる輻射圧雑音があり、それぞれの鏡の位置変動スペクトル  $S_{\text{shot}}(\omega)$ 、 $S_{\text{rad}}(\omega)$  は次のように表される。[20]

$$S_{\text{shot}}(\omega) = \frac{\kappa}{4\bar{n}_{\text{cav}}G^2} \left( 1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa^2} \right) \quad (2.3.3)$$

$$S_{\text{rad}}(\omega) = \frac{4\bar{n}_{\text{cav}}\hbar^2G^2|\chi(\omega)|^2}{\kappa} \left( 1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa^2} \right)^{-1} \quad (2.3.4)$$

量子雑音の合計は散乱雑音と輻射圧雑音の和で表される。ここで共振器のカップリング係数を

$$\mathcal{K} = \frac{4\bar{n}_{\text{cav}}\hbar G^2|\chi(\omega)|}{\kappa} \left( 1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa^2} \right)^{-1} \quad (2.3.5)$$

とすれば、

$$\begin{aligned} S_{\text{qn}}(\omega) &= S_{\text{shot}}(\omega) + S_{\text{rad}}(\omega) \\ &= \frac{2\hbar|\chi(\omega)|}{2} \left( \mathcal{K} + \frac{1}{\mathcal{K}} \right) \\ &\geq 2\hbar|\chi(\omega)| = S_{\text{SQL}}(\omega) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

とかけることから、量子雑音  $S_{\text{qn}}(\omega)$  は標準量子限界  $S_{\text{SQL}}(\omega)$  以下にできないことが分かる。

## 2.3.2 古典雑音

2.2.2 節でみた振動子の熱雑音以外の、古典的な要因の雑音について考える。古典雑音を標準量子限界以下に抑え、振動子の位置測定精度を標準量子限界まで到達させることが必要条件になる。

### 2.3.2.1 地面振動

干渉計の場合、地面振動はその設置場所と防振機構の性能によって決まる。地面振動の典型的なスペクトルは

$$\sqrt{S_x^{\text{seis}}} = \begin{cases} 10^{-7} & (f < 1\text{Hz}) \\ 10^{-7} \left( \frac{1\text{Hz}}{f} \right)^2 & (f > 1\text{Hz}) \end{cases} \quad (2.3.7)$$

で表される。[21] 測定周波数が低くなるほど防振は困難になるため、10Hz 程度以下では地面振動雑音は支配的になると考えられる。

### 2.3.2.2 振動子の熱雑音

2.2.2 節にて説明済みであるため省略する。

### 2.3.2.3 鏡の熱雑音

鏡の基材とコーティングそれぞれの熱雑音を計算する上で、Levin の手法を用いるのが有効である。[22] これによれば、パワースペクトル密度は以下のように表される。

$$S_{x,\text{th}}(\omega) = -\frac{8k_{\text{B}}}{\omega^2} \sum \frac{T_i W_{\text{diss},i}}{F_0^2} \quad (2.3.8)$$

ここで、 $T_i$  は熱浴の温度、 $F_0$  は鏡の表面に振動力の振幅、 $W_{\text{diss},i}$  は鏡に振動力が加わったときの単位時間あたりのエネルギーの散逸を表している。この形式を用いれば、鏡の基材とコーティングの熱雑音はそれぞれ以下の通り。[23] [24]

$$S_{x,\text{th}}^{\text{mirror}} = S_{x,\text{th}}^{\text{sub}} + S_{x,\text{th}}^{\text{coat}} \quad (2.3.9)$$

$$S_{x,\text{th}}^{\text{sub}} = \frac{4k_{\text{B}}T}{\omega} \frac{\phi_s}{\sqrt{\pi}\omega_L} \frac{1-\nu_s^2}{Y_s} \quad (2.3.10)$$

$$S_{x,\text{th}}^{\text{coat}} = \frac{4k_{\text{B}}T}{\omega} \sum \frac{d_c \phi_c Y_c^2 (1+\nu_s)^2 (1-2\nu_s)^2 + Y_s^2 (1+\nu_c)^2 (1-2\nu_c)}{\pi\omega_L^2 Y_s^2 Y_c (1-\nu_c^2)} \quad (2.3.11)$$

ただし、 $\phi$  は損失角、 $Y$  はヤング率、 $\nu$  はポアソン比、 $d$  はコーティングの厚さ、 $\omega_L$  はビーム半径である。また下付きの  $s$  は基材を表し、 $c$  はコーティングを意味する。

コーティングとして  $\text{TiO}_2$  - doped  $\text{Ta}_2\text{O}_3$  が  $N+1$  層、 $\text{SiO}_2$  が  $N$  層の誘電体多層膜を考える。層の厚さは各層の片道の光路長が  $\lambda/4$  とすれば反射光は最も強く干渉し合う。屈折率をそれぞれ  $n_1$ 、 $n_2$ 、鏡の反射率を  $r$  とすると、 $2N+1$  層のコーティング膜の厚み  $d$  は

$$d = \frac{\lambda}{4} \left\{ \frac{1}{n_1} + \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) N \right\} \quad (2.3.12)$$

を満たす。

また、鏡の熱雑音はビーム半径  $\omega_L$  にも依存するため、ビーム半径  $\omega_L$  の満たす条件を考える。ガウシアンビームの規格化された強度分布は

$$P(r) = \frac{2}{\pi\omega_L^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_L^2}\right) \quad (2.3.13)$$

で表される。鏡の半径が  $r_0$  とすると  $r > r_0$  のレーザーパワーが失われるので、その割合は

$$\int_{r_0}^{\infty} 2\pi r P(r) dr = \left[ -\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_L^2}\right) \right]_{r_0}^{\infty} = \exp\left(-\frac{2r_0^2}{\omega_L^2}\right) \quad (2.3.14)$$

とわかる。よって

$$\exp\left(-\frac{2r_0^2}{\omega_L^2}\right) \ll 1 - r^2 \quad (2.3.15)$$

がビーム半径  $\omega_L$  の満たす満たすべき条件である。

### 2.3.2.4 懸架線の熱雑音

鏡を通常の懸架線で懸架した際の熱雑音について考える。振り子の復元力には懸架線の聴力だけでなく、重力も含まれる。ただし重量には散逸がないため、懸架系の散逸は懸架線の素材の散逸よりも軽減される。これ

を重力希薄化 (Gravitational Dilution) と呼ぶ。これについてまず考える。懸架線の振り子としてのバネ定数を  $k_{el}$ [N/m]、重力の復元力のバネ定数を  $k_g$ [N/m] として式 (2.2.32) に代入すると

$$-m_{\text{eff}}\omega^2 + k_{el}(1 + i\phi) + k_g = F_{\text{ex}}(\omega) \quad (2.3.16)$$

ただし  $\phi$  は損失角と呼ばれる散逸を表す物理量であり、バネ定数を複素数に拡張した際の虚部に対応する。structure damping モデルと viscous damping モデルに置いてそれぞれ

$$\phi = \begin{cases} \frac{\omega}{\Omega_m Q_m} & (\text{structure - damping model}) \\ \frac{1}{Q_m} & (\text{viscous - damping model}) \end{cases} \quad (2.3.17)$$

と表せる。重力によるエネルギー散逸は存在しないと考えられるので、 $k_g \ll k_{el}$  のとき、式 (2.3.16) は

$$F_{\text{ex}}(\omega) \simeq -m_{\text{eff}}\omega^2 + k_g \left( 1 + i \frac{k_{el}}{k_g} \phi \right) \quad (2.3.18)$$

と近似できる。重力による希釈の度合いを表す希釈係数  $D$  は

$$D = \frac{k_g}{k_{el}} \quad (2.3.19)$$

$$= \frac{4l}{nr^2} \sqrt{\frac{m_{\text{eff}}g}{\pi Y}} \quad (2.3.20)$$

となる。ただし、懸架線の素材の  $Q$  値を  $Q_{\text{mat}}$ 、重力加速度を  $g$ 、懸架線の長さを  $l$ 、半径を  $r$ 、本数を  $n$ 、ヤング率を  $Y$  とした。よって振り子全体の  $Q$  値は

$$Q_{\text{pend}} = \frac{4l}{nr^2} \sqrt{\frac{m_{\text{eff}}g}{\pi Y}} Q_{\text{mat}} \quad (2.3.21)$$

となる。[25] これより、懸架線に同じ素材を用いた場合、鏡を重くするほど、懸架線を長く細くするほど  $Q$  値が高くなることがわかる。

しかし、実際の懸架線は有限の線密度  $\sigma$  を持っているので、それ自身が弾性振動を行い、その共振周波数  $\Omega_n$  は以下を満たす。

$$\cos\left(\frac{\Omega_n l}{v}\right) - \frac{v\Omega_n}{g} \sin\left(\frac{\Omega_n l}{v}\right) = 0 \quad (v = \sqrt{\frac{m_{\text{eff}}g}{\sigma}}) \quad (2.3.22)$$

このうち最低次のモードが振り子の共振周波数を与え、それ以外はバイオリンモードと呼ばれる懸架線自身の弾性振動の共振周波数を決める。振り子のモード以外は近似的に

$$\Omega_n \simeq n\pi\Omega_p \sqrt{\frac{m_{\text{eff}}}{m_w}} \quad (2.3.23)$$

とかける。[26] ただし  $\Omega_p (= \sqrt{g/l})$  は振り子の周波数、 $m_w (= \sigma l)$  は懸架線の質量を意味する。このモードの換算質量は

$$\mu_n = \frac{m_{\text{eff}}}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\cos^2(\Omega_n l/v)} \left( \frac{\Omega_n}{\Omega_p} \right)^2 \right] \quad (2.3.24)$$

と表される。これを用いて熱雑音は

$$S_{x,\text{th}}^{\text{wire}} = \sum_n \frac{4k_B T}{\mu_n \omega} \frac{\Omega_n^2 \phi_n}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2 + \Omega_n^4 \phi_n^2} \quad (2.3.25)$$

ただし、 $\phi_n$  は  $n$  次のモードの散逸である。懸架線の弾性も考慮した議論によれば、バイオリンモードの  $Q$  値は、モードの次数にはほとんど依存せず、基本の振り子モードのおよそ  $1/4$  倍になることが示された。[27] バイオリンモードの  $Q$  値がモードに依らずほぼ一定であることは実験的にも支持されている。[28] [29] また、振り子モードの  $Q$  値が大きい場合、その懸架線のバイオリンモードも非常に高い  $Q$  値が得られることが確認されている。[30]

### 2.3.2.5 残留ガス雑音

空気分子との衝突により、機械振動子は揺らされエネルギー散逸を起こす。この散逸のことをガスダンピングと呼ぶ。これは viscous damping の一種である。ここではガスダンピングの減衰率を評価する。[31]

分子数密度  $n$  のガス (圧力  $P = nk_B T$ ) の中に、質量  $m$ 、面積  $S$ 、共振周波数  $\Omega_m/2\pi$  の振動子をおいた場合を考える。大気の粘性を無視すると、分子速度の標準偏差を  $v_{\text{mol}}$  としたときの単位時間あたりの振動子と分子との平均衝突回数  $\bar{N}$  は

$$\bar{N} \simeq n v_{\text{mol}} S = n S \sqrt{\frac{k_B T}{m_{\text{mol}}}} \quad (2.3.26)$$

と書ける。ここで  $m_{\text{mol}}$  は 1 分子の質量であり、熱平衡状態を仮定した。分子は振動子と弾性衝突すると仮定すると、振動子の片側から  $\tau$  秒間に  $N_\tau$  個の分子が衝突することにより振動子に加わる力は

$$F = 2 m_{\text{mol}} v_{\text{mol}} \frac{N_\tau}{\tau} \quad (2.3.27)$$

となる。

ここで、分子数密度が十分に小さく、分子と振動子の衝突確率がポアソン分布に従うと仮定する。このとき  $\tau$  秒間の間で分子が振動子に衝突する回数は平均で  $\bar{N}_\tau = \bar{N}\tau$  回であるため、その標準偏差は  $\sigma_N = \sqrt{\bar{N}\tau}$  である。よって振動子に加わる力の分散  $\sigma_F^2$  は

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= 2 \left( 2 m_{\text{mol}} v_{\text{mol}} \frac{\sqrt{\bar{N}\tau}}{\tau} \right)^2 \\ &\simeq 8 k_B T n S m_{\text{mol}} v_{\text{mol}} \Delta f \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

となる。ここで、振動子の両面の分子の衝突は無相関であるとして、分散を 2 乗した。また、 $\Delta f \equiv 1/\tau$  は測定帯域幅を意味する。衝突による力のパワースペクトル密度  $S_{FF} [\text{N}^2/\text{Hz}]$  は定数であることから、測定時間内における分散  $\sigma_F^2 \text{ha}$

$$\sigma_F^2 = 2 \int_0^{\Delta f} S_{FF} df = 2 S_{FF} \Delta f \quad (2.3.29)$$

である。よって

$$S_{FF}^{(\text{gas})} \simeq 4 k_B T n S m_{\text{mol}} v_{\text{mol}} \quad (2.3.30)$$

となる。揺動散逸定理より、熱平衡状態にある機械振動子には散逸  $\gamma$  に比例した揺動力

$$S_{FF} = 4k_B T \gamma m \quad (2.3.31)$$

が働く。式 (2.3.30)(2.3.31) より、ガスダンピングによる散逸  $\gamma_{\text{gas}}$  は

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{gas}} &= \frac{n S m_{\text{mol}} v_{\text{mol}}}{m} \\ &= \frac{n S \sqrt{k_B T m_{\text{mol}}}}{m} \\ &= \frac{P S \sqrt{m_{\text{mol}}}}{m \sqrt{k_B T}} \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

となる。この減衰率は周波数に依存しないため、viscous damping model に従うことが分かる。このときの Q 値は

$$Q_{\text{gas}} = \frac{m \Omega_m \sqrt{k_B T}}{2 P S \sqrt{m_{\text{mol}}}} \quad (2.3.33)$$

と表せる。

#### 2.3.2.6 mg スケール鏡への適用

次に本研究で目標としているミリグラムスケールの鏡を、現状振り子型の方式の中で最も Q 値の高いファイバーで懸架した場合の雑音について考える。現在提案されている懸架線は、振り子の長さが 5cm、直径  $1\mu\text{m}$  の石英ファイバーを用いたもので、7mg の鏡を用いると共振周波数が 2.2Hz、Q 値が  $2 \times 10^6$  となる。これにより 1kHz 付近で標準量子限界に到達できる。[32]

しかし、同様の振り子で本研究で対象にするような 2mg の鏡を懸架した場合のスペクトルが図 2.3.1 の通り。図から分かるように、鏡の熱雑音が標準量子限界を下回る周波数低域では懸架線の熱雑音が標準量子限界を上回り、古典雑音が量子雑音以下に抑制できる周波数帯域が存在しない。そのため、ミリグラムスケールの機械振動子の実現のためには、従来の振り子型以外の懸架方法が必要になる。

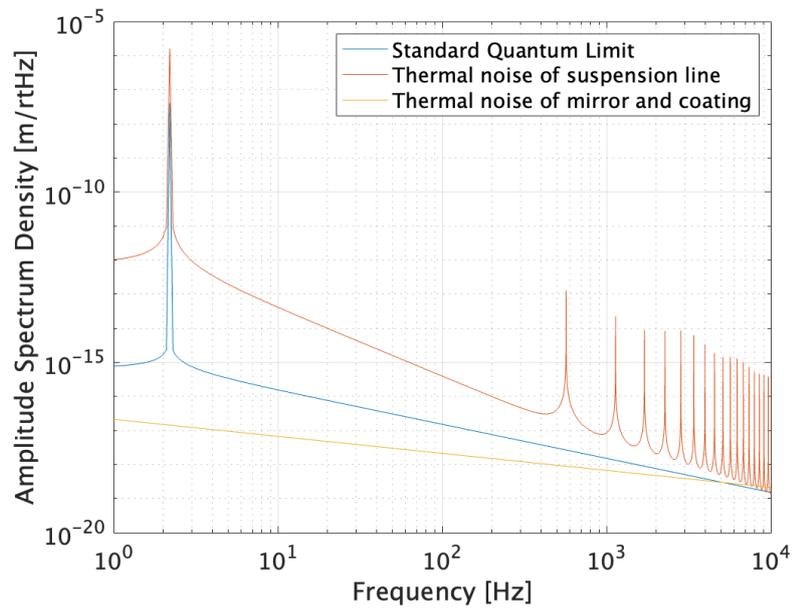


図 2.3.1: 2mg の石英鏡を懸架したときの鏡の熱雑音と懸架線の熱雑音

ただし、雑音の計算では、鏡の反射率を 99%、ビーム半径を 0.1mm、鏡の物性を以下の通りに設定した。

表 2.3.1: コーティング鏡の物性値

	石英 (基材)	石英 (コーティング)	TiO <sub>2</sub> - doped Ta <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
損失角	$1 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$
ポアソン比	0.17	0.17	0.28
ヤング率	73Gpa	73Gpa	140Gpa
屈折率	1.45	1.45	2.07

## 第3章

# 反磁性浮上

本研究で目指すミリグラムスケールの機械振動子において古典雑音を標準量子限界以下に抑制するには、従来の振り子型に代わる鏡の支持方法が必要になる。本章ではその代替案としてグラファイトの反磁性浮上の活用を提案し、その浮上原理や材質や浮上のための磁石の形状などについて述べる。

### 3.1 磁性

電子の磁気モーメントにより一般に物質は外部の磁場から何らかの影響を受ける。この磁気モーメントは電子の回転運動に起因すると考えられ、電子のスピン運動によるものと、軌道運動によるものに分けられる。

電子のスピンによって生じるスピン磁気モーメント  $\mu_{\text{spin}}$  を考える。電子は自転しており、その角運動量は  $\hbar s$  と書ける。このときスピン磁気モーメント  $\mu_{\text{spin}}$  は、電子の  $g$  因子の  $g(\simeq 2)$ 、ボーア磁子  $\mu_B$  を用いて

$$\mu_{\text{spin}} = -g\mu_B s \quad (3.1.1)$$

と表せる。ただしボーア磁子  $\mu_B$  とは、電気素量  $e$ 、電子の質量  $m_e$  を用いて

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad (3.1.2)$$

として表される、電子の固有磁気モーメントである。

また、電子の軌道運動による軌道磁気モーメント  $\mu_{\text{orbit}}$  を考える。電子の軌道角運動量は  $\hbar l$  と表され、これとボーア磁子を用いて

$$\mu_{\text{orbit}} = -\mu_B l \quad (3.1.3)$$

と表される。

単位体積あたりの磁気モーメントを磁化  $M$  といい、体積を  $V$  とすれば

$$M = \frac{1}{V} \sum_i \mu_i \quad (3.1.4)$$

と表せる。また真空中に磁束密度  $B$  が存在するとき、物体の磁化  $M$  と外部磁場  $H$  を用いて

$$B = \mu_0 H + M \quad (3.1.5)$$

と書ける。横軸に  $H$ 、縦軸に  $B$  をとったグラフを B-H 曲線という。物質に外部磁場  $B$  をかけたとき

$$M = \frac{\chi}{\mu_0} B \quad (3.1.6)$$

だけ物質が磁化されたとすると、比例係数の  $\chi$  を単位体積あたりの磁化率という。

## 3.2 磁性の分類

物質の磁気的な性質を分類するのに磁化率  $\chi$  を使うと便利である。以下でその分類を行う。

### 3.2.1 常磁性体

前節で述べたように、物体を構成する原子や分子は、その中の電子の軌道角運動量やスピン角運動量に基づく磁気モーメントを持っている。外部磁場がなければ物体中の原子や分子はランダムな熱運動をしており、それらの磁気双極子は不規則な方向を向いている。これにより巨視的には平均値はゼロになる。この物体に外部磁場がかかると内部の磁気双極子は外部磁場の方向に整列し、磁化される。このときの磁化率が  $\chi > 0$  ではあるが、1 に比べて極めて小さいものを常磁性体と呼ぶ。気体では酸素などがこの性質を有しており  $\chi \simeq 10^{-6}$  程度、固体では白金族の元素などがこの性質を有しており  $\chi \simeq 10^{-4}$  程度の大きさをもつ。[33]

### 3.2.2 強磁性体

磁石に引き付けられるような性質を持つ鉄、ニッケル、コバルトなどは強磁性体と呼ばれる。これらの物質の磁化率は  $\chi > 0$  であり、1 に比べて極めて大きい。鉄の場合その値は  $\chi \simeq 10^4$  程度である。[33] 常磁性体の場合、外部磁場に晒されることで磁化されるが、外部磁場を取り除くことで磁化は消える。一方、強磁性体の場合、外部磁場を取り除いても磁化が残り、永久磁石となることがある。このような強磁性の機構を説明するため、鉄を例にして述べる。鉄の内部は図 3.2.1 のように磁区と呼ばれる領域に分かれている。

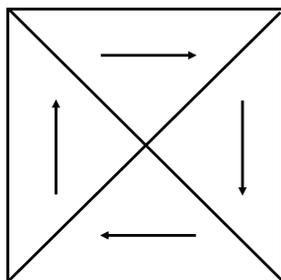


図 3.2.1: 磁区

同じ磁区内では磁気モーメントの向きは揃っていて、外部磁場のない場合、それぞれの磁区の磁気モーメントの向きはクーロン相互作用によりランダムな向きを向いているため、巨視的には打ち消されている。ここで外部磁場をかけると、クーロン相互作用が破れそれぞれの磁区内の磁気モーメントは外部磁場と同じ方向を向いていき、図 3.2.2 のように全ての磁区内の磁気モーメントが外部磁場と同じ方向を向いたところで飽和する。

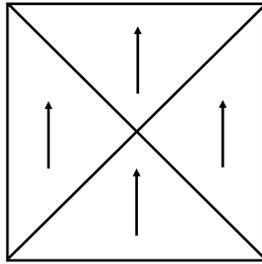


図 3.2.2: 永久磁化

また、外部磁場の作用により磁区の壁の移動が起き、全体の体積は増していく。図 3.2.1 の状態よりも図 3.2.2 の状態の方がエネルギー的に高く不安定であるが、磁区の壁の移動が困難な磁氣的に硬い材質であるとき、外部磁場により無理に壁を移動させると、外部磁場を取り除いたときには移動した磁区の壁は簡単には戻らなくなる。これが永久磁化の現象である。

永久磁石の B-H 曲線は次の図 3.2.3 のようになり、自発磁化をもつ。

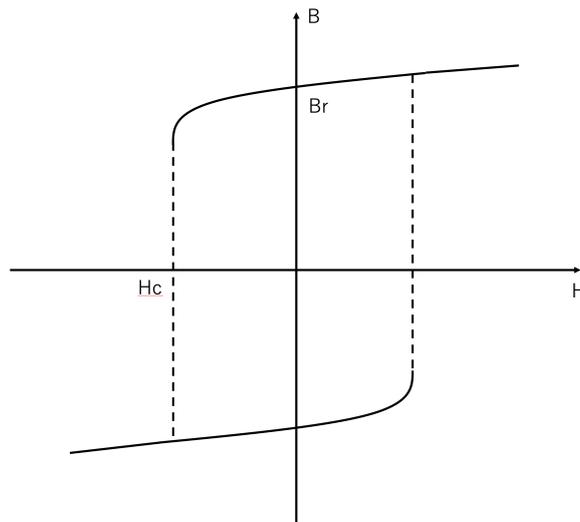


図 3.2.3: 永久磁石の B-H 曲線

外部磁場がゼロのときの磁束密度を残留磁束密度 ( $B_r$ ) といい、磁束密度をゼロにするのに必要な外部磁場の大きさを保持力 ( $H_c$ ) という。

### 3.2.3 反強磁性

電子のスピンの向きが図 3.2.4b のように交互に逆向きに整列する場合、強磁性のように自発磁化は持つものの、部分的な磁化はお互いに打ち消しあい、全体としては磁化はなく常磁性を示す。



図 3.2.4: スピンの向き

### 3.2.4 反磁性

物体の構成原子が磁気モーメントを持たない場合、外部から磁場を加えると内殻の電子に外部磁場を打ち消すような渦電流が発生し、外部磁場の方向と反対向きに磁化が生じる。磁化率は  $\chi < 0$  であり、多くの無機化合物や有機化合物が当てはまる。

## 3.3 浮上原理

T.Earnshaw は、自由空間において重力、静電気力、磁力などの逆 2 乗則に従う任意の力、またはその組み合わせが作用する場合、安定した平衡点を持たない可能性があることを示した [34]。これを Earnshaw の定理と呼ぶ。外部磁場の印加された空間では常磁性体など  $\chi > 0$  となる磁化率を持つ物体は磁場が最大となる場所に移動し、安定に浮上できない。一方  $\chi < 0$  の磁化率をもつ反磁性体の物体は、磁場の極小領域でトラップされ、安定して浮上できる。このことを示す。

まず自由空間で時間変化しない磁束密度  $\mathbf{B}$  はラプラス方程式に従うことを確認する。ベクトル解析の公式より

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.3.1)$$

であり、また時間変化のない Maxwell 方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (3.3.3)$$

である。ただし  $\mu$  は透磁率、 $\mathbf{j}$  を電流密度とした。自由空間において電流はゼロであるから式 (3.3.1) に式 (3.3.2)(3.3.3) を代入して

