

修士論文

干渉計型重力波望遠鏡の懸架系における
非平衡熱雑音の理論的検証

東京工業大学大学院
理学院 物理学系 物理学コース
宗宮研究室

武田 紗貴乃

2024年2月25日

Abstract

General theory of relativity predicts distortions of space-time, known as ‘gravitational waves’. Gravitational waves propagates information about internal structure of stars or black holes which cannot be observed through electromagnetic waves. Gravitational-wave signals are extremely weak that no one could detect them for nearly a century. Finally, LIGO interferometers successfully detected the first gravitational wave on September 14th, 2015. In the realm of gravitational-wave detectors, understanding and mitigating various noise sources, such as seismic noise, quantum noise and thermal noise, are essential. For this reason, the mirrors of the interferometers are suspended by multi-stage pendulums of fibers or blade springs. KAGRA, the gravitational wave detector in Japan, is located underground to reduce seismic noise and cools the mirrors to lower thermal noise. The heat generated by the laser is conducted through the suspension system to the cooler, which is located in upper stage of the suspension. Thus, the suspension fibers are in non-equilibrium state.

Thermal noise comprises Brownian thermal noise and thermoelastic noise. Brownian thermal noise arises from the Brownian motion derived from thermal kinetic energy of the atoms in the detectors. Interaction with a heat bath leads to non-uniform deformation of the body and couples with thermal expansion coefficient. Thermoelastic noise comes from thermal relaxation of this local temperature distributions. The calculation of thermoelastic noise is based on the fluctuation-dissipation theorem and neglects non-equilibrium conditions at present situation.

Thermal noise in the mirrors and the suspension fibers in the horizontal direction, which is the direction of heat flux resulting from bending motion, has been calculated. However, thermoelastic noise in the vertical direction has not yet been studied, because the thermal gradient and dissipation flow in the same direction, making the system locally non-equilibrium. The goal of this study is to identify a theory for calculating thermoelastic noise in the vertical direction. This estimation is important for current and next-generation detectors, as it could potentially impact their sensitivity in the future.

This thesis consists of two parts. The first part covers the theoretical calculation as a preparation for the direct detection of thermoelastic noise in a table-top experiment. We evaluate the Q-factor of a blade spring with thermal gradients on its surfaces as a function of an imaginary length without thermal gradients at both ends.

In the second part, we consider a one-dimensional fiber with thermal gradients at its boundaries, which is more realistic situation, with three distinct approaches. The sensitivities of these three approaches are compared with the design sensitivity of KAGRA. However, the outcomes from the three methods did not coincide.

概要

重力波とは、一般相対性理論によって予言される時空の歪みである。電磁波では観測できない天体内部やブラックホールの現象を重力波で観測することで、宇宙の起源を知る新たな指標となる。天体起源の重力波でもその信号は非常に微弱であり 100 年もの間に非常に多くの物理学者がこの難題に挑んできた。そして 2015 年 9 月 14 日にレーザー干渉計型重力波望遠鏡 LIGO によって初観測が果たされた。重力波検出器において地面振動や量子雑音、熱雑音といったあらゆる雑音を理解し低減することは感度向上に必要不可欠であり、そのための工夫が随所になされている。例えば干渉計の鏡を多段の懸架系で吊るすことで振動による雑音を減らしている。また日本にあるレーザー干渉計型重力波望遠鏡 KAGRA は地面振動を減らすために地下に設置され、熱雑音を減らすために鏡を冷却している。懸架系の熱伝導でレーザーからの熱を懸架系の上段にある冷凍機まで輸送し冷却している。よって鏡を吊るすファイバは熱的非平衡状態にある。

熱雑音にはブラウン熱雑音や熱弾性雑音などがある。ブラウン熱雑音とは、検出器の原子の熱的運動エネルギーによってブラウン運動が引き起こされることで発生する雑音である。また熱浴とのやり取りによって物体に非一様な変形が生まれ熱膨張率と結びつくと物体中にランダムで局所的な温度分布が生じる。熱弾性雑音とは、この熱緩和が由来となって発生する熱雑音である。これまでの研究では熱弾性雑音の大きさは非平衡による影響が小さいと仮定し、揺動散逸定理を用いて計算されている。

熱雑音が計算されているパーツとして鏡、懸架系ファイバの横方向（曲げ方向）が挙げられる。懸架系ファイバの縦方向（伸縮方向）に関しては、温度勾配方向と散逸の方向が同じとなり局所平衡系を仮定できず、まだ計算もなされていない。本研究ではこの縦方向の熱弾性雑音を求める理論の考察をおこなう。今後の感度向上や測定可能な周波数帯域の広域化により熱弾性雑音が制限を与える可能性もあり、これを見積もることは重要である。

本論文では、板ばねを用いた検証実験のための計算と、懸架系の縦方向の雑音に関する計算手法の考察という 2 つのパートに分けてこれを論じる。1 つ目に、テーブルトップ実験の理論的な準備として上面と下面の各境界において温度勾配がゼロでない板ばねの Q 値を算出する。温度勾配がゼロになるときの仮想的な長さをおき、板ばねの材質や大きさに依存する横軸をとることで Q 値の逆数の変化を見た。2 つ目に、より重力波望遠鏡の懸架系に近い

系として上端と下端で温度勾配をもつ1次元ファイバで感度の考察をする。ファイバの下端には鏡がつるされており、本研究では境界条件にその慣性項の寄与も含めている。熱雑音に関する先行研究で用いられたことのある3つの手法を用いて熱弾性雑音を計算したところ、全てで異なる結果を得た。

目次

Abstract	1
概要	3
記号一覧 (板ばね)	8
記号一覧 (懸架系)	9
公式	10
第 1 章 はじめに	11
1.1 重力波	11
1.1.1 Einstein 方程式の弱磁場近似	11
Lorenz ゲージ	12
1.1.2 連星系からの重力波	16
1.2 重力波検出	17
1.3 KAGRA 概要	17
1.3.1 KAGRA の感度	18
1.4 雑音	19
1.4.1 地面振動	19
1.4.2 量子雑音	20
1.4.3 熱雑音	20
1.5 熱雑音を求める複数のアプローチ	21
1.5.1 Lifshitz's method	22
1.5.2 Gonzalez's method	22
1.5.3 Langevin's method	22
1.5.4 Levin's method	22
1.5.5 現状	23
1.6 研究の目的	23
第 2 章 基礎となる理論	25
2.1 パワースペクトル密度	25
2.2 感度	26
2.3 揺動散逸定理	27

2.3.1	散逸のモデルと Q 値	28
	Viscous model	28
	Structure model	29
2.4	非平衡	29
2.5	Lifshitz の弾性理論	31
2.5.1	熱膨張係数	31
2.5.2	Q 値	31
2.5.3	Zener による弾性論	32
2.5.4	運動方程式	33
2.5.5	熱拡散方程式 (熱伝導方程式)	34
	一般的な場合	35
2.5.6	運動方程式と熱拡散方程式	35
第 3 章	温度勾配のある板ばね	38
3.1	理論計算	38
3.2	計算結果	43
3.2.1	Q 値の挙動	43
3.3	考察	44
3.3.1	Q 値の挙動	44
3.3.2	ディップ位置の特定	45
3.3.3	物性値の代入	46
	温度勾配の有無による Q 値の比較	47
	板ばねの大きさに対する Q 値の変化	48
3.3.4	仮想長さの扱い	49
	実際の実験系	49
第 4 章	懸架系ファイバの計算	50
4.1	境界で熱流なし	50
4.1.1	Gonzaletz's method	50
4.1.2	Langevin's method	54
	近似あり	54
	近似なし	56
4.1.3	Levin's method	61
	近似あり	61
	近似なし	64
4.2	境界で熱流あり	70
4.2.1	Levin's method	70
	鏡の慣性項	72
4.3	計算手法	73
4.4	計算結果	74

4.4.1	Langevin の方法で近似ありとなしの比較	74
4.4.2	Levin の方法で近似ありとなしの比較	74
4.4.3	3つの方法の比較	75
4.4.4	境界で熱流をもつときの結果	76
	等しい長さ $h = h'$	76
	異なる長さ $h \neq h'$	77
4.5	考察	79
4.5.1	境界で熱流なし	79
	低周波	79
	KAGRA の感度との比較	79
	ピーク位置	79
4.5.2	境界で熱流をもつときの計算	80
	等しい長さ $h = h'$	80
	異なる長さ $h \neq h'$	81
	仮想長さの扱い	81
4.5.3	熱弾性雑音を求める複数の理論	82
第 5 章 まとめ		83
付録 A 理論の補足		85
A.1	揺動散逸定理	85
	A.1.1 等分配の原理 (Equipartition theorem) との関係	85
	A.1.2 非平衡での揺動散逸定理	85
A.2	Langevin 方程式と Nyquist 定理	86
A.3	Wiener–Khinchin の定理	88
A.4	つり合いの方程式	88
A.5	境界条件の鏡の慣性項	89
	A.5.1 近似をしない Levin の方法で鏡の慣性項を含む	89
付録 B LIGO		91
B.1	LIGO のパラメタにおける縦方向熱弾性雑音	91
B.2	計算結果	92
B.3	考察	93
B.4	まとめ	94
謝辞		95
参考文献		97

記号一覧 (板ばね)

記号	意味
$u_i (i = x, y, z)$	変位
$T = T_0 + \theta$	温度
T_0	平衡温度
$\theta(x)$	平衡温度からのずれ
$Z(x)$	z 方向の板ばねの動き
$u_{ij} (i, j = x, y, z)$	ひずみ (strain)
$\sigma_{ij} (i, j = x, y, z)$	応力 (stress)
$1/R$	ビームの曲率
E	ヤング率
ρ	密度
α	熱膨張係数
C_v	定積比熱
c_p	単位体積あたりの定圧比熱
σ	ポアソン比
Δ_E	$E\alpha^2 T_0 / c_p$
χ	$\kappa / \rho C_v$
a, b	矩形型柱の断面の長さ
L	矩形型柱の長さ (図 2.1 参照)
b'	仮想的な厚さ (図 3.1 参照)
$A = ab, A' = ab'$	断面積
ξ	$\frac{kb}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$
d	$\frac{b'}{b} > 1$

表 1: 板ばねの系における文字と物理量の定義。板ばねの材料や大きさなど各値は後に定義する。

記号一覧 (懸架系)

記号	意味	値
u	ファイバの変位	変数
θ	平衡温度からの差の温度	変数
k_B	Boltzmann 定数	$1.38 \times 10^{-23}[\text{J/K}]$
M	鏡の質量を 4本のファイバで割った値	$22.8[\text{kg}]/4$
-	ファイバ半径	$0.0016[\text{m}]$
S	ファイバ断面積	$0.0016^2\pi/4[\text{m}^2]$
L	ファイバ長さ	$0.35[\text{m}]$
ρ	線密度	$4.0 \times 10^3[\text{kg/m}^3] \times S$ $= 8.0 \times 10^3[\text{kg/m}]$
T	温度	$300[\text{K}]$
C	比熱	$7.9 \times 10^2[\text{J/kg} \cdot \text{K}]$
κ	線熱伝導率	$40[\text{J/m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}] \times S$ $= 0.8[\text{J} \cdot \text{m/s} \cdot \text{K}]$
E	ヤング率	$4.0 \times 10^{11}[\text{Pa}]$
χ	熱拡散係数	$\kappa/(\rho C)$
α	熱膨張率	$5 \times 10^{-6}[\text{1/K}]$
L_{arm}	アーム長さ	$3000[\text{m}]$
l_c	縦横カップリング	$1/200$

表 2: 懸架系における文字と物理量の定義。ここでは KAGRA のサファイア製ファイバで 300K としたときの値を載せる [4]。

公式

本論文で用いる公式を載せる。

三角関数の複素共役:

$$(\sin k)^* = \left(\frac{e^{ik} - e^{-ik}}{2i} \right)^* = \sin k^*, \quad (\text{I})$$

$$(\cos k)^* = \left(\frac{e^{ik} + e^{-ik}}{2} \right)^* = \cos k^*. \quad (\text{II})$$

三角関数と楕円関数の関係:

$$\sin(ia) = \frac{e^{i \cdot ia} - e^{-i \cdot ia}}{2i} = i \sinh a, \quad (\text{III})$$

$$\cos(ia) = \frac{e^{i \cdot ia} + e^{-i \cdot ia}}{2i} = \cosh a. \quad (\text{IV})$$

以上より、

$$\begin{aligned} \sin(a + ib) &= \sin a \cos ib + \cos a \sin ib \\ &= \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b, \end{aligned} \quad (\text{V})$$

$$\begin{aligned} \cos(a + ib) &= \cos a \cos ib - \sin a \sin ib \\ &= \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b. \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

三角関数の積分:

$$\int_0^L \sin ax \sin bx \, dx = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\sin(a+b)L}{a+b} + \frac{\sin(a-b)L}{a-b} \right\}, \quad (\text{VII})$$

$$\int_0^L \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(a+b)L}{a+b} + \frac{\sin(a-b)L}{a-b} \right\}, \quad (\text{VIII})$$

$$\int_0^L \sin ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \cos(a+b)L}{a+b} + \frac{1 - \cos(a-b)L}{a-b} \right\}. \quad (\text{IX})$$

フーリエ変換は次の式で定義する:

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, \omega) e^{i(\omega t + kx)} dt dx. \quad (\text{X})$$

第1章 はじめに

1.1 重力波

重力波とは、Einstein の一般相対性理論によって予測される時空を伝搬する時空の歪みである。重力波の検出によって、電磁波では観測できない天体内部やブラックホールの運動の観測が可能になる。重力波探索は一般相対性理論の検証だけでなく宇宙の起源を知るうえで新しい標となる [1][3]。

1.1.1 Einstein 方程式の弱磁場近似

本節では文献 [3] をもとに2つの質点系からなる連星から放出される重力波の具体的な計算をすることで重力波の基本的な性質を理解する。なお重力波は次節 §1.2 で述べるようにすでに検出されているため概念的な問題には立ち入らず次の弱い重力場を仮定して議論を進める：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1.1.1)$$

時空 $g_{\mu\nu}$ を重力の存在しないミンコフスキー時空 $\eta_{\mu\nu}$ と重力による時空のゆがみ $h_{\mu\nu}$ に分け、定常時空上を波動が伝搬するという描像に対応する。ここでは h を $h_{\mu\nu}$ の典型的振幅として高次項を無視したものとする。

任意のテンソル A に対して座標に対する偏微分を次のように略記する：

$$\frac{\partial A}{\partial x^\alpha} \equiv A_{,\alpha}, \quad \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} \equiv A^{,\alpha}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \equiv A_{,\alpha\beta}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^\beta \partial x_\alpha} \equiv A^{,\alpha\beta}. \quad (1.1.2)$$

よって A が微小量である場合はそれらの最低次では偏微分の足も $\eta_{\alpha\beta}$ と $\eta^{\alpha\beta}$ を用いて上げ下げすればよい。これらを用いて Einstein 方程式を $h_{\mu\nu}$ 関して線形化していく。

Christoffel 記号の線形化：

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\beta,\gamma} &\equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \sim \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} (h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}) \\ &\equiv \frac{1}{2} (h^\alpha_{\beta,\gamma} + h^\alpha_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Ricci テンソルの線形化:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} \\
&\sim \frac{1}{2} \left((h^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha}) - (h^{\alpha}_{\mu,\alpha\nu} + h^{\alpha}_{\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha}) \right) \\
&= \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}). \quad (1.1.4)
\end{aligned}$$

ここで h は $h_{\mu\nu}$ のトレース $h \equiv h^{\alpha}_{\alpha} \equiv \eta^{\alpha\mu}h_{\alpha\mu}$ である。式 (1.1.4) を縮約すると Ricci スカラーは、

$$R = R^{\beta}_{\beta} \sim \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\beta,\beta}{}^{\alpha} + h^{\beta}_{\alpha,\beta}{}^{\alpha} - h^{\beta}_{\beta,\alpha}{}^{\alpha} - h^{\beta}_{,\beta}) = h_{\alpha\beta,\alpha\beta} - h^{\beta}_{,\beta}. \quad (1.1.5)$$

Einstein テンソルの線形化:

$$\begin{aligned}
2G_{\mu\nu} &= 2R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R \\
&\sim h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta,\alpha\beta} - h^{\beta}_{,\beta}). \quad (1.1.6)
\end{aligned}$$

ここで $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ を定義すると、

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\mu}_{\mu} = h^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2} \times 4h = -h, \quad (1.1.7)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \quad (1.1.8)$$

となるから、これを用いると式 (1.1.6) は、

$$\begin{aligned}
2G_{\mu\nu} &\sim -\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} \\
&\quad - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\bar{h}_{,\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\alpha}\bar{h}_{,\mu}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{,\alpha}{}^{\alpha} + \bar{h}_{,\mu\nu} \\
&\quad - \eta_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{,\beta}{}^{\beta} \right). \quad (1.1.9)
\end{aligned}$$

この式の 2 行目の和はゼロになるので残るのは 1 行目のみである。よって、

$$2G_{\mu\nu} \sim -\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha}. \quad (1.1.10)$$

Lorenz ゲージ

物理的には同じ時空であっても座標系の選び方に依って $g_{\mu\nu}$ は異なる表式となる。よって $\bar{h}^{\mu\nu}$ と $h^{\mu\nu}$ も同じ時空に対しても一意的には決まらず、座標変換に対する 4 つの自由度をもつ。これは電磁気学の 4 元ポテンシャル A^{μ} がもつゲージ自由度に対応する。電磁気学では Lorenz ゲージ $A^{\mu}_{,\mu} = 0$ を課し、Maxwell 方程式から、

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = (A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu})_{,\nu} = -\square A^{\mu} = 4\pi J^{\mu} \quad (1.1.11)$$

のように A^μ に対する波動方程式を導く。

$\bar{h}^{\mu\nu}$ に対しても同様のゲージ条件を課すことでその波動方程式を導ける。それを見るために $x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu$ (ただし $\xi^\mu \ll x^\mu$ とする) とおき $g_{\alpha\beta}(x) \rightarrow g'_{\alpha\beta}(x')$ への座標変換則を書き下すと、

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \\ &\sim (\delta^\alpha_\mu - \xi^{\alpha, \mu}) (\delta^\beta_\nu - \xi^{\beta, \nu}) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

従って、

$$h'_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu} - \xi_{\mu, \nu} - \xi_{\nu, \mu}, \quad h' \sim h - 2\xi_{\mu, \mu}, \quad (1.1.13)$$

$$\Rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu, \nu} - \xi_{\nu, \mu} + \eta_{\mu\nu} \xi_{\beta, \beta}. \quad (1.1.14)$$

これらより、

$$\bar{h}'^{\mu\alpha}_{, \alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}_{, \alpha} - \xi^{\mu, \alpha}_{, \alpha} + \eta^{\mu\alpha} \xi_{\beta, \alpha}^{\beta} - \xi^{\alpha, \mu}_{, \alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}_{, \alpha} - \xi^{\mu, \alpha}_{, \alpha} \quad (1.1.15)$$

となる。この右辺がゼロになるように

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = \xi^{\mu, \alpha}_{, \alpha} = \eta^{\alpha\beta} \xi^{\mu}_{, \beta\alpha} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) \xi^\mu \equiv \square \xi^\mu \quad (1.1.16)$$

を満たす ξ^μ を選ぶと、一般性を失うことなく以下のゲージ条件を課せる:

$$\bar{h}^{\mu\alpha}_{, \alpha} = 0. \quad (1.1.17)$$

式 (1.1.17) を式 (1.1.10) に代入すれば、弱場近似でのアインシュタイン方程式は、

$$2G_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu} \Rightarrow -\bar{h}_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha} = -\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.1.18)$$

に帰着する。この波動方程式の解は電磁気学と同様に遅延解を用いて、

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \bar{h}_{\mu\nu}^{(ret)}(t, \mathbf{x}) + \bar{h}_{\mu\nu}^{(in)}(t, \mathbf{x}), \quad (1.1.19)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(ret)}(t, \mathbf{x}) = 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (1.1.20)$$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(in)}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.1.21)$$

式 (1.1.20) は 4 次元座標 (t, \mathbf{x}) で定義された左辺が因果律に従い \mathbf{x}' にあるソース項 $T_{\mu\nu}$ の時刻 $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ における値を空間積分した右辺によって決まることを示す。この情報伝達の遅れを添字 (ret) で遅延解 (retarded) を表す。

式 (1.1.20) は 4 次元座標 (t, \mathbf{x}) でグリーン関数を用いて式 (1.1.18) を解くと導くことができる。式 (1.1.18) は \mathbf{x} 点の時刻 t における重力ポテンシャルの値は時刻 $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ における点 \mathbf{x}' の質量密度によってべき、つまり重

力が光速で伝わることを意味している。ただしこの波動方程式には真空を光速で伝搬する波動解 $\bar{h}_{\mu\nu}^{(in)}$ を付け加える自由度が残っており、これが式 (1.1.21) に従う重力波である。

ここで重力波源から遠く離れた真空中を伝搬する重力波として平面波解を求める。式 (1.1.21) の上添字 (*in*) を省略し真空中を伝搬する重力波 $\square\bar{h}_{\mu\nu}$ を考える。まず単色平面波解:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (1.1.22)$$

を具体的に求める。ここで $a_{\mu\nu}$ は重力波の偏光テンソルと呼ばれ、各成分はすべて定数である。この $\bar{h}_{\mu\nu}$ は複素数だが、実際にはその実部をとるものとする。またこれは添字の入れ替えに対して対称だから、

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}. \quad (1.1.23)$$

さらに Lorenz ゲージ条件 (1.1.17) より、

$$a_{\mu\alpha} k^\alpha = 0. \quad (1.1.24)$$

この 2 つの条件から $a_{\mu\nu}$ は $10 - 4 = 6$ の独立な自由度をもつ。さらに式 (1.1.17) を満たす ξ^μ は一意的ではなく、 $\square\chi^\mu = 0$ を満たす 4 つの自由度 χ^μ を用いて $\xi^\mu + \chi^\mu$ を選ぶこともできるため実際の自由度は 2 である。このため 8 つの条件を課せる。これを通常 TT (Transverse-Trace-less) ゲージと呼び、

$$h_{\mu 0} = 0, \quad (1.1.25)$$

$$h_{ij}{}^{,j} = 0, \quad (1.1.26)$$

$$h^j{}_j = 0 \quad (1.1.27)$$

を採用する。式 (1.1.25) は重力波が空間成分しかもたないことを、式 (1.1.27) は重力波の成分のトレースがゼロであることを示す。このとき $\bar{h}_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ は一致するため、区別の必要がなくなる。また式 (1.1.26) は、 $h_{jk} \propto \exp\{ik_\alpha x^\alpha\}$ という平面波で $k^k h_{ij} = 0$ に帰着する。つまり $h_{\mu\nu}$ が波数ベクトル \mathbf{k} の方向と直行する (transverse) すなわち、重力波は横波である。

さらに具体的に振動数 w で z 方向に進む単色平面波 $h_{\mu\nu}^{TT} = a_{\mu\nu} e^{-iw(t-z)}$ を考える。これを式 (1.1.25)-(1.1.27) へに代入すると、

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv a^+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a^\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.28) \end{aligned}$$

ここでこの重力波の 2 つの自由度 (偏光) に対する成分の振幅を $a^+ \equiv a_{11}, a^\times \equiv a_{12} = a_{21}$ とおいた。この添字 + と \times に対応する偏光はそれぞれプラスモードとクロスモード (図 1.1 参照) と呼ばれる。

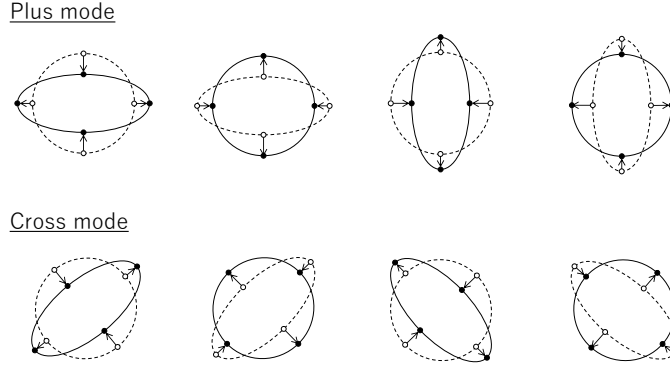


図 1.1: 重力波の平面波解の独立な 2 つな偏光の変化、上がプラスモード ($a^+ \neq 0, a^\times = 0$) で下がクロスモード ($a^+ = 0, a^\times \neq 0$) を表す。各図において、黒丸がその時刻での、白丸がそれより過去の時刻での質点の位置の表しており、時間が進むにつれて左から右のパターンへと繰り返し変化する。

線形化されたアインシュタイン方程式の遅延解 (1.1.20) から時間変化する重力波源から放射される重力波の振幅を求める。重力波源が R 程度の大きさの領域に局在化していると仮定する。すると式 (1.1.20) より重力波源から $r = |\mathbf{k}| (\gg R)$ だけ離れた波動域での重力波の振幅は次のように近似できる:

$$\bar{h}^{\mu\nu} \sim \frac{4G}{r} \int T^{\mu\nu}(t-r, \mathbf{x}') d^3x'. \quad (1.1.29)$$

重力波源が非相対論的であると $T^{00}(t-r, \mathbf{x}') \sim \rho(t-r, \mathbf{x}')$ と近似できるから、考えている領域の質量分布の四重極モーメント $I^{jk}(t-r) = \int \rho(t-r, \mathbf{x}') x'^j x'^k d^3x'$ を用いると、

$$\begin{aligned} \bar{h}^{jk} &\sim \frac{4G}{r} \int T^{jk} d^3x' \\ &= \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00}(t-r, \mathbf{x}') x'^j x'^k d^3x' \\ &= \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{d^2 I^{jk}(t-r)}{dt^2}. \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

これを TT ゲージにするために、 I_{jk} をトレースレスにした四重極モーメント:

$$\mathcal{I}_{jk}(t-r) = I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I = \int T^{00}(t-r, \mathbf{x}') \left(x'_j x'_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r'^2 \right) d^3x' \quad (1.1.31)$$

を考え、

$$\bar{h}^{\text{TT}jk}(t-r, \boldsymbol{x}) \sim \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{d^2 \mathcal{I}^{jk}(t-r)}{dt^2} \quad (1.1.32)$$

を定義する。これは重力波の振幅が重力波源の四重極モーメントの時間に関する 2 階微分で与えられることを示す。

1.1.2 連星系からの重力波

この式 (1.1.32) を用いて連星系からの重力波を計算してみる。2 つの連星の質量を m_1, m_2 とおく。ケプラーの法則より、円軌道の軌道半径長 a と公転運動の角振動数 ω は次の関係を満たす:

$$G(m_1 + m_2) = \omega^2 a^3. \quad (1.1.33)$$

この系の重心を原点にとり軌道面を xy 平面におくと 2 つの質点の座標は、

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} a \cos \omega t, \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \sin \omega t \right) \quad (1.1.34)$$

$$(x_2, y_2) = \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2} a \cos \omega t, -\frac{m_1}{m_1 + m_2} a \sin \omega t \right). \quad (1.1.35)$$

これを用いると、四重極モーメントのトレース $I = I_{xx} + I_{yy}$ は定数となるので時間微分について I^{jk} と \mathcal{I}^{jk} は同じ結果となる。以上より重力波の振幅は、

$$h = \frac{4Ga^2\omega^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)r} = \frac{2Gm_1 \times 2Gm_2}{ar} = \frac{r_{s1} r_{s2}}{ar}. \quad (1.1.36)$$

なお 2 つ目の等号についてケプラーの法則を用いて変形した。 r_{s1}, r_{s2} はそれぞれ 2 つの質点の Schwarzschild 半径である。例えば、天の川銀河中心にある $m_1 = m_2 = 1M_\odot$ の 2 つの中性子星が互いにその半径 10km 程度まで接近して公転する場合、我々が観測できる重力波の振幅は、

$$\begin{aligned} h &\sim \frac{3\text{km} \times 3\text{km}}{20\text{km} \times 3 \times 10^{17}\text{km}} \left(\frac{m_1}{1M_\odot} \right) \left(\frac{m_2}{1M_\odot} \right) \left(\frac{20\text{km}}{a} \right) \left(\frac{10\text{kpc}}{r} \right) \\ &\sim 10^{-18} \left(\frac{m_1}{1M_\odot} \right) \left(\frac{m_2}{1M_\odot} \right) \left(\frac{20\text{km}}{a} \right) \left(\frac{10\text{kpc}}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

この値は地上で 1km 離れた 2 点間の距離を 10^{-18}km 程度だけ変化させることに対応する。これは原子核の大きさほどである。これより重力波の検出には極限の計測技術が不可欠であることが分かる。

1.2 重力波検出

前節の式 (1.1.37) からわかるように、重力波は非常に弱い信号として検出される。よって天体起源の重力であっても直接検出は絶望的とも考えられていたが、それ故に世界中の物理学者の挑戦心を掻き立ててきた。1950 年代には J. Weber が共振周波数 1.66kHz のアルミ棒を用いた直接検出を目指し 1969 年に重力波を検出したと発表した。しかし、その後の追観測では確認されず現在ではこれは重力波以外の雑音によるものだと考えられている。

現在の重力波検出の主流はレーザー型干渉計である。2つの物体を相互作用しない状態で遠くに離し、重力波が通過したときのその距離の微小変化を精密測定する。これは Weber の特定の周波数にのみ感度をもつ共振型とは異なり 0.1kHz-10kHz 程度と幅広い周波数領域をみることができると多様な天体現象からの重力波を探索できる。

アメリカの干渉計型重力波望遠鏡 LIGO は約 3000km 離れたワシントン州ハンフォードとルイジアナ州リビングストンの 2 か所に設置された。腕の長さは 4km の独立な 2 つのレーザー干渉計で 2 つの腕を往復してきたレーザーは打ち消し合うよう (Dark port) に調整されている。しかし重力波が到来すると 2 つの腕の長さが微妙に変化するためレーザー光は打ち消されず、その差に応じた信号が検出できる。LIGO は 1999 年に完成し継続的に調整と観測をおこないながら感度を向上をさせてきた。そして、ついに 2015 年 9 月 14 日に人類史上初の重力波検出を検出した。この信号はブラックホール連星合体の数値シミュレーションと驚くほどの一致を見せた。これにより $36M_{\odot}$ と $29M_{\odot}$ のブラックホールが合体し $62M_{\odot}$ のブラックホールとなり、 $3M_{\odot}$ のエネルギーをわずか 0.1 秒間に放出したことが明らかになった。この重力波検出に大きな貢献をしたとして、R. Weiss, B. C. Barish, K. S. Thorne の 3 名が 2017 年のノーベル物理学賞を受賞した [3]。

1.3 KAGRA 概要

KAGRA とは、日本の神岡にある Michelson 干渉計型重力波望遠鏡である。Michelson 干渉計を図 1.2 に載せる。これは、レーザーをビームスプリッターで互いに直交する方向に分割しそれぞれの終端にあるミラーで反射させ再び合流させることで干渉光をつくる装置である。重力波は互いに 90 度をなす空間の長さを差動で変化させるため、Michelson 干渉計の干渉条件を変化させる。よって、Michelson 干渉計の干渉を常に測定することで重力波による差動変化を観測することが可能となる。より正確には重力波望遠鏡は Michelson 干渉計ではなく Fabry-Pérot Michelson 干渉計を用いることで実効的な光路長を伸ばしている。これは Fabry-Pérot 共振器を用いた干渉計で、Fabry-Pérot 共振器とは 2 枚の向き合った鏡などを利用してその内側に光を繰り返し反射

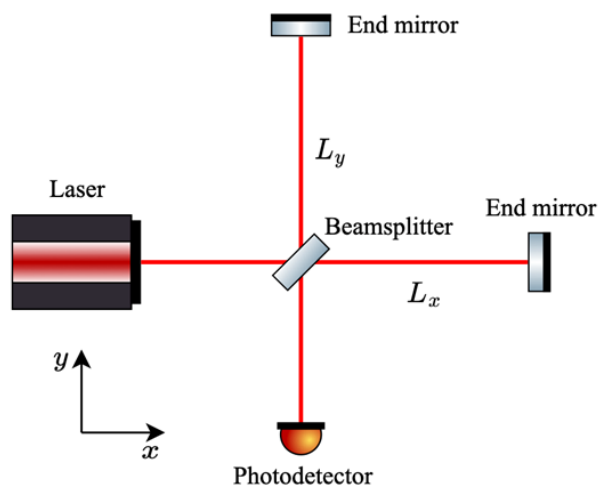


図 1.2: Michelson 干渉計

させることで光をため込む装置である [7]。

世界には複数の干渉計型重力波望遠鏡が存在するが (§ B 参照)KAGRA 独自の特徴として次の 2 つが挙げられる。地面振動を減らすために地下に建設されているという点と、熱雑音 (§ 1.4.3 参照) を減らすために干渉計のサファイア製の鏡を冷却するという点である。機械損失のより少ない鏡が熱雑音を減らすために効果的であるが、さらに 20K の低温に冷やすことでサファイアの性能が発揮され熱雑音を低減できると考えられている。また鏡は反射率を上げるために $\text{SiO}_2/\text{Ta}_2\text{O}_5$ で 31 層もの反射コーティングがされている [27] [5] [6]。

さらに、鏡は揺れを抑えるために多段にわたる懸架系で吊るされている。KAGRA のサスペンション系全体の概図 1.3 と、それをさらに簡略化した図 1.4 を載せる。本研究においては、主に鏡を 4 本で吊るしている最下段のサファイア製ファイバに着目する。

鏡にはレーザーによる入熱があり、その熱は懸架ファイバ系の上段、さらにはヒートリンクを通して冷凍機へと伝わる。冷凍機はサファイア鏡が 22K になるように制御されている (図 1.4 参照)。このとき懸架ファイバには温度勾配が形成され、温度分布が大局的には安定しながら内部には熱流が存在する状態 (定常非平衡状態) となる [8]。懸架系各パーツでの温度に関して文献 [27] Fig.5 に詳細が載っている。以上のような系を念頭に置いて本研究の意義を述べていく。