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (3.3.4)$$

を得る。つまりラプラス方程式に従うことがわかる。

体積  $V$  の磁性体に外部から静的な磁場  $\mathbf{B}$  をかけたときのエネルギーを求める。磁気モーメント  $\boldsymbol{\mu}$  に外部磁場  $\mathbf{B}$  をかけると磁気モーメントのもつポテンシャルエネルギーは

$$U_m = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (3.3.5)$$

であるから、磁性体全体では  $-Vd\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$  を積分すればよく

$$\begin{aligned} U &= - \int_0^B V d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \\ &= \frac{\chi V}{\mu_0} \int_0^B \mathbf{B} d\mathbf{B} \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} B^2 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

と求まる。これより磁性体が外部磁場  $\mathbf{B}$  から受ける力  $\mathbf{F}$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla U \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla B^2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

となる。

このような時間変化しない外部磁場  $\mathbf{B}$  を用いて磁気モーメント  $\boldsymbol{\mu}$  をもつ磁性体を浮上させることを考えると、安定点ではポテンシャルが極小である必要があるので

$$\nabla^2 U > 0 \quad (3.3.8)$$

であることが条件である。そこで式 (3.3.4)(3.3.5) を代入すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= -\nabla^2(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \\ &= -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

となりポテンシャルが極小点を持たないことがわかる。つまり、磁性に関わらず自由空間において静的な外部磁場を用いて粒子を安定に浮上させることはできない。これを Earnshaw の定理と呼ぶ。

次に体積  $V$  をもつ磁性体を浮上させることを考える。同様の安定な浮上に要求される条件式 (3.3.8) に式 (3.3.4)(3.3.6) を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla^2 B^2 \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \left[ 2 \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \right)^2 + \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} \right] \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

を得る。これより  $\chi < 0$  である反磁性体ならば安定した浮上の条件式 (3.3.8) を満たし、静的な外部磁場により安定した浮上し得ることがわかる。

さらに体積  $V$  の反磁性体の密度を  $\rho_m$  として、これが安定に浮上する必要十分条件を考える。重力は  $z$  軸の負の方向に働くとすると、必要十分条件は浮上位置において以下が成り立つことである。

$$\nabla^2 U > 0 \quad (3.3.11)$$

$$\mathbf{F} - mg\mathbf{e}_z = 0 \quad (3.3.12)$$

これに式 (3.3.7) を代入して整理すると、

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial x_i^2} > 0 \quad (3.3.13)$$

$$\frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla B^2 - mg\mathbf{e}_z = 0 \quad (3.3.14)$$

となる。ただし  $\mathbf{e}_z$  は  $z$  軸方向の単位ベクトルであり、 $g$  は重力加速度を表す。特にこれを直交座標系における  $z$  軸方向に浮上させることを考えると、上記の必要十分条件は

$$\begin{aligned} D_x &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} B^2 \\ &= 2 \left[ \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} \right)^2 + B_x \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} \right)^2 + B_y \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)^2 + B_z \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right] > 0 \quad x \text{ 方向の安定性} \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} D_y &\equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} B^2 \\ &= 2 \left[ \left( \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)^2 + B_x \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial y} \right)^2 + B_y \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} \right)^2 + B_z \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right] > 0 \quad y \text{ 方向の安定性} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$$\begin{aligned} D_z &\equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} B^2 \\ &= 2 \left[ \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)^2 + B_x \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)^2 + B_y \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)^2 + B_z \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right] > 0 \quad z \text{ 方向の安定性} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

$$F_z = \frac{\chi}{\mu_0} \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - \rho_m g = 0 \quad z \text{ 軸方向の釣り合い} \quad (3.3.18)$$

一方、これを円筒座標系における  $z$  軸上に浮上させることを考えると、上記の必要十分条件は

$$\begin{aligned} D_r &\equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} B^2 \\ &= 2 \left[ \left( \frac{\partial B_r}{\partial r} \right)^2 + B_r \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right)^2 + B_\theta \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)^2 + B_z \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right] > 0 \quad r \text{ 方向の安定性} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$\begin{aligned} D_\theta &\equiv \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} B^2 \\ &= \frac{2}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 + B_r \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + B_\theta \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial B_z}{\partial \theta} \right)^2 + B_z \frac{\partial^2 B_z}{\partial \theta^2} \right] > 0 \quad \theta \text{ 方向の安定性} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned} D_z &\equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} B^2 \\ &= 2 \left[ \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} \right)^2 + B_r \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right)^2 + B_\theta \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)^2 + B_z \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right] > 0 \quad z \text{ 方向の安定性} \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

$$F_z = \frac{\chi}{\mu_0} \left( B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} + B_\theta \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - \rho_m g = 0 \quad z \text{ 軸方向の釣り合い} \quad (3.3.22)$$

と表される。

よって水平方向の安定性のためには  $z$  軸からずれると磁場が大きくなるような系が必要で、浮上のためには磁場と磁場勾配の積の絶対値を大きくする必要がある。この磁場と磁場勾配の積である  $B\nabla B$  を本論文では磁場因子と呼び、 $X$  と表すことにする。

反磁性体の浮上にはスケーリング則が成り立つ。[35] 原点に設置した磁化  $M$ 、体積  $V$  の磁石により位置  $r$  にある反磁性体を浮上させる場合を考える。位置  $r$  における磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 V}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{M}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right) \quad (3.3.23)$$

と書ける。ここで全体のスケールを任意の正数  $k$  倍する。つまり、位置が  $\mathbf{r}' = k\mathbf{r}$ 、体積が  $V' = k^3V$  と変換される。ただし磁化  $M$  は不変である。このとき位置  $\mathbf{r}'$  における磁場は

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(\mathbf{r}') &= -\frac{\mu_0 V'}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{M}}{r'^3} - \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'}{r'^5} \right) \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

となり、不変であることがわかる。よって磁場因子  $X$  は

$$X' = \frac{X}{k} \quad (3.3.25)$$

となり、 $\frac{1}{k}$  倍される。よってスケールが小さいほど浮上力が大きくなり、浮上に有利であることがわかる。

### 3.4 反磁性体の磁化率

以下に代表的な反磁性体の磁化率と密度、さらに浮上に効く磁場因子  $X$  を示す。

表 3.4.1: 主な反磁性体の磁化率 [2]

	磁化率 $-\chi(\times 10^{-6})$	密度 $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	磁場因子 $X$ [-T <sup>2</sup> /m]
異方性グラファイト (HOPG) $\perp$ 方向	450	2.3	62
異方性グラファイト (HOPG) $\parallel$ 方向	85	2.3	333
等方性グラファイト (CIP 材)	160	2.3	170
ビスマス	160	9.8	730
石英	14	2.2	2000
ダイヤモンド	22	3.5	2000
窒化ケイ素	9	3.2	4400
銀	24	10.5	5400
金	35	19.3	6900
鉛	15	11	8900
シリコン	3.3	2.3	8900
銅	9.7	9.0	11000

表 3.4.1 からわかるように、浮上に関する要件である磁場因子  $X$  が比較的小さく、広く市販されていることから当研究室ではグラファイトと石英を浮上体として採用してきた。特にグラファイトは浮上力が強く磁場に関

する要請が小さい。ただし第5章で後述する通り、その導電性の高さから渦電流熱雑音を生じさせるというデメリットも存在している。また、グラファイトには大きく分けて磁化が等方性であるものと異方性であるものの2種類が存在することに注意が必要である。一般に安価に市販されるグラファイトは等方性であり、その製法から CIP 材<sup>\*1</sup>と呼ばれる。一方、配向がある方向に整っているようなグラファイトを HOPG<sup>\*2</sup>と呼ぶ。以下にそれぞれの性質を示す。

表 3.4.2: HOPG と CIP 材の比較 [3] [2] [4]

	HOPG (⊥ 方向)	HOPG (∥ 方向)	CIP 材
磁化率 $-\chi(\times 10^{-6})$	450	85	160
磁場因子 $X[-T^2/m]$	62	333	170
機械特性	脆い		強い
電気伝導率 $[(\Omega \cdot m)^{-1}]$	$5 \times 10^2$	$2.1 \pm 0.1 \times 10^6$	$1.0 \times 10^5$
熱膨張率 $[K^{-1}]$	$20 \times 10^{-6}$	$-1 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-6}$
熱伝導度 $[W/(m \cdot K)]$	$8 \pm 1$	$1700 \pm 100$	120

表 3.4.2 より浮上により有利な HOPG であっても、磁場に対する配向の向きなどにより全く異なる物性を示すことがわかる。特に渦電流熱雑音を考慮する場合、磁石の配列に工夫が必要であることが示唆される。

### 3.5 磁石の配列と形状

3.3 節の通り、安定した浮上のためには強い磁場と磁場勾配を用意することが重要である。最も手軽に磁場を発生させる方法は永久磁石である。市販される永久磁石の表面磁束密度は精々 1T 程度であり、さらに強い磁場を生成するには永久磁石をハルバッハ配列に配置し、鉄と組み合わせることで 4T を発生させた例がある。[36] さらに生成する磁場を強くするにはコイルを用いる必要がある。コイル内部に鉄芯を入れる場合、2T 程度で飽和してしまうため、それ以上の磁場を生成するには空芯コイルが用いられる。ただし常伝導コイルの場合は大電流を流すことでジュール熱が発生する問題がある。例えば 20T を生成する場合の消費電力はおよそ 1000 万 W にも及ぶ。これを抑えるために常伝導コイルは水冷式が用いられる。一方、超伝導コイルを用いることでジュール熱をゼロにできる。その場合、超伝導の転移温度以下への冷却が必要である。6T 程度間でなら自作可能 [37] であり、20T 程度までなら市販されている。最も強い DC 磁場を発生させる方法は常伝導コイルと超伝導コイルを組み合わせたハイブリッド磁石を用いるもので、現在の世界記録は 45.5T である [38]。

一般に以下の図 3.5.1 に磁気浮上で一般的によく用いられる磁石の配列を示す。

図 (3.5.1a) のように、2 次元平面に磁極が互いに向かい合うように配列すると局所的に磁場勾配の大きな領域が生成される。このとき浮上体は 4 つの磁石の中央部分で浮上し、トラップされる。中心方向に強い復元力が働くため、量子的な現象が原因で生じる振動は強い磁場勾配によりすぐに停止させられることが予想される。

次に、磁石を図 (3.5.1b) のように配列した場合を考える。このような配列方法をハルバッハ配列 (Halbach

\*1 CIP = Cold Isostatic Press(冷間静水圧プレス)

\*2 HOPG = Highly Oriented Pyrolytic Graphite(高配向性熱分解グラファイト)

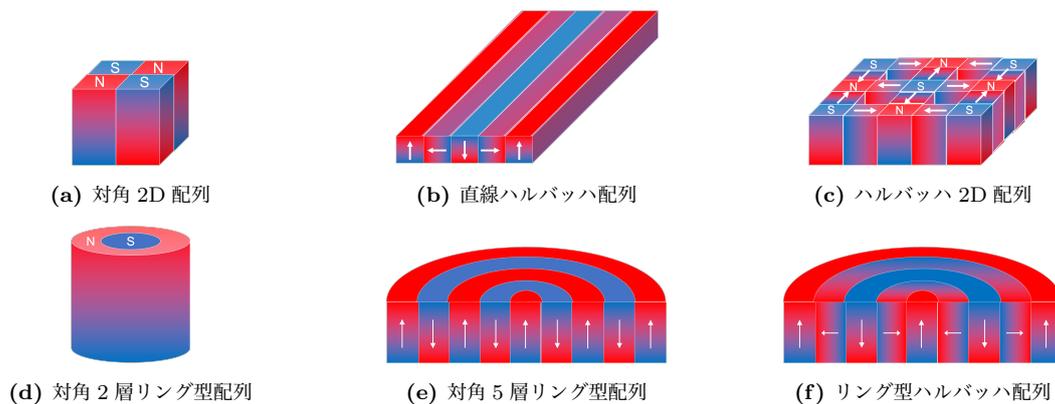


図 3.5.1: 反磁性浮上によく使われる磁石配列の概略図

array) と呼び、非対称的な磁場を生成することができる。図 3.5.1b のような磁極の配列にすると、上面の磁場が弱く下面が強くなる。このようにすることで反磁性体との反発力をより強くすることができる。[39] この磁石配列の磁場マップを対角に並べた場合の磁場マップと共に表すと以下の通り。

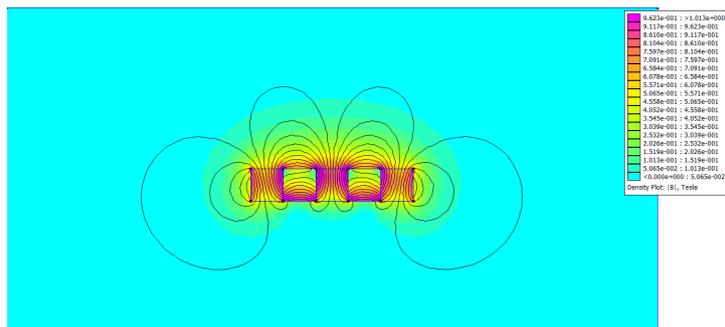


図 3.5.2: 直線ハルバツハ配列の作り出す非対称な磁場マップ

しかし、この配列は浮上体の磁石に対する奥行き方向の動きを制限できない。つまり、理想的には反磁性体は磁石の上で静止し、地面の傾きや外部からの衝撃などの初期条件により動き出す。そのためトラップのためには外部からの復元力が必要となる。

図 3.5.1c はハルバツハ配列を 2 次元平面上に配列したものである。一方の面に磁束を集中させることで、より強力な磁場を作り出せる。また、浮上体は中央部にトラップされるため、外部からの復元力の印加は不要である。ただし、組み立てのためには図 (3.5.1a)(3.5.1b) と異なり、磁石同士の接着が必要となる。また浮上体の共振周波数が磁石配列に完全に依存することになる。[40]

上述してきた配列はリング型の磁石 (3.5.1d)(3.5.1e)(3.5.1f) から構成することができる。図 (3.5.1d)(3.5.1e) は対角に並べているため、上下面の磁場には対称性がある一方、図 (3.5.1f) はハルバツハ配列であるため、上下面の磁場は非対称である。どちらも回転対称の磁場を発生させ、主軸周りの回転を除く全ての自由度を安定させることができる。[41] しかし、図 (3.5.1f) のような配列は、特に磁極がリングの径方向に向いた磁石が技術的に製作困難であるため、同研究室の先行研究では図 (3.5.1e) のような配列を用いている。

## 第4章

# 【実験1】反磁性浮上実験

本章では浮上体としてグラファイトを用いた場合の浮上のセットアップを設計し、実際に浮上実験を行った様子を確認する。

### 4.1 先行実験

同研究室では先行研究としてリング型磁石を活用していた。これは第5章で説明する渦電流熱雑音の影響を低減するためである。リング型磁石に対して浮上体として直方体やリング型のグラファイトを採用し、浮上を試した。以下では浮上の計算のために用いたシミュレーションと、実際の浮上の様子についてまとめる。

#### 4.1.1 浮上シミュレーション

浮上体の浮上高さや水平方向の安定性についてシミュレーションを実施した。シミュレーションはまず、ロシアアラムス国立研究所が開発した電磁場シミュレーションソフトである Poisson Superfish を用いて永久磁石の作る磁場マップを生成し、その磁場マップを利用して Matlab によりグラファイトの浮上位置や安定性を計算していた。

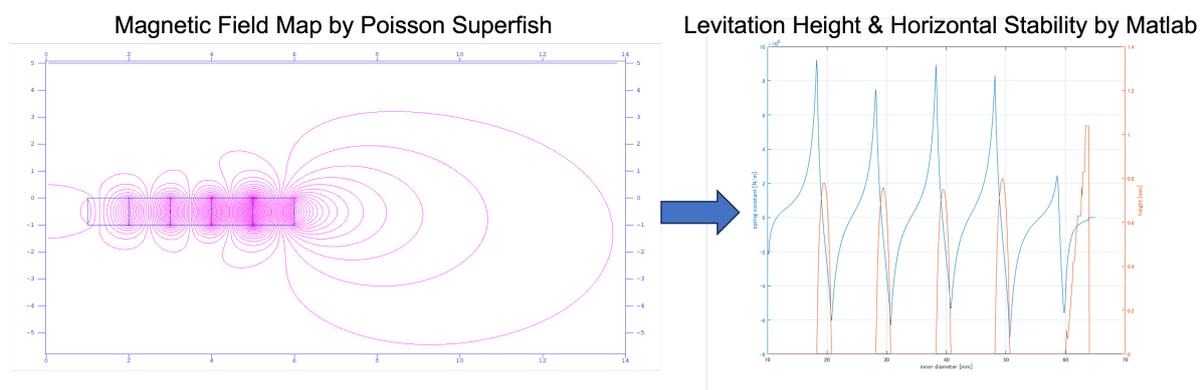


図 4.1.1: 先行研究におけるシミュレーションの流れ

ソースコード 4.1 に磁場マップ生成のためのシミュレーションコードを示す。

Listing 4.1: Poisson Superfish による磁場マップの生成

---

```
1 Magnetic Field Map
2
3 &reg kprob = 0,
4 mode = 0,
5 icylin = 1,
6 xreg = 10
7 kreg = -1,500
8 kmax = 50
9 yreg = -5, 3
10 lreg = -1,50,500
11 lmax = 50
12
13 nbslo = 0,
14 nbsup = 0,
15 nbslf = 0,
16 nbsrt = 0 &
17
18 &po x = 0., y = -10. &
19 &po x = 20., y = -10. &
20 &po x = 20., y = 5. &
21 &po x = 0., y = 5. &
22 &po x = 0., y = -10. &
23
24 &reg mat =2 ,mshape = 1, mtid = 1 &
25 &po x = 1., y = 0. &
26 &po x = 1., y = -1. &
27 &po x = 2, y = -1. &
28 &po x = 2, y = 0. &
29 &po x = 1., y = 0. &
30
31 &reg mat = 3 ,mshape = 1, mtid = 2 &
32 &po x = 2, y = 0. &
33 &po x = 2, y = -1. &
34 &po x = 3., y = -1. &
35 &po x = 3., y = 0. &
36 &po x = 2, y = 0. &
37
38 &reg mat = 4 ,mshape = 1, mtid = 3 &
39 &po x = 3., y = 0. &
40 &po x = 3., y = -1. &
41 &po x = 4, y = -1. &
42 &po x = 4, y = 0. &
43 &po x = 3., y = 0. &
44
```

```

45 &reg mat = 5 ,mshape = 1, mtid = 4 &
46 &po x = 4., y = 0. &
47 &po x = 4., y = -1. &
48 &po x = 5, y = -1. &
49 &po x = 5, y = 0. &
50 &po x = 4., y = 0. &
51
52 &reg mat = 6 ,mshape = 1, mtid = 5 &
53 &po x = 5., y = 0. &
54 &po x = 5., y = -1. &
55 &po x = 6, y = -1. &
56 &po x = 6, y = 0. &
57 &po x = 5., y = 0. &
58
59
60 &mt mtid = 1
61 aeasy = 90,
62 gamper = 1,
63 hcept = -10772, bcept = 11975. &
64
65 &mt mtid = 2
66 aeasy = 270,
67 gamper = 1,
68 hcept = -10772, bcept = 11975. &
69
70 &mt mtid = 3
71 aeasy = 90,
72 gamper = 1,
73 hcept = -10772, bcept = 11975. &
74
75 &mt mtid = 4
76 aeasy = 270,
77 gamper = 1,
78 hcept = -10772, bcept = 11975. &
79
80 &mt mtid = 5
81 aeasy = 90,
82 gamper = 1,
83 hcept = -10772, bcept = 11975. &

```

---

ソースコード 4.1 は対角 5 層リング型配列の永久磁石の作る磁場マップを生成する。磁束線を視覚的に表示したものが図 4.1.1 の左図である。浮上高さなどの計算には、有限要素に分割した格子点における磁場を各点について列記した txt ファイルを用いる。txt ファイルの概観は図 4.1.2 の通り。

R [cm]	Z [cm]	Br [G]	Bz [G]	B  [G]	
1.00	0	-7.06E+03	5.57E+03	9.00E+03	...
1.01	0	-6.53E+03	2.57E+03	7.02E+03	
1.02	0	-5.89E+03	3.61E+03	6.91E+03	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
6.50	0	9.72E+02	-6.77E+02	1.18E+03	
1.00	0.001	-6.55E+03	1.66E+03	6.76E+03	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

図 4.1.2: Poisson Superfish が出力する磁場データの概観

この txt ファイルを Matlab で読み込み、浮上高さ等を計算する。ここからはグラフィットの形状ごとに計算方法や検討内容が異なるため、それぞれ分けて考える。

#### 4.1.2 リング型磁石と直方体型グラフィット

浮上高さの計算のための Matlab の計算コードをソースコード 4.2 に示す。

Listing 4.2: Matlab による直方体型グラフィットの浮上高さの計算

```

1 %% テキストファイルからデータをインポートします。
2 % 次のテキストファイルからデータをインポートするスクリプト:
3 %
4 % OUTSF7.TXT
5 %
6 % コードを異なる選択データやテキストファイルに拡張するには、スクリプトではなく関数を生成し
   ます。
7
8 % MATLAB による自動生成2019/08/09 22:00:55
9
10 %% 変数を初期化します。
11 filename = 'OUTSF7.TXT';
12 startRow = 3;
13
14 %% テキストの各行の書式設定:
15 % 列1: double (%f)
16 % 列 2: double (%f)
17 % 列3: double (%f)
18 % 列 4: double (%f)
19 % 列5: double (%f)
20 % 列 6: double (%f)
21 % 列7: double (%f)
22 % 列 8: double (%f)
23 % 列9: double (%f)
24 % 詳細はTEXTSCAN のドキュメンテーションを参照してください。
25 formatSpec = '%10f%18f%14f%14f%14f%14f%14f%14f%f%[\n\r]';
26

```

```

27 %% テキストファイルを開きます。
28 fileID = fopen(filename,'r');
29
30 %% データの列を書式設定に従って読み取ります。
31 % この呼び出しは、このコードの生成に使用されたファイルの構造に基づいています。別のファイルで
    エラーが発生する場合は、インポート
32 % ツールからコードの再生成を試みてください。
33 textscan(fileID, '%[^\n\r]', startRow-1, 'WhiteSpace', '', 'ReturnOnError', false, '
    EndOfLine', '\r\n');
34 dataArray = textscan(fileID, formatSpec, 'Delimiter', '', 'WhiteSpace', '', 'TextType',
    'string', 'ReturnOnError', false);
35
36 %% テキストファイルを閉じます。
37 fclose(fileID);
38
39 %% インポートできないデータの後処理。
40 % インポート中に、インポートできないデータの規則が適用されなかったため、後処理コードが含まれ
    ていません。インポートできないデータに適用できるコードを生成するには、ファイル内のイン
    ポートできないセルを選択してからスクリプトを再生成します。
41
42 %% インポートした配列を列変数名に割り当てます
43 R = dataArray(:, 1);
44 Z = dataArray(:, 2);
45 Br = dataArray(:, 3);
46 Bz = dataArray(:, 4);
47 B = dataArray(:, 5);
48 A = dataArray(:, 6);
49 dBzdr = dataArray(:, 7);
50 dBrdz = dataArray(:, 8);
51 Field = dataArray(:, 9);
52
53
54 %% 一時変数のクリア
55 clearvars filename startRow formatSpec fileID dataArray ans;
56
57
58 dz=(Z(2)-Z(1))/100;
59 BzT=Bz/10000;
60 BrT=Br/10000;
61 for i=1:length(BzT)-1
62     dBzTdz(i,1) = (BzT(i+1)-BzT(i))/dz;
63     dBrTdz(i,1) = (BrT(i+1)-BrT(i))/dz;
64 end
65 dBzTdz(length(BzT)) = 0;
66 dBrTdz(length(BzT)) = 0;
67
68 g=9.8;

```

```

69 mu0=1.26e-6;
70 chioverrho=mu0*g./(BzT.*dBzTdz+BrT.*dBrTdz);
71
72 chi=14e-6;
73 rho=2.2e-3;
74 Fy=(BzT.*dBzTdz+BrT.*dBrTdz)*chi/mu0単位体積当たりの力;%
75 t=1e鏡の厚さ-5;%0.4mm
76 deltai=t/dz;
77
78 for i=1:length(Fy)
79 Fy_bar(i)=0;
80 counter=0;
81 for j=1:length(Fy)
82     if (i-deltai/2<=j) && (j<=i+deltai/2)
83         Fy_bar(i)=Fy_bar(i)+Fy(j);
84         counter=counter+1;
85     end
86 end
87 if counter ~= 0
88     Fy_bar(i)=Fy_bar(i)/counter;
89 end
90 end
91 V=3.14*(7.5e-4)*(7.5e-4)*1e鏡の体積-5;%
92 F_total=Fy_bar*V鏡がうける力;%
93
94 for i=1:length(Fy)-1
95     k(i)=(F_total(i+1)-F_total(i))/dz;
96 end
97 k(length(Fy))=0;
98
99 m=rho*V鏡の質量;%
100 f_reso=1/(2*pi)*abs(sqrt(k/m));
101
102 dr=(R(1,2)-R(1,1))/100
103 dz=(Z(2,1)-Z(1,1))/100
104 r=0.75;%mm
105 z=0.6;%mm
106 Nr=200
107 Nz=200
108 nr=fix(lr/dr)
109 nz=fix(lz/dz)
110
111 dz=(Z(2)-Z(1))/100;
112 BzT=Bz/10000;
113 BrT=Br/10000;
114 for i=1:Nz-1

```

```

115     for j=1:Nr
116         dBzTdz(i,j) = (BzT(i+1,j)-BzT(i,j))/dz;
117         dBrTdz(i,j) = (BrT(i+1,j)-BrT(i,j))/dz;
118     end
119 end
120 dBzTdz(Nz) = 0;
121 dBrTdz(Nz) = 0;
122
123 for i=1:Nz
124     for j=1:Nr
125         F(i,j)=(BzT.*dBzTdz+BrT.*dBrTdz)*chi/mu0単位体積当たりの力;%
126     end
127 end
128
129 for i=1:Nz-nz
130     Ftotal=0
131     for j=1:nz
132         for k=1:nr
133             Ftotal=Ftotal+F(k,j)
134             count=count+1
135         end
136     end
137     F_total(i)=Ftotal
138 end
139
140 plot(Z*10,-Fy/(m*9.8/V),'LineWidth',2)
141 grid on
142 %xlim([0.03 0.2])
143 xlabel('Height [mm]')
144 ylabel('Magnetic force / Gravity')

```

---

この計算により得られるグラフは図 4.1.3 の通り。[1]

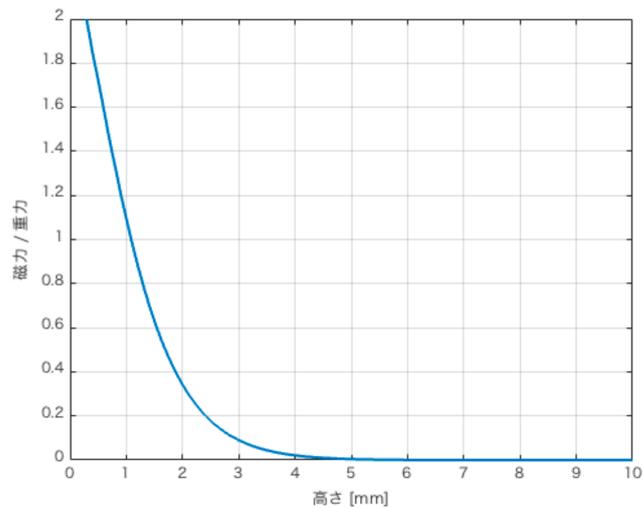


図 4.1.3: 直方体グラファイトの浮上高さ [1]

安定して浮上するのは浮上力、つまり磁石からの斥力と重力が釣り合う点であるから、図 4.1.3 より 1.1mm 程度と読み取れる。

実際に浮上させた様子が以下の通り。

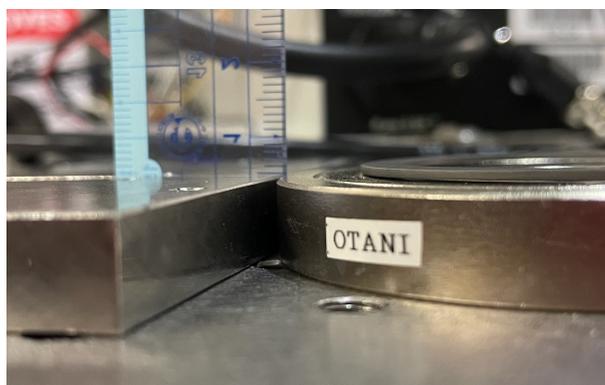


図 4.1.4: 直方体型グラファイトの浮上の様子

### 4.1.3 リング型磁石とリング型グラファイト

先行研究で使用したリング型磁石は市販品であり、局所的なポテンシャルの谷間でグラファイトがトラップされ、復元力の存在しない理想的な系とは言えなかった。そこで、リング型グラファイトを採用し、局所的な磁場の偏りの影響を平均化するとともに、第 5 章にて議論する渦電流熱雑音の低減の可能性を検討した。以下ではそのリング型グラファイトのシミュレーションや浮上の様子について確認する。

磁場マップはソースコード 4.3 の通り。

**Listing 4.3:** Poisson Superfish による磁場マップの生成 2

---

```
1 Magnetic Field Map
2
3 &reg kprob = 0,
4 mode = 0,
5 icylin = 1,
6 xreg = 5
7 kreg = -1,300
8 kmax = 50
9 yreg = -2, 3
10 lreg = -1,10,300
11 lmax = 8
12
13 nbslo = 0,
14 nbsup = 0,
15 nbslf = 0,
16 nbsrt = 0 &
17
18 &po x = 0., y = -5. &
19 &po x = 20., y = -5. &
20 &po x = 20., y = 5. &
21 &po x = 0., y = 5. &
22 &po x = 0., y = -5. &
23
24 &reg mat =2 ,mshape = 1, mtid = 1 &
25 &po x = 0., y = 0. &
26 &po x = 0., y = -0.4 &
27 &po x = 0.45, y = -0.4 &
28 &po x = 0.45, y = 0. &
29 &po x = 0., y = 0. &
30
31 &reg mat = 3 ,mshape = 1, mtid = 2 &
32 &po x = 0.45, y = 0. &
33 &po x = 0.45, y = -0.4 &
34 &po x = 0.70, y = -0.4 &
35 &po x = 0.70, y = 0. &
36 &po x = 0.45, y = 0. &
37
38
39 &mt mtid = 1
40 aeasy = 90,
41 gamper = 1,
42 hcept = -10772, bcept = 11975. &
43
44 &mt mtid = 2
45 aeasy = 270,
```



```

38 chi=16e-5; グラファイトの磁化率 %
39 rho=2.2e3; グラファイトの密度 % kg/m^3
40 V=((r2/1000)^2 -(r1/1000)^2)*pi*d/1000; リング型グラファイトの体積 % m^3
41 m=rho*V; リング型グラファイトの質量 %
42 BrT=Br/10000; 単位をテスラに換算 %
43 BzT=Bz/10000; 単位をテスラに換算 %
44 Nr=200; zを固定した時のrのデータ数=%方向のステップの細かさ r\////////////////
45 Nz=200; rを固定した時のzのデータ数=%方向のステップの細かさ z\////////////////
46
47 Z_m=reshape(Z, [Nz+1,Nz+1]); 列の配列を %1 [Nz+1,Nzの行列化 +1]
48 Zm=Z_m(1,:); %をダブリなく配列化 Z
49 BrTm=reshape(BrT, [Nr+1,Nr+1]); 列の配列を %1 [Nr+1,Nrの行列化 +1]
50 BzTm=reshape(BzT, [Nz+1,Nz+1]); 列の配列を %1 [Nz+1,Nzの行列化 +1]
51 dz=(Zm(2)-Zm(1))/100; %方向のデータ間隔をメートルに換算 z
52
53
54 dBrTdz=zeros(Nr+1,Nz+1);
55 dBzTdz=zeros(Nr+1,Nz+1);
56 for j=1:Nz
57     for i=1:Nr+1
58         dBrTdz(i,j) = (BrTm(i,j+1)-BrTm(i,j))./dz; r方向の磁場勾配 %
59         dBzTdz(i,j) = (BzTm(i,j+1)-BzTm(i,j))./dz; z方向の磁場勾配 %
60     end
61 end
62 dBzTdz(:,Nz+1) = 0; 最後は引き算できないので別で定義 %
63 dBrTdz(:,Nz+1) = 0; 最後は引き算できないので別で定義 %
64
65 F=zeros(Nr+1,Nz+1);
66 for i=1:Nr+1
67     for j=1:Nz+1
68         F=((BzTm.*dBzTdz+BrTm.*dBrTdz).*chi)./mu0;%(z,r)における単位体積当たりの力
69     end
70 end
71
72 w=Nz*(d/h);
73 F_s=zeros(1,Nz+1);
74 for j =1:Nz+1-w データの領域の高さを%としたことによる h グラファイト厚は d w=Nz*(d/h)
75     Fs=0;
76     for k=j:j+w
77         for i=1:Nr+1
78             Fs=Fs+F(i,k);
79         end
80     end
81     F_s(j+1)=Fs;
82 end
83

```

```

84 Fave=F_s./((Nr+1)*(w+1)); 高さ %のときのグラファイトの断面積にかかる浮力の平均 j
85
86 plot(Zm.*10,-Fave./((m+M)*g/V),'LineWidth',2) グラフの出力 %
87 grid on
88 xlabel('Height [mm]')
89 ylabel('Magnetic force / Gravity') 鏡の体積や磁化率を考慮していないことに注意 %

```

ソースコード 4.4 との相違点として、点として計算していたグラファイトを体積を考慮したことが挙げられる。Matlab による浮上高さの計算結果が以下の通り。

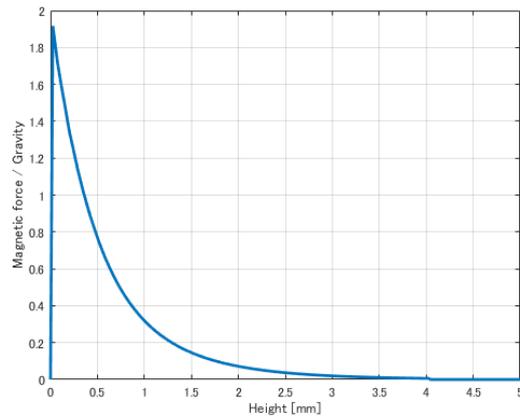


図 4.1.5: リング型グラファイトの浮上高さ

浮上高さは同様にして、図 4.1.3 より 0.3mm 程度と読み取れる。

実際に浮上させた様子が以下の通り。



図 4.1.6: リング型グラファイトの浮上の様子

しかし、浮上は不安定で大きさの違うグラファイトでは水平方向に安定せず弾かれるなどの問題があった。そこで磁場の作り出すポテンシャルについて考える。ポテンシャルの山ではグラファイトは安定せず、谷間で水平方向に安定的に浮上できると考えられる。リング型磁石のポテンシャルと浮上高さを模式的に表すと、図 4.1.7 の通り。

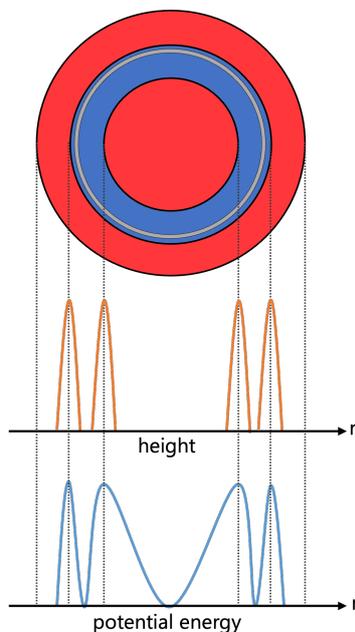


図 4.1.7: リング型磁石の浮上高さと同ポテンシャルの模式図



図 4.1.8: リング型磁石の上でリング型グラファイトが安定的に浮上せず中心がずれて接触する様子

つまり、浮上高さが有利な位置ではポテンシャルが山となり、水平方向に安定することが予測されるポテンシャルの谷間では浮上高さが不十分であることがわかる。そこで、簡単のために直線状の対角配列における直方体型のグラファイトの浮上高さと同ポテンシャルの関係を調べると、図 4.1.9 から明らかなように、幅の狭い

グラファイトでは磁石同士の境界部分で高く浮上するがポテンシャルの山が重なり安定しないことがわかる。

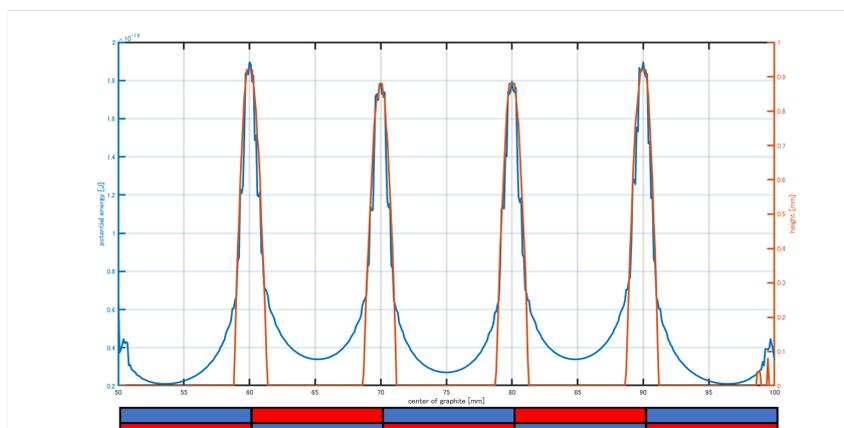


図 4.1.9: 対角直線配列における浮上高さとはポテンシャル

## 4.2 新型磁石配列による浮上実験

4.1 節で見たように、対角配列では磁石は十分な浮上高さとは水平方向の安定性を両立することが難しいことがわかった。そこでリング型磁石では制作が技術的に困難なハルバツハ配列を直線状磁石で組み立てた場合を考える。図 4.1.9 と同様に浮上高さとはポテンシャルを計算すると、以下の通り。

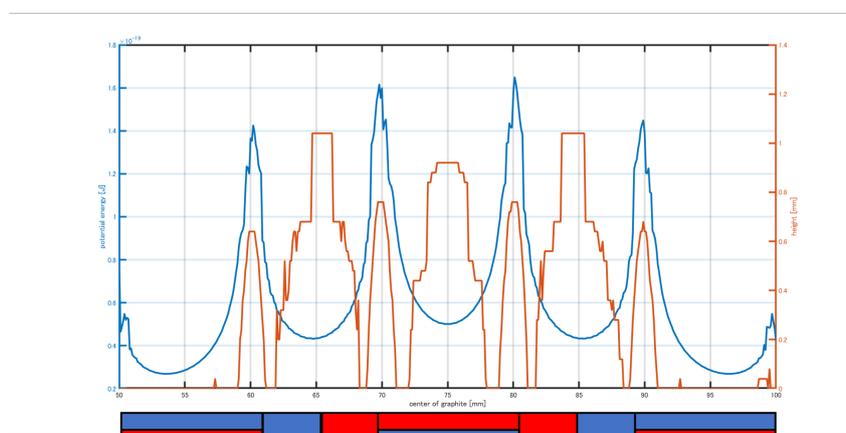
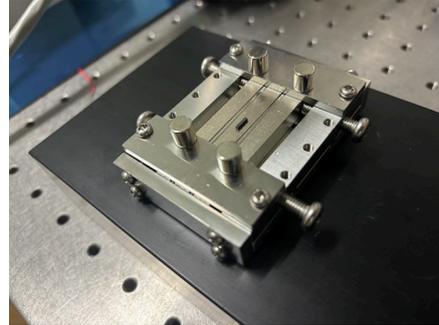
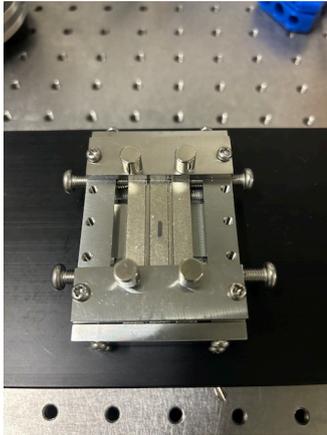


図 4.2.1: ハルバツハ直線配列における浮上高さとはポテンシャル

図 4.2.1 より、ハルバツハ配列であれば 2,3,4 層目の中央部分で浮上位置とはポテンシャルの安定点が一致することが予測される。そこで、計算に用いたのと同様の系である、 $1 \times 5 \times 1\text{mm}$  のグラファイトのハルバツハ配列に対する浮上を試した。



(a) 1 × 5 × 1mm グラファイトの浮上の様子 (上から)      (b) 1 × 5 × 1mm グラファイトの浮上の様子 (横から)

図 4.2.2: 1 × 5 × 1mm グラファイトの浮上の様子

図 4.2.2 は用いた磁石とグラファイトの組み合わせである。しかし、グラファイトは十分な高さに浮上する位置では水平方向に安定せず、シミュレーションと実験に齟齬が見つかった。以下ではこの齟齬を修正した新型の浮上シミュレーションとその理論について説明する。

#### 4.2.1 新型浮上シミュレーション

浮上のシミュレーションにおいて実験との齟齬が見つかったのは主に水平方向の安定性であった。そこで水平方向の安定性について、ポテンシャルではなく水平方向に働く力の傾きを採用した。これは 3.3 節でみたように、水平方向の安定性は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial i^2} U &= \frac{\partial}{\partial i} (-F_i) > 0 \\ \therefore \frac{\partial}{\partial i} F_i &< 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

と与えられるからである。

また、水平方向の力  $F_i$  を求める上で用いる、ポテンシャルについても修正を施した。浮上体の磁化率に異方性が存在する場合を考慮して、物体の磁化  $\mathbf{M}$  を

$$\mathbf{M} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\chi_{\parallel} B_x \mathbf{e}_x + \chi_{\perp} B_z \mathbf{e}_z) \quad (4.2.2)$$

と再定義した。ここで、 $y$  成分は現在線状の磁石を考えているため、対称性から省略した。これにより、式 (3.3.6) を再度計算すればポテンシャルは

$$\begin{aligned} U &= - \int_0^B V d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \\ &= - \frac{V}{\mu_0} \int_0^B (\chi_{\parallel} B_x \mathbf{e}_x + \chi_{\perp} B_z \mathbf{e}_z) d\mathbf{B} \\ &= - \frac{V}{2\mu_0} (\chi_{\parallel} B_x^2 + \chi_{\perp} B_z^2) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

を得る。この修正したポテンシャルを用いれば、水平方向の力  $F_h$  は

$$\begin{aligned}
 F_h &= -\frac{\partial}{\partial x}U \\
 &= \frac{V}{\mu_0} \left( \chi_{\parallel} B_x \frac{\partial}{\partial x} B_x + \chi_{\perp} B_z \frac{\partial}{\partial x} B_z \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.2.4}$$

となる。

新型のシミュレーションでは以上の議論を盛り込んだ上で、Poisson Superfish ではなく FEMM<sup>\*1</sup>と呼ばれる、電磁場解析のフリーソフトを用いた。[42] これは、Poisson Superfish がすでにロスアラモス国立研究所からダウンロードできなくなっているのと、FEMM が Matlab 上で動作するため磁場マップの生成から浮上に関する計算までを一挙に行うことができるためである。Poisson Superfish では磁場マップの txt データを生成してから Matlab で計算する 2 段階が必要であったのが、FEMM で一気にできるようになったことで、磁石の構造をも変数化して扱うことができるようになった。FEMM を活用した Matlab 上で動作するシミュレーションコードはソースコード 4.5 の通り。

**Listing 4.5:** FEMM による磁場マップの生成から浮上高さおよび水平方向の安定性の計算までを Matlab 上で行うコード

```

1 %parameters to be changed
2 %about magnets
3 mla = 6; %length of magnet A(odd array) in x direction mm
4 mlb = 1.5; %length of magnet B(even array) in x direction mm
5 mha = 7; %length of magnet A in y direction mm
6 mda = 64; %length of magnet A in 'into the paper' direction mmNa = 3; %number of
   magnets A
7 Na = 3; %number of magnet A
8 Nb = 2; %number of magnet B
9 mdir = 270; %direction of the first magnet's magnetization
10
11 %about graphite
12 gl = 10/1000; %length of graphite in x direction mm to m
13 gd = 10/1000; %length of graphite in 'into the paper' direction mm to m
14 gh = 1.5/1000; %length of graphite in y direction mm to m
15
16 %about mirror
17 M = 0.0/1000000; %mirrors mass mg to kg
18
19 %about data
20 dh = 5; %length of data area in y direction mm
21 Nx = 500; %number of divisions in x direction
22 Ny = 500; %number of divisions in y direction
23
24 %%
25 %fixed numbers
26 g = 9.8; %Gravity acceleration

```

---

\*1 FEMM = Finite Element Method Magnetics

```

27 mu0 = 1.26e-6; %Magnetic permeability in air
28 chiv = -45e-5; %Vertical magnetic susceptibility of graphite
29 chih = -85e-6; %Horizontal magnetic susceptibility of graphite
30 rho = 2.2e3; %Density of graphite
31 S = gl*gh; %cross-section of graphite in xy planem^2
32 V = S*gd; %volume of graphite
33 m = rho*V; %mass of graphite
34 gl2 = gl/2; %half of l
35 gh2 = gh/2; %half of h
36 Nab = Na + Nb; %number of whole magnets
37 dl = mla*Na + mlb*Nb + gl*1000; %length of data area in x direction mm
38 mhB = mha; %length of magnet B in y direction mm
39 mdb = mda; %length of magnet B in 'into the paper' direction mm
40
41 dx = dl/(Nx-1);
42 dy = dh/(Ny-1);
43 ddx = dx/1000; %mm to m
44 ddy = dy/1000; %mm to m
45 X = -dl/2:dx:dl/2;
46 Y = 0:dy:dh;
47
48 %Number of data points contained in one side/2 of graphite
49 lm = ceil(gl2/ddx);
50 hm = ceil(gh2/ddy);
51
52 %%
53 %open software femm without window
54 openfemm(1);
55
56 %convert numbers to characters
57 formatSpec = '%.1f';
58 Mla = num2str(mla,formatSpec);
59 Mlb = num2str(mlb,formatSpec);
60 Gl = num2str(gl*1000,formatSpec);
61 Gd = num2str(gd*1000,formatSpec);
62 Hyphen = '-';
63 Underbar = '_';
64 MM = 'mm';
65 ExtensionFem = '.fem';
66
67 %if 'filename' exists just open it, else make a new file
68 filename = [Mla, Hyphen, Mlb, Underbar, Gl, Gd, MM, ExtensionFem];
69 %filename = 'mla_mlb_gl.fem';
70 fileID = exist(filename,"file");
71
72 if fileID == 2

```

```

73     opendocument(filename);
74 else
75     newdocument(0); %create new file 0=magnetics, 1=electronics, 2=heat, 3=current
76     mi_saveas(filename);
77 end
78
79 %%
80 %problem definition
81 %mi probdef(freq,units,type,precision,depth,minangle,(acsolver))
82 mi_probdef(0, 'millimeters', 'planar', 1E-8, mda, 30, 0);
83 smartmesh(1);
84
85 %%
86 %add material properties
87 mi_getmaterial('Air');
88 mi_getmaterial('N40');
89 %add boundary condition
90 mi_addboundprop('bc', 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
91
92 %%
93 %draw 2d fig & add properties
94 %mags
95
96 [Q, R] = quorem(sym(Nab), sym(2));
97 wholelength = (Q+1)*mla + Q*mlb;
98
99 Mx = zeros(Nab+1, 1);
100 for i = 1:Nab
101     [Q, R] = quorem(sym(i), sym(2));
102     if R == 1
103         Mx(i+1) = (Q+1)*mla + Q*mlb;
104     else
105         Mx(i+1) = Q*mla + Q*mlb;
106     end
107 end
108
109 Mxx = double(Mx) - double(wholelength)/2;
110 Mxc = zeros(Nab, 1);
111 for i = 1:Nab
112     mi_drawpolygon([Mxx(i),0; Mxx(i),-mha; Mxx(i+1),-mha; Mxx(i+1),0]);
113     Mxc(i) = (Mxx(i)+Mxx(i+1))./2;
114     mi_addblocklabel(Mxc(i), -mha/2);
115     mi_selectlabel(Mxc(i), -mha/2);
116     mi_setblockprop('N40', 0, 0, 'none', mdir+90*(i-1), 0, 0);
117     mi_clearselected;
118 end

```

```

119
120 %air
121 mi_addblocklabel(0, 5);
122 mi_selectlabel(0, 5);
123 mi_setblockprop('Air', 0, 0, 'none', 0, 0, 0);
124 mi_clearselected;
125
126 %boundary condition
127 mi_drawpolygon([-double(wholelength)*2,mha*5; double(wholelength)*2,mha*5; ...
128     double(wholelength)*2,-mha*5; -double(wholelength)*2,-mha*5]);
129 mi_selectsegment(0, mha*5);
130 mi_selectsegment(-double(wholelength)*2, -mha/2);
131 mi_selectsegment(0, -mha*5);
132 mi_selectsegment(double(wholelength)*2, -mha/2);
133 mi_setsegmentprop('bc', 0, 0, 0, 0);
134 mi_clearselected;
135
136 %%
137 %save document
138 mi_saveas(filename);
139
140 %%
141 %create mesh
142 mi_createmesh;
143
144 %%
145 %run this simulation
146 mi_analyze(0);
147 mi_loadsolution;
148
149 %%
150 %levitating simulation
151
152 Bx = zeros(Nx,Ny);
153 By = zeros(Nx,Ny);
154 for i=1:Nx
155     for j=1:Ny
156         Bxy = mo_getb(-dl/2 + (i-1)*dx, (j-1)*dy);
157         Bx(i, j) = Bxy(1);
158         By(i, j) = Bxy(2);
159     end
160 end
161
162 %gradient in x direction
163 dBxdx = diff(Bx)/(ddx);
164 dBwdx = diff(By)/(ddx);