1.3.1 KAGRA の感度

重力波検出器の感度の量的な議論は信号対雑音比に基づく。これは我々が求める信号が、信号のない状態 (雑音) よりも大きい出力を得られるというこ

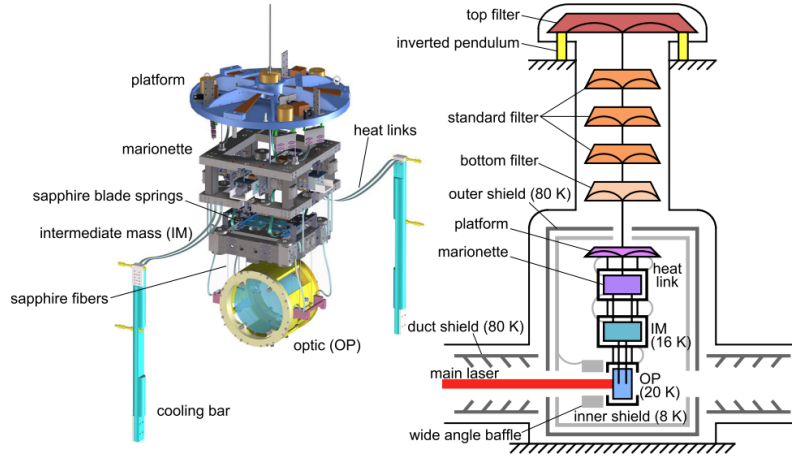


図 1.3: KAGRA のサスペンション系の概要 (文献 [27] Fig.3 より引用)。

とである [1]。 $S_{noise}(\omega)$ を雑音の振幅スペクトル密度、 $G_{GW}(\omega)$ を重力波信号の周波数応答関数 (伝達関数) とおいて、これを数式で表すと、

$$Sensitivity(\omega) = \frac{S_{noise}(\omega)}{G_{GW}(\omega)} \quad (1.3.1)$$

とかける [7]。KAGRA の設計感度を図 1.5 に載せる。地面振動、熱雑音、量子雑音といった背景雑音を足し合わせた結果が黒線の設計感度となる。この設計感度より大きな重力波信号が来た時に観測が可能となる。

1.4 雑音

§1.1 で見たように重力波を検出するためには非常に高度な検出技術が必要である。図 1.5 より検出器の感度は地面振動や量子雑音、熱雑音など多様な雑音によって制限される。特に 1 - 10Hz 程度の低周波ではサスペンション熱雑音や地面振動など、 10^3 Hz 程度の高周波では量子雑音が占めている。この節では、地面振動、量子雑音、熱雑音について簡単に述べる。

1.4.1 地面振動

地面振動は地上にある重力波検出器の低周波数帯の感度を制限する。これは地面が常に振動していることに起因する雑音である。典型的な地面振動の振幅スペクトル密度は、 $\delta x(f) \sim 10^{-7} \times \left(\frac{\text{Hz}}{f}\right)^2$ [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$] 程度である [7]。干渉計型重力波望遠鏡では鏡を多段振り子型のサスペンションでつることで防振している。

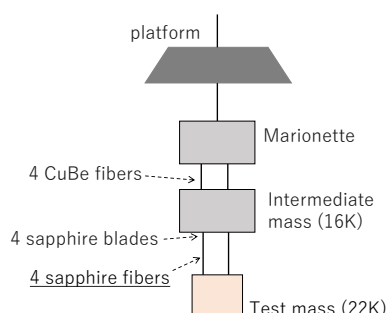


図 1.4: KAGRA のサスペンションの構成と温度の関係。22K に制御された鏡が 4 本のサファイア製ファイバでつるされている。ファイバの上端でおよそ 16K である。 [12]

1.4.2 量子雑音

輻射圧雑音とショット雑音は光の粒子性に由来する雑音で量子雑音と呼ばれる。輻射圧雑音とは、光子が運動量をもつため光子数が変化すると鏡が受ける反作用が変わり鏡を揺らすことで発生する雑音である。これはレーザー強度を上げることで信号雑音比が悪化する。また光子数が変化すると鏡の受ける反作用が変化するだけでなく、検出器の干渉状態を表す光検出器に入る光子の数が変わる。つまり鏡の反作用を介せずに光子数の変化が干渉状態の変化として誤検出されてしまう。これを光のショット雑音という。ショット雑音の大きさは周波数に依らず一定となる。輻射圧雑音とは反対にレーザー強度を上げることでショット雑音に対する信号雑音比を改善できる。このトレードオフにより検出器の感度はある値で制限される。この限界を標準量子限界 (standard quantum limit, SQL) という [7]。

1.4.3 熱雑音

サスペンションや鏡はある温度の場所に設置されており熱浴と接している。この熱浴からエネルギーが出入りすることで生じる揺らぎが熱雑音である。また物体が外部に熱振動子を放出する過程を散逸という [7] [8]。熱力学的現象としてその大きさが Planck 定数 h の代わりに Boltzman 定数 k_B に依存すること、つまり $k_B T$ への比例が「熱雑音」の効果を与える [1]。

懸架系における熱雑音は主に 3 種類考えられる。1 つ目は、熱浴と接していることでファイバの物理的振動が励起されるブラウニアン熱雑音である。干

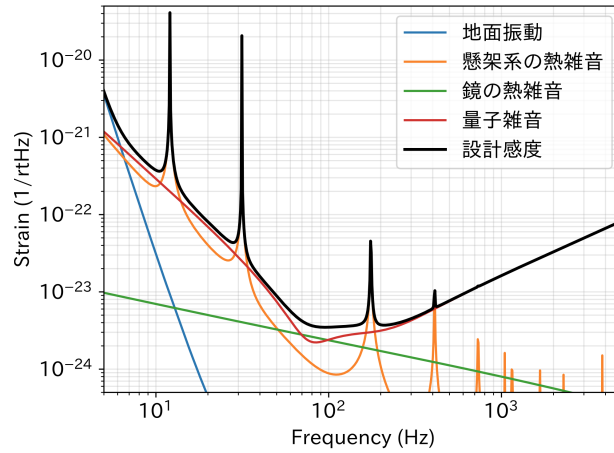


図 1.5: KAGRA の設計感度 [40]

渉計型の観測システムにおける基本的な感度の制限は、光の離散性つまり量子的な側面によるものと考えられている。これは干渉計の鏡が静止しているときでも制限が存在することを示し、このような検出器の原子の熱的運動エネルギーによるブラウン運動をよくブラウニアン熱雑音と呼ぶ [1] [2]。ブラウン運動はランダムであるから運動の位置に関して相関はなく、局所平衡系を考えることによって揺動散逸定理 (§ 2.3 参照) を適用することができる [8]。

さらに 2 つ目として、鏡のコーティングにおいて熱力学の温度の揺動が thermorefractive 雑音を発生させる。この温度の変動は薄い誘電体のフィルムの屈折率の変動をもたらす。これを熱屈折による雑音、thermorefractive 雑音という。この雑音は熱弾性雑音と同じ源から発生するためそれらはコヒーレントに足すまたは引かれるべきである [11]。

3 つ目は熱弾性雑音である。本研究においてこの雑音を考察する。熱浴とのやり取りによって物体に非一様な変形が生じ、熱膨張率と結びつくことで物体中にはランダムで局所的な温度分布が生じる。その熱緩和が由来となる熱雑音が熱弾性雑音である [28] [8]。熱弾性雑音の計算には揺動散逸定理が用いられる。しかし、揺動散逸定理では平衡系を仮定しているため KAGRA の懸架ファイバーのような非平衡な系ではそのまま用いることができない [8]。詳細は § 1.5.5 にまとめる。

1.5 熱雑音を求める複数のアプローチ

本研究で扱う熱弾性雑音を導出するための複数のアプローチと、その理論によって計算されている系について本節にまとめる。まず熱雑音が研究されている懸架系のパーツは主に鏡と懸架系の横方向である。ここで横方向とは、

鏡の干渉計方向に対してファイバが曲がる方向を指す。この曲げ運動によってファイバの片側は圧縮され温度が上がり反対側は伸ばされて温度が下がる。このときの熱流の方向も横方向となる。さらにそれに垂直な方向として「縦方向」を考えることができる。このとき温度勾配の方向と熱散逸の起こる方向が同じとなる。縦方向の雑音は、地面の勾配により横方向成分に変換され雑音となる。この変換を表す係数を縦横カップリングという。熱雑音に関する先行研究で用いられた手法は複数存在している。本研究においてそれぞれ Lifshitz, Gonzaletz, Langevin, Levin らによる揺動散逸定理に基づく手法に言及する。まず各理論の概要を以下に述べる。

1.5.1 Lifshitz's method

周波数 ω の分散関係を出しその実部と虚部の比として Q 値を求める方法である。分散関係を導くためにフックの法則から導出した運動方程式と熱弾性カップリングの項を含む熱拡散方程式を用いる [29]。理論の詳細は § 2.5 に載せる。

1.5.2 Gonzaletz's method

アドミッタンス $Y(\omega)$ からパワースペクトル密度を求める方法である。境界条件として振動する外力 $F_0 e^{i\omega t}$ を加える。運動方程式と熱拡散方程式を用いて u についての 4 次方程式を導く。さらにアドミッタンスは $Y(\omega) = i\omega u(L)/F_0$ と書けるため (§ 2.3 参照) その実部からパワースペクトル密度を求めることができる [31]。理論の詳細は § 4.1.1 に載せる。

1.5.3 Langevin's method

これは Langevin 方程式を用いた方法である。具体的には Langevin 項を熱拡散方程式に導入することで平衡温度からの差の温度 θ との Langevin 項 F の関係を求める。これを運動方程式に代入することで変位 u と Langevin 項 F の関係が求まる。そうすることで u のアンサンブル平均からパワースペクトル密度を導出できる。この際に Langevin 項のアンサンブル平均の関係を代入してすることができる [37] [39]。理論の詳細は § 4.1.2 に載せる。

1.5.4 Levin's method

Levin の方法では、ファイバの両端のうち一端の境界条件として仮想的な振動項を加える。まず熱拡散方程式から変位 u を求めた上で、運動方程式を用いて平衡温度からの差の温度 θ を求める。その微分の絶対値の 2 乗 $|\theta'|^2$ を

変位についてファイバ全体で積分し係数をかけることでパワースペクトル密度を求めていく [37] [28] [39]。理論の詳細は § 4.1.3 に載せる。

1.5.5 現状

上記の手法とそこで計算されている系の関係について現状を述べる。系として干渉計の鏡、懸架系ファイバの横方向、縦方向の 3 つを考える。Levin による文献 [9] では、Gaussian beam 分布を仮定して半無限の鏡の内部に発生する熱雑音を求める手法が示された。さらにこの Levin の方法を応用し文献 [28] で有限の鏡の熱弾性雑音が計算されている。Braginsky らは、鏡の基盤部分 (substrate) の熱弾性雑音が Langevin の方法と Levin による方法で計算されており、2 つの計算結果が解析的に一致している [39] [37]。Somiya らによる文献 [10] では、鏡のコーティングの熱流についてその熱弾性散逸が瞬時的であるとする近似をすることなく、厚さ方向に熱流をもつ有限の鏡に発生する熱弾性雑音を求めている。横方向を考察している理論は、1994 年の Gonzaletz の方法 [31] や、1999 年の Lifshitz の方法 [29] などがある。また Levin の方法では、あるひとつの平衡温度を用いて計算されているが文献 [12] ではさらに発展させて局所平衡系にある非平衡な系でブラウニアン熱雑音を計算している。また熱弾性雑音への応用にも言及している。また本研究とは異なるアプローチとして有限要素法を用いたシミュレーションに関する研究もあり、そこでは Levin の方法を用いて横方向の熱弾性雑音が計算されている [41]。最後に懸架系ファイバの縦方向の熱弾性雑音について、温度勾配方向と散逸の方向が同じとなり局所平衡系を仮定できない。また横方向に比べて影響が小さいと考えられており、縦方向熱弾性雑音の計算はなされていない [13]。以上をまとめた各アプローチの現状を表 1.1 に載せる。

Approach	Mirror	Fiber (horizontal)	Fiber (vertical)
Lifshitz	-	[29]	-
Langevin	[39]	-	‘this thesis’
Levin	[39]	-	‘this thesis’
Gonzaletz	-	[31]	‘this thesis’

表 1.1: 各理論とその理論によって計算された各懸架系パーツの関係。懸架系のパーツは左から、鏡、懸架系ファイバの横方向、懸架系ファイバの縦方向とし、‘-’は未計算、‘this thesis’を本研究で扱う項目とする。

1.6 研究の目的

重力波検出器において地面振動や量子雑音、熱雑音といったあらゆる雑音を理解し低減することは感度向上に必要不可欠である。現状では熱雑音のひ

とつである懸架系熱弾性雑音の大きさは非平衡による影響が小さいと仮定され揺動散逸定理を用いて計算がなされている。さらに前節 § 1.5 でみたように揺動散逸定理を用いた熱雑音に関する計算手法は複数存在している。

本研究では、板ばねを用いた検証実験のための計算と、懸架系の縦方向の雑音に関する計算手法の考察の 2 つに分けて縦方向の非平衡熱弾性雑音を論じる。1 つ目について、非平衡による影響を検証するテーブルトップ実験の理論的な準備に向けて上面と下面の各境界において温度勾配がゼロでない板ばねの Q 値を算出する。温度勾配がゼロになるときの仮想的な長さをおき、板ばねの材質や大きさに依存する横軸をとることで Q 値の変化を見る。さらに考察として板ばねの具体的な材質と大きさを仮定したときの Q 値の変化をみる。2 つ目について、上端と下端で熱流をもつ 1 次元ファイバというより重力波望遠鏡の懸架系に近い状況で非平衡熱雑音の感度の考察をする。先行研究において運動方程式や熱拡散方程式の微小な項を無視する近似などが行われているが、本研究ではその項を無視せずに解いた場合の結果も併せて見る。

本論文は次のように構成される。まず § 2 で揺動散逸定理や、Lifshitz による境界面で温度勾配がゼロになる板ばねの Q 値の導出を通し、運動方程式や熱拡散方程式などの基礎となる理論を論じる。§ 3 では、その発展として境界面で温度勾配をもつ板ばねの Q 値の導出をしその結果の考察までおこなう。次に § 4.1 において懸架系ファイバの系で Gonzalez, Langevin, Levin の方法を用いて両端に温度勾配をもたない境界条件としたときのパワースペクトル密度の計算をおこなう。また § 4.2 では、Levin の方法において両端に温度勾配をもつとしたときのパワースペクトル密度を求める。最後に § 4.4 に懸架系ファイバの計算結果を感度曲線のグラフとして表し、§ 4.5 でその考察をおこなう。なお § A では、理論部分の補足がされている。また § B では、KAGRA のサファイア製ファイバのパラメタではなく、LIGO の Fused silica 製ファイバのパラメタを代入したときの結果をみる。

第2章 基礎となる理論

2.1 パワースペクトル密度

ランダムな時系列を周波数空間で特徴づけるために、時間についての関数を2つをおきその描像を見る。その関数を $s_1(t), s_2(t)$ とおく。これらは定められた時系列、ランダムな時系列、または混合した時系列のいずれにも適用できる。まず2つの関数の相互相関と呼ばれる次の演算を考える:

$$s_1 * s_2(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt. \quad (2.1.1)$$

関数 $s_2(t)$ は τ によって時間のオフセットをもち、さらに s_1 がかけられたものが全時系列について足し合わされている。つまり相関関係とは2つの関数の関係度合を測る演算である。特に s_1 と s_2 が同じ関数 s であるとき自己相関関数という:

$$s * s(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t + \tau) dt. \quad (2.1.2)$$

これは多様な時間のオフセットの間で関数が時間に対してどのような関係をもつのかを示す。明らかに $\tau = 0$ で関数どうしが重なり最大値となる。ここでランダムな時間変化を周波数空間に置き換えた表現としてパワースペクトルを自己相関関数のフーリエ変換で定義する:

$$P_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s * s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.1.3)$$

これは自己相関関数をもつ全ての情報を含む [1]。

全ての時間において関数がゼロでないようなとき式 (2.1.2) の定義では発散してしまうことがある。そこでそのような場合には積分を $-\infty$ から ∞ でののではなく、有限値域 $-T$ から T で積分してから極限へ持っていけばよい:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) s(t + \tau) dt. \quad (2.1.4)$$

さらに有限な測定時間での時系列データに対する不規則に現れる物理量の定量的な評価のため二乗平均平方根 (Root Mean Square, RMS) という計算方法を考える。これはある物理量 $x(t)$ を測定した際に値の二乗の時間平均を

とってからその平方根をとるという方法である [7]:

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T s * s(t) dt.} \quad (2.1.5)$$

ここで式 (2.1.5) について、

$$\begin{aligned} (\text{RMS})^2 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s * s(t) dt. \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t; T) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega; T) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega; T) d\omega \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T s(t; T) e^{-i\omega t} dt \right)^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{|\tilde{S}(\omega; T)|^2}{T} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega; T) d\omega. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

最後の等号で定義したようにこの被積分関数のことをパワースペクトル密度と呼ぶ。パワースペクトル密度は測定した実効値のうちある周波数成分がどれほど寄与しているかを表す [7] [1]。さらにパワースペクトル密度の平方根を振幅スペクトル密度といい、その単位は $[\cdot/\sqrt{\text{Hz}}]$ である:

$$A(\omega; T) \equiv \sqrt{P(\omega; T)} = \frac{|\tilde{S}(\omega; T)|}{\sqrt{T}}. \quad (2.1.7)$$

2.2 感度

パワースペクトル密度から感度曲線を求める式は次のように書ける:

$$\text{Sensitivity} = \frac{\sqrt{S_x} \times l_c}{L_{arm}} \quad (2.2.1)$$

ここで l_c は縦横カップリングである。縦横カップリングとは地球が球状であることによって導出される係数である。カップリングの角は $\theta = L_{arm}/(2R_{earth})$ で与えられる。よってアーム長さ L_{arm} に依存しており、より長いアーム長は変位とひずみのカップリングを減らす一方で縦横カップリングの値を大きくすることが分かる [36]。