```

```

165 dBxdx(Nx, Ny) = 0;
166 dBydx(Nx, Ny) = 0;
167
168 %gradient in y direction
169 dBxdy = diff(Bx,1,2)/(ddy);
170 dBydy = diff(By,1,2)/(ddy);
171 dBxdy(Nx, Ny) = 0;
172 dBydy(Nx, Ny) = 0;
173
174 %second gradient in x direction
175 d2Bxdx2 = diff(dBxdx)/(ddx);
176 d2Bydx2 = diff(dBydx)/(ddx);
177 d2Bxdx2(Nx, Ny) = 0;
178 d2Bydx2(Nx, Ny) = 0;
179
180 %second gradient in y direction
181 d2Bxdy2 = diff(dBxdy,1,2)/(ddy);
182 d2Bydy2 = diff(dBydy,1,2)/(ddy);
183 d2Bxdy2(Nx, Ny) = 0;
184 d2Bydy2(Nx, Ny) = 0;
185
186 %levitating force / gravity
187 %levitating force on (x,y)
188 Fv = (By.*dBydy.*chiv + Bx.*dBxdy.*chih)./mu0;
189
190 %Sum to Graphite Size
191 Fvsm = zeros(Nx, Ny);
192 for i = 1+lm:Nx-lm
193     for j = 1+hm:Ny-hm
194         Fvs = sum(Fv(i-lm:i+lm, j-hm:j+hm));
195         Fvsm(i,j) = sum(Fvs);
196     end
197 end
198 %average
199 Fva = Fvsm ./ (2*lm*2*hm);
200 %Gravity per unit volume
201 Fg = (m+M)*g/V;
202 %Ratio to gravity
203 Fvr = Fva./Fg;
204
205 %Levitation height with respect to x
206 Yeq=zeros(1,Ny);
207 for i=1:Nx
208     ratio1 = Fvr(i,:).';
209     ratio = knnsearch(ratio1 ,1);
210     if ratio <= 1

```

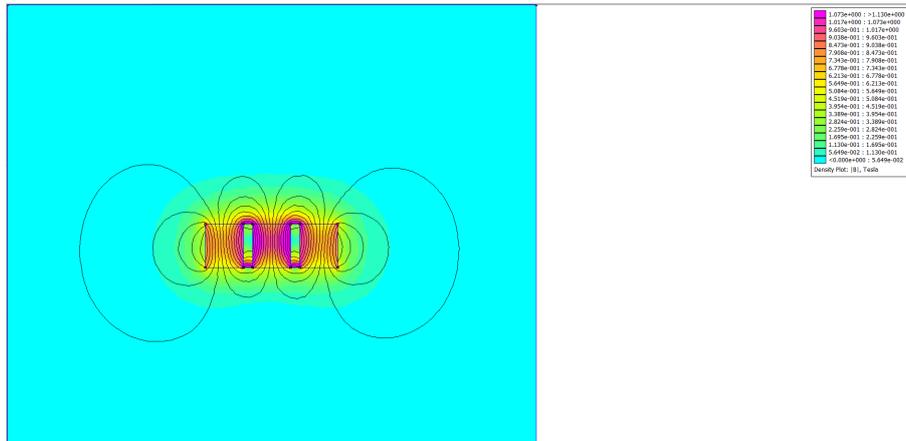
```

211     Yeq(i) = 0;
212     elseif ratio == Ny
213         Yeq(i) = 0;
214     elseif (ratio1(ratio - 1) - 1) * (ratio1(ratio + 1) - 1) < 0
215         Yeq(i) = Y(ratio);
216     else
217         Yeq(i) = 0;
218     end
219 end
220 Y0 = Yeq.';
221
222 %%
223 %Horizontal stability
224 Fh = (By.*dBydx.*chiv + Bx.*dBxdx.*chih)./mu0;
225
226 Fhsm = zeros(Nx, Ny);
227 for i = 1+lm:Nx-lm
228     for j = 1+hm:Ny-hm
229         Fhs = sum(Fh(i-lm:i+lm, j-hm:j+hm));
230         Fhsm(i,j) = sum(Fhs);
231     end
232 end
233 %average
234 Fha = Fhsm ./ (2*lm*2*hm);
235 Fha0 = zeros(1, Nx);
236 for i = 1:Nx
237     Fha0(i) = Fha(i, round(Y0(i)./dy)+1);
238 end
239
240 %%
241 %graph
242 figure
243 grid on
244 yyaxis left
245 plot(X, Fha0, 'LineWidth', 2);
246 xlabel('x [mm]', 'FontSize', 20)
247 xlim([-d1/2, d1/2]);
248 ylabel('Force in x direction [N]', 'FontSize', 20)
249 yyaxis right
250 plot(X, Y0, 'LineWidth', 2);
251 ylabel('Levitation height [mm]', 'FontSize', 20)
252 ax = gca;
253 ax.LineWidth = 3;
254 ax.FontSize = 20;

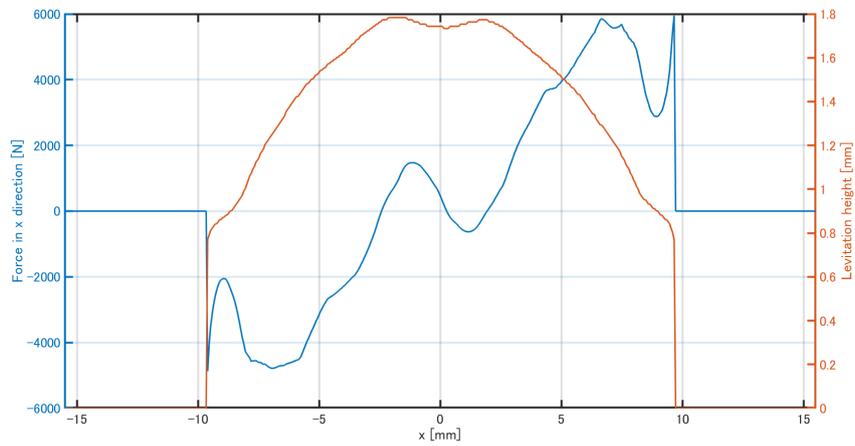
```

---

このシミュレーションの結果を以下に示す。



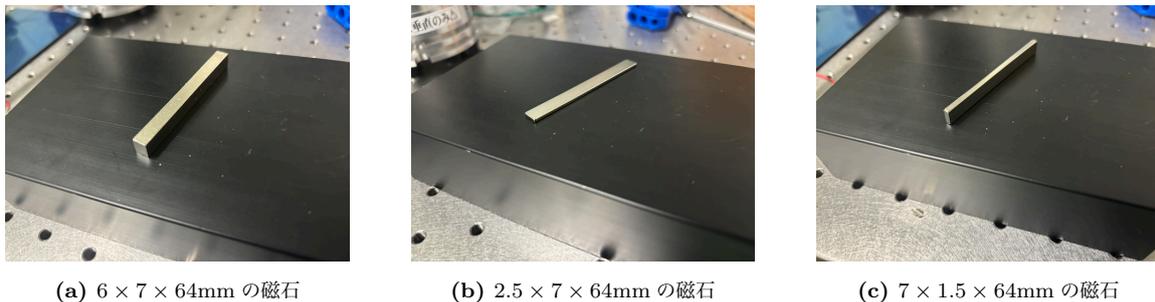
(a) FEMM による磁場マップのイメージ図



(b) 浮上高さ と 水平方向の安定性

図 4.2.3: 新型浮上シミュレーションの結果

$F_h$  の傾きが負である領域が水平方向の安定点を表すことを思い出すと図 4.2.3b より、5 層の直線状ハルバッハ配列の中心部で十分な浮上高さ と 水平方向の安定性が両立できることがわかる。そこで、シミュレーションの結果を実験的に確かめるため、以下の磁石を組み合わせ 5 層の直線状ハルバッハ配列を製作した。



(a) 6 × 7 × 64mm の磁石

(b) 2.5 × 7 × 64mm の磁石

(c) 7 × 1.5 × 64mm の磁石

図 4.2.4: ハルバツハ配列組み立て用の 3 種類の磁石

図 4.2.4 は二六製作所 [43] の既製品またはオーダーメイドであり、それぞれの材質はネオジムであり、6 × 7 × 64mm の磁石が N45、2.5 × 7 × 64mm の磁石が N40、7 × 1.5 × 64mm の磁石が N35 である。[44]

## 4.2.2 治具の設計

直線状ハルバツハ配列は磁石の同極が接するため、自発的に組み上がることはなく、外部から力を加え整列させる必要がある。そのための磁石全体を覆う箱のことを治具と呼ぶ。以下では磁石の組み立てハルバツハ配列を維持するための治具について説明する。

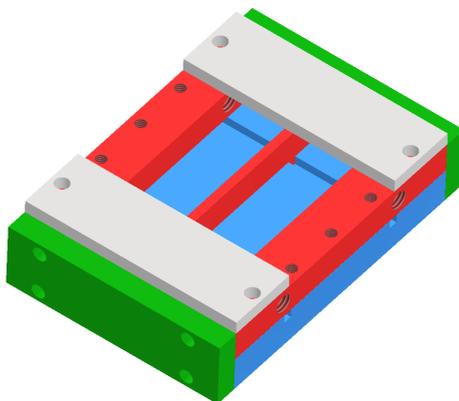


図 4.2.5: 治具の模式図

図 4.2.5 は治具の模式図であり、磁石を 6 面から押すことで組み立てる。<sup>\*2</sup>組み立て時の磁石の動きを図解する。

<sup>\*2</sup> 各パーツの設計図は付録に記す。

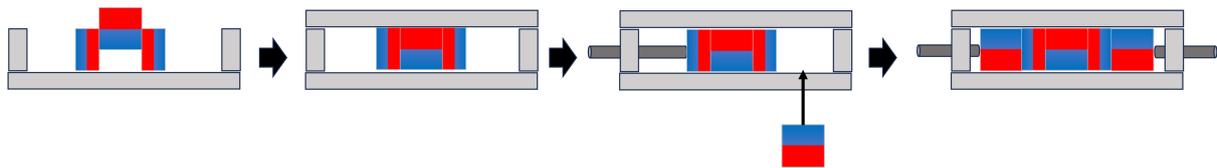
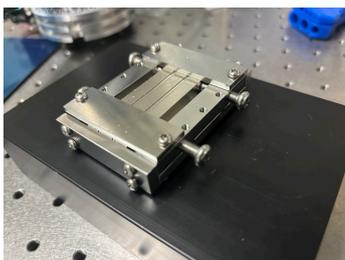


図 4.2.6: 治具によるハルバツハ配列組み立て時の流れ

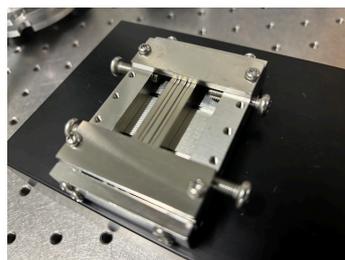
中央 3 つの磁石は自発的に中央を押し出す形で結合する。(図 4.2.6 左) これを上下から挟み込み圧力をかけることで平すことができる。(図 4.2.6 左から 2 番目) 次に 3 つの結合した磁石の脇から 1 つずつ磁石を差し込む(図 4.2.6 右から 2 番目) ことでハルバツハ配列を作ることができる。(図 4.2.6 右) グラファイトの浮上は図 4.2.5 における蓋のない中央部分で行うことができる。

### 4.2.3 グラファイトの設計

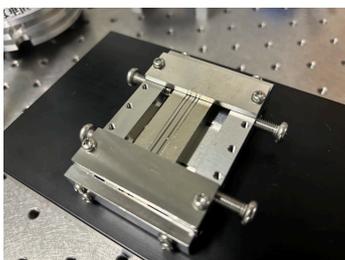
磁石 ABC を組み合わせることで、直線状ハルバツハ配列が 4 通り製作できる。それぞれ図示すると



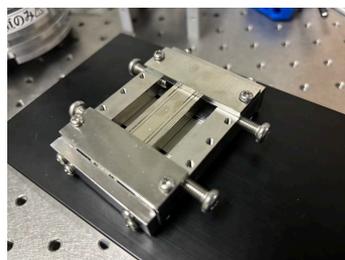
(a) 磁石配列 1(磁石 A × 3 + 磁石 C × 2)



(b) 磁石配列 2(磁石 B × 3 + 磁石 C × 2)



(c) 磁石配列 3(磁石 A × 2 + 磁石 B × 1 + 磁石 C × 2)



(d) 磁石配列 4(磁石 A × 1 + 磁石 B × 2 + 磁石 C × 2)

図 4.2.7: 組み立てた 4 種類の磁石配列

配列 1 を例に HOPG と CIP で新型の浮上シミュレーションを施すと、

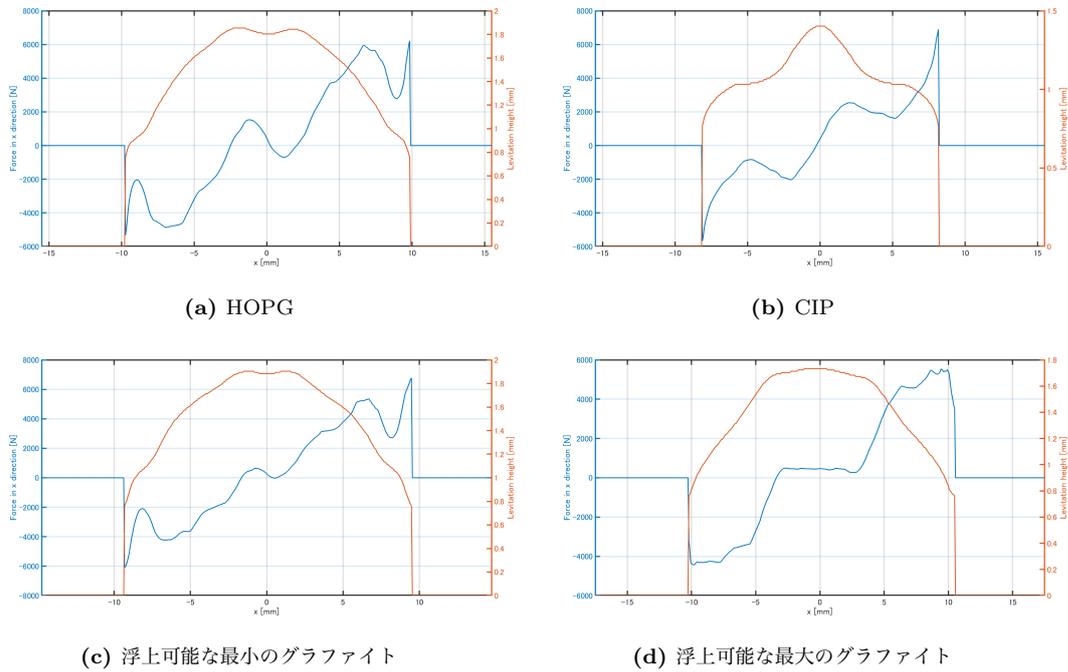
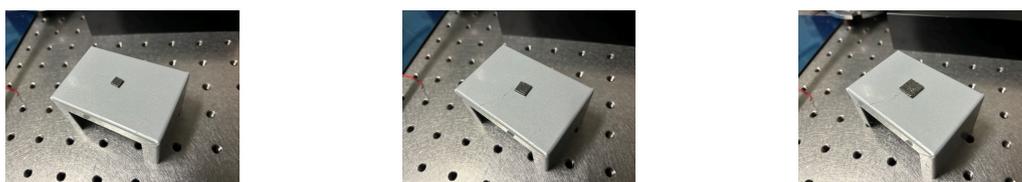


図 4.2.8: 磁石配列 1 に対する浮上可能なグラファイトの検証

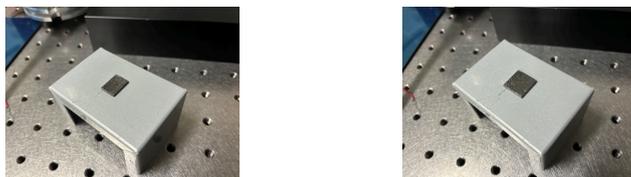
となる。

これより、5 層の配列の 2 層目から 4 層目を覆う大きさのグラファイトが浮上可能な最小のグラファイトであり、最大のグラファイトは 1 層目の中央から 5 層目の中央までを覆う大きさであることが予想される。また、水平方向の安定性にはグラファイトが高配向性であることが重要であることが予測できた。

そこで、配列 1,2,3,4 を参考に、以下の 5 通りのグラファイトを設計した。グラファイトはクリスタルベース社に発注し、TipsNano 社に製作を依頼した。



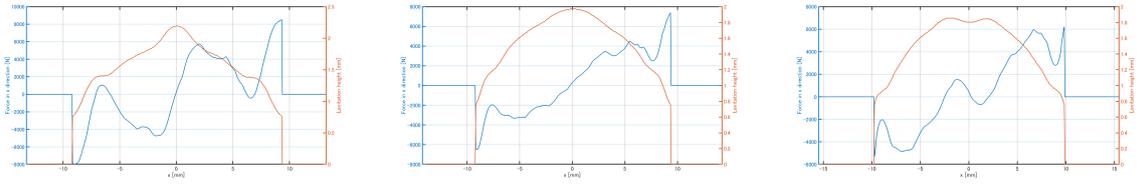
(a) グラファイト A(5.5 × 5.5 × 1.5mm) (b) グラファイト B(7.5 × 7.5 × 1.5mm) (c) グラファイト C(10 × 10 × 1.5mm)



(d) グラファイト D(10 × 14 × 1.5mm) (e) グラファイト E(14 × 14 × 1.5mm)

図 4.2.9: 発注したグラファイト

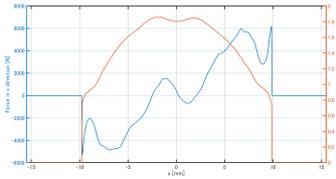
全て HOPG であり、それぞれの配列に対するシミュレーションを施すと以下の通り。



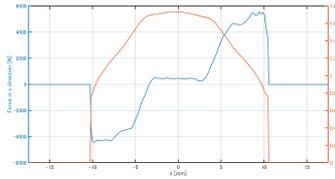
(a) グラフ A

(b) グラフ B

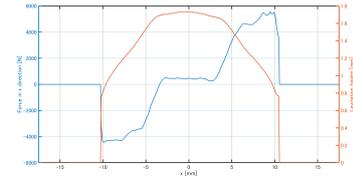
(c) グラフ C



(d) グラフ D1

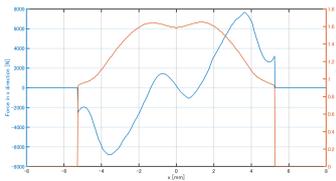


(e) グラフ D2

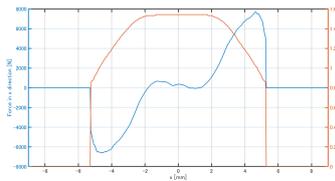


(f) グラフ E

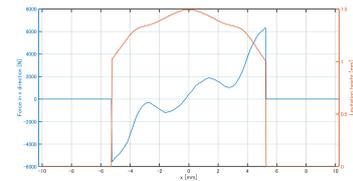
図 4.2.10: 磁石配列 1 に対する各種グラフ A の浮上シミュレーション



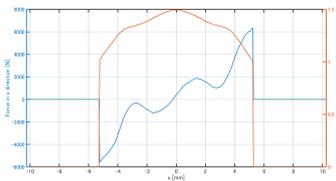
(a) グラフ A



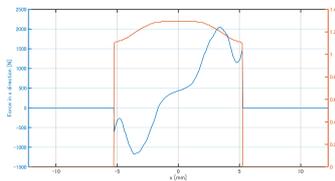
(b) グラフ B



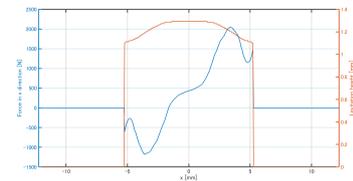
(c) グラフ C



(d) グラフ D1



(e) グラフ D2



(f) グラフ E

図 4.2.11: 磁石配列 2 に対する各種グラフ A の浮上シミュレーション

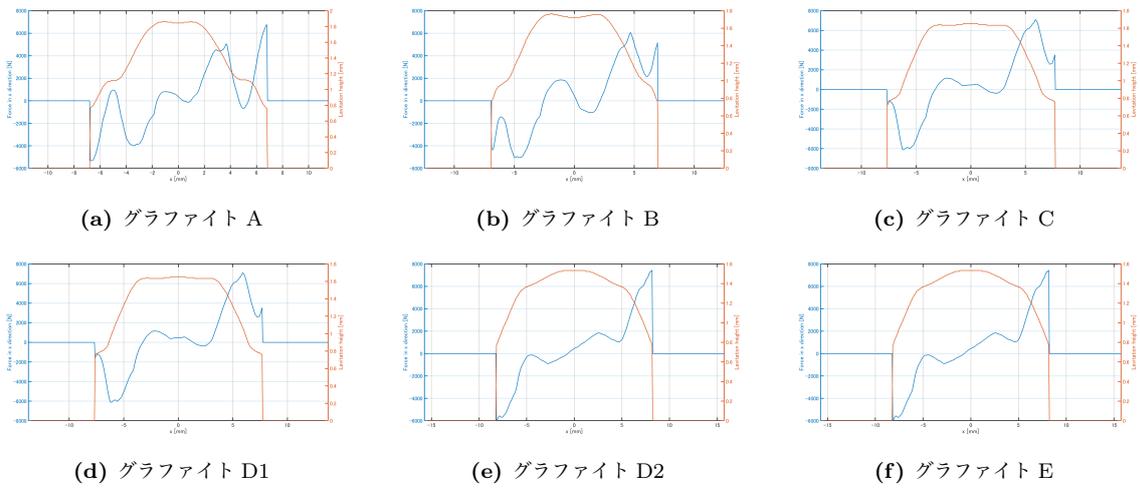


図 4.2.12: 磁石配列 3 に対する各種グラファイトの浮上シミュレーション

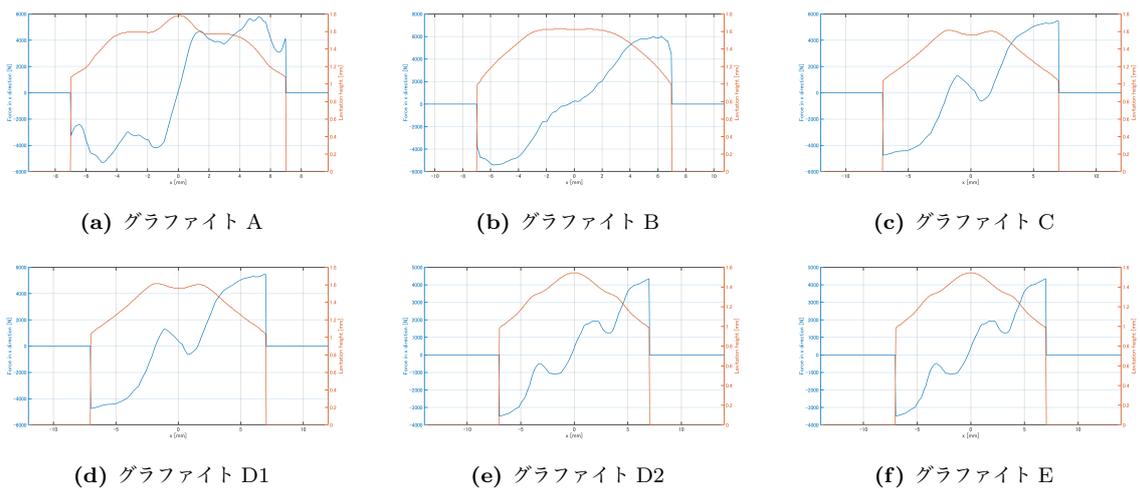


図 4.2.13: 磁石配列 4 に対する各種グラファイトの浮上シミュレーション

よって浮上が予測される組み合わせは、以下の表 4.2.1 の通り。

表 4.2.1: シミュレーションによる 4 種の磁石配列に対する各種グラファイトの浮上可能性

	graphite A	graphite B	graphite C	graphite D1	graphite D1	graphite E
配列 1	×	×	○	○	○	○
配列 2	○	○	×	×	×	×
配列 3	○	○	○	○	×	×
配列 4	×	×	○	○	×	×

次節ではグラファイトの種類の違いと、配列に対するそれぞれの組み合わせの浮上の様子を確認する。

## 4.2.4 浮上実験

4.2.3 節でシミュレーションにより予測した浮上の組み合わせが実際に成立するか実験的に確かめる。

### 4.2.4.1 グラファイトの違い

図 4.2.8 で確かめた、同サイズのグラファイトであっても CIP 材では浮上できないものが、HOPG では浮上できるということを確認する。浮上の様子が以下の通り。

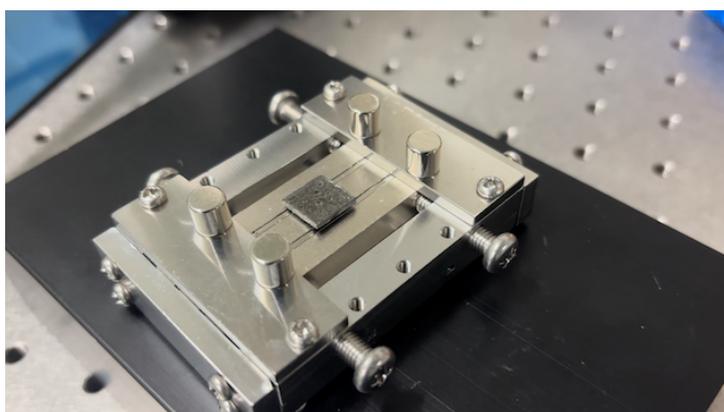


図 4.2.14: HOPG が磁石配列 1 に浮上する様子

CIP 材のグラファイトは安定的に浮上しないため、静止画を撮影することができなかった。図 4.2.14 の通り、HOPG であれば水平方向に安定的に浮上し、その上で十分な浮上高さが得られた。一方、CIP 材では水平方向に安定せず、浮上させることができなかった。これにより、磁化率の異方性に合わせて再定義したポテンシャルが現実的に即していることが確認できた。