2.3 揺動散逸定理

揺動と散逸の一般的な関係を考えるために散逸が多く存在する完全に微視的な系を導入する。振幅 $F_{ext}(\omega)$ の外力をもち、それにより系が $v(\omega) = i\omega x(\omega)$ の速さで振動する系を考える。系が線形ならば運動方程式を周波数の範囲でかくことができる [1][12]:

$$F_{ext} = Zv \quad (2.3.1)$$

ここで $Z(\omega)$ はインピーダンスと呼ばれる。またこの関数の逆数:

$$Y(\omega) = Z^{-1}(\omega) \quad (2.3.2)$$

はアドミッタンスと呼ばれる。これらの項は揺動散逸定理の最も明白な形として書くことができ、系の揺動の力のパワースペクトル $F_{therm}^2(\omega)$ は次式によって与えられる:

$$F_{therm}^2(\omega) = 4k_B T \operatorname{Re}\{Z(\omega)\}. \quad (2.3.3)$$

なお $\operatorname{Re}\{Z(\omega)\}$ はインピーダンスの実部を示す。他に系の揺動の動きについてのパワースペクトルを考えると次のようにかける:

$$x_{therm}^2(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \operatorname{Re}\{Y(\omega)\} = \frac{4k_B T}{\omega^2} \operatorname{Re}\left\{\frac{i\omega x}{F_{therm}}\right\}. \quad (2.3.4)$$

ここで具体例としてガスによって減衰する振り子を考えて、その運動方程式は次のように書ける [1]:

$$F_{ext} = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx. \quad (2.3.5)$$

k はばね定数で、ドットは時間に関する微分を表す。これを周波数空間に直してインピーダンス Z を求める:

$$Z = \frac{F_{ext}}{v} = b + i\omega m - i\frac{k}{\omega}, \quad (2.3.6)$$

ゆえにアドミッタンスは次のように書ける:

$$Y(f) = \frac{b - i\omega m + ik/\omega}{b^2 + (\omega m - k/\omega)^2} \quad (2.3.7)$$

以上より系のパワースペクトルは、

$$x_{therm}^2(\omega) = \frac{4k_B T b}{\omega^2(b^2 + (\omega m + k/\omega)^2)} \quad (2.3.8)$$

と書ける。以上より揺動散逸定理とは、熱浴から得た熱エネルギーによる物理系の揺動と、系の揺動エネルギーの熱浴への散逸が等しいということの意味する。

2.3.1 散逸のモデルと Q 値

具体的な例として 1 次元調和振動子の熱雑音を求める。さらに散逸 $\phi(\omega)$ に対する 2 つのモデルと Q 値の関係を見る。まず運動方程式は次のように書ける:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = f(t). \quad (2.3.9)$$

ここで m を質量、 ω_0 を共振周波数、 $f(t)$ を揺動力とする。これを周波数空間に変換し散逸 $\phi(\omega)$ を表す項を加える:

$$-m\omega^2 \tilde{x} + m\omega_0^2 \{1 + i\phi(\omega)\} \tilde{x} = \tilde{f}(\omega). \quad (2.3.10)$$

この式より、ばね定数が $\omega_0^2 \{1 + i\phi(\omega)\}$ となっていると考えられこれを複素ばね定数と呼ぶ。このときのインピーダンスは、

$$Z(\omega) = \frac{-m\omega^2 + m\omega_0^2 \{1 + i\phi(\omega)\}}{i\omega} \quad (2.3.11)$$

であるから、式 (2.3.2) に代入するとパワースペクトル密度が求まる:

$$G_x(\omega) = \frac{4k_B T}{m\omega} \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)}. \quad (2.3.12)$$

Viscous model

ここで散逸 $\phi(\omega)$ に対する 2 つのモデル ‘Viscous model’, ‘Structure model’ を考える。経験則的に熱雑音は ‘Structure model’ に従うとされている [7]。‘Viscous model’ とは、散逸が速度に比例した減衰力として加わるモデルである。この時の散逸項は、

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}. \quad (2.3.13)$$

Q は Q 値と呼ぶる散逸の大きさを表す正の定数である。Q 値が大きいほど散逸は小さくなる。‘Viscous model’ をとったときのパワースペクトル密度は、式 (2.3.13) を式 (2.3.12) に代入することで求められ、次のようにかける:

$$G_x(\omega) = \frac{4k_B T}{mQ} \frac{\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \omega^2 / Q^2}. \quad (2.3.14)$$

なお、低周波近似と高周波数近似において、

$$G_x(\omega) = \begin{cases} \frac{4k_B T}{m\omega_0^3 Q} & (\omega \ll \omega_0) \end{cases} \quad (2.3.15)$$

$$\begin{cases} \frac{4k_B T \omega_0}{mQ} \frac{1}{\omega^4} \propto f^{-4} & (\omega \gg \omega_0) \end{cases} \quad (2.3.16)$$

となり、低周波数帯で一定値、高周波数帯で周波数の 4 乗に逆比例することが分かる。

Structure model

‘Structure model’ において散逸項 $\phi(\omega)$ は次のように定義される:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{Q} \quad (2.3.17)$$

このときのパワースペクトル密度は、式 (2.3.17) を式 (2.3.12) に代入して、

$$G_x(\omega) = \frac{4k_B T}{mQ\omega} \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4/Q^2}. \quad (2.3.18)$$

なお低周波近似と高周波数近似で、

$$G_x(\omega) = \begin{cases} \frac{4k_B T}{m\omega_0^2 Q} \frac{1}{\omega} \propto f^{-1} & (\omega \ll \omega_0) \\ \frac{4k_B T \omega_0^2}{mQ} \frac{1}{\omega^5} \propto f^{-5} & (\omega \gg \omega_0) \end{cases} \quad (2.3.19)$$

となり、低周波数帯で周波数に逆比例、高周波数帯で周波数の 5 乗に逆比例する。

重力波検出器において鏡の熱雑音に関して共振が 10[kHz] 以上なので $\omega \ll \omega_0$ であり、懸架系の熱雑音に関して共振が 1[Hz] 程度であるから $\omega \gg \omega_0$ という近似を用いてパワースペクトル密度のおよその値を見積もることができる。鏡のブラウン熱雑音は ‘Structure model’ に従い、

$$G_{mirror}(\omega) \sim \frac{4k_B T}{m\omega_0^2 \omega} \phi(\omega) \quad (\omega \ll \omega_0). \quad (2.3.21)$$

同様に懸架系のブラウン熱雑音は、

$$G_{sus}(\omega) \sim \frac{4k_B T \omega_0^2}{m\omega^4} \quad (\omega \gg \omega_0) \quad (2.3.22)$$

と書ける。

以上の議論において散逸は次の関係式を満たすように定義されている:

$$\phi(\omega_0) = \frac{1}{Q}. \quad (2.3.23)$$

Q 値は共振周波数における散逸の大きさを表す。一般に揺動散逸定理を用いて任意の系の熱雑音を計算する場合、Q 値を実験で測定する必要がある [8]。

2.4 非平衡

自然界では境界を通して移動が起こる「開放系」は非常に多い。開放系では物質と熱の輸送など、異なる物質間でのやりとりが発生する (coupling)。一方で古典熱力学における平衡論ではその対象が外界から孤立したとみなせる系に限られ、熱・物質・電荷が境界を横切って移動するような系に対してこ

の古典論を適用できない。そもそも平衡の条件とは、熱力学第 2 法則、つまり系と外界のエントロピー変化の総和がゼロ: $dS = 0$ という条件である。非平衡なプロセスではこの総和は正の値をもつ: $dS > 0$ 。平衡状態とは、動的な状態でありそこでは複数のプロセスが逆向きに同一速度で進行する。平衡からわずかにずれた系が平衡に近づく際も互いに逆向きのプロセスが進行しており、一方向の速度が反対方向の速度よりわずかに速いという状態である。この状態が平衡に到達するまで続いたのち両方の速度が等しくなる [15]。

本研究の懸架系ファイバの熱弾性雑音の計算において、ファイバの上端から下端にかけて温度勾配のある状態そのものは定常状態であるとみなせる。本論文で問題となる「非平衡」とは、系の境界にかけて温度変化が緩やかになるような閉じた系ではなく、熱浴と接していることで境界で温度勾配をもつような系である。本研究においてまずは簡単のために一定温度で平衡状態にある系を考える。

2.5 Lifshitz の弾性理論

主に文献 [29] をもとに板ばねの曲げの運動による熱弾性雑音についてその境界面に温度勾配がない状態を考える。なお板ばねの座標について $0 \leq x \leq L$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2}$ とし、固定端となる面の中心を原点とする (図 2.1 参照)。

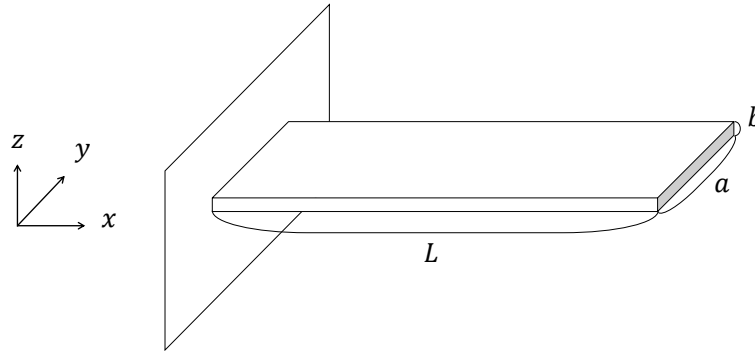


図 2.1: 板ばねの系。 x, y, z 軸を図のようにおき、固定端となる面の中心を原点とする。

2.5.1 熱膨張係数

ある物体の温度が T_1 から T_2 となるときその線膨張が L_1 から L_2 となったとすると、その平均線膨張係数 α_m は次のように書ける [17]:

$$\alpha_m = \frac{L_2 - L_1}{L_1(T_2 - T_1)}. \quad (2.5.1)$$

さらに一定圧力下での α_m の極限值、つまり瞬時線膨張係数 (または線膨張係数) α を考える。このような等方媒質での acoustic モードと熱的フォノンの間の複雑な相互関係を 1 つの巨視的パラメタ、材料の熱膨張係数で長さ変化と温度変化の線形係数として捉えることができ、それは次のように与えられる [29] [17]:

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial T}. \quad (2.5.2)$$

2.5.2 Q 値

振動子の Q 値は共振周波数で散逸がどれほど小さいかを測るための無次元量である。もともとは電気共振回路を見るために電気技術者によって使われ

ていた量である。その定義は、次のように書かれる:

$$Q^{-1} \equiv \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (2.5.3)$$

ここで f_0 は共振周波数、 Δf は共振ピークの周波数応答に関して最大パワーの半値で測られるとき、つまり最大振幅の $1/\sqrt{2} \sim 0.707$ のときの幅である [1] [30]。

2.5.3 Zener による弾性論

Zener は、近似を用いて熱弾性の損失角さらに弾性係数の虚部を見積もるという非常にシンプルな手法で細い矩形柱に対する熱弾性の緩和を求める理論の基礎を築いた [18] [29] [39]。本節では 1 つ目の研究課題である板ばね熱弾性雑音の計算のために、Zener の手法において境界面で温度勾配がゼロとなっている矩形柱の曲げ運動をみていく。

ここでは Q 値によって系を評価するためにまず Q 値が満たす関係を考える。一般に散逸が存在するときその周波数の実部 $\text{Re}\{\omega\}$ が共振周波数を与え、その虚部 $\text{Im}\{\omega\}$ が散逸を表す。ゆえに式 (2.5.3) から周波数 ω の実部と虚部の比から Q 値を求められる:

$$Q^{-1} = 2 \left| \frac{\text{Im}\{\omega\}}{\text{Re}\{\omega\}} \right|. \quad (2.5.4)$$

なお係数の 2 は矩形柱の力学的エネルギーが振幅の 2 乗に比例することから生じる [29]。よって周波数 ω が満たす関係を考えればよい。

擬弾性の標準的なモデルは Hooke の法則の線形斉次方程式への拡張に基づく。 σ を応力、 ϵ をひずみとして、

$$\sigma + \tau_\epsilon \dot{\sigma} = M_R(\epsilon + \tau_\sigma \dot{\epsilon}). \quad (2.5.5)$$

この式の物理的解釈としてひずみが一定に保たれているとき、応力は緩和時間 τ_ϵ で指数関数的に緩和していく。また応力が一定に保たれているとき緩和時間 τ_σ で指数関数的に緩和していく。ここで M_R は全ての緩和 (relaxation) がおきたあとの弾性係数である。 $M_U = M_R(\tau_\sigma/\tau_\epsilon)$ は非緩和での弾性係数である。周期的条件の下で応力とひずみはそれぞれ $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ 、 $\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ とおけ、各振幅は周波数に依存する複素数の弾性係数で関係づく。

この散逸 Q^{-1} は角周波数のエネルギー損失として定義される。これは虚部と実部の比として書くことができ:

$$Q^{-1} = \Delta_M \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (2.5.6)$$

ここで $\tau = \sqrt{\tau_\sigma \tau_\epsilon}$ であり $\Delta_M = \frac{M_U - M_R}{\sqrt{M_R M_U}}$ は無次元量で緩和の強さを表す。これより散逸は最大値 $\Delta_M/2$ ($\omega\tau = 1$) で $\omega\tau$ の関数としての Lorentzian と

なる。この形の散逸のピークを一般に Debye ピークという。このようなピークは、熱緩和はもちろん点欠陥や転移での緩和など単純なモデルにおいてかなり頻繁に現れるものである。

熱弾性物質の場合、予測される緩和時間は熱力学でよく知られるヤング率 (Young's modulus) を用いて次のように書くことができる [18]:

$$\Delta_E = \frac{E_{ad} - E}{E} = \frac{E\alpha^2 T_0}{c_P}. \quad (2.5.7)$$

ここで E_{ad} は断熱過程 (adiabatic) または緩和されていない状態、 E は等温過程または緩和されているときのヤング率である。 c_P は単位体積あたりの定圧比熱であるが、これを定積比熱 C_v に置き換えると Δ_E のオーダーは変わる。ここで評価したいのは Q 値でありこれは Δ_E に比例するため、以降は定積比熱を用いてこれを定義する。

Zener は細い矩形柱に対する熱的緩和時間を計算した:

$$\tau_Z = \frac{b^2}{\pi^2 \chi}, \quad (2.5.8)$$

ここで χ は熱拡散係数で b は矩形柱の幅である。以上より散逸は次のように書ける:

$$Q_Z^{-1} \sim \Delta_E \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{E\alpha^2 T_0}{C_v} \frac{\omega\tau_Z}{1 + (\omega\tau_Z)^2}. \quad (2.5.9)$$

次節では、この矩形柱に対する運動方程式と熱拡散方程式を考える。系は図 2.1 より次のように定める: 細い弾性矩形柱の長さを L 、長方形の断面積を $a \times b = A$ とおく。 x 軸を矩形柱の軸に沿うようにおき、 y, z 軸を S の面に平行におく。平衡状態のとき、矩形柱は一様に温度 T_0 で圧力もひずみもかからない。このとき z 方向への単純な横の動き $Z(x)$ を考える。

ここで長さ L と曲率 R が矩形柱の断面の長さ a, b に対して非常に大きいとする。さらに矩形柱が曲がっているとき各断面が中立面 (neutral surface) に対して垂直になっていると仮定する。中立面とは、それが曲がっている間に膨張も収縮もしない矩形柱の中心を通る面のことである。これらの近似を Euler-Bernoulli の仮定という。

2.5.4 運動方程式

矩形柱の表面は応力がかからないとする。つまり応力テンソルの σ_{xx} 成分が表面で消える。まず熱弾性矩形柱に対する Hooke の法則を考える。等方性物質においてテンソルは対称となりトレースレスなので、

$$u_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} + \alpha\theta, \quad (2.5.10a)$$

$$u_{yy} = u_{zz} = -\frac{\sigma}{E}\sigma_{xx} + \alpha\theta, \quad (2.5.10b)$$

$$u_{xy} = u_{yz} = u_{zx} = 0. \quad (2.5.10c)$$

縦の成分 u_{xx} は中立面からの距離を z として z/R に等しい。ここで $1/R$ は矩形柱の曲率であり $-\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ と置き換える。すると式 (2.5.10a), (2.5.10b) は次のように書き替えられる:

$$u_{xx} = -z \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \quad (2.5.11a)$$

$$u_{yy} = u_{zz} = \sigma z \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + (1 + \sigma)\alpha\theta. \quad (2.5.11b)$$

これより力のモーメントが求まる:

$$\iint z \sigma_{xx} dy dz = -E \iint \left(y^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \alpha z \theta \right) dy dz \quad (2.5.12)$$

$$\equiv -E \left(I \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \alpha I_T \right). \quad (2.5.13)$$

なお $I = \iint z^2 dy dz = ab^3/12$ である。

以上より矩形柱に対する運動方程式が導かれる:

$$\rho A \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + E\alpha I_T \right) = 0. \quad (2.5.14)$$

2.5.5 熱拡散方程式 (熱伝導方程式)

次に熱拡散方程式を考える。この式は、固体におけるエネルギー保存則から導出できる。物体の単位体積中に単位時間内に占有される熱量は、エントロピー密度 S を用いて $T \frac{\partial S}{\partial t}$ と書ける。熱流れ密度は $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ であり、熱量は $\nabla \cdot \mathbf{q}$ とおける [33]。よってエネルギー保存則は、次のように書ける:

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (2.5.15)$$

エントロピー密度 S は、変形を受けていない状態のとき $S_0(T)$ と変形 u を受けているときの項 $K\alpha u$ に分離できる:

$$S = S_0(T) + K\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.5.16)$$

ここで $K = -\frac{E}{3(1-2\sigma)}$ は周辺圧縮率である。なお、物体内における温度差が十分小さく α, κ は一定値であるとする。さらによく知られた熱力学公式より $C_p - C_v = K\alpha^2 T$ である。また $\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}$ と書くと $\frac{\partial S_0}{\partial T}$ は体積一定 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) で C_v/T に等しい。これを式 (2.5.15) に代入すると、熱弾性カップリングの存在による熱拡散方程式は次のようになる [29] [33]:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} = \kappa \Delta T. \quad (2.5.17)$$