### 4.2.4.2 グラファイトの大きさの違い

表 4.2.1 に従い、磁石とグラファイトの組み合わせそれぞれに対して実際に浮上するか実験的に検証する。浮上した組み合わせを表にまとめると

表 4.2.2: 4 種の磁石配列に対する各種グラファイトの浮上

	graphite A	graphite B	graphite C	graphite D1	graphite D1	graphite E
配列 1	×	×	○	○	○	○
配列 2	△	○	×	×	×	×
配列 3	×	○	○	○	×	×
配列 4	×	×	○	○	×	×

ただし△は浮上したものの、傾きながら浮上し部分的に磁石と接触するため、外部からの力に対して理想的に自由運動することがなかったことを意味する。表 4.2.1 と 4.2.2 の相違点として、グラファイト A の浮上が挙げられる。配列 3 との組み合わせではグラファイト A は定盤と平行になる点が存在せず、水平方向に弾か

れるようにして磁石から滑落していた。一方、配列 2 との組み合わせでは傾きながら浮上していた。このことは、浮上のシミュレーションでは常にグラフィイトが磁石に対して平行を保つことを前提に計算をしていたためであると考えられる。グラフィイトは磁場を弾くようにして浮上するが、小さいグラフィイトでは磁力線の谷間に沿って傾きながら浮上する方がポテンシャルが低くなるからであると予測できる。この問題を解決するには、浮上のシミュレーションにさらにモーメントなど、剛体としての形状を考慮した要素を付け加える必要がある。



(a) 大きいグラフィイトは磁石に平行に浮上する (b) 小さいグラフィイトは磁石に対して傾く方が安定する

図 4.2.15: ハルバツハ配列に対するグラフィイトのサイズの違い

#### 4.2.4.3 浮上要件

以上のシミュレーションをもとに、浮上に関わる要因を考察する。安定的な浮上に作用する要因として以下の 3 点に分けた。

磁石配列	グラフィイトの種類	グラフィイトの大きさ
上下配列	CIP	10 × 10mm
ハルバツハ配列	HOPG	30 × 30mm

全 12 通りのシミュレーション結果は以下の通り。

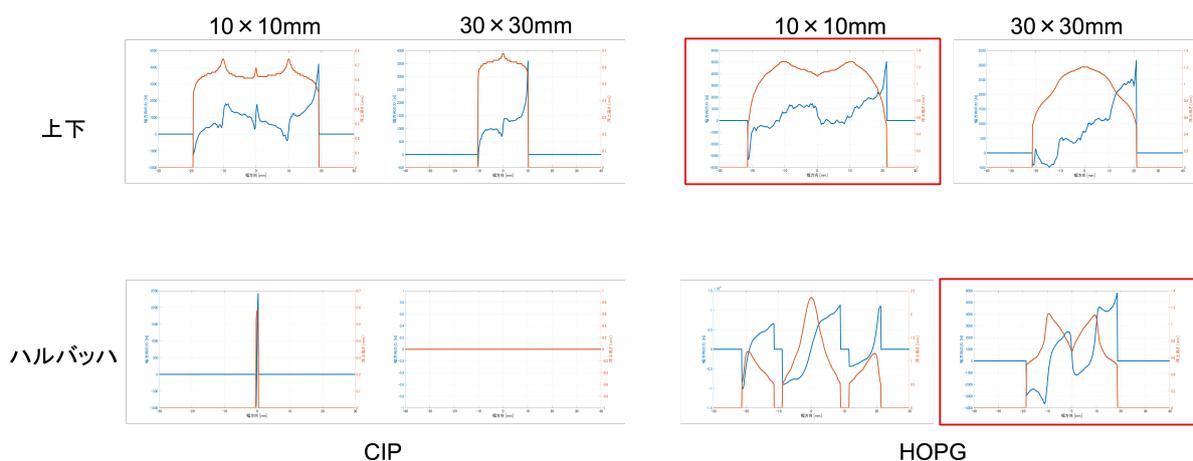


図 4.2.16: 浮上要件

浮上可能な組み合わせは赤枠で囲まれた 2 種類である。以上より、浮上させるならば HOPG を用いること、

上下配列では1層程度の幅のグラフィット、ハルバッハ配列では3層程度の幅のグラフィットを用いることであるとわかる。

## 第5章

# 渦電流熱雑音

本実験で用いるグラファイトのように、導電性の材質を磁場に対して動かすことで内部の磁束変化を打ち消す向きに渦状の電流が発生する。このことを渦電流と呼ぶ。渦電流はジュール熱を生み出し、その熱は揺動散逸定理に従い外部の熱浴に散逸する。この一連のエネルギー散逸による雑音を渦電流熱雑音と呼ぶ。浮上しているグラファイトはわずかに磁化しているため、振動すればグラファイトを貫く磁場の大きさは変化し、渦電流熱雑音が発生する。特にグラファイトなどの導電性の物質はジュール熱が大きくなる。そこで本章では渦電流熱雑音について理論的に議論し、先行研究においてリング型磁石やグラファイトを利用した意味を理解する。

### 5.1 ジュール熱によるエネルギー散逸

渦電流の作るジュール熱と、その散逸を理論的に計算する。渦電流は円柱座標  $(r, x, \phi)$  に対して  $\phi$  方向に流れる。そこで、あるループ面を貫く磁束を  $\Phi(r, z)$  とすると、磁束の変化により生じる誘導起電力は

$$V(r, z) = -\frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial t} \quad (5.1.1)$$

と表される。位置  $(r, z)$  における磁束密度の  $z$  成分を  $B_z(r, z)$ 、電場の  $\phi$  成分を  $E_\phi(r, z)$ 、電流密度の  $\phi$  成分を  $j_\phi(r, z)$ 、電気抵抗率を  $\rho$  とすると

$$\Phi(r, z) = 2\pi \int_0^r B_z(r', z) r' dr' \quad (5.1.2)$$

$$V(r, z) = 2\pi r E_\phi(r, z) \quad (5.1.3)$$

$$E_\phi(r, z) = \rho j_\phi(r, z) \quad (5.1.4)$$

が成り立つから、これらを用いて渦電流の電流密度は

$$j_\phi(r, z) = -\frac{1}{\rho r} \int_0^r \frac{\partial B_z(r', z)}{\partial t} r' dr' \quad (5.1.5)$$

と表せる。これが作るジュール熱  $P$  は

$$P = 2\pi \rho \int \int r dr dz j_\phi^2(r, z) \quad (5.1.6)$$

となる。

このジュール熱  $P$  を散逸  $\gamma$  に変換する。式 (2.2.41) より振動子のインパルス応答は

$$x(t) \propto \exp(-\gamma_m t) \sin(\Omega_m t) \quad (5.1.7)$$

これを時間微分して速度は

$$v(t) \propto -\gamma_m \exp(-\gamma_m t) \sin(\Omega_m t) + \Omega_m \exp(-\gamma_m t) \cos(\Omega_m t) \quad (5.1.8)$$

のように減衰する。 $\sin(\omega_m t) = 0$  となるような時刻を考えて  $v(t) = v_0 \exp(-\gamma_m t)$  とおき、系のエネルギーのうち弾性エネルギーの時間微分を考えると

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k x^2(t) \right) \propto k \exp(-\gamma_m t) \sin(\Omega_m t) v(t) = 0 \quad (5.1.9)$$

となるため、エネルギーの散逸はずべて運動エネルギーの散逸に変換される。

$$\begin{aligned} P &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2(t) \right) \\ &= m \gamma_m v^2(t) \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

が成り立つ。よって、式 (5.1.5)(5.1.6)(5.1.10) を用いれば磁場の変化から散逸が計算できる。

次にグラファイト内部に生じる渦電流の散逸を求める。グラファイトを浮上させる付近の磁場  $B(r, z)$  は

$$B(r, z) = B_0 + \frac{\partial B}{\partial r} r \quad (5.1.11)$$

で近似できるため、これを用いて計算すると、グラファイト内部に生じる渦電流の作るジュール熱の散逸は

$$\gamma_{ec} = \frac{\left( \frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 r_0^2}{8 \rho \rho_m} \quad (5.1.12)$$

となる。ただし  $r_0$  は渦電流の半径、 $\rho_m$  はグラファイトの密度を表す。

リング型のグラファイトを採用することで、リング全体では磁石の磁場の偏りを平均化できて、リング型グラファイト直径と同様の直径を持つような渦電流は軽減できる。そのため、4.1.2 節で確認したように先行研究ではリング型磁石を採用した。しかし、実際にはリング型磁石にも局所的な磁場の偏りが存在し、この偏りが渦電流を生み出す。この渦電流の直径の最大がリング型グラファイトの幅に対応すると仮定すれば、式 (5.1.12) より、渦電流の生み出す熱雑音の散逸は渦電流の半径の 2 乗に比例するため、リング型グラファイトの幅を狭くすることで生じる渦電流を小さくし、渦電流熱雑音の散逸を軽減できると考えられる。そのため、4.1.8 節で見たように先行研究ではリング型磁石に対してリング型グラファイトを浮上させることを検討した。

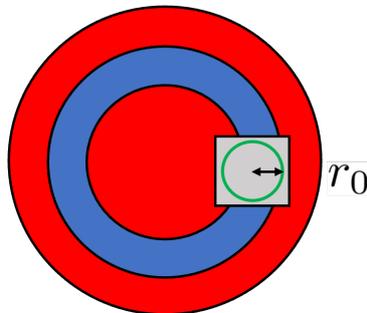


図 5.1.1: グラファイト中の渦電流

## 5.2 渦電流熱雑音の寄与

渦電流熱雑音が Q 値によってどの程度まで変化するかを計算する。そこで、Q 値を  $10^5$ 、 $10^6$ 、 $10^7$  と値を変化させてそれぞれの寄与を求めた結果、図 5.2.1 のようになった。鏡の熱雑音は Q 値に寄らない雑音である。これより、リング型磁石とグラファイトによる磁気浮上システムは低周波側は渦電流熱雑音、高周波側は鏡の熱雑音によって制限されることが分かる。また、SN 比 3 以上を得るためには Q 値が  $10^6$  以上であることが条件であることが求められた。

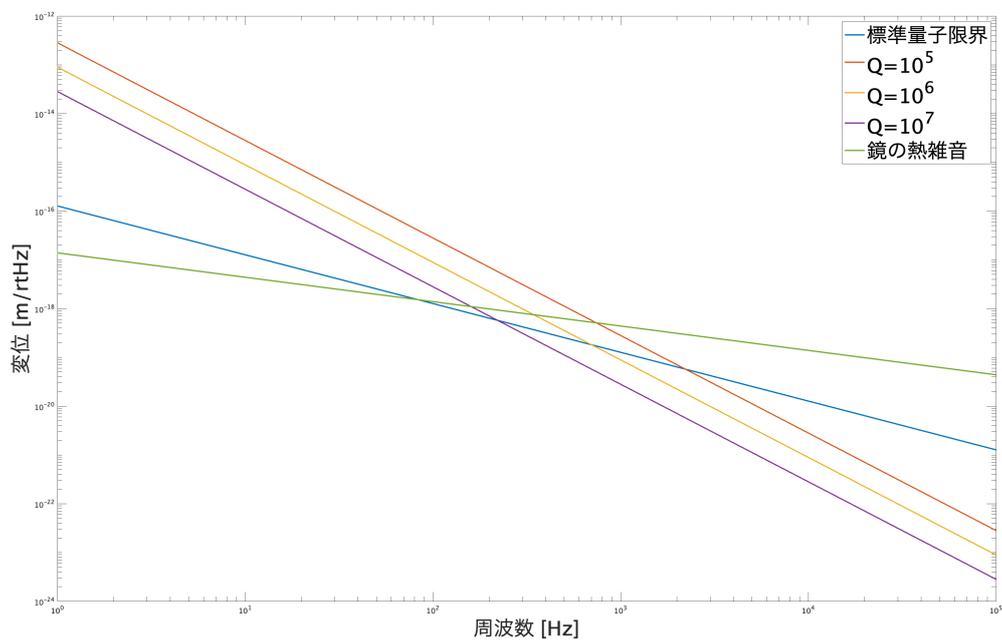


図 5.2.1: 渦電流熱雑音の見積もり

## 第 6 章

# 【実験 2】 Q 値測定実験

先行研究では、渦電流熱雑音の散逸が渦電流の半径の 2 乗に比例することに着目し、グラファイトのサイズが渦電流の半径を制限していると仮定して、幅の狭いグラファイトを浮上させることを検討した。本章では、グラファイトのサイズと Q 値の関係に注目することで、渦電流熱雑音の Q 値とグラファイトのサイズにスケールリングが成立するという仮定を検証した。

### 6.1 Q 値測定

磁石上のグラファイトが振動子としてどの程度機能するかを調べるため、Q 値の測定を行った。磁石に対してグラファイトのサイズのみを変え、その他の条件を同じにすることで、渦電流熱雑音のスケールリングが確認できる。

#### 6.1.1 シャドウセンシング

Q 値の測定にはシャドウセンシングと呼ばれる方法を用いた。これは浮上するグラファイトの縁にレーザーを横から当て、浮上グラファイトが図 6.1.1 のように振動すると、覆い隠されるレーザーの面積の変化に従い、フォトセンサーに入射する光量が変化することをを用いるものである。つまり、グラファイトの振動に従い、フォトセンサーで計測される電圧が時間変化する。

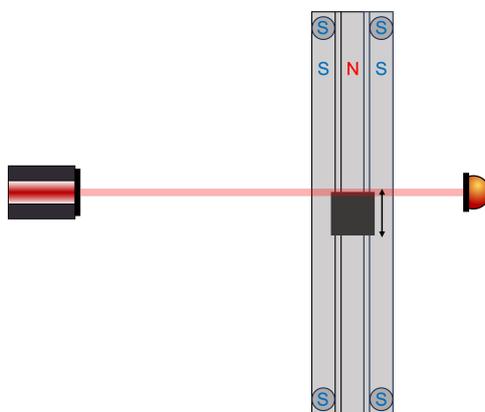
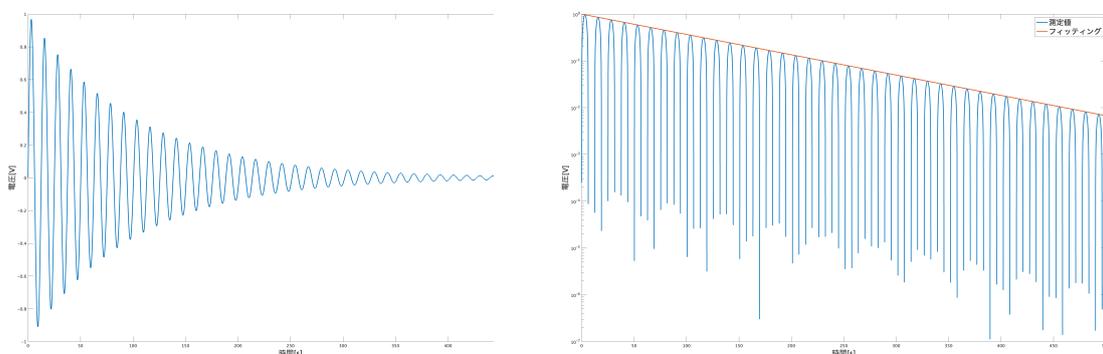


図 6.1.1: シャドウセンシング法

検出される電圧の時系列データは、対象である直線状磁石の奥行き方向以外の、水平方向や鉛直方向、回転方向など複数のモードを含んでいる。今回調べる渦電流熱雑音は磁石の奥行き方向の振動に従って励起されるので、データを振動子の共振周波数周りでフィルタすることで、図 2.2.4 のような目標の振動の減衰振動を得られる。このグラフは理論上、式 (2.2.41) に従う。ただしこのままではフィッティングが困難なため、信号に絶対値を取ってから縦軸を対数でプロットすることで、その包絡線に線形フィッティングを施すことができ、その傾きが  $-\log_{10}(e)\gamma_m$  となる。

$$\begin{aligned}\log_{10}(x(t)) &\propto \log_{10}[\exp(-\gamma_m t) \sin(\Omega_m t)] \\ &= -\log_{10}(e)\gamma_m \cdot t + \log_{10}(\sin(\Omega_m t))\end{aligned}\quad (6.1.1)$$

理想的な場合のグラフとフィッティングは以下の通り。



(a) 理想的な減衰振動の時系列グラフ

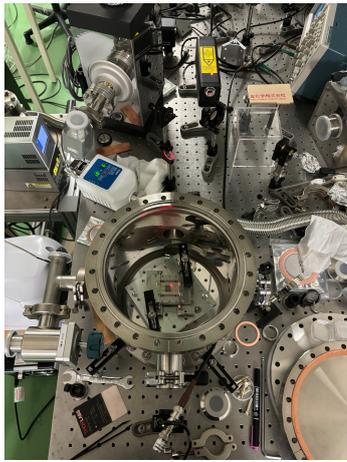
(b) 片対数グラフにおける理想的な線形フィッティング

図 6.1.2: 理想的なシャドウセンシングのデータ

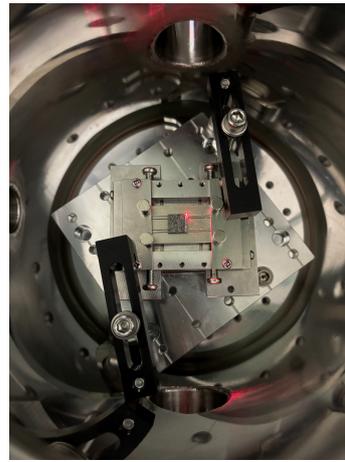
フィッティングした直線の傾きを係数に注意して補正し、共振周波数との比を求めることで  $Q$  値を導出できる。

$$\begin{aligned}Q_m &= \frac{\Omega_m}{2\gamma_m} \\ &= \frac{\Omega_m}{2 \times \left(-\frac{(\text{傾き})}{\log_{10}(e)}\right)} \\ &= -\frac{\log_{10}(e) \cdot \Omega_m}{2 \times (\text{傾き})}\end{aligned}\quad (6.1.2)$$

なお、この実験は大気中で行ったが、これは真空槽に入れてからでは初期振動を与えるの困難であり、また渦電流による散逸が十分に大きいと考えられるため大気の影響を考慮しなかった。ただし、周囲の気流の影響を遮断するため、真空槽に入れ振動を励起させてから蓋をして実験した。復元力としては外部磁場を用い、図 6.1.1 のように、直線状磁石の両端に 2 つずつ円柱状の磁石を配置した。この円柱状磁石の作り出す磁場勾配により磁石はトラップされ、減衰振動を起こす。



(a) 実験系の全体図



(b) シャドウセンシングの拡大図

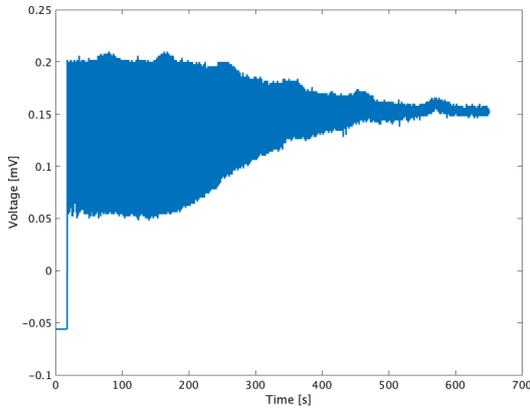
図 6.1.3: 実際の実験系

実際の実験系は図 6.1.3 の通りで、真空槽に配置したグラファイトに写真奥側からレーザー光をビューポートを通じて入射し、はみ出た一部のレーザー光が手前側のビューポートを通りフォトディテクタで検出する。初期振動を与えた後は真空槽の蓋を閉じ、気流の影響を遮断した。

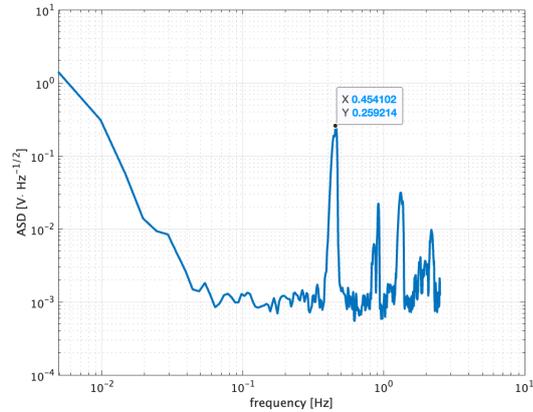
## 6.1.2 Q 値測定結果

各磁石配列ごとに、浮上可能なすべてのグラファイトの Q 値を測定した。

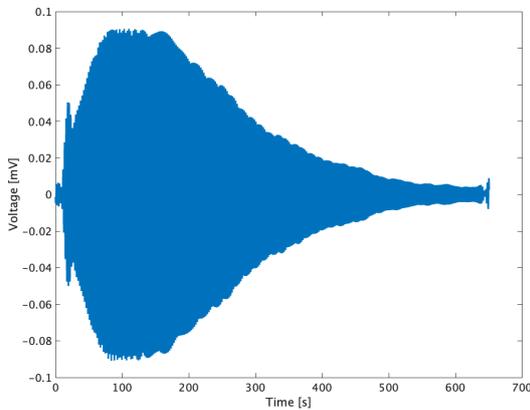
まず、磁石配列 1 にグラファイト C を浮上させた場合を例に、データ解析の流れを確認する。実際に測定したフォトセンサーの電圧の時系列グラフは図 6.1.4a のように乱雑である。これをフーリエ変換することで図 6.1.4b を得る。ここから共振周波数が 0.454Hz であることが読み取れる。そこで共振周波数周りでフィルタして再度時系列グラフを描くと図 6.1.4c のようになる。



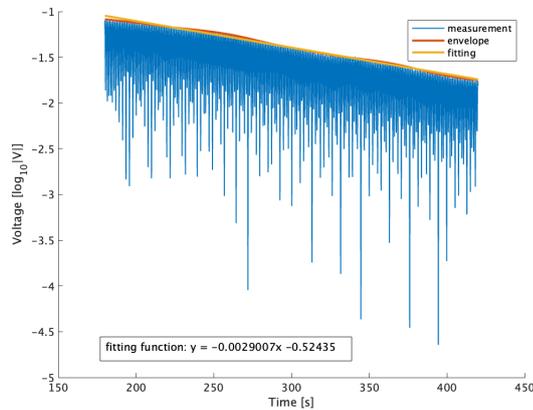
(a) 測定した電圧の時系列グラフ



(b) FFT 後のスペクトル密度



(c) 共振周波数周りの振動の時系列グラフ



(d) 片対数グラフの包絡線と線形フィッティング

図 6.1.4: Q 値測定のためのデータ処理

図 6.1.4c を見ると、200 秒ごろまで指数的な減衰振動の形をしておらず、データとして除外する必要がある。これは振動を与えた直後であるため、初期の雑音が入ってしまったためであると考えられる。また、500 秒前後から指数的な挙動からずれているようみ見える。これはオフセットとして微小な振動が入り込んだからだと考え、これもデータから除外されるべきである。そこで指数的な減衰をしている部分に限定し、 $y$  軸を対数にプロットすると図 6.1.4d のようになる。このグラフの包絡線は図中の赤線で表され、これに線形フィッティングを施すと黄色線のようなになる。この直線を読み取ることで傾きが  $-0.00290$  とわかる。式 (6.1.2) に従い計算することで、 $Q$  値は 34.0 と求まる。

表 6.1.1:  $Q$  値の導出

共振周波数 [Hz]	フィッティングの傾き	散逸 [ $s^{-1}$ ]	$Q$ 値
0.454	-0.00290	0.00668	34.0

同様の手順で各磁石とグラファイトの組み合わせに対する  $Q$  値を求めた。ただし測定は各組み合わせごとに複数回行い、その平均値を  $Q$  値とし標準偏差を誤差範囲とした。

表 6.1.2: 磁石配列 1 に対する各グラファイトの Q 値

	graphite C	graphite D1	graphite D2	graphite E
Q 値	33.4	30.4	20.5	20.7
誤差	±0.526	±0.230	±1.01	±1.34

表 6.1.3: 磁石配列 2 に対する各グラファイトの Q 値

	graphite A	graphite B
Q 値	(振動せず)	11.3
誤差	(振動せず)	±2.41

表 6.1.4: 磁石配列 3 に対する各グラファイトの Q 値

	graphite B	graphite C	graphite D1
Q 値	16.6	12.3	14.1
誤差	±0.405	±0.318	±0.134

表 6.1.5: 磁石配列 4 に対する各グラファイトの Q 値

	graphite C	graphite D1
Q 値	19.8	18.2
誤差	±1.68	±0.901

### 6.1.3 グラファイトの大きさと Q 値の相関

グラファイトのサイズと渦電流熱雑音の効果の相関について考察する。同様の条件で比較するため、まず磁石配列 1 について考える。グラファイト D1 と D2 は面積は同じであるにも関わらず、浮上させる向きの違いで Q 値に大きな違いが生じていることがわかる。式 (5.1.12) より、渦電流熱雑音の Q 値ははその半径の逆 2 乗、つまり面積に反比例すると考えていた。しかし、本実験より直線状ハルパツハ配列に浮上させた場合は、面積依存するわけではないことが分かった。またグラファイト D1 と D2 の Q 値の比はおおよそ 0.67 で、これはグラファイトの幅の比の 0.71 に近い。

$$\frac{(\text{グラファイト D2 の Q 値})}{(\text{グラファイト D1 の Q 値})} = \frac{20.5}{30.4} \simeq 0.67 \quad (6.1.3)$$

$$\frac{(\text{グラファイト D1 の幅})}{(\text{グラファイト D2 の幅})} = \frac{10[\text{mm}]}{14[\text{mm}]} \simeq 0.71 \quad (6.1.4)$$

そこで磁石配列 3 を見ると、グラファイト B と C の Q 値と幅の比がそれぞれ 0.74 と 0.75 となった。

$$\frac{(\text{グラファイト C の Q 値})}{(\text{グラファイト B の Q 値})} = \frac{12.3}{16.6} \simeq 0.74 \quad (6.1.5)$$

$$\frac{(\text{グラファイト B の幅})}{(\text{グラファイト C の幅})} = \frac{7.5[\text{mm}]}{10[\text{mm}]} \simeq 0.75 \quad (6.1.6)$$

このことから、Q 値はグラファイトの幅に依存し、反比例していることが分かった。

そこで、条件が異なるために同じグラファイトでも Q 値が大きく異なる磁石配列同士で比較するため、各磁石配列で共通するグラファイトであるグラファイト C を基準に Q 値を規格化した。規格化した Q 値とグラファイトの幅の関係は以下の図 6.1.5 の通り。

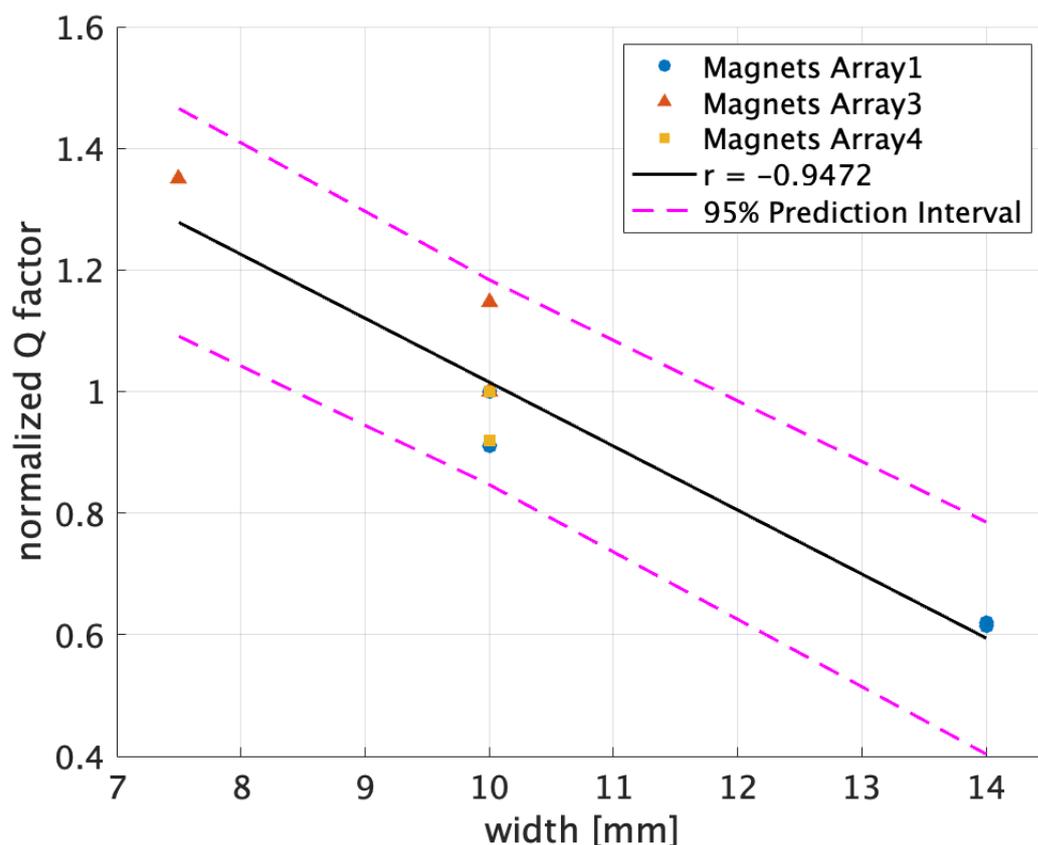


図 6.1.5: 規格化した Q 値とグラファイトの幅の相関

縦軸はグラファイト C を基準に規格化した Q 値で、直線は相関係数が-0.9472であることを意味している。ピンクの破線は 95% 予想区間を表している。各データ点はこの領域に収まっていることから、Q 値とグラファイトの幅の反比例の関係の信頼性が高いことが分かる。

本実験により、直線状ハルバッハ配列においては、Q 値がグラファイトの幅のみに依存していて、奥行きに関しては磁石の端から十分遠い限り影響しないことが分かる。グラファイトが大きすぎて磁石の端に近い場合は、磁場が外部に発散し磁場勾配が不均一であるため、強い渦電流が発生し Q 値が制限されることが予想される。

## 6.2 磁石の磁場の偏り

渦電流を作り出すのは、グラファイトを貫く磁束の時間変化である。本実験ではグラファイトのトラップとして静磁場を用いているため、磁束の時間変化を生み出しているのはグラファイト自身の振動である。そこで、磁石配列の作り出す磁場を計測することでグラファイトが感じる磁束の変化を予測できる。

Q 値測定実験に使用した磁石配列の磁場を測定した。グラファイトは磁石の奥行き方向に振動するため、磁場は奥行き方向に対する各成分を調べた。図 6.2.1 は測定中の様子である。磁石を xy テーブルに乗せ、y 方向に 0.5mm ずつずらしながら各点の磁場を測定した。テスラメーターはカネテックの TM-801 を用いた。また、Q 値測定中と同条件の磁場の形状を確認するため、磁石には外部磁場として磁石が取り付けられた状態で測定した。

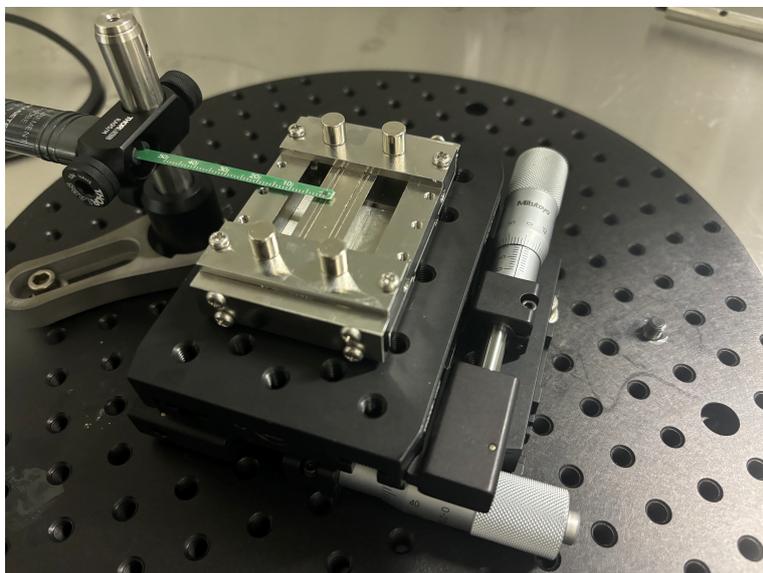


図 6.2.1: 磁場測定の様子

測定は磁束密度の向きが磁石の幅方向 (x 方向)、奥行き方向 (y 方向)、鉛直方向 (z 方向) の 3 通りで計測した。測定点は 5 つの磁石のそれぞれ中央の高さ 1mm の地点を測定した。以下の図 6.2.2 がその模式図である。

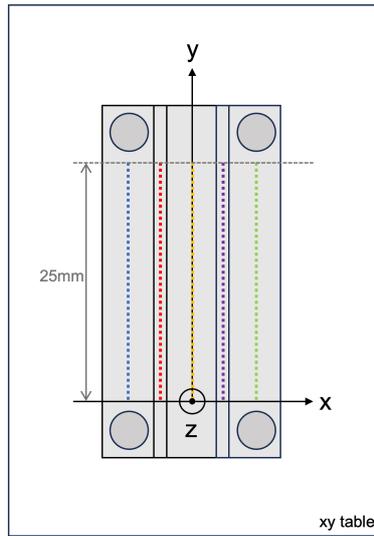


図 6.2.2: 磁場測定点の模式図

各磁石配列の磁場と磁場勾配の平均値は以下の通り。平均値は、隣り合う磁場の差分から磁場勾配を導出し、各点の平均を取ることで求めた。

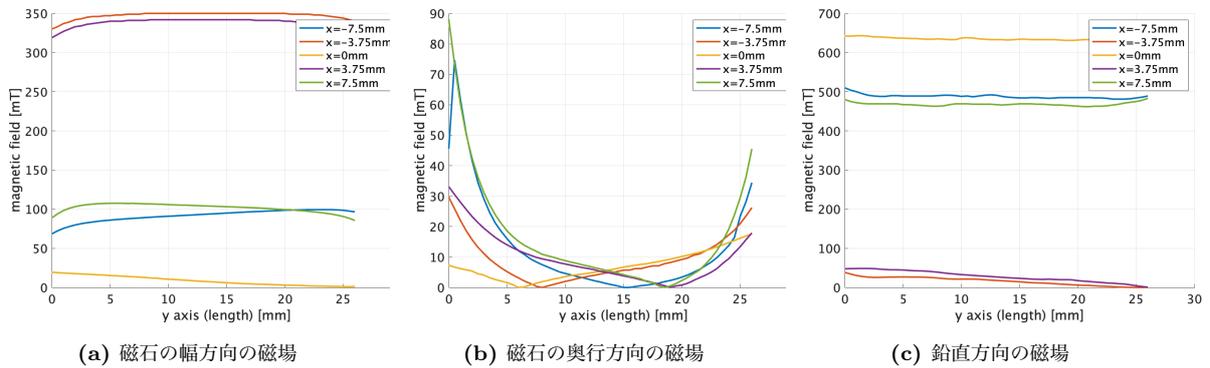


図 6.2.3: 磁石配列 1 の奥行きに対する磁場の各成分

表 6.2.1: 磁石配列 1 の平均磁場勾配

	-7.5mm	-3.75mm	0mm	3.75mm	7.5mm
$dB_x/dy$	1.08	0.385	-0.696	0.269	-0.123
$dB_y/dy$	-0.431	-0.135	0.396	-0.585	-1.64
$dB_z/dy$	-0.807	-1.46	-0.462	-1.80	0.115

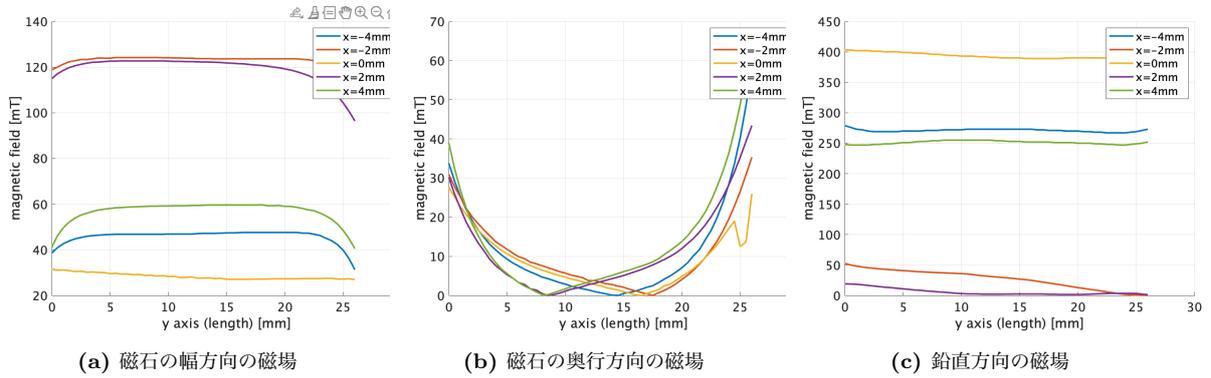


図 6.2.4: 磁石配列 2 の奥行きに対する磁場の各成分

表 6.2.2: 磁石配列 2 の平均磁場勾配

	-4.0mm	-2.0mm	0mm	2.0mm	4.0mm
$dB_x/dy$	-0.281	-0.281	-0.173	-0.715	-0.0231
$dB_y/dy$	0.915	0.169	-0.0615	0.508	1.01
$dB_z/dy$	-0.231	-0.201	-0.577	-0.692	0.154

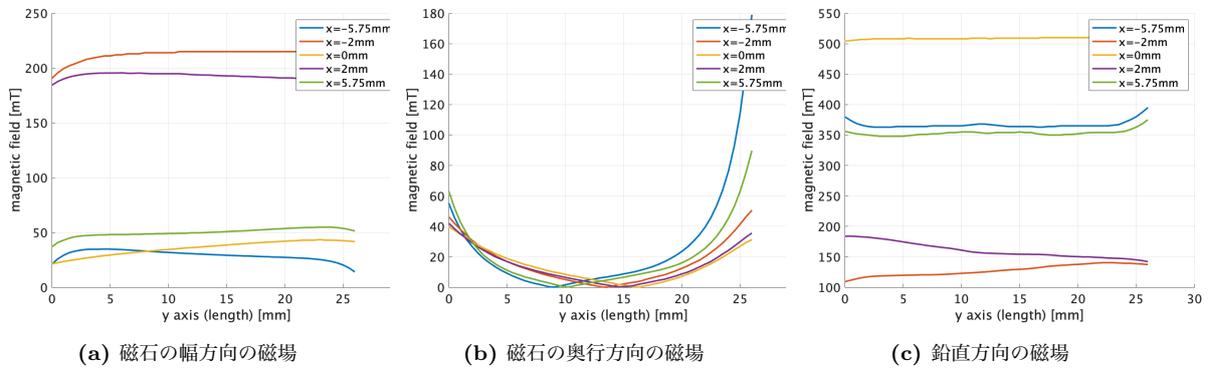


図 6.2.5: 磁石配列 3 の奥行きに対する磁場の各成分

表 6.2.3: 磁石配列 3 の平均磁場勾配

	-5.75mm	-2.0mm	0mm	2.0mm	5.75mm
$dB_x/dy$	-0.269	0.365	0.781	-0.0115	0.562
$dB_y/dy$	4.76	0.169	-0.327	-0.250	1.02
$dB_z/dy$	0.577	1.08	0.0384	-1.60	0.731

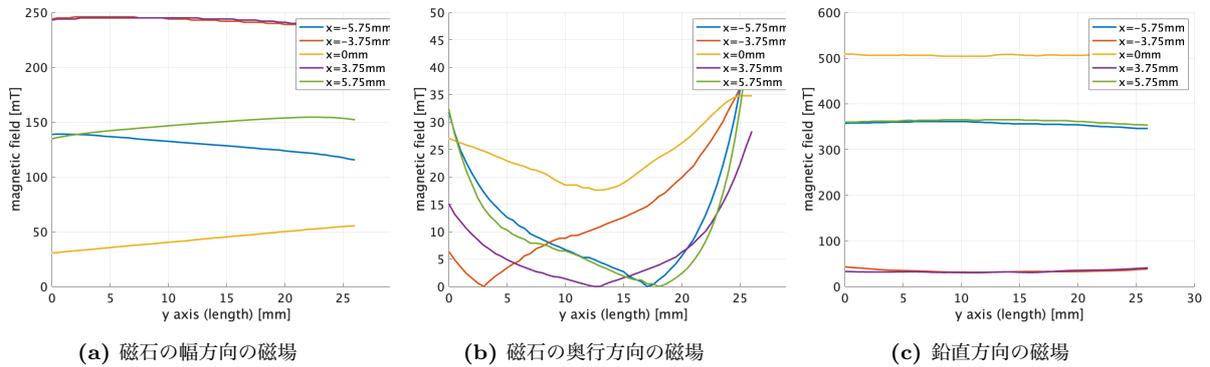


図 6.2.6: 磁石配列 4 の奥行きに対する磁場の各成分

表 6.2.4: 磁石配列 4 の平均磁場勾配

	-5.75mm	-3.75mm	0mm	3.75mm	5.75mm
$dB_x/dy$	-0.892	-0.423	0.954	-0.423	0.669
$dB_y/dy$	0.831	0.708	-0.362	-0.631	0.269
$dB_z/dy$	-0.423	-0.185	0	0.308	-0.269

以上より、全ての磁石配列で y 方向の特に磁石の端に近い部分で磁場勾配が大きくなっていた。これは復元力のために配置した外部磁石の影響だと考えられる。一方、x 方向と z 方向では傾きがありつつも、微視的な磁場のばらつきは少なく平坦であったことが分かる。また、この傾きは xy テーブルに対して磁石が厳密に平行に乗せられていなかったことに起因するものであると考えた。

### 6.3 磁場の偏りによる Q 値への影響

式 (5.1.12) では渦電流の半径の 2 乗に反比例し、グラファイトの面積に依存すると予想していたにも関わらず、実際には幅のみに依存していた。その理由について考察する。

6.2 節では、外部磁場の影響により、y 方向の磁場勾配が特に磁石の端に近づくにつれ大きくなることが分かった。そのため、グラファイトが振動することで内部を貫く磁束が変化したのは y 方向であったと考えられる。このとき、y 方向の磁束変化に抗うようにして発生する渦電流は、xz 平面上に現れるはずである。xz 平面の面積を制限するのはグラファイトの幅と厚みであり、Q 値測定実験ではグラファイトの厚みは一定であった。このことから、渦電流熱雑音はグラファイトの幅のみに制限され、Q 値に反映されていたのではないかと考えられる。

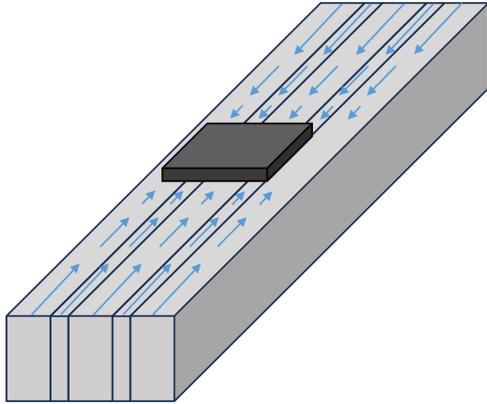


図 6.3.1: y 方向の磁場勾配とグラファイト

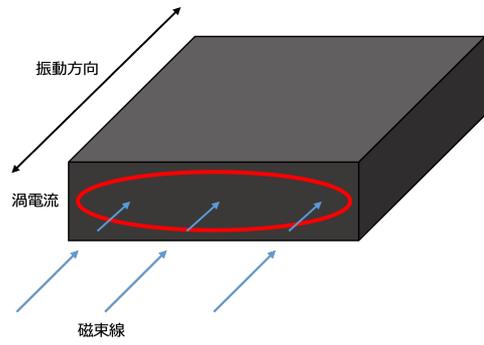


図 6.3.2: xz 平面上に発生する渦電流

図 6.3.3: 磁場勾配の Q 値測定実験への影響

## 第7章

# 静電アクチュエータ

反磁性浮上により浮上したグラファイトに復元力を与えるため、アクチュエータが必要になる。浮上したグラファイトは磁石の幅方向と鉛直方向にはトラップされるものの、奥行き方向には理論上力が働かず初期条件により等速運動を継続する。第6章では磁石の中央部分にトラップし減衰振動を起こすため、復元力として外部に磁石を配置した。しかしこれでは復元力の連続的な調整ができず、再現性にも乏しい。また、シャドウセンシングによるQ値測定ではこの外部磁石や地面のわずかな傾きの影響が大きく、Q値が制限されていたと考えられる。真空槽に挿入する上でも、真空槽の外部から初期の振動を与えられるよう、アクチュエータの導入が必要である。

さらに、今後シャドウセンシングのみならず、グラファイトに積載した熔融シリカガラスを光共振器のエンドミラーとして干渉計を組み立てるならば、レーザーの輻射圧雑音との間でエネルギー交換を可能にするため、復元力が必要となる。この復元力が新たに散逸を生むことを避けるため、アクチュエータには静電アクチュエータを採用することが適当であると考えられる。本章では、静電アクチュエータが金属板や誘電体に力を与える理論を説明する。

### 7.1 平行平板型

静電アクチュエータとは、帯電状態の異なる物体間に働く静電気力を利用して動作するアクチュエータと言える。この静電アクチュエータを単純化すれば、図7.1.1のように平行な平板間に働く静電気力で動作する。矢印は電気力線で、これが縮まるように吸引力が発生する。まずはこの単純化された図を元に静電アクチュエータの特長を考える。

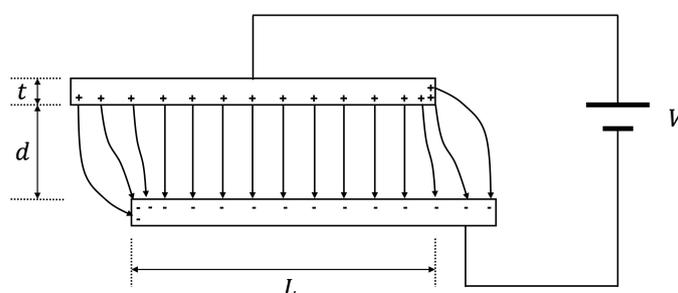


図 7.1.1: 平板電極の帯電と静電気力

まず、構造が単純であるため小型化が容易である点が挙げられる。ミリグラムスケールの鏡に作用させる場合、大きさは～2mm程度に制限されるため、コイル等で大型化することがないのは利点である。また、静電気力が平面力であることにより、小型化によって体積あたりの発生力が増大し、既存の薄膜形成技術を応用すれば製作が可能である。さらに、保持動作、つまり位置を維持するだけであれば通電の必要がなくエネルギー消費がないため、発熱の問題がないことも利点と言える。

次に平行平板型の静電アクチュエータの発生力について考える。垂直方向と水平方向で分けて議論する。電極の重なり部の  $L$  に発生する電場は、電極端部の乱れを無視すれば  $V/d$  であるので、垂直方向の発生力  $F_v$  は

$$F_v = \frac{\epsilon W L}{2} E^2 = \frac{\epsilon W L}{2} \left( \frac{V}{d} \right)^2 \quad (7.1.1)$$

となる。ただし  $\epsilon$  は電極間の誘電率、 $W$  を紙面に垂直方向の電極幅である。一方、水平方向での発生力  $F_h$  は

$$F_h = \frac{\epsilon W}{2} \frac{V^2}{d} \quad (7.1.2)$$

となる。[45] これより、垂直方向では電極対向面積  $WL$  に比例するため、比較的単純な構造で大きな力を得られる。その反面、動作範囲が小さく、発生力が極板の位置が代わることで変化する。一方、平行方向では、力は端部のみで発生する上、極板同士が吸着する問題があるため  $L$  は小さい方が望ましい。

しかし、平行平板型の静電アクチュエータの構造は、固定子と可動子ともに導体であることを想定している。

## 7.2 櫛形電極型

前節で見たように、静電アクチュエータの原理はコンデンサであり、極板間引力を利用したものである。そのため、通常、力を与えられる対象は金属に限られる。そこで、鏡のような誘電体に機能させるために、特に重力波検出器等に用いられるのが、櫛形電極型の静電アクチュエータである。櫛形電極は図 7.2.1 のように、平行に正極と負極を周期的に並べる。

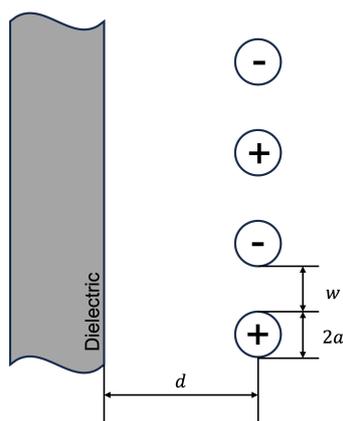


図 7.2.1: 櫛形電極型静電アクチュエータの模式図

このときの誘電体との間の 1 周期あたりかつ、奥行き方向の単位長さあたりの静電容量は Cadez らによれば

$$\frac{c}{l} = \frac{\pi \epsilon_0}{\log \left( \cot \left( \frac{\pi a}{2(4a+2w)} \right) \right) - \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \log \left( \coth \left( \frac{\pi d}{(4a+2w)} \right) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{a^2}{(4a+2w)^2} \right)} \quad (7.2.1)$$

とかける。[46] ここで、 $l$  は誘電体の奥行き方向の長さ、 $\epsilon$  は誘電体の誘電率である。また、誘電体の厚みが間隔  $d$  よりも十分に小さいことを仮定している。このとき極板間の力は電極間の電位差  $V$  を用いて

$$F = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial d} V^2 \quad (7.2.2)$$

とかけるので、これを計算して

$$F = - \frac{\pi^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1) (\epsilon + 1) l V^2 \tanh\left(\frac{\pi d}{4a + 2d}\right)}{2(4a + 2d) \left( (\epsilon - 1) \log\left(\coth\left(\frac{\pi d}{4a + 2d}\right)\right) - (\epsilon + 1) \log\left(\cot\left(\frac{\pi a}{2(4a + 2d)}\right)\right) \right)^2 \sinh^2\left(\frac{\pi d}{4a + 2d}\right)} \quad (7.2.3)$$

ここで、グラフィイト上に積載予定のミラー ( $2.0 \times 2.5 \times 0.6 \text{mm}$ ) の場合に電極の半径  $a$  と電極間の距離  $w$  を変数とし力  $F$  の大きさを調べると以下の通り。