一般的な場合

この式において第 1 項に対する第 2 項の比は $(C_p - C_v)/C_v$ 程度であり、固体の比熱の差は極めて小さいため第 2 項は非常に小さい。この項を無視すると固体の熱伝導方程式は次のように書ける:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (2.5.18)$$

なお不均等加熱をうけた物体の変形を決めるつり合い方程式を代入することで温度分布を決定する方程式が導かれる。これは式 (A.4.4) の最後の項をより一般的な体積力に置き換えればよい。これは応力テンソル σ_{ik} についての $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ の式に $-K\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}$ の項を加えればよい。よって § A.4 より不均等加熱をうけた物体のつり合い方程式は、

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \alpha \Delta T \quad (2.5.19)$$

となる。

2.5.6 運動方程式と熱拡散方程式

式 (2.5.17) で $T \rightarrow T_0$, $\nabla^2 \theta \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ と仮定し、さらにと式 (2.5.11a), (2.5.11b) を代入すると次のように整理できる:

$$\left(1 + 2\Delta_E \frac{1+\sigma}{1-2\sigma}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\Delta_E}{\alpha} z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \quad (2.5.20)$$

熱弾性カップリングの寄与を計算するために 2 式 (2.5.14), (2.5.20) を解く。ここで変数分離を仮定する:

$$Z(x, t) = Z_0(x) e^{i\omega t}, \quad (2.5.21)$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_0(x, z) e^{i\omega t}. \quad (2.5.22)$$

これを式 (2.5.20) へ代入すると、

$$\left(1 + 2\Delta_E \frac{1+\sigma}{1-2\sigma}\right) i\omega \theta_0(x, z) = \chi \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} + i\omega \frac{\Delta_E}{\alpha} z \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2}. \quad (2.5.23)$$

左辺の第 2 項について最終的に Δ_E^2 の項を作るだけなのでこれを無視できる:

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = i \frac{\omega}{\chi} \left(\theta_0 - z \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} \right). \quad (2.5.24)$$

$k = \sqrt{i \frac{\omega}{\chi}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$ とおくと、その解は次のようになる:

$$\theta_0 - \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = A \sin kz + B \cos kz. \quad (2.5.25)$$

矩形柱の表面で熱流がないという境界条件 $\theta_0(\pm \frac{b}{2}) = 0$ より矩形柱の温度変化は、

$$\theta_0(x, y) = \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} \left(z - \frac{\sin kz}{k \cos \frac{bk}{2}} \right). \quad (2.5.26)$$

これを熱的なモーメントについての積分 I_T に代入できる。ゆえに運動方程式 (2.5.14) は、

$$\omega^2 Z_0 = \frac{EI}{\rho A} \{1 + \Delta_E(1 + f(\omega))\} \frac{\partial^4 Z_0}{\partial x^4} \quad (2.5.27)$$

とかけ、ここで $f(\omega)$ は複素関数である:

$$f(\omega) = f(k(\omega)) = \frac{24}{k^3 b^3} \left(\frac{kb}{2} - \tan \frac{kb}{2} \right). \quad (2.5.28)$$

この式は熱弾性カップリングのない等温過程における運動方程式において、ヤング率を次のように置き換えた式と見ることができる:

$$E_\omega = E \{1 + \Delta_E(1 + f(\omega))\}. \quad (2.5.29)$$

ここで $E_\omega = E\{1 + \Delta_E(1 + f(\omega))\}$ の性質についてみておく。 $\omega \rightarrow \infty$ のとき $f(\omega) \rightarrow 0$ となり、ヤング率は断熱となり E_ω は $E_{ad} = E(1 + \Delta_E)$ に一致する。また $\omega \rightarrow 0$ のとき $f(\omega) \rightarrow -1$ となり、 E_ω は等温過程のヤング率 E に一致する。 ω が中間にあると、 $f(\omega)$ は複素となる。

矩形柱の振動は等温過程において一般的に次のようにかける:

$$Z_0(x) = A \sin qx + B \cos qx + C \sinh qx + D \cosh qx. \quad (2.5.30)$$

ここで A, B, C, D は矩形柱の終端の 2 点の境界条件で決まる。一端を固定して他端を自由にしたとき $q_n = \frac{2n+1}{L} \frac{\pi}{2}$ となる。等温過程での固有周波数は $\omega_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} q_n^2$ とかける。

Q 値を導出していく。熱弾性矩形柱に対する分散関係は次のようになる:

$$\omega = \sqrt{\frac{E_\omega I}{\rho A}} q_n^2 = \omega_0 \sqrt{1 + \Delta_E(1 + f(\omega))}. \quad (2.5.31)$$

よって Δ_E の 2 次以上を無視すると、根号の中の $f(\omega)$ を $f(\omega_0)$ と置き換えられ式 (2.5.31) は、

$$\omega = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{\Delta_E}{2} (1 + f(\omega_0)) \right\} \quad (2.5.32)$$

とかけ、これは実部と虚部を簡単に分けることができる:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{\omega\} = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{\Delta_E}{2} \left(1 - \frac{3}{4\xi^3} \frac{-\sin 2\xi + \sinh 2\xi}{\cos 2\xi + \cosh 2\xi} \right) \right\} \\ \operatorname{Im}\{\omega\} = \omega_0 \frac{\Delta_E}{2} \left(\frac{3}{4\xi^3} \frac{\sin 2\xi + \sinh 2\xi}{\cos 2\xi + \cosh 2\xi} - \frac{3}{2\xi^2} \right). \end{array} \right. \quad (2.5.33a)$$

$$\left\{ \operatorname{Im}\{\omega\} = \omega_0 \frac{\Delta_E}{2} \left(\frac{3}{4\xi^3} \frac{\sin 2\xi + \sinh 2\xi}{\cos 2\xi + \cosh 2\xi} - \frac{3}{2\xi^2} \right). \right. \quad (2.5.33b)$$

ただし、 $\xi = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{2\chi}}$ とおいた。以上より式 (2.5.4) から Q 値を求めることができ、

$$Q^{-1} = 2 \frac{|\operatorname{Im}\{\omega\}|}{|\operatorname{Re}\{\omega\}|} = \frac{E\alpha^2 T}{C_v} \left| -\frac{3}{4\xi^3} \frac{\sin 2\xi + \sinh 2\xi}{\cos 2\xi + \cosh 2\xi} + \frac{3}{2\xi^2} \right|. \quad (2.5.34)$$

この Q 値のピークは、 $\xi \sim 1$ で最大値 0.48 となる。つまり Q^{-1} の最大値は $0.48\Delta_E$ であり、板ばねの大きさには依らず板ばねの材料の物性値に依存する。本節では板ばねの境界に熱流がないとして計算をおこなったが、§ 3 においては板ばねの境界に熱流があるとして計算をおこなう。

第3章 温度勾配のある板ばね

3.1 理論計算

まず非平衡熱弾性雑音の直接検出へ向けたテーブルトップ実験の理論的準備として、板ばねの薄い面に対して垂直な方向に温度勾配のある板ばねを考える。このとき板ばねの上面、下面それぞれを冷却器、ヒーターで間接的に温めるような系を想定している [35]。一端を固定された板ばねについてこのような温度勾配を与えたときの非平衡熱雑音を § 2.5 で述べた Lifshitz の方法を用いて計算する。

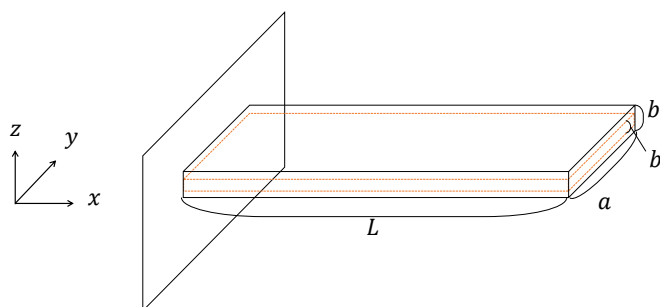


図 3.1: 仮想的な板ばね。黒線で書かれた部分はその境界で温度勾配がゼロになる仮想的な板ばねを表し、橙点線で書かれた部分が実際の板ばねの境界を表す。

このとき仮想的な境界面 $0 \leq x \leq L$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$, $z = \pm \frac{b'}{2}$ で温度勾配がゼロになると考える。(図 3.1 参照) ここで $0 < b < b'$ である。よって境界条件は次のようになる:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{z=\pm \frac{b'}{2}} = 0, \quad (3.1.1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{z=\pm \frac{b}{2}} \neq 0. \quad (3.1.2)$$

さらに Euler-Bernoulli の仮定をとる。さらに板ばねの表面で圧力がかからな

いとし、 σ_{xx} は表面で消える。このとき Hooke の法則は次のようになる：

$$u_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} + \alpha\theta, \quad (3.1.3)$$

$$u_{yy} = u_{zz} = -\frac{\sigma}{E} + \alpha\theta, \quad (3.1.4)$$

$$u_{xy} = u_{yz} = u_{zx} = 0. \quad (3.1.5)$$

ここで u_{xx} について曲率 $R = -\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ を用いると、

$$u_{xx} = \frac{z}{R} = -z\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \quad (3.1.6)$$

よって式 (3.1.3), (3.1.4) は、次のように書ける：

$$u_{xx} = -z\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} + \alpha\theta, \quad (3.1.7)$$

$$u_{yy} = u_{zz} = \sigma z\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + (1 + \sigma)\alpha\theta. \quad (3.1.8)$$

ここで運動方程式を立てるために力のモーメントを考える：

$$\int z\sigma_{xx} dydz = -E \int_A \left(z^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \alpha z\theta \right) dydz \quad (3.1.9)$$

$$\equiv -E \left(I \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \alpha I_T \right). \quad (3.1.10)$$

ただし、 $I = \int_A z^2 dydz = \frac{ab^3}{12}$, $I_T = \int_A z\theta dydz$ である。運動方程式は次のようにかける：

$$\rho A \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + E\alpha I_T \right) = 0. \quad (3.1.11)$$

さらに熱拡散方程式は次のように書ける：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \nabla^2 \theta - \frac{E\alpha T}{(1-2\sigma)C_v} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma_j u_{jj}. \quad (3.1.12)$$

ここで §2.5 と同様に $T \rightarrow T_0$, $\nabla^2 \theta \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ と仮定し、さらにと式 (3.1.7), (3.1.8) を代入すると、

$$\left(1 + 2\Delta_E \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\Delta_E}{\alpha} z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \quad (3.1.13)$$

式 (3.1.11), (3.1.13) を解いていく。まず変数分離をおこなう：

$$Z(x, t) = Z_0(x)e^{i\omega t}, \quad (3.1.14)$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_0(x, z)e^{i\omega t}. \quad (3.1.15)$$

これを熱拡散方程式 (3.1.13) に代入する。ここで左辺の第 2 項について最終的に Δ_E^2 の項を作るだけなのでこれを無視できるから、

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = i\frac{\omega}{\chi} \left(\theta_0 - z \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} \right). \quad (3.1.16)$$

この解は $k = \sqrt{i\frac{\omega}{\chi}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$ とおくと、

$$\theta_0 - \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = A \sin kz + B \cos kz \quad (3.1.17)$$

となる。さらに境界条件 $\theta'_0(\pm \frac{b'}{2}) = 0$ より、

$$-\frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = k \left(A \cos \frac{kb'}{2} \mp B \sin \frac{kb'}{2} \right), \quad (3.1.18)$$

となるから、

$$A = \frac{1}{k \cos \frac{kb'}{2}} \left(-\frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} \right), B = 0 \quad (3.1.19)$$

である。以上より解は、次のように書ける:

$$\theta_0(x, z) = \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} \left(z - \frac{\sin kz}{k \cos \frac{kb'}{2}} \right). \quad (3.1.20)$$

これを用いてモーメント I_T を計算できる:

$$\begin{aligned} I_T &= \int_A z \theta \, dy dz = \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \left(z^2 - \frac{z \sin kz}{k \cos \frac{kb'}{2}} \right) \\ &= \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} a \left\{ \frac{b^3}{12} + \frac{1}{k^2 \cos \frac{kb'}{2}} \left(b \cos \frac{kb}{2} - \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

運動方程式 (3.1.11) に代入すると、

$$\begin{aligned} \rho A (i\omega)^2 Z_0 + EI \frac{d^4 Z_0}{dx^4} \\ + E\alpha \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{d^4 Z_0}{dx^4} a \left\{ \frac{b^3}{12} + \frac{1}{k^2 \cos \frac{kb'}{2}} \left(b \cos \frac{kb}{2} - \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2} \right) \right\} &= 0 \\ \omega^2 Z_0 = \frac{EI}{\rho A} \left\{ 1 + \Delta_E \left(1 + \frac{12 \cos \frac{kb}{2}}{b^2 k^2 \cos \frac{kb'}{2}} - \frac{24 \sin \frac{kb}{2}}{k^3 b^3 \cos \frac{kb'}{2}} \right) \right\} \frac{d^4 Z_0}{dx^4}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

ここで、複素関数

$$f(\omega) = f(k(\omega)) = \frac{24}{k^3 b^3} \frac{1}{\cos \frac{kb'}{2}} \left(\frac{kb}{2} \cos \frac{kb}{2} - \sin \frac{kb}{2} \right). \quad (3.1.23)$$

とおく。 $E_\omega = E\{1 + \Delta_E(a + f(\omega))\}$ の性質について、境界面で温度勾配がない場合の式 (2.5.28) と同様に $\omega \rightarrow \infty$ のとき $f(\omega) \rightarrow 0$ で、 $\omega \rightarrow 0$ のとき $f(\omega) \rightarrow -1$ となっていることを確認できる。また ω がその中間で $f(\omega)$ は複素数となる。

この運動方程式の一般解は $Z_0(x) = A \sin qx + B \cos qx + C \sinh qx + D \cosh qx$ となる。 ω_0 は固有振動数とし、 Δ_E の 2 乗以上を無視すると、分散関係は次のように書ける:

$$\omega = \sqrt{\frac{E_\omega I}{\rho A}} q_n^2 = \omega_0 \sqrt{q + \Delta_E(1 + f(\omega))} \quad (3.1.24)$$

$$\sim \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta_E}{2}(1 + f(\omega)) \right). \quad (3.1.25)$$

Q 値を得るために ω の実部と虚部を求める。ここで虚部を持つのは複素関数 $f(\omega)$ だから $f(\omega)$ の実部と虚部を考える。 $\xi = \frac{kb}{2}$, $d = \frac{b'}{b} > 1$ とおき式 (V), (VI) を用いると、

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{24}{b^3} \left(\frac{2\chi}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(1+i)^3 \cos \frac{kb'}{2}} \left\{ \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} (1+i) \cos \frac{kb}{2} - \sin \frac{kb}{2} \right\} \\ &= \frac{24}{b^3} \left(\frac{2\chi}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} \frac{\cos \xi d \cosh \xi d - \sin \xi d \sinh \xi d + i \cos \xi d \cosh \xi d + i \sin \xi d \sinh \xi d}{(\cos \xi d \cosh \xi d)^2 + (\sin \xi d \sinh \xi d)^2} \\ &\quad \times \left\{ \sin \xi \cosh \xi + i \cos \xi \sinh \xi \right. \\ &\quad \left. - \xi (\cos \xi \cosh \xi + \sin \xi \sinh \xi + i \cos \xi \cosh \xi - i \sin \xi \sinh \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

これの実部と虚部を書き表していく:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{f(\omega)\} &= \frac{24}{b^3} \left(\frac{2\chi}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{(\cos \xi d \cosh \xi d)^2 + (\sin \xi d \sinh \xi d)^2} \\ &\quad \times \left\{ (\cos \xi d \cosh \xi d - \sin \xi d \sinh \xi d) \right. \\ &\quad \times (\sin \xi \cosh \xi - \xi (\cos \xi \cosh \xi + \sin \xi \sinh \xi)) \\ &\quad \left. - (\cos \xi d \cosh \xi d + \sin \xi d \sinh \xi d) \right. \\ &\quad \left. \times (\cos \xi \sinh \xi - \xi (\cos \xi \cosh \xi - \sin \xi \sinh \xi)) \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\{f(\omega)\} &= \frac{24}{b^3} \left(\frac{2\chi}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{(\cos \xi d \cosh \xi d)^2 + (\sin \xi d \sinh \xi d)^2} \\ &\quad \times \left\{ (\cos \xi d \cosh \xi d - \sin \xi d \sinh \xi d) \right. \\ &\quad \times (\cos \xi \sinh \xi - \xi (\cos \xi \cosh \xi - \sin \xi \sinh \xi)) \\ &\quad \left. + (\cos \xi d \cosh \xi d + \sin \xi d \sinh \xi d) \right. \\ &\quad \left. \times (\sin \xi \cosh \xi - \xi (\cos \xi \cosh \xi + \sin \xi \sinh \xi)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

最後に Q 値を求める:

$$Q^{-1} = 2 \left| \frac{\text{Im}\{\omega\}}{\text{Re}\{\omega\}} \right| = \left| \frac{\Delta_E \text{Im}\{f(\omega)\}}{1 + \frac{\Delta_E}{2}(1 + \text{Re}\{f(\omega)\})} \right|. \quad (3.1.29)$$