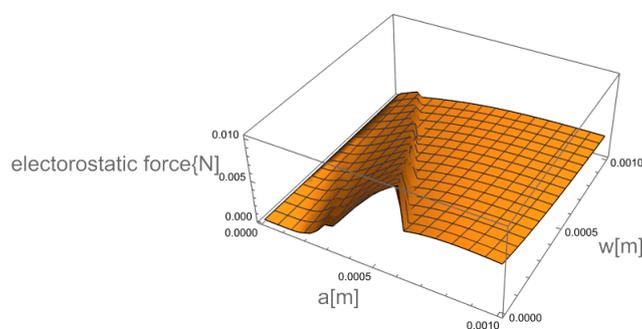


図 7.2.2:  $d = 1 \text{mm}$  のときの発生力

となる。また、電極間の間隔  $w = 0.1 \text{mm}$  のときのグラフが以下の通り。

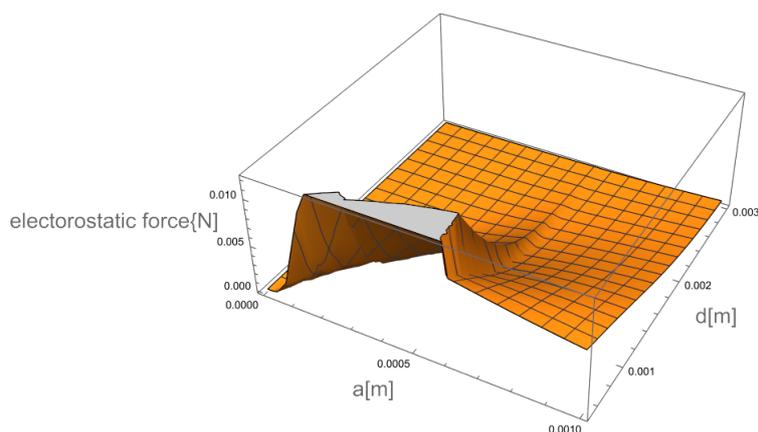


図 7.2.3:  $w = 0.1 \text{mm}$  のときの発生力

図 7.2.2 によると、 $w = 2a$  の直線の形に尾根が見える。電極の半径  $a$  と電極間の距離  $w$  に

$$w \simeq -2a + 1.2 \quad (0 < a < 1[\text{mm}], 0 < w < 1[\text{mm}]) \quad (7.2.4)$$

の関係にあるとき発生力  $F$  が極大値を取ることがわかる。また  $d$  の値は小さいほど発生力  $F$  が大きくなる。そのため、静電アクチュエータはグラファイトに近いところで動作させる必要があると考えられる。また、印加する電圧を 1000V に固定し、発生力  $F$  を極大にする変数を数値計算すると  $d = 0.802\text{mm}$ 、 $a = 0.455$ 、 $w = 0.327$  となった。

しかし、上記の計算は誘電体の厚みが間隔  $d$  よりも十分に小さいことを前提とした理論式に従っているため、本研究で対象にしている  $2.0 \times 2.5 \times 0.6\text{mm}$  のミラーの場合に条件が変わる可能性がある。

## 第 8 章

# その他の想定される雑音

本章では、2.3 節や 5 章で確認した雑音以外に想定される雑音と、その影響について述べる。

### 8.1 磁場揺らぎが生み出す雑音

浮上するグラファイトが磁場から受ける力は、磁場が揺らげばそれに応じて力の揺らぎとなり、グラファイトの位置測定精度への雑音となる。この雑音について、磁石の作る磁場の揺らぎと、環境磁場の揺らぎの両面から確かめる。

磁石の作る磁場を  $B_{\text{mag}}$ 、環境磁場を  $B_{\text{env}}$  とすると、グラファイトが受ける力は

$$F_h = \frac{V}{\mu_0} [\chi_{\parallel}(B_{\text{mag},x} + B_{\text{env},x})(\partial_x B_{\text{mag},x} + \partial_x B_{\text{env},x}) + \chi_{\perp}(B_{\text{mag},z} + B_{\text{env},z})(\partial_x B_{\text{mag},z} + \partial_x B_{\text{env},z})] \quad (8.1.1)$$

と書ける。これに揺らぎの項を付け加える。

$$B_{\text{mag},i} = \overline{B_{\text{mag},i}} + \Delta B_{\text{mag},i} \quad (8.1.2)$$

$$\partial_x B_{\text{mag},i} = \overline{\partial_x B_{\text{mag},i}} + \Delta(\partial_x B_{\text{mag},i}) \quad (8.1.3)$$

$$B_{\text{env},i} = \overline{B_{\text{env},i}} + \Delta B_{\text{env},i} \quad (8.1.4)$$

$$\partial_x B_{\text{env},i} = \overline{\partial_x B_{\text{env},i}} + \Delta(\partial_x B_{\text{env},i}) \quad (8.1.5)$$

$$F_h = \overline{F_h} + \Delta F_h^{(\text{mag})} + \Delta F_h^{(\text{env})} \quad (8.1.6)$$

これにより、磁石の作る磁場の揺らぎがもたらす雑音と、環境磁場の揺らぎがもたらす力の揺らぎはそれぞれ

$$\begin{aligned} \Delta F_h^{(\text{mag})} = & \frac{V}{\mu_0} [\chi_{\parallel} \{ (\overline{B_{\text{mag},x}} + \overline{B_{\text{env},x}}) \Delta(\partial_x B_{\text{mag},x}) + (\overline{\partial_x B_{\text{mag},x}} + \overline{\partial_x B_{\text{env},x}}) \Delta B_{\text{mag},x} \} \\ & + \chi_{\perp} \{ (\overline{B_{\text{mag},z}} + \overline{B_{\text{env},z}}) \Delta(\partial_x B_{\text{mag},z}) + (\overline{\partial_x B_{\text{mag},z}} + \overline{\partial_x B_{\text{env},z}}) \Delta B_{\text{mag},z} \}] \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_h^{(\text{env})} = & \frac{V}{\mu_0} [\chi_{\parallel} \{ (\overline{B_{\text{mag},x}} + \overline{B_{\text{env},x}}) \Delta(\partial_x B_{\text{env},x}) + (\overline{\partial_x B_{\text{mag},x}} + \overline{\partial_x B_{\text{env},x}}) \Delta B_{\text{env},x} \} \\ & + \chi_{\perp} \{ (\overline{B_{\text{mag},z}} + \overline{B_{\text{env},z}}) \Delta(\partial_x B_{\text{env},z}) + (\overline{\partial_x B_{\text{mag},z}} + \overline{\partial_x B_{\text{env},z}}) \Delta B_{\text{env},z} \}] \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

と表せる。磁石の磁場揺らぎに起因する力の揺らぎ  $\Delta F_h^{(\text{mag})}$  は、磁石の熱雑音によるものである。磁石中の微小な磁気モーメントが、外部の熱浴とのランダムな熱の交換により、向きがランダムに変化するため、永久磁石であっても作り出す磁場は時間的に一定とは言えないためである。一方、環境磁場揺らぎに起因する力の

揺らぎ  $\Delta F_{\text{h}}^{(\text{env})}$  は、外部環境に存在する電子機器等が発する磁場の変動が原因となる。以下でそれぞれについて分けて検討する。

### 8.1.1 磁石の熱雑音

磁石の磁気モーメントは常に熱浴とエネルギーの受け渡しをしており、それによりモーメントの向きも変動する。これにより磁石の作り出す磁場は磁石の温度に依存し変化すると言える。この雑音を磁石の熱雑音と呼ぶ。本節ではこの雑音を理論的に導出する。[47]

磁石の温度  $T$  が平衡状態に達したとき、外部の熱浴との間でランダムにエネルギーを交換することで生じる平均温度の揺らぎ  $\delta T$  を求める。そのため先にエネルギーの揺らぎ  $\delta E$  を求める。磁石の状態がカノニカル分布に従うものとする、エネルギーの期待値は

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} \\ &= -\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}\end{aligned}\quad (8.1.9)$$

である。ただし  $\beta = 1/k_{\text{B}}T$  は逆温度、 $Z(\beta)$  は分配関数を意味する。エネルギーの 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned}\langle E^2 \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i E_i^2 e^{-\beta E_i} \\ &= \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)}\end{aligned}\quad (8.1.10)$$

よってエネルギーの揺らぎ  $\delta E$  は

$$\begin{aligned}(\delta E)^2 &= \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \\ &= \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} - \left( -\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} \right)^2 \\ &= \left( \frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} \right)' \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z(\beta)\end{aligned}\quad (8.1.11)$$

と表せる。ここで定積熱容量  $C_v$  は

$$\begin{aligned}C_v &= \frac{d\langle E \rangle}{dT} \\ &= \frac{1}{k_{\text{B}}T^2} \frac{d^2}{d\beta^2} \log Z(\beta) \\ &= \frac{1}{k_{\text{B}}T^2} (\delta E)^2\end{aligned}\quad (8.1.12)$$

$$\therefore (\delta E)^2 = k_{\text{B}}T^2 C_v \quad (8.1.13)$$

となる。ここで、エネルギーと温度の関係式

$$E = C_v T \quad (8.1.14)$$

と式 (8.1.13) より、温度揺らぎ  $\delta T$  は

$$(\delta T)^2 = \frac{k_B T^2}{C_v} \quad (8.1.15)$$

となる。この結果とランジュバンアプローチによれば、磁石の温度揺らぎスペクトル  $S_T(\omega)$  は

$$S_T(\omega) \simeq \frac{4k_B T^2}{C_v} \left[ \int_0^{\tau_0} d\tau \left\{ \text{Erf} \left( \frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left( e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega\tau) \right. \\ \left. + \left( \frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \left\{ 2\sqrt{2\pi\omega} \left( S \left( \sqrt{\frac{2\omega\tau_0}{\pi}} \right) - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\cos(\omega\tau_0)}{\sqrt{\tau_0}} \right\} \right] \quad (8.1.16)$$

と表せる。[47] ただし、 $\tau_0$  は変化の時間であり、 $V$  は磁石の体積、 $2L$  は磁石の 1 辺、 $a^2 = \lambda/\rho C$  は熱伝導率  $\lambda$  と密度  $\rho$ 、比熱容量  $C$  から求められる定数である。本実験で用いた磁石のパラメタを用いて数値計算すると

$$\sqrt{S_T} \propto f^{-\frac{3}{4}} \quad (f > 10^{-2} \text{Hz}) \quad (8.1.17)$$

となる。ただし  $\tau_0 = 10^4$ 、 $d\tau = 10^{-6}$ 、 $V = 9.41 \times 10^{-6} [\text{m}^3]$ 、 $L = (V/8)^{\frac{1}{3}}$  とし、ネオジム磁石の物性として [48] に従い、 $\rho = 7500 [\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 $C = 500 [\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}]$ 、 $\lambda = 9 [\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}]$  とした。

このとき、磁石の熱雑音によるグラファイトの変位スペクトルを求める。簡単のため式 (8.1.7) において環境磁場の影響を無視し、磁場勾配が磁場に比例するとすれば

$$\Delta F_h^{(\text{mag})} \simeq \frac{V}{\mu_0} \left[ \chi_{\parallel} \left( \overline{B_{\text{mag},x}} \Delta(\partial_x B_{\text{mag},x}) + \overline{\Delta(\partial_x B_{\text{mag},x})} \Delta B_{\text{mag},x} \right) \right. \\ \left. + \chi_{\perp} \left( \overline{B_{\text{mag},z}} \Delta(\partial_x B_{\text{mag},z}) + \overline{\Delta(\partial_x B_{\text{mag},z})} \Delta B_{\text{mag},z} \right) \right] \\ \simeq \frac{2V}{\mu_0} \left( \chi_{\parallel} \overline{\Delta(\partial_x B_{\text{mag},x})} \Delta B_{\text{mag},x} + \chi_{\perp} \overline{\Delta(\partial_x B_{\text{mag},z})} \Delta B_{\text{mag},z} \right) \quad (8.1.18)$$

と近似的に書き直せる。温度の変動による磁場の揺らぎ  $\Delta B_{\text{mag},i}$  は、 $\alpha$  を温度変化に対する磁力の変化率として

$$\Delta B_{\text{mag},i} = \alpha \sqrt{S_T \overline{B_{\text{mag},i}}} \quad (8.1.19)$$

と表せるため、磁石の熱雑音のスペクトルは

$$\sqrt{S_{\text{mag},T}} = |\chi(\omega)| \Delta F_h^{(\text{mag})} \\ = |\chi(\omega)| \frac{2V}{\mu_0} \alpha \sqrt{S_T} \left( \chi_{\parallel} \overline{\Delta(\partial_x B_{\text{mag},x})} \overline{B_{\text{mag},x}} + \chi_{\perp} \overline{\Delta(\partial_x B_{\text{mag},z})} \overline{B_{\text{mag},z}} \right) \quad (8.1.20)$$

と求まる。次に温度変化に対する磁力の変化率  $\alpha$  を求める。ネオジム磁石の保磁力  $H_c$  と残留磁束密度  $B_r$  の温度依存性は BH 曲線 [43] より、それぞれおよそ 0.88%/K と -0.13%/K と読み取れる。これから 20 °C と 21 °C の値を求めると表 8.1.1 となる。

表 8.1.1: ネオジム磁石の温度依存性

	20 °C	21 °C
保磁力 $H_c$ [ $O_e$ ]	-10800	-10736
残留磁束密度 $B_r$ [ $G$ ]	12800	12785

そこで Poisson Superfish により 20℃と 21℃のときの磁場を生成し、浮上高さに対する磁力の変化率をグラフにすると図 8.1.1 となる。

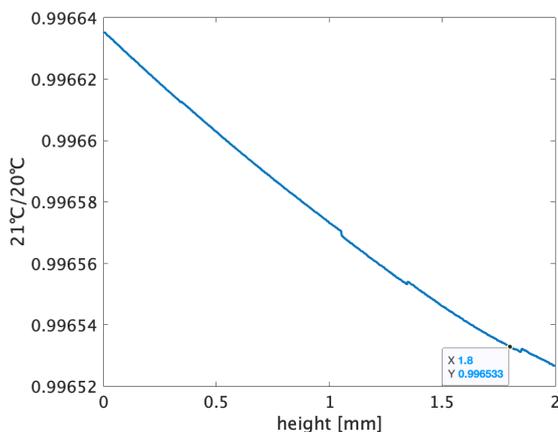


図 8.1.1: 浮上高さに対する磁力の変化率  $\alpha$

グラファイトの浮上高さである 1.8mm における磁力の変化率は図 8.1.1 より、

$$\alpha = -0.35 \text{ [\%/K]} \quad (8.1.21)$$

と求まる。以上より式 (8.1.20)(8.1.21) を用いて磁石の温度変動による鏡の位置変動のスペクトルを求める。ただし、平均磁場には実際に測定した 6.2 節のデータを利用した。

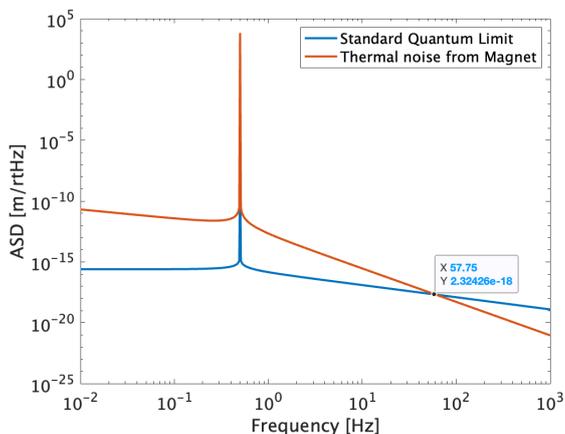


図 8.1.2: 磁石の熱雑音

標準量子限界と比較するとおよそ 58Hz 以上で磁石の熱雑音を下回ることが分かる。

## 8.1.2 環境磁場雑音

環境磁場によって浮上グラファイトが受ける力が変動することで雑音となる。これを環境磁場雑音と呼ぶ。以下でこの影響について見積もる。環境磁場の揺らぎが作る力の揺らぎは式 (8.1.8) で表せる。本節では簡単

のため、環境磁場勾配の揺らぎを無視し、環境磁場の揺らぎのみ考慮する。

$$\Delta F_h^{(\text{env})} \simeq \frac{V}{\mu_0} (\chi_{\parallel} \overline{\partial_x B_{\text{mag},x}} \Delta B_{\text{env},x} + \chi_{\perp} \overline{\partial_x B_{\text{mag},z}} \Delta B_{\text{env},z}) \quad (8.1.22)$$

このとき鏡の変位スペクトルは

$$\begin{aligned} \sqrt{S_{\text{env}}(\omega)} &= |\chi(\omega)| \Delta F_h^{(\text{env})} \\ &= \frac{V}{\mu_0} |\chi(\omega)| (\chi_{\parallel} \overline{\partial_x B_{\text{mag},x}} \Delta B_{\text{env},x} + \chi_{\perp} \overline{\partial_x B_{\text{mag},z}} \Delta B_{\text{env},z}) \end{aligned} \quad (8.1.23)$$

と表せる。同研究室の先行研究より、本実験と同じ真空槽の内部の環境磁場揺らぎ由来の雑音を実験的に求められている。[47] これによれば、150Hz 以上で標準量子限界を下回ることがわかっている。

## 8.2 その他の振動など

以上で確認した雑音以外の雑音源や実験を妨げる効果について考える。

シミュレーションでは磁石は地面に対して水平であることを前提としていた。しかし実際には地面や定盤の傾きが存在し、重力ポテンシャルによってグラファイトの浮上位置が中央でなくなることがあった。



図 8.2.1: 真空槽内の水平計

また磁石自体の傾きは定盤の傾きだけでなく、治具のネジ圧によっても決まる。特に、蓋 (lid) の部品により磁石同士の反発を防いでいるものの、蓋を閉めるためのネジの圧が両端で異なれば磁石に傾きが生まれ、浮上位置がどちらかの端一方に偏ることになる。

また、シミュレーションではグラファイトが水平に浮上することを前提に計算したが、外部磁場によりトラップした場合は磁石の端に近づけばグラファイトが微小に傾くことが予測される。

## 第9章

# まとめ

本章で、実験結果とその考察のまとめと、今後の展望を記す。

### 9.1 結論

本研究では、巨視的な系でデコヒーレンスが起る原因を特定するために必要な、振り子型に代わる高 Q 値な機械振動子の作成を目標に、グラファイトの安定的な浮上と、振動子としての Q 値がグラファイトのサイズにどのように依存するかを実験的に確かめた。本研究で行なったのは主に 3 つである。

#### 1. 実験結果とよく合致する新型シミュレーションの作成

直線状ハルバッハ配列に対するグラファイトの浮上において、水平方向の安定性についてシミュレーション結果との間の齟齬が存在していた。そこで、ポテンシャルを以下のように水平方向と垂直方向に分けた。

$$U^{(\text{old})} = -\frac{V}{2\mu_0} (\chi B_x^2 + \chi B_z^2) \quad (9.1.1)$$

$$U^{(\text{new})} = -\frac{V}{2\mu_0} (\chi_{\parallel} B_x^2 + \chi_{\perp} B_z^2) \quad (9.1.2)$$

HOPG を用いることにより、水平方向の磁場と磁場勾配を軽視し、垂直方向の磁場と磁場勾配に重み付けすることになる。よって図 4.2.10c と図 4.2.8b のように HOPG で安定するが CIP で安定しないというシミュレーション結果が得られる。これは実験結果とよく合致した。また磁石の配列やグラファイトの大きさを変えてシミュレーション結果と実験結果を比較した場合もよく合致した。

#### 2. 渦電流熱雑音のグラファイトの大きさへの依存性の検証

金属中を貫く磁束が時間変化することで渦電流が誘起される。グラファイトは電気伝導率が高いため、渦電流の生み出すジュール熱が新たな雑音となる。式 (5.1.12) より、渦電流熱雑音によるエネルギー散逸は渦電流の半径の 2 乗に比例する。渦電流の半径はグラファイトの大きさに依存し、渦電流熱雑音の Q 値にスケールリングが成立することが予測されるが、実験的に検証されたことはなかった。

そこで、直線状ハルバッハ配列にサイズの違う複数のグラファイトの Q 値を測定し、その相関を調べた。図 6.1.5 によれば、Q 値はグラファイトの幅との間に強い相関が見えたものの、面積には比例している様子は見えなかった。図 6.2.3 のように計測した磁場を見れば、磁束が振動に応じて時間変化したのは、グラファイトの幅と厚みから構成された平面であった。このことから、渦電流が発生したのはグ

ラファイトの幅と厚みから構成された平面であり、幅と奥行きのみを比較対象とした Q 値測定では、厚みの作用が見えなかったためであると考えられる。

実験的に渦電流熱雑音のスケーリングを確認するには、厚みの違うグラファイトを用意する必要がある。また、本実験では相関を確認するにとどまったが、Q 値の向上を目指すには外部磁場に代わるトラップ方法が必要になる。

### 3. 静電アクチュエータの提案

反磁性浮上により浮上したグラファイトに復元力を与える、外部磁場に代わる新たな方法として静電アクチュエータを提案した。静電アクチュエータの特長として、発生力が平面力であるため小型化することで体積あたりの発生力が増大する上、既存の薄膜技術により小型化が比較的容易であることが挙げられる。

鏡のような誘電体に駆動させるには、楕形電極を採用する必要がある、その発生力は式 (7.2.3) で与えられる。これによれば、グラファイト上に積載予定のミラー ( $2.0 \times 2.5 \times 0.6\text{mm}$ ) に最も強い力を与える楕形電極は、鏡との距離  $d = 0.802\text{mm}$ 、電極の半径  $a = 0.455$ 、電極同士の間隔  $w = 0.327$  であるとわかった。

しかし、理論式 (7.2.3) は鏡との距離  $d$  が鏡の厚みよりも十分小さいことを仮定していた。鏡との距離  $d$  は静電アクチュエータで制御することで変化するものであり、鏡の厚み  $0.6\text{mm}$  より十分に近い距離で駆動させることは困難である。そのため、鏡との距離  $d$  が鏡の厚みより十分に小さくない場合の力を、シミュレーションや実験的に導出する必要がある。

## 9.2 今後の展望

本実験のように、直線状ハルバッハ配列上にグラファイトを浮上せざる場合、復元力が存在しないため、アクチュエータが必要になる。最適なアクチュエータとして静電アクチュエータを提案したが、これは光共振器の制御のみならず、真空槽中でシャドウセンシングを行う上でも初期振動を与えるために不可欠である。理論的に導出した静電アクチュエータの最適な設計は、鏡との距離が鏡の厚みよりも十分に小さいことを前提とするため、現実に即しているとは言えない。そこで、シミュレーションや実験により、最適な設計を見つけることが優先される。

また、考察したように渦電流熱雑音がグラファイトのサイズに依存することを実験的に確認するために、厚みの異なるグラファイトを用いて同様の Q 値測定実験が必要になる。

渦電流熱雑音のスケーリングすることが確かめられた場合、グラファイトの小型化が Q 値向上に有効であることが示される。本実験のように直線状ハルバッハ配列を活かすならば、新型シミュレーションを活用し、より小さなグラファイトを浮上させられる磁石配列を設計可能である。例えば、図 9.2.1 のような幅  $1\text{mm}$  の磁石と幅  $6\text{mm}$  の磁石により構成したハルバッハ配列によれば、図??のように  $2\text{mm} \times 2\text{mm} \times 0.5\text{mm}$  の小型のグラファイトが浮上可能であると予測できる。

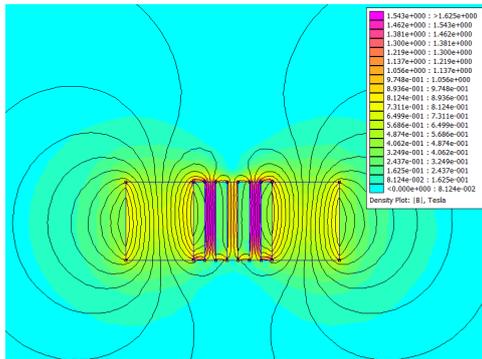


図 9.2.1: 幅 1mm の 5 層ハルバツハ配列を幅 6mm の磁石で挟み上げた配列

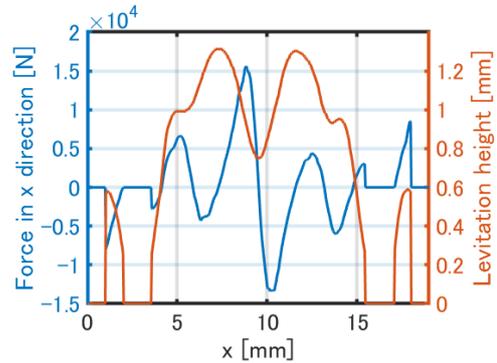


図 9.2.2: 2mm×2mm×0.5mm のグラファイトの浮上シミュレーション

図 9.2.3: 小型グラファイトの浮上可能性

直線状でなく、リング型などに応用する場合、ポテンシャルを変更した新たなシミュレーションを作る必要がある。しかし、直方体型の HOPG ではなくリング型の HOPG を用いる場合は、加工が技術的に困難であるため、CIP を用いる必要がある。その場合、変更後のポテンシャルと変更前のポテンシャルが一致しているため、浮上が困難になることが予想される。また、リング型磁石はハルバツハ配列が製作困難であることも浮上を困難にする。そこで、鉄などを磁石の間に挟むことで磁場の形状を誘導するヨークなどを駆使して、最適な磁石配列とグラファイトの組み合わせを探す必要がある。

さらに、より小型の HOPG など、加工が技術的に難しいグラファイトを用いる場合は、酸化グラフェン [49] というナノスケールまで単層化した黒鉛を用いて、シリカコーティングを施すことなども有効であると考えられる。