Δ_E の 2 次までを考えると、

$$\begin{aligned} \frac{Q^{-1}}{\Delta_E} &\sim \text{Im}\{f(\omega)\} \\ &= \frac{3}{4\xi^3} \frac{2}{\cos 2\xi d + \cosh 2\xi d} \\ &\quad \times \left\{ \cos \xi d \cosh \xi d (\cos \xi \sinh \xi + \sin \xi \cosh \xi - 2\xi \cos \xi \cosh \xi) \right. \\ &\quad \left. - \sin \xi d \sinh \xi d (\cos \xi \sinh \xi - \sin \xi \cosh \xi + 2\xi \sin \xi \sinh \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

次に括弧内の各項を計算していく。

$$\begin{aligned} &\cos \xi d \cosh \xi d \cos \xi \sinh \xi \\ &= \frac{1}{4} (\cos \xi(d+1) + \cos \xi(d-1)) (\sinh \xi(1+d) + \sinh \xi(1-d)), \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned} &\cos \xi d \cosh \xi d \sin \xi \cosh \xi \\ &= \frac{1}{4} (\sin \xi(d+1) - \sin \xi(d-1)) (\cosh \xi(1+d) + \cosh \xi(1-d)), \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

$$\begin{aligned} &\cos \xi d \cosh \xi d \cos \xi \cosh \xi \\ &= \frac{1}{4} (\cos \xi(d+1) + \cos \xi(d-1)) (\cosh \xi(1+d) + \cosh \xi(1-d)), \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

$$\begin{aligned} &\sin \xi d \sinh \xi d \cos \xi \sinh \xi \\ &= \frac{1}{4} (\sin \xi(d+1) + \sin \xi(d-1)) (\cosh \xi(1+d) - \cosh \xi(1-d)), \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

$$\begin{aligned} &\sin \xi d \sinh \xi d \sin \xi \cosh \xi \\ &= \frac{1}{4} (-\cos \xi(d+1) + \cos \xi(d-1)) (\sinh \xi(1+d) - \sinh \xi(1-d)), \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

$$\begin{aligned} &\sin \xi d \sinh \xi d \sin \xi \sinh \xi \\ &= \frac{1}{4} (-\cos \xi(d+1) + \cos \xi(d-1)) (\cosh \xi(1+d) - \cosh \xi(1-d)). \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

これらを足し合わせていく:

$$\begin{aligned} & Eq.(3.1.31) + Eq.(3.1.35) \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos \xi(d-1) \sinh \xi(1+d) + \cos \xi(1+d) \sinh \xi(1-d) \}, \quad (3.1.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Eq.(3.1.32) - Eq.(3.1.34) \\ &= \frac{1}{2} \{ -\sin \xi(d-1) \cosh \xi(1+d) + \sin \xi(1+d) \cosh \xi(1-d) \}, \quad (3.1.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Eq.(3.1.33) + Eq.(3.1.36) \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos \xi(d-1) \cosh \xi(1+d) + \cos \xi(d+1) \cosh \xi(1-d) \}. \quad (3.1.39) \end{aligned}$$

Q 値を求めるには式 (3.1.37) と式 (3.1.38) と、式 (3.1.38) に (-2ξ) をかけたものを足し合わせたらよいので、

$$\begin{aligned} & \frac{Q^{-1}}{\Delta_E} \\ & \sim \left| \frac{3}{4\xi^3} \frac{1}{\cos 2\xi d + \cosh 2\xi d} \right. \\ & \quad \times \{ \cos \xi(d-1) \sinh \xi(1+d) + \cos \xi(1+d) \sinh \xi(1-d) \\ & \quad - \sin \xi(d-1) \cosh \xi(1+d) + \sin \xi(1+d) \cosh \xi(1-d) \\ & \quad \left. - 2\xi(\cos \xi(d-1) \cosh \xi(d-1) + \cos \xi(1+d) \cosh \xi(1-d)) \right|. \quad (3.1.40) \end{aligned}$$

なおここで $d \rightarrow 1$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{Q^{-1}}{\Delta_E} &= \left| \frac{3}{4\xi^3} \frac{1}{\cos 2\xi d + \cosh 2\xi d} \{ \sinh 2\xi + \sin 2\xi - 2\xi(\cosh 2\xi + \cos 2\xi) \} \right| \\ &= -\frac{3}{2\xi^2} + \frac{3}{4\xi^3} \frac{\sinh 2\xi + \sin 2\xi}{\cos 2\xi + \cosh 2\xi} \quad (3.1.41) \end{aligned}$$

となり、板ばねの境界面で温度勾配をゼロとしたときの式 (2.5.34) と一致することを確認できる。

3.2 計算結果

3.2.1 Q 値の挙動

横軸を ξ として、式 (3.1.40) の計算結果 Q^{-1}/Δ_E の変化を図 3.2 に載せる。ここで ξ は板ばねの大きさや物性値に依存する変数である。ここでは $d = b'/b$ を 1.3, 1.5, 1.7 と変化させたときの様子を見た。さらに境界で熱流をもたないときの式 (2.5.34) の計算結果も青点線で載せる。

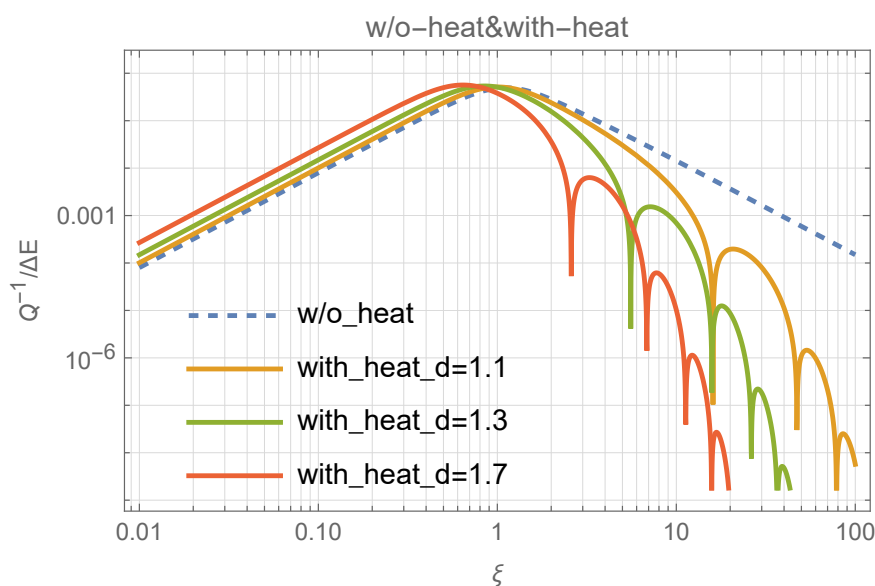


図 3.2: 式 (3.1.40) の $Q^{-1}/\Delta E$ と ξ の関係。境界で熱流をもつとき ($d = b'/b = 1.1, 1.3, 1.7$, 黄、緑、赤線) と熱流をもたないとき ($d = 0$, 青点線) を比較する。

図 3.2 中の境界で熱流をもつ $d = 1.3, 1.5, 1.7$ のグラフについて、 ξ が 1 付近でピークをもち緩やかに減少している。 ξ が 1 より小さいところでは d が大きくなるほど $Q^{-1}/\Delta E$ の値はわずかに大きくなっている。また ξ が 1 より大きいところでは複数のディップを持っており、さらに d が大きくなるほど $Q^{-1}/\Delta E$ の値は小さくなっている。熱流がゼロとなる仮想的な長さや板ばね厚さの比 d が大きくなるほど、境界で熱流がないときの曲線から離れていくことが分かる。

3.3 考察

本節ではまず § 3.2.1 で得た横軸で ξ とったときの Q 値グラフの考察を § 3.3.1, 3.3.2 でおこない、さらに § 3.3.3 において具体的に板ばねの大きさや材質を定めたときの Q 値の値の変化を見ていく。

3.3.1 Q 値の挙動

図 3.2 より境界で熱流をもつ各グラフについて ξ が 1 付近でピークをもち、それより ξ が小さいところで単調減少、大きいところで複数のディップを持ちながら減少していくことが分かる。ディップについては、§ 3.3.2 に述べる。熱流がないときのグラフについて、式 (2.5.34) つまり文献 [29] の Fig.2 の結

果と一致していることを確認できた。また ξ が 1 より小さいところでは d が大きくなるほど Q^{-1}/Δ_E の値は大きくなり、 ξ が 1 より大きいところでは d が大きくなるほど Q^{-1}/Δ_E の値は小さくなっている。つまり熱流がゼロとなる仮想的な長さとは板ばね実際の厚さの比 d が大きくなるほど境界で熱流がないときの曲線から離れていくことが分かる。 ξ という指標では物理的描像が見えにくいので、§ 3.3.3 において具体的な板ばねの物性値と大きさを含めて考える。

3.3.2 ディップ位置の特定

図 3.2 より、境界で熱流をもつとき ξ が 1 より大きいところで複数のディップをもつことがわかる。この位置とその意味について考察する。 Q^{-1} の分子がゼロになるところであると考えられる。しかし式 (3.1.40) よりこれを解析的に求めることは難しいため、数値的に求めることを考える。まず図 3.2 のディップの位置を表 3.1 に載せる。

d	dip 1	dip 2	dip 3	dip 4	dip 5	dip 6	dip 7
1.1	16.03	47.23	78.77	110.00	140.43	141.69	173.07
1.3	5.56	15.82	26.24	36.97	47.81	58.21	68.07
1.7	2.59	6.84	11.29	15.77	20.22	24.69	29.18

表 3.1: 図 3.2 のディップ位置 ξ

図 3.2 より周期的にディップが表れていると考えられるので、式 (3.1.40) 内の余弦の項がゼロとなるときの ξ を計算してみる。これは解析的に次の二つが考えられる:

$$\cos \xi(d-1) = 0 \quad (3.3.1)$$

$$\longleftrightarrow \xi = \frac{2n+1}{2(d-1)}\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3.2)$$

$$\cos \xi(d+1) = 0 \quad (3.3.3)$$

$$\longleftrightarrow \xi = \frac{2n+1}{2(d+1)}\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3.4)$$

式 (3.3.2), (3.3.4) それぞれの ξ の計算結果を各 d の値ごとに表 3.2, 3.3 にまとめる。

表 3.1 と、表 3.2, 表 3.3 を見比べると表 3.3 とほとんど同じ値となっていることが分かる。ゆえに $\cos \xi(d+1) = 0$ となる値でディップを持っていると推測できる。

$d \setminus n$	0	1	2	3
1.1	0.75	2.24	3.74	5.24
1.3	0.68	2.05	3.41	4.78
1.7	0.58	1.75	2.91	4.07

表 3.2: $\xi = \frac{2n+1}{2(d+1)}\pi$ の計算結果

$d \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6
1.1	15.71	47.12	78.54	109.96	141.37	172.79	204.20
1.3	5.24	15.71	26.18	36.65	47.12	57.60	68.07
1.7	2.24	6.73	11.22	15.71	20.20	24.68	29.17

表 3.3: $\xi = \frac{2n+1}{2(d-1)}\pi$ の計算結果

3.3.3 物性値の代入

ξ は板ばねの大きさや物性値に依存する変数であるから、本節では板ばねの系を具体的に仮定して Q 値の違いを見る。まず幾何学的な物理量について次の表 3.4 のようにおいた。

意味	記号	値
板ばねの長さ	L [m]	5×10^{-2}
板ばねの幅	a [m]	2×10^{-2}
板ばねの厚さ	b [m]	2×10^{-3}
仮定の厚さと実際の厚さの比	$d = \frac{b'}{b} > 1$	1.3

表 3.4: 板ばねの大きさ

次に材質について、KAGRA の懸架系ファイバの材質であるサファイアと、本研究室の先行研究 [8] において用いられていた SUS304 の 2 種類で値の違いを比較する。なおサファイアのヤング率について本来結晶の向きによって異なる値をもつがそれぞれの文献において平均とされているものを引用した。

Meaning	Symbol	Value
Thermal conductivity	κ [J/smK]	3.3×10^2 [22]
Density	ρ [kg/m ³]	4.0×10^3 [22]
Heat capacity	C_v [J/kgK]	8.1×10^2 [22]
Young's modulus	E [Pa]	3.45×10^{11} [23]
Thermal expansion coefficient	α [K ⁻¹]	2.63×10^{-6} [24]

表 3.5: サファイアの物性値 (300K)

Meaning	Symbol	Value
Thermal conductivity	$\kappa[\text{J/smK}]$	15.31 [20]
Density	$\rho[\text{kg/m}^3]$	7.93×10^3 [25]
Heat capacity	$C_v[\text{J/kgK}]$	4.91×10^2 [20]
Young's modulus	$E[\text{Pa}]$	1.99×10^{11} [20]
Thermal expansion coefficient	$\alpha[\text{K}^{-1}]$	16.3×10^{-6} [26]

表 3.6: SUS304 の物性値 (300K)

表 3.5, 3.6 より、散逸を計算するのに必要な定数部分 Δ_E について、サファイアで $0.88[\text{kg} \cdot \text{m}]$ 、SUS304 で $32.31[\text{kg} \cdot \text{m}]$ となる。

温度勾配の有無による Q 値の比較

固定端と自由端の境界条件によるモード $a_m = q_m L = (2m + 1)/2$ を $m = 1, 2, 3, 4$ と変化させたときを考える。以上のパラメタを代入し、板ばねの境界で温度勾配をもつときの Q 値を計算した結果を表 3.7 にまとめる。さらに、板ばね表面で温度勾配がなかったときの Q 値の計算結果を表 3.8 に載せる。

Material	a_1	a_2	a_3	a_4
Sapphire	8.9×10^2	5.4×10^5	2.6×10^9	3.0×10^{13}
SUS304	1.3×10^4	1.7×10^{10}	5.9×10^{18}	1.2×10^{30}

表 3.7: 各材質において境界面で温度勾配があるときの Q 値の計算結果。

Material	a_1	a_2	a_3	a_4
Sapphire	49.4	3.7×10^2	1.4×10^3	3.8×10^3
SUS304	3.6×10^2	2.7×10^3	1.0×10^4	2.8×10^4

表 3.8: 各材質において境界で温度勾配がないときの Q 値の計算結果。

表 3.8 と表 3.7 を比べると、境界面の温度勾配の有無によって Q 値の値は異なっており、低次の a_1 モードで 1 - 2 桁ほど、さらに高次の a_4 モードになるとその差は 10 桁以上にも広がっていることが分かる。これは実際の実験系で Q 値を測定した際に非平衡状態について考察するためのひとつの指標となると考えられる。

板ばねの大きさに対する Q 値の変化

サファイアと SUS304 について、板ばねの厚さ b を固定して長さ L を変化させたときの Q^{-1} を表した図 3.3, 3.4 と、長さ L を固定して厚さ b を変化させたときの Q^{-1} を表した図 3.5, 3.6 を載せる。厚さ b と長さ L を固定したときの値はそれぞれ表 3.4 の値である。境界で温度勾配がない時の結果を青点線、境界で温度勾配をもち仮想長さを実際の長さの比 d を 1.1, 1.3, 1.7 と変化させたときの結果をそれぞれ黄、緑、赤線で表す。

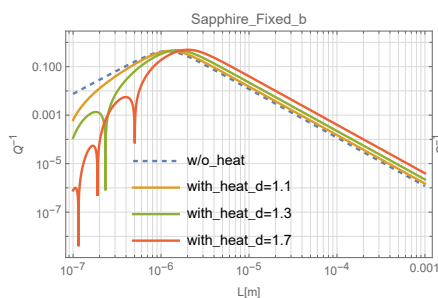


図 3.3: 厚さを固定して長さを変化させたときの Q 値 (サファイア)

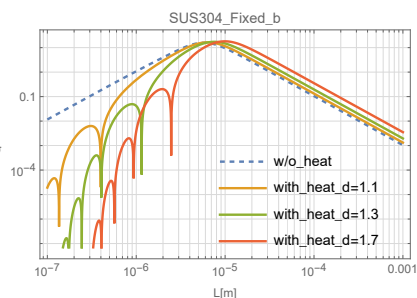


図 3.4: 厚さを固定して長さを変化させたときの Q 値 (SUS304)

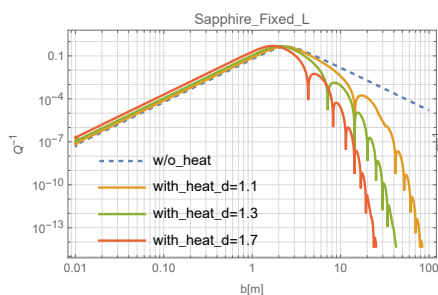


図 3.5: 長さを固定して厚さを変化させたときの Q 値 (サファイア)

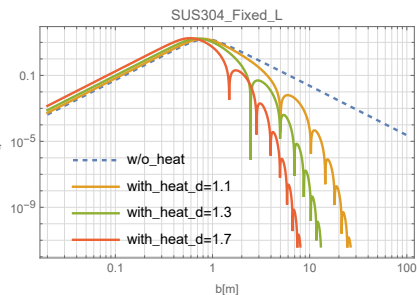


図 3.6: 長さを固定して厚さを変化させたときの Q 値 (SUS304)

図 3.3, 3.4 よりディップはピークの左側に表れていることを確認できる。これは ξ が L に逆比例することによると考えられる。図 3.3 - 3.6 よりサファイアと SUS304 について、 Δ_E の値の違いから予測される Q 値の桁数はサファイアのほうが 2 - 3 桁大きいと考えられる。なおこの Δ_E は板ばね大きさに依らずに決まる。また、図 3.3, 3.4 においてピークでの L の値はサファイアで 10^{-6} [m] 程度であり、SUS304 では 10^{-5} [m] 程度である。図 3.5, 3.6 においてピークでの b の値はサファイアと SUS304 ともに 1 [m] 程度の桁である。横軸が L のときはそのピーク位置より小さい値、横軸が b のときはそれより大きい値でディップを観測できるから、今回想定している表 3.4 のような材質や大きさではディップを観測できないと予測される。