# 付録 A

## 治具の各パーツの設計図

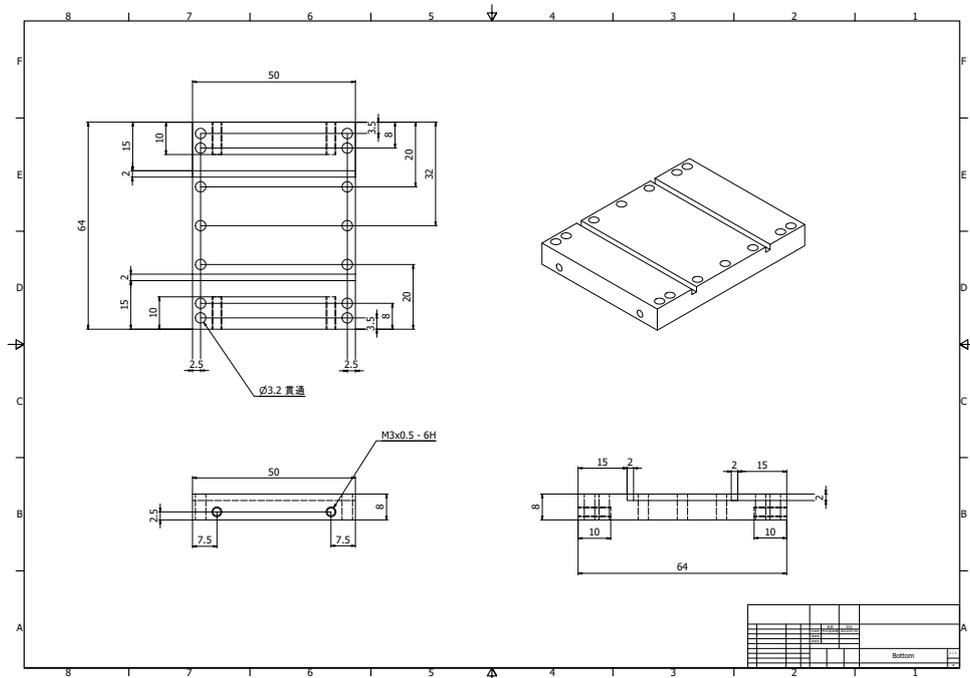


図 A.0.1: Bottom

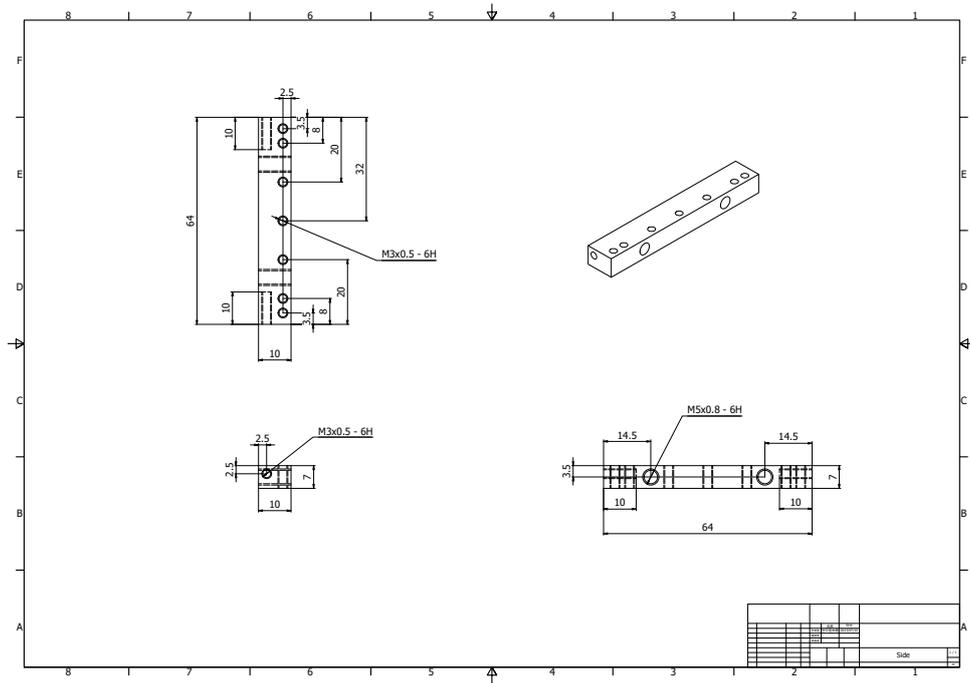


图 A.0.2: Side

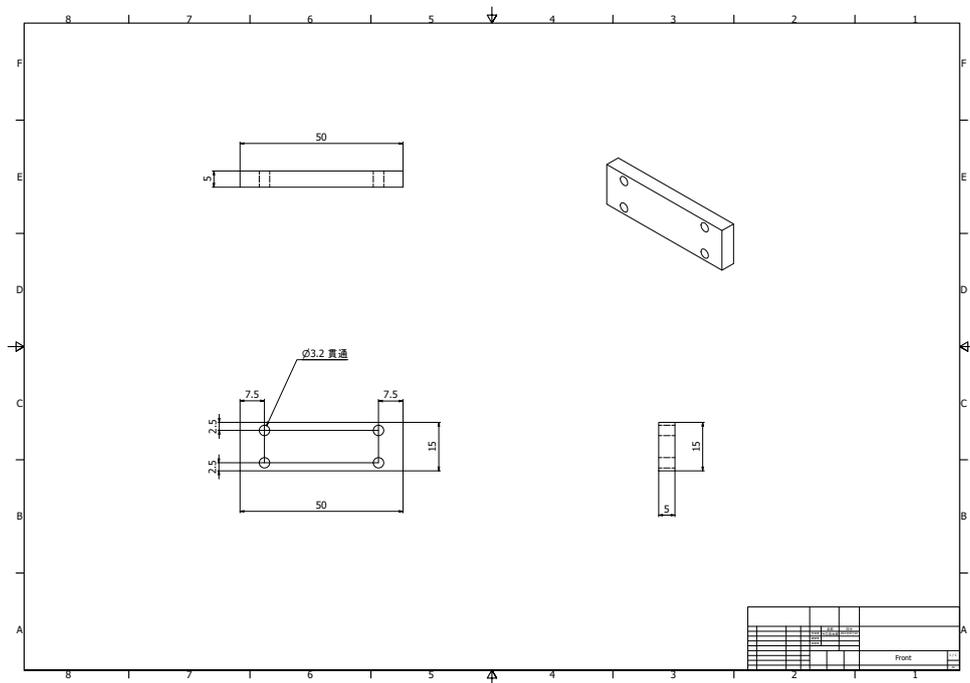


图 A.0.3: Front

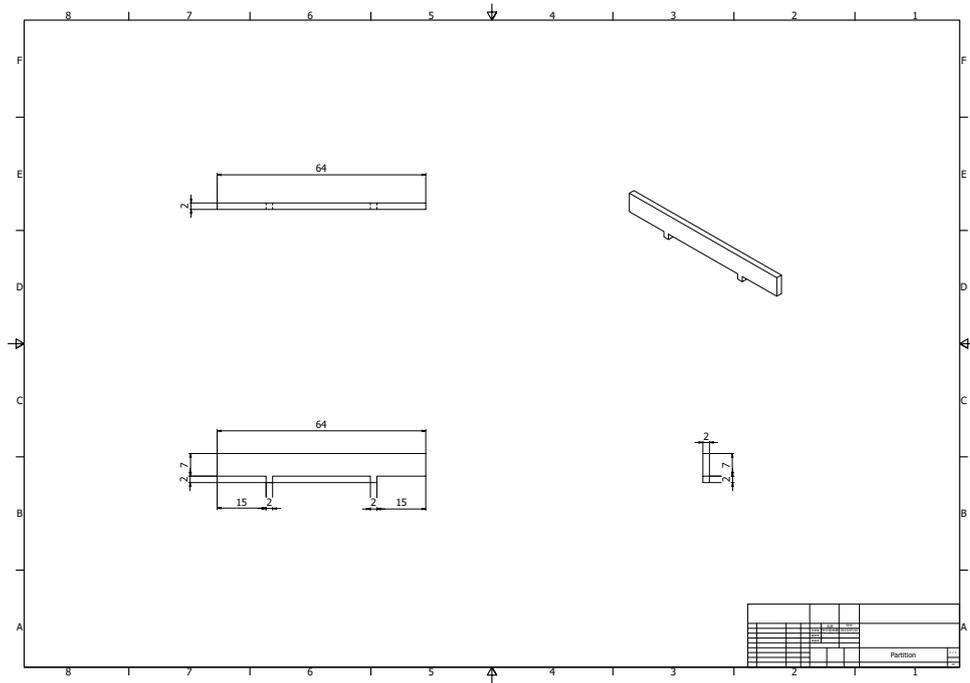


图 A.0.4: Partition

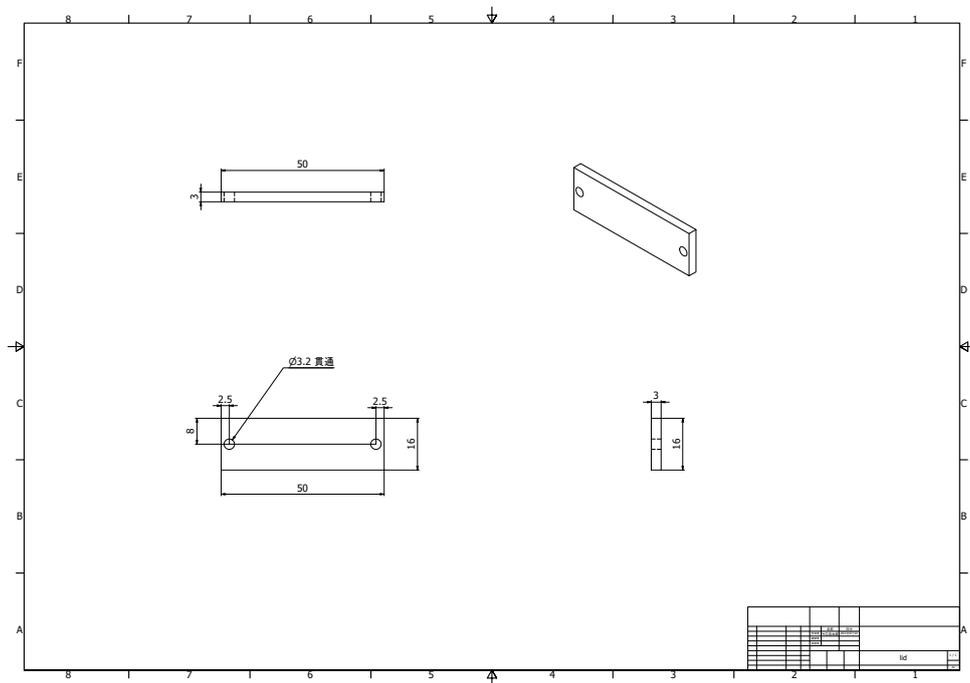


图 A.0.5: Lid

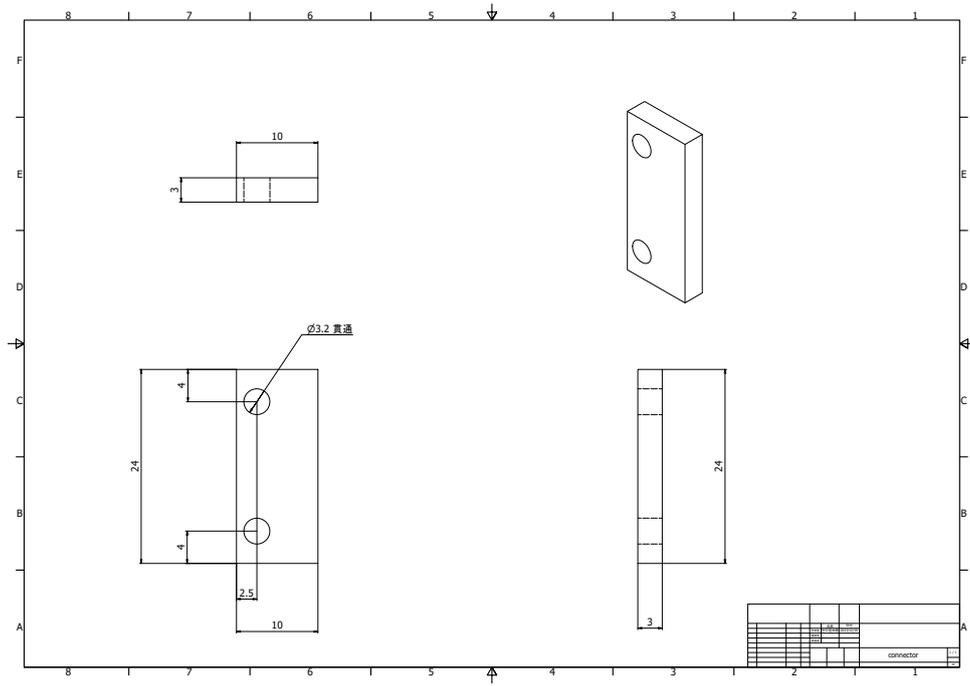


図 A.0.6: Connector

## 参考文献

- [1] 小川潤. 巨視的な系における量子力学の検証に向けた磁気浮上による鏡の支持方法の開発. Master's thesis, 東京工業大学, 2021.
- [2] William M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, 97th edition, 2021.
- [3] クリスタルベース. <https://crystalbase.co.jp/products/index137.html>.
- [4] 日本テクノカーボン株式会社. [https://www.technocarbon.co.jp/pdf/characteristic\\_table1.pdf](https://www.technocarbon.co.jp/pdf/characteristic_table1.pdf).
- [5] Roger Penrose. On gravity's role in quantum state reduction. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 28, No. 5, pp. 581–600, 1996.
- [6] L. Diósi. A universal master equation for the gravitational violation of quantum mechanics. *Physics Letters A*, Vol. 120, No. 8, pp. 377–381, 1987.
- [7] William Marshall, Christoph Simon, Roger Penrose, and Dik Bouwmeester. Towards quantum superpositions of a mirror. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 91, p. 130401, Sep 2003.
- [8] Helge Müller-Ebhardt, Henning Rehbein, Roman Schnabel, Karsten Danzmann, and Yanbei Chen. Entanglement of macroscopic test masses and the standard quantum limit in laser interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 100, p. 013601, Jan 2008.
- [9] A D O'Connell, M Hofheinz, M Ansmann, Radoslaw C Bialczak, M Lenander, Erik Lucero, M Neeley, D Sank, H Wang, M Weides, J Wenner, John M Martinis, and A N Cleland. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature*, Vol. 464, No. 7289, pp. 697–703, Apr 2010.
- [10] J D Teufel, T Donner, Dale Li, J W Harlow, M S Allman, K Cicak, A J Sirois, J D Whittaker, K W Lehnert, and R W Simmonds. Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state. *Nature*, Vol. 475, No. 7356, pp. 359–363, Jul 2011.
- [11] Jasper Chan, T P Mayer Alegre, Amir H Safavi-Naeini, Jeff T Hill, Alex Krause, Simon Gröblacher, Markus Aspelmeyer, and Oskar Painter. Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. *Nature*, Vol. 478, No. 7367, pp. 89–92, Oct 2011.
- [12] E. E. Wollman, C. U. Lei, A. J. Weinstein, J. Suh, A. Kronwald, F. Marquardt, A. A. Clerk, and K. C. Schwab. Quantum squeezing of motion in a mechanical resonator. *Science*, Vol. 349, No. 6251, pp. 952–955, August 2015.
- [13] Atsushi Noguchi, Rekishu Yamazaki, Manabu Ataka, Hiroyuki Fujita, Yutaka Tabuchi, Toyofumi Ishikawa, Koji Usami, and Yasunobu Nakamura. Ground state cooling of a quantum electromechanical system with a silicon nitride membrane in a 3d loop-gap cavity. *New Journal of Physics*, Vol. 18, No. 10, p. 103036, oct 2016.

- [14] C Jönsson. Electron diffraction at multiple slits. *American Journal of Physics*, Vol. 42, pp. 4–11, 1974.
- [15] Angelo Bassi, André Großardt, and Hendrik Ulbricht. Gravitational decoherence. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 34, No. 19, p. 193002, sep 2017.
- [16] F. Karolyhazy. Gravitation and quantum mechanics of macroscopic objects. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Vol. 42, No. 2, pp. 390–402, 1966.
- [17] F. Károlyházy, A. Frenkel, and B. Lukács. On the possible role of gravity in the reduction of the wave function. In Roger Penrose and C. J. Isham, editors, *Quantum Concepts in Space and Time*, pp. 1–109. New York ;Oxford University Press, 1986.
- [18] Brahim Lamine, Rémy Hervé, Astrid Lambrecht, and Serge Reynaud. Ultimate decoherence border for matter-wave interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 96, p. 050405, Feb 2006.
- [19] Peter R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. *Phys. Rev. D*, Vol. 42, pp. 2437–2445, Oct 1990.
- [20] Markus Aspelmeyer, Tobias J. Kippenberg, and Florian Marquardt. Cavity optomechanics. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 86, pp. 1391–1452, Dec 2014.
- [21] D. Shoemaker, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Maischberger, and A. Rüdiger. Noise behavior of the garching 30-meter prototype gravitational-wave detector. *Phys. Rev. D*, Vol. 38, pp. 423–432, Jul 1988.
- [22] Yu. Levin. Internal thermal noise in the ligo test masses: A direct approach. *Phys. Rev. D*, Vol. 57, pp. 659–663, Jan 1998.
- [23] François Bondu, Patrice Hello, and Jean-Yves Vinet. Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas. *Physics Letters A*, Vol. 246, No. 3, pp. 227–236, 1998.
- [24] Gregory M Harry, Andri M Gretarsson, Peter R Saulson, Scott E Kittelberger, Steven D Penn, William J Startin, Sheila Rowan, Martin M Fejer, D R M Crooks, Gianpietro Cagnoli, Jim Hough, and Norio Nakagawa. Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 19, No. 5, p. 897, feb 2002.
- [25] 小森健太朗. *Optomechanical Torsion Pendulum for Measurement of Quantum Radiation Pressure Fluctuation*. PhD thesis, 東京大学, 2019.
- [26] 大橋正建中村卓史. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会.
- [27] Gabriela I. Gonzalez and Peter R. Saulson. Brownian motion of a mass suspended by an anelastic wire. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 96, No. 1, pp. 207–212, July 1994.
- [28] A. Gillespie and F. Raab. Suspension losses in the pendula of laser interferometer gravitational-wave detectors. *Physics Letters A*, Vol. 190, No. 3, pp. 213–220, 1994.
- [29] A Gillespie and F Raab. Thermal noise in the test mass suspensions of a laser interferometer gravitational-wave detector prototype. *Physics Letters A*, Vol. 178, No. 5, pp. 357–363, 1993.
- [30] V.B. Braginsky, V.P. Mitrofanov, and K.V. Tokmakov. On the thermal noise from the violin modes of the test mass suspension in gravitational wave antennae. *Physics Letters A*, Vol. 186, No. 1, pp. 18–20, 1994.
- [31] 松本伸之. 物理実験 2・3 テキスト. テーマ：光計測, 9 2023.
- [32] Seth B. Cataño Lopez, Jordy G. Santiago-Condori, Keiichi Edamatsu, and Nobuyuki Matsumoto.

- High- $q$  milligram-scale monolithic pendulum for quantum-limited gravity measurements. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 124, p. 221102, Jun 2020.
- [33] 砂川重信. 理論電磁気学. 紀伊國屋書店, 2019.
- [34] Trans Earnshaw. Vol. 7. Cambridge philos, 1842.
- [35] Orphee Cugat, J. Delamare, and Gilbert Reyne. Magnetic micro-actuators and systems (magmas). *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 39, pp. 3607–3612, 2003.
- [36] M. Kumada, T. Fujisawa, Y. Hirao, Masahiro Endo, M. Aoki, T. Kohda, I. Bolshakova, and R. Holyaka. Development of 4 tesla permanent magnet. Vol. 5, pp. 3221 – 3223 vol.5, 02 2001.
- [37] 本河光博. 強い磁場をつくる. 岩波書店, 2002.
- [38] Seungyong Hahn, Kwanglok Kim, Kwangmin Kim, Xinbo Hu, Thomas Painter, Iain Dixon, Seokho Kim, Kabindra R Bhattarai, So Noguchi, Jan Jaroszynski, and David C Larbalestier. 45.5-tesla direct-current magnetic field generated with a high-temperature superconducting magnet. *Nature*, Vol. 570, No. 7762, pp. 496–499, Jun 2019.
- [39] M Salauddin and Jae Y Park. Design and experiment of human hand motion driven electromagnetic energy harvester using dual halbach magnet array. *Smart Materials and Structures*, Vol. 26, No. 3, p. 035011, feb 2017.
- [40] Gerald Kustler. Extraordinary levitation height in a weight compensated diamagnetic levitation system with permanent magnets. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 48, pp. 2044–2048, 2012.
- [41] Yuanping Xu, Qingwen Cui, Ryosuke Kan, Hannes Bleuler, and Jin Zhou. Realization of a diamagnetically levitating rotor driven by electrostatic field. *Ieee-Asme Transactions On Mechatronics*, Vol. 22, No. 5, pp. 5. 2387–2391, 2017.
- [42] FEMM ホームページ. <https://www.femm.info/wiki/homepage>.
- [43] 二六製作所ホームページ. <https://www.26magnet.co.jp>.
- [44] 磁気特性二六製作所. <https://www.26magnet.co.jp/products/neodymium>.
- [45] 鈴森康一. 静電アクチュエータ. 日本ロボット学会誌, Vol. 15, No. 3, p. 342 346, 1997.
- [46] A Cadez and A Abramovici. Measuring high mechanical quality factors of bodies made of bare insulating materials. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, Vol. 21, No. 5, p. 453, 1988.
- [47] 中島良介. 巨視的量子力学の検証に向けた鏡の磁石懸架システムの開発. Master’s thesis, 東京工業大学, 2 2020.
- [48] Eclipse Magnetics 社. [https://www.eclipsemagnetics.com/site/assets/files/19485/ndfeb\\_neodymium\\_iron\\_boron\\_standard\\_ndfeb\\_range\\_datasheet\\_rev1.pdf](https://www.eclipsemagnetics.com/site/assets/files/19485/ndfeb_neodymium_iron_boron_standard_ndfeb_range_datasheet_rev1.pdf).
- [49] 株式会社 NSC. <https://nsc-net.co.jp/rgo/>.

# 謝辞

本修士論文を完成させるにあたり、多くの方々のご協力を賜りました。改めてこの場にて、感謝申し上げます。

指導教員である宗宮先生には、研究生生活にあたり3年間大変お世話になりました。トライアンドエラーの連続であった私の研究において、困ったときにはいつも助言やアイデアをいただき、本修士論文を完成させることができました。宗宮研究室の自由な雰囲気は、実験系を変えるなど方針を変換する際にも、やりたいことをやらせていただける環境がありました。また、フランス短期留学や富山での国際学会への参加など、本研究にとどまらない貴重な経験をいただきました。改めてお世話になりました。

特別研究員の原田先生とは実験室で顔を合わせる事が多く、研究のコンセプトレベルに留まらない、実験のより実践的なアドバイスを沢山いただきました。特に光学系や真空系など、原田先生のご協力なければどれだけ時間がかかっていたか分かりません。本当にありがとうございました。

博士2年の阿部さんには、学会での発表や本修士論文の執筆のペースについてなど、多くのタイミングで助言をいただき、精神的に支えていただきました。博士1年の鈴木さんは普段から気さくに接していただき、研究生生活をより充実したものになりました。実験室では器具の使い方から浅学な私に基礎から実践的知識を教えてくださいました。

同期の白倉君には、シャドウセンシングの経験者ということで、光学系のセットアップやデータ解析などの流れを教えてくださいました。光学に関する知識と経験はいつも勉強になっていました。同期の武田さんには、フランス短期留学や国際学会などで一緒になる事が多く、お互いの研究について意見を交わすことはもちろん、出張先での生活でも多くの面で支えてもらいました。同期の笹岡君は、コーディングに関して右に出る者はいない優秀な学生で、本研究のシミュレーションや解析用コードなどを添削してもらい、たびたびアドバイスをもらいました。同期のDiegoには、ゼミで機械学習に関する先進的な知識や、その発表の仕方と姿勢にインスピレーションを受けていました。

修士1年の羽場君には、発表練習やゼミなどで実験の知識や経験に基づく鋭い質問をもらい、自分の研究を違った視点から見直すきっかけを沢山もらいました。

学部4年の井殿君には、研究に関して基本的でありながら根本に関わる質問をもらい、気付けばいつも自分が勉強になっていました。学部4年の竹下君には、研究内容は異なるものの、研究室配属時に一緒に検討した磁石組み立て用の治具に関して大変有用なアイデアをいただき、現在用いる治具にまで反映されています。

短期留学生のSapnaさんは、石英の浮上実験という近い分野を研究し、ベーキングによる脱磁という重大な問題に気付かせてくださいました。短期留学生のJunlang君には、石英の浮上実験やリング型グラファイトの浮上に関するシミュレーションなど、近くも手付かずであった分野を研究し、浮上に関する新たな知見を学ぶことができました。

そして何より私の大学院生活を支えてくれた家族に感謝しています。学費や生活の面で不安や苦勞を感じる

ことなく、研究に打ち込めたのは家族の援助があつてこそのものでした。  
最後に改めて皆様に感謝申し上げます。誠にありがとうございました。