3.3.4 仮想長さの扱い

本研究では温度勾配がゼロになる仮想的な長さ b' を仮定した。しかし、実際の実験系においてこのような長さを仮定するのは現実的ではない。よってその長さを実際の実験系と比較するために、ここでは温度に置き換えるための議論をおこなう。簡単のため実際の板ばねの厚さ b より長さ h, h' のところで熱流がゼロとなるとする。つまり $b' = h + b + h'$ である。

文献 [33] §35 によると結晶の接触面を通して熱移動がありそのとき温度の連続性があるべきである。境界から接している物質の内部へ温度の波が伝搬し、間隔 $\delta \sim \sqrt{\frac{x}{\omega}}$ で減衰すると考えることができる。このとき断熱のときの結晶内の温度差 T'_0 を用いて温度勾配は $\theta' = T'_0/\delta$ と書ける。ここでの δ が我々の系における h または h' となるべきである。実験系において最高温度を $T_{max}(x=0)$ 、最低温度を $T_{min}(x=b')$ とおく。ここで温度 T の x に対する変化が線形であるとする、

$$T = \frac{T_{max} - T_{min}}{h + b + h'}x + T_{min} \quad (3.3.5)$$

とかける。 $x=0$ から $x=h$ の間の温度差を T_{0c} 、 $x=h+b$ から $x=b'$ の間の温度差を T_{0h} とおく。すると式 (3.3.5) から T_{0c}, T_{0h} について次の関係を得られる:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0c} = \frac{T_{max} - T_{min}}{h + b + h'}h = \frac{h\Delta T}{h + b + h'} \end{array} \right. \quad (3.3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0h} = T_{max} - \left(\frac{\Delta T(h+b)}{h + b + h'} - T_{min} \right) = \frac{h'\Delta T}{h + b + h'}. \end{array} \right. \quad (3.3.7)$$

ただし、 $T_{max} - T_{min} \equiv \Delta T$ とおく。これを h, h' について解くと次のようになる:

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{\Delta T T_{0c} L}{(\Delta T - T_{0c})(\Delta T - T_{0h}) - T_{0c} T_{0h}} \end{array} \right. \quad (3.3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h' = \frac{\Delta T T_{0h} L}{(\Delta T - T_{0c})(\Delta T - T_{0h}) - T_{0c} T_{0h}}. \end{array} \right. \quad (3.3.9)$$

実際の実験系

直接検出に向けて想定されている実験系のセットアップに関して、板ばねの上面と下面それぞれを冷却器とヒーターで間接的に温める。このとき冷却器とヒーターの温度は既知である。板ばねの上面と下面の温度 $T_{max}(x=0)$ 、 $T_{min}(x=b')$ の決定について、熱せられるまたは冷やされるとき熱流と、板ばねの内部の熱伝導のつり合いから連立方程式がたちこの2つの温度が定まる。

第4章 懸架系ファイバの計算

実際の KAGRA の懸架系に近い系で 1 次元有限ファイバの系に熱弾性雑音の計算を考える。まず簡単のためにファイバの両端で熱流のない場合を考える。

4.1 境界で熱流なし

ファイバの両端で熱流がないときの境界条件は次のように書ける:

$$\theta'(0) = \theta'(L) = 0. \quad (4.1.1)$$

よってこのとき平衡温度からの温度差 θ は \cos で展開することができる:

$$\theta(x) = \sum_n \theta_n \cos \frac{n\pi}{L} x. \quad (4.1.2)$$

§ 1.5 で言及した 3 つのアプローチを Gonzaletz (§ 4.1.1), Langevin (§ 4.1.2), Levin (§ 4.1.3) の順で見ていく。

4.1.1 Gonzaletz's method

Gonzaletz の方法でアドミッタンス $Y(\omega)$ から感度を求める。弾性方程式と熱拡散方程式は次のように書ける [31]:

$$E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + E\alpha \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (4.1.3)$$

$$i\omega \theta(x,t) - \chi \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{SE\alpha T}{\rho C} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}. \quad (4.1.4)$$

これを u について解くことを考えると 4 次方程式となる。その一般解は次のように書ける:

$$u(x) = \tilde{A} \sin k_1 x + \tilde{B} \cos k_1 x + \tilde{C} \sin k_2 x + \tilde{D} \cos k_2 x. \quad (4.1.5)$$

ここで $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ は積分定数で、 k_1, k_2 は式 (4.1.94), (4.1.95) で書かれる。境界条件 $u(0) = 0, \theta'(0) = 0$ より $\tilde{B} = \tilde{D} = 0$ となる。また $\theta'(L) = 0$ より、

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} = - \frac{\left(k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_2 L}{\left(k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_1 L}. \quad (4.1.6)$$

残り 1 つの境界条件 $u'(L) = \frac{M\omega^2}{SE}u(L) + \frac{F_0}{SE}$ から、

$$\begin{aligned} F_0 &= \tilde{A}(SEk_1 \cos k_1 L - M\omega^2 \sin k_1 L) + \tilde{C}(SEk_2 \cos k_2 L - M\omega^2 \sin k_2 L) \\ &= \tilde{C} \left\{ -\frac{\left(k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_2 L}{\left(k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_1 L} (SEk_1 \cos k_1 L - M\omega^2 \sin k_1 L) \right. \\ &\quad \left. + (SEk_2 \cos k_2 L - M\omega^2 \sin k_2 L) \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

以下では d_1 を分母の第 1 項目 $d_1 = SEk_2 \cos k_2 L - M\omega^2 \sin k_2 L$ とおき、これは実数である。解は次のようになる:

$$\begin{aligned} u(x) &= \tilde{A} \sin k_1 x + \tilde{C} \sin k_2 x \\ &= \frac{F_0 \left(-\frac{\left(k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_2 L}{\left(k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_1 L} \sin k_1 x + \sin k_2 x \right)}{-\frac{\left(k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_2 L}{\left(k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}\right) \sin k_1 L} (SEk_1 \cos k_1 L - M\omega^2 \sin k_1 L) + d_1}. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

アドミッタンス $Y(\omega)$ は次の式で与えられるから:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{i\omega u(L)}{F_0} \\ &= \frac{i\omega \left\{ 1 - \frac{k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}}{k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}} \right\} \sin k_1 L \sin k_2 L}{d_1 \sin k_1 L - \frac{k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}}{k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{SE}} \sin k_2 L (SEk_1 \cos k_1 L - M\omega^2 \sin k_1 L)} \\ &= \frac{i\omega \left\{ 1 - \frac{k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}}{k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}} \right\} \sin k_2 L}{d_1 - \frac{k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}}{k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{SE}} \sin k_2 L (SEk_1 \cot k_1 L - M\omega^2)} \\ &\equiv \frac{n_1}{d_1 + d_2} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

分母の d_1 の次の第 2 項目を d_2 とし、分子を n_1 とおく。また $k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}$ について $k_2 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{SE}}$ とするとゼロになってしまうので高次の項までとる:

$$\begin{aligned} k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES} &\sim \frac{\rho\omega^2}{SE} \frac{SE}{SE - i\chi\rho\omega} \frac{SE\alpha^2 T}{\rho C} \\ &= \frac{\alpha^2 T \omega^2}{C} \frac{1}{1 - i\frac{\chi\rho\omega}{SE}} \sim \frac{\alpha^2 T \omega^2}{C} \left(1 + i\frac{\chi\rho\omega}{SE} \right). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

これを用いると次のように変形できる:

$$\frac{k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}}{k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{SE}} = \frac{\alpha^2 T\omega^2}{C} \frac{1 + i\frac{\chi\rho\omega}{SE}}{-\frac{i\omega}{\chi} - \frac{\rho\omega^2}{SE}} = -\frac{\alpha^2 T\omega^2}{C} \frac{2\frac{\rho\omega^2}{SE} + i\left(-\frac{\omega}{\chi} + \frac{\chi}{\omega}\left(\frac{\rho\omega^2}{SE}\right)^2\right)}{\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega^2}{SE}\right)^2}. \quad (4.1.12)$$

次に分母の第 2 項 d_2 を計算する。これは虚部を含むことに注意する。

$$\begin{aligned} d_2 &= -\frac{k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}}{k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{SE}} \sin k_2 L (SEk_1 \cot k_1 L - M\omega^2) \\ &= -\frac{k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{ES}}{k_1^2 - \frac{\rho\omega^2}{SE}} \sin k_2 L \left(SE\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(-1+i) \frac{\sin 2k''L + i \sinh 2k''L}{\cosh 2k''L - \cos 2k''L} - M\omega^2 \right) \\ &= -\frac{\alpha^2 T\omega^2}{C} \frac{2\frac{\rho\omega^2}{SE} + i\left(-\frac{\omega}{\chi} + \frac{\chi}{\omega}\left(\frac{\rho\omega^2}{SE}\right)^2\right)}{\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega^2}{SE}\right)^2} \sin k_2 L \\ &\quad \times \left(SE\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} \frac{-\sin 2k''L - \sinh 2k''L + i \sin 2k''L - i \sinh 2k''L}{\cosh 2k''L - \cos 2k''L} - M\omega^2 \right). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

ただし、 $\cot k_1 L$ について次の式を用いた:

$$\begin{aligned} \cot k_1 L &= \frac{\cos k_1 L}{\sin k_1 L} \\ &= \frac{\cos k''L \cosh k''L + i \sin k''L \sinh k''L}{\sin k''L \cosh k''L - i \cos k''L \sinh k''L} \\ &= \frac{\sin k''L \cos k''L \cosh^2 k''L - \sin k''L \cos k''L \sinh^2 k''L}{\sin^2 k''L \cosh^2 k''L + \cos^2 k''L \sinh^2 k''L} \\ &\quad + \frac{i(\cos^2 k''L \sinh k''L \cosh k''L + \sin^2 k''L \sinh k''L \cosh k''L)}{\sin^2 k''L \cosh^2 k''L + \cos^2 k''L \sinh^2 k''L} \\ &= \frac{\sin k''L \cos k''L + i \sinh k''L \cosh k''L}{\sin^2 k''L \cosh^2 k''L + \cos^2 k''L \sinh^2 k''L} \\ &= \frac{\sin 2k''L + i \sinh 2k''L}{\cosh 2k''L - \cos 2k''L}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

ただし Mathematica などを用いてこのような計算を行う際 $\sqrt{-1} = (1-i)/\sqrt{2}$ の負の解が自動的にとられることもあるが、 $k_1 \cot k_1 L$ においてこれは負の解をとっていても正の解をとっていても正となり、また k_1 が出てくる項はこの項のみのためこれによる影響はない。

また分子 n_1 について次のように書ける:

$$n_1 = \omega \sin k_2 L \left(\frac{\alpha^2 T\omega^2}{C} \frac{2i\frac{\rho\omega^2}{SE} - \left(-\frac{\omega}{\chi} + \frac{\chi}{\omega}\left(\frac{\rho\omega^2}{SE}\right)^2\right)}{\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega^2}{SE}\right)^2} + i \right). \quad (4.1.15)$$

ここで n_1 は複素数となっていることに注意する。

以上よりアドミッタンスの実部を求めていく。

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{Y(\omega)\} &= \operatorname{Re}\left\{\frac{n_1}{d_1 + d_2}\right\} \sim \operatorname{Re}\left\{\frac{n_1}{d_1}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)\right\} \\ &= \frac{\operatorname{Re}\{n_1\}}{d_1}\left(1 - \frac{\operatorname{Re}\{d_2\}}{d_1}\right) + \frac{\operatorname{Im}\{n_1\}}{d_1}\frac{\operatorname{Im}\{d_2\}}{d_1}. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

α の 2 次までを考えると、

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{Y(\omega)\} \\ &= \frac{\omega}{(SEk_2 \cot k_2 L - M\omega^2)^2} \frac{\frac{\alpha^2 T \omega^2}{C}}{\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^2 + \left(\frac{\rho \omega^2}{ES}\right)^2} \\ &\quad \times \left\{ -2\rho k'' \frac{\sin 2k'' L - \sinh 2k'' L}{\cosh 2k'' L - \cos 2k'' L} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\omega}{\chi} - \frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\rho \omega^2}{SE}\right)^2\right) \left(SEk_2 \cos k_2 L - SEk'' \frac{\sin 2k'' L + \sinh 2k'' L}{\cosh 2k'' L - \cos 2k'' L} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

これをパワースペクトル密度の式に代入すれば解を得られる。

$$S_{x-G} = \frac{4k_B T}{\omega^2} \operatorname{Re}\{Y(\omega)\}. \quad (4.1.18)$$

4.1.2 Langevin's method

Langevin の方法で Langevin 項 $\tilde{F}(x, t)$ を熱拡散方程式に導入してパワースペクトル密度を求めていく。熱拡散方程式と弾性方程式は次のようになる:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x, t)}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x, t)}{\partial x^2} = \tilde{F}(x, t) - \frac{SE\alpha T}{\rho C} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t \partial x}, \quad (4.1.19)$$

$$E \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} + E\alpha \frac{\partial \tilde{\theta}(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t^2}. \quad (4.1.20)$$

この熱拡散方程式と弾性方程式を時間 t についてフーリエ変換すると次のようになる:

$$i\omega \theta(x, \omega) - \chi \frac{\partial^2 \theta(x, \omega)}{\partial x^2} = F(x, \omega) - i\omega \frac{SE\alpha T}{\rho C} \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x}, \quad (4.1.21)$$

$$E \frac{\partial^2 u(x, \omega)}{\partial x^2} + E\alpha \frac{\partial \theta(x, \omega)}{\partial x} = -\frac{\rho}{S} \omega^2 u(x, \omega). \quad (4.1.22)$$

ここでランジュバン項のアンサンブル平均は次式を満たす [39]:

$$\langle \hat{F}(k, \omega) \hat{F}^*(k', \omega') \rangle = (2\pi)^2 F_0^2 k^2 \delta(k - k') \delta(\omega - \omega'). \quad (4.1.23)$$

これを離散化すると、

$$\langle \hat{F}_n(\omega) \hat{F}_m^*(\omega') \rangle = \frac{2}{L} F_0^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \delta_{nm} \times 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (4.1.24)$$

と書ける。ただし、

$$F_0^2 = \frac{2k_B T^2 \chi}{\rho C} = \frac{2k_B T^2 \kappa}{(\rho C)^2}. \quad (4.1.25)$$

この式のフーリエ変換は次のように書ける:

$$\langle \tilde{F}(x, t) \tilde{F}^*(x', t') \rangle = F_0^2 \delta(t - t') \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} \delta(x - x'). \quad (4.1.26)$$

ここでデルタ関数について次の公式を用いた:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta''(x - x') f(x) dx = f''(x'). \quad (4.1.27)$$

次では熱拡散方程式 (4.1.21) の右辺第 2 項について、微小であるとして無視した計算 (§ 4.1.2) と無視せずに計算した結果 (§ 4.1.2) を載せる。

近似あり

熱拡散方程式 (4.1.21) について膨張による温度変化が微小であるとして右辺第 2 項を無視して計算する。また θ は式 (4.1.2) で書けるから F も余弦の級数で展開できる。 F_n と θ_n の関係は次のように表せる:

$$i\omega \theta_n(\omega) + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \chi \theta_n(\omega) = F_n(\omega), \quad (4.1.28)$$

$$\theta(x, \omega) = \sum_n \frac{F_n(\omega)}{i\omega + (n\pi/L)^2 \chi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (4.1.29)$$

これを弾性方程式 (4.1.22) に代入する:

$$E \frac{\partial^2 u(x, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\rho}{S} \omega^2 u(x, \omega) = E\alpha \sum_n \frac{(n\pi/L)}{i\omega + (n\pi/L)^2 \chi} F_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.1.30)$$

$$\equiv \sum_n f_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.1.31)$$

斉次解は、

$$u^H(x, \omega) = A(\omega) \sin kx + B(\omega) \cos kx. \quad (4.1.32)$$

非斉次解は、

$$u^S(x, \omega) = \sum_n \frac{-f_n(\omega)}{E(n\pi/L)^2 - \rho\omega^2/S} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (4.1.33)$$

境界条件は次のようにおく:

$$u(0, \omega) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{M\omega^2}{SE} u(L, \omega). \quad (4.1.34)$$

1 つ目の式から $B(\omega) = 0$ となる。2 つ目の式から、

$$A(\omega)k \cos kL - \sum_n \frac{(n\pi/L)f_n(\omega)}{E(n\pi/L)^2 - \rho\omega^2/S} (-1)^n = \frac{M\omega^2}{SE} A(\omega) \sin kL \quad (4.1.35)$$

となり、 $A(\omega)$ が求まるので解は次のように書ける:

$$u(x, \omega) = \frac{1}{k \cos kL - (M\omega^2/SE) \sin kL} \times \sum_n \frac{f_n \left\{ (-1)^n \frac{n\pi}{L} \sin kx - \left(k \cos kL - \frac{M\omega^2}{SE} \sin kL \right) \sin \frac{n\pi}{L}x \right\}}{E(n\pi/L)^2 - \rho\omega^2/S}. \quad (4.1.36)$$

ファイバ下端での変位を求めるために $x = L$ を代入する:

$$u(L, \omega) = \frac{SE}{SE - (M\omega^2/k) \tan kL} \frac{\tan kL}{k} \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 - k^2 L^2} \frac{\alpha F_n(\omega) (-1)^n}{i\omega + \chi(n\pi/L)^2}. \quad (4.1.37)$$

このアンサンブル平均を計算する:

$$\begin{aligned}
& \langle u(L, \omega) u^*(L, \omega) \rangle \\
&= \left(\frac{SE \tan kL}{SE - (M\omega^2/k) \tan kL} \right)^2 \frac{1}{k^2} \\
&\quad \times \sum_n \left(\frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 - k^2 L^2} \right)^2 \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \chi^2 (n\pi/L)^4} \frac{2}{L} \frac{4k_B T^2 \kappa}{(\rho C)^2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \\
&= \left(\frac{SE}{SE - (M\omega^2/k) \tan kL} \right)^2 \frac{8k_B T^2 \alpha^2 L}{\pi^2 \kappa} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\beta^3 \pi^2 \tan kL}{(4\beta^4 + k^4 L^4)^2 k^2 L^2} \left(\frac{(k^4 L^4 + 4\beta^2 k^2 L^2 - 4\beta^4) \sin 2\beta}{\cosh \beta - \cos \beta} \tan kL \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \frac{(k^4 L^4 - 4\beta^2 k^2 L^2 - 4\beta^4) \sinh 2\beta}{\cosh \beta - \cos \beta} \tan kL - 4\beta k^3 L^3 \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{\pi^2 kL}{4(4\beta^4 + k^4 L^4)} \{ \tan kL - kL(1 + \tan^2 kL) \} \right\}, \quad (4.1.38)
\end{aligned}$$

ここで $\beta = \sqrt{\omega L^2 / 2\chi}$ である。

なお式 (4.1.38) は $kL \ll 1$ で近似をとると次のように書ける:

$$\begin{aligned}
& \langle u(L, \omega) u^*(L, \omega) \rangle \\
&\simeq \left(\frac{SE}{SE - M\omega^2 L} \right)^2 \frac{8k_B T^2 \alpha^2 L^3}{\pi^2 \kappa} \left(\frac{\pi^2}{4\beta} \frac{\sinh 2\beta - \sin 2\beta}{\cosh 2\beta - \cos 2\beta} \right). \quad (4.1.39)
\end{aligned}$$

Wiener-Khinchin の定理 (§ A.3 参照) よりパワースペクトルは次のようになる:

$$S_{x-La.app}(\omega) = \left(\frac{SE}{SE - M\omega^2 L} \right)^2 \frac{8k_B T^2 \alpha^2 L^3}{\pi^2 \kappa} \left(\frac{\pi^2}{4\beta} \frac{\sinh 2\beta - \sin 2\beta}{\cosh 2\beta - \cos 2\beta} \right). \quad (4.1.40)$$

近似なし

Langevin の方法で膨張による温度変化の項を無視する近似をせずに解く。弾性方程式を θ' について解き熱拡散方程式に代入することで次のような u の 4 階微分方程式ができる:

$$u'''' + \left(\frac{SE\alpha^2 T}{\rho C} \frac{i\omega}{\chi} - \frac{i\omega}{\chi} + \frac{\rho\omega^2}{SE} \right) u'' - \frac{i\omega}{\chi} \frac{\rho\omega^2}{ES} u = \frac{\alpha}{\chi} F'. \quad (4.1.41)$$

まず齊次解を求める。 $u = e^{ikx}$ として解くと k の 4 次方程式になる:

$$k^4 + \left(\frac{SE\alpha^2 T}{\rho C} \frac{i\omega}{\chi} - \frac{i\omega}{\chi} + \frac{\rho\omega^2}{SE} \right) k^2 - \frac{i\omega}{\chi} \frac{\rho\omega^2}{ES} = 0. \quad (4.1.42)$$

これを解くと A, B, C, D を積分定数として、

$$u_h(x, \omega) = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x + C \sin k_2 x + D \cos k_2 x, \quad (4.1.43)$$

ただし、

$$\left\{ \begin{aligned} k_1^2 &\sim -\frac{i\omega}{\chi} \left(1 - \frac{SE + i\chi\rho\omega}{(SE)^2 + (\chi\rho\omega)^2} \frac{(SE)^2 \alpha^2 T}{\rho C} \right) \equiv (p + iq)^2, & (4.1.44) \\ k_2^2 &\sim \frac{\rho\omega^2}{SE} \left(1 + \frac{SE + i\chi\rho\omega}{(SE)^2 + (\chi\rho\omega)^2} \frac{(SE)^2 \alpha^2 T}{\rho C} \right) \equiv (s + it)^2. & (4.1.45) \end{aligned} \right.$$

ここで α の 2 次以上を無視した。また以後 p, q, s, t を実数とし k_1, k_2 を実部と虚部に分けて定義することで計算をおこなっていく。次に非斉次解 u_s を求めると次のようになる:

$$u_s(x, \omega) = \frac{\alpha/\chi}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ \frac{1}{k_1} \int_0^x F'(y, \omega) \sin k_1(y-x) dy + \frac{1}{k_2} \int_0^x F'(y, \omega) \sin k_2(y-x) dy \right\} \quad (4.1.46)$$

$$\equiv \frac{\alpha/\chi}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{1}{k_1} \mathcal{F}_1^s(x) - \frac{1}{k_2} \mathcal{F}_2^s(x) \right). \quad (4.1.47)$$

ここで最後の等式において $F(y, \omega)$ と正弦の積についての積分を花文字 $\mathcal{F}_{1,2}^s(x)$ で表した。さらにこの微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathcal{F}_{1,2}^s(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x F'(y, \omega) \sin k_{1,2}(y-x) dy \right) \\ &= - \int_0^x F'(y, \omega) k_{1,2} \cos k_{1,2}(y-x) dy & (4.1.48) \end{aligned}$$

$$\equiv -k_{1,2} \times \mathcal{F}_{1,2}^c \quad (4.1.49)$$

となる。

Langevin の方法で近似をしない計算をおこなう目的は、膨張による温度変化の項を無視したときとしていないときの影響を見るためであるから、ここでは簡単のために境界条件で鏡の慣性項を含まずに考える。なお近似の有無による差は大きくないことが結果の章 § 4.4.1 より分かる。境界条件を式 (4.1.1), (4.1.34) とすると $x = 0$ のときの境界条件より $B = D = 0$ である。まず簡単のために $M = 0$ の時を考える。 $x = L$ のときの境界条件 $u'(L) = 0, Eu''(L) + \frac{\rho\omega^2}{S}u(L) = 0$ から解は、

$$\begin{aligned} u(L, \omega) &= \frac{\alpha}{\chi} \frac{-1}{(k_1^2 - k_2^2)k_2 \cot k_2 L} \\ &\quad \times \int_0^L F(y, \omega) \left(\frac{k_1 \cos k_1 y}{\sin k_1 L} - \frac{k_2 \cos k_2 y}{\sin k_2 L} \right) dy. & (4.1.50) \end{aligned}$$

次に変位のアンサンブル平均を求める。

$$\begin{aligned} & \langle u(L, \omega) u^*(L, \omega) \rangle \\ &= \left| \frac{\alpha/\chi}{(k_1^2 - k_2^2)k_2 \cot k_2 L} \right|^2 \iint \langle F(y, \omega) F^*(y', \omega) \rangle f(y, y') \, dy \, dy', \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \langle F(y, \omega) F^*(y', \omega) \rangle &= F_0^2 \int dt \int dt' \delta(t - t') \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} (\delta(x - x')) e^{-i\omega t + i\omega t'} \\ &= F_0^2 \tau \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} (\delta(y - y')) \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

であり、

$$f(y, y') = \left(\frac{k_1 \cos k_1 y}{\sin k_1 L} - \frac{k_2 \cos k_2 y}{\sin k_2 L} \right) \left(\frac{k_1 \cos k_1 y'}{\sin k_1 L} - \frac{k_2 \cos k_2 y'}{\sin k_2 L} \right)^* \quad (4.1.53)$$

とおいた。さらに式 (4.1.51) は次のように変形できる:

$$\begin{aligned} & \langle u(L, \omega) u^*(L, \omega) \rangle \\ &= \left| \frac{\alpha/\chi}{(k_1^2 - k_2^2)k_2 \cot k_2 L} \right|^2 \iint F_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} (\delta(y - y')) f(y, y') \, dy \, dy' \\ &= \left| \frac{F_0^2 \alpha/\chi}{(k_1^2 - k_2^2)k_2 \cot k_2 L} \right|^2 \int \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \Big|_{y'=y} \, dy. \end{aligned} \quad (4.1.54)$$

よって f の偏微分の y についての積分を計算していく。ただし、ここで式 (I), (II) を用いた。

$$\begin{aligned} & \int_0^L dy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \Big|_{y'=y} \\ &= \int_0^L dy \left\{ \frac{|k_2|^4 |\sin k_1 y|^2}{|\sin k_1 L|^2} - \frac{k_1^2 k_2^{*2} \sin k_1 y \sin k_2^* y}{\sin k_1 L \sin k_2^* L} \right. \\ & \quad \left. - \frac{k_1^{*2} k_2^2 \sin k_1^* y \sin k_2 y}{\sin k_1^* L \sin k_2 L} + \frac{|k_2|^4 |\sin k_2 y|^2}{|\sin k_2 L|^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.1.55)$$

$$\equiv f_1 + f_2 + f_3 + f_4. \quad (4.1.56)$$

各項は全て正弦の積についての積分だから各項について式 (VII) を用いればよい。見やすくするために次式のように項を分けて計算する。

第 1 項 f_1 について式 (V), (VI) を用いると、

$$\begin{aligned}
f_1 &= \int_0^L \frac{|k_2|^4 |\sin k_1 y|^2}{|\sin k_1 L|^2} dy \\
&= \frac{|k_2|^4}{|\sin k_1 L|^2} \left\{ -\frac{\sin(k_1 + k_1^*)L}{k_1 + k_1^*} + \frac{\sin(k_1 - k_1^*)L}{k_1 - k_1^*} \right\} \\
&= \frac{|k_2|^4}{k_1^2 - k_1^{*2}} \{k_1^* \cot k_1^* L - k_1 \cot k_1 L\} \\
&= \frac{(p^2 + q^2)^2}{4ipq} \{(p - iq) \cot(p - iq)L - (p + iq) \cot(p - iq)L\} \\
&= \frac{(p^2 + q^2)^2}{2pq} \frac{q \sin 2pL - p \sinh 2qL}{\cos 2pL - \cosh 2qL}. \quad (4.1.57)
\end{aligned}$$

同様にして第 4 項 f_4 も計算できる:

$$f_4 = \int_0^L \frac{|k_2|^4 |\sin k_2 y|^2}{|\sin k_2 L|^2} dy = \frac{(s^2 + t^2)^2}{2st} \frac{t \sin 2sL - s \sinh 2tL}{\cos 2sL - \cosh 2tL}. \quad (4.1.58)$$

第 2 項 f_2 について、

$$\begin{aligned}
f_2 &= - \int_0^L \frac{k_1^2 k_2^{*2} \sin_1 y \sin k_2^* y}{\sin k_1 L \sin k_2^* L} dy \\
&= - \frac{k_1^2 k_2^{*2}}{\sin k_1 L \sin k_2^* L} \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\sin(k_1 + k_2^*)L}{k_1 + k_2^*} + \frac{\sin(k_1 - k_2^*)L}{k_1 - k_2^*} \right\} \\
&= \frac{k_1^2 k_2^{*2}}{k_1^2 - k_2^{*2}} (-k_2^* \cot k_2^* L + k_1 \cot k_1 L). \quad (4.1.59)
\end{aligned}$$

これを以下のように括弧にかかっている部分と括弧内の 2 つの部分に分けて計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{k_1^2 k_2^{*2}}{k_1^2 - k_2^{*2}} &= \frac{(p^2 - q^2 + 2ipq)(s^2 - t^2 - 2ist)}{p^2 - q^2 - s^2 + t^2 + 2i(pq + st)} \\
&= \frac{(p^2 + q^2)^2 (s^2 - t^2) - (p^2 - q^2)(s^2 + t^2)^2 - 2i \{pq(s^2 + t^2)^2 + st(p^2 + q^2)^2\}}{(p^2 - q^2 - s^2 + t^2)^2 + 4(pq + st)^2} \quad (4.1.60)
\end{aligned}$$

$$\equiv C_{2a} + iC_{2b}. \quad (4.1.61)$$

ただし最後の等式において C_{2a}, C_{2b} を実数とし、実部と虚部に分けて定義した。次に括弧内の部分について、

$$\begin{aligned}
&-k_2^* \cot k_2^* L + k_1 \cot k_1 L \\
&= \frac{s \sin 2sL + t \sinh 2tL - it \sin 2sL + is \sinh 2tL}{\cos 2sL - \cosh 2tL} \\
&\quad + \frac{-p \sin 2pL - q \sinh 2qL - iq \sin 2pL + ip \sinh 2qL}{\cos 2pL - \cosh 2qL}. \quad (4.1.62)
\end{aligned}$$

以上より、第 2 項の実部は次のように書ける:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f_2\} = & C_{2a} \left\{ \frac{s \sin 2sL + t \sinh 2tL}{\cos 2sL - \cosh 2tL} - \frac{p \sin 2pL + q \sinh 2qL}{\cos 2pL - \cosh 2qL} \right\} \\ & + C_{2b} \left\{ \frac{t \sin 2sL - s \sinh 2tL}{\cos 2sL - \cosh 2tL} + \frac{q \sin 2pL - p \sinh 2qL}{\cos 2pL - \cosh 2qL} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.63)$$

第 3 項 f_3 は第 2 項の複素共役だから、第 2 項と第 3 項の和は式 (4.1.63) の 2 倍である。

最後に式 (4.1.54) にある次の係数部分を計算する:

$$\begin{aligned} U_c & \equiv \left| \frac{\frac{\alpha}{\chi} F_0}{(k_1^2 - k_2^2) k_2 \cot k_2 L} \right|^2 \\ & = \frac{\left(\frac{\alpha}{\chi} F_0 \right)^2 (\cos 2sL - \cosh 2tL)^2 (s^2 + t^2)}{(\sin^2 2sL + \sinh^2 2tL) \{ (p^2 - q^2 - s^2 + t^2)^2 + 4(pq - st)^2 \}}. \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

以上より変位についてのアンサンブル平均が求まり、パワースペクトル密度は次のようになる:

$$\begin{aligned} S_{x.La-wo-app} & = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \langle u(L, \omega) u^*(L, \omega) \rangle \\ & = U_c (f_1 + f_2 + f_3 + f_4). \end{aligned} \quad (4.1.65)$$

4.1.3 Levin's method

Levin の方法において弾性方程式と熱拡散方程式は次の通りとなる [37]:

$$E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + E\alpha \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (4.1.66)$$

$$\theta(x, t) - \chi \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{SE\alpha T}{\rho C} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}. \quad (4.1.67)$$

これを時間 t についてフーリエ変換された弾性方程式と熱拡散方程式それぞれは次のようにかける:

$$E \frac{\partial^2 u(x, \omega)}{\partial x^2} + E\alpha \frac{\partial \theta(x, \omega)}{\partial x} = -\frac{\rho}{S} \omega^2 u(x, \omega), \quad (4.1.68)$$

$$i\omega \theta(x, \omega) - \chi \frac{\partial^2 \theta(x, \omega)}{\partial x^2} = -\frac{SE\alpha T}{\rho C} i\omega \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x}. \quad (4.1.69)$$

Levin の方法では簡単のために弾性方程式 (4.1.68) の温度変化による応力の効果が小さいとして左辺第 2 項を無視しているが、この近似による影響をみるためにこの項を無視したとき (§4.1.3) と無視しなかったとき (§4.1.3) の両方で計算をおこなう。

近似あり

簡単のために式 (4.1.68) の左辺第 2 項を無視する。すると簡単に解くことができ、積分定数 A, B を用いて、

$$u(x) = A(\omega) \sin kx + B(\omega) \cos kx \quad (4.1.70)$$

と書ける。Levin の方法において u の $x = L$ における境界条件は仮想的な力を含むので次のようになる:

$$u(0) = 0, u'(L) = \frac{M\omega^2}{SE} u(L) + \frac{F_0}{SE}. \quad (4.1.71)$$

これを用いて微小項を無視した式 (4.1.68) を解くと、

$$u'(x) = -\frac{F_0}{M\omega^2 \sin kL - SEk \cos kL} k \cos kx. \quad (4.1.72)$$

ここで F_0 は Levin の方法において導入される仮想的な力である。ただし $k = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{ES}}$ である。

これを熱拡散方程式 (4.1.69) に代入する:

$$\chi \frac{\partial^2 \theta(x, \omega)}{\partial x^2} - i\omega \theta(x, \omega) = \frac{SE\alpha T}{\rho C} i\omega \frac{F_0}{M\omega^2 \sin kL - SEk \cos kL} k \cos kx \quad (4.1.73)$$

$$\equiv f \cos kx. \quad (4.1.74)$$

この一般解は次のようになる:

$$\theta(x, \omega) = A \sin k'x + B \cos k'x - \frac{f}{\chi k^2 + i\omega} \cos kx. \quad (4.1.75)$$

ただし $k' = \sqrt{-\frac{i\omega}{\chi}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(-1 + i) = k''(-1 + i)$ である。

境界条件 $\theta'(0) = \theta'(L) = 0$ より、

$$\theta(x, \omega) = \frac{f}{\chi k^2 + i\omega} \left(\frac{k \sin kL}{k' \sin k'L} \cos k'x - \cos kx \right). \quad (4.1.76)$$

ここでパワースペクトル密度は次の式で求まる:

$$S_{x.Lc.app} = \frac{4k_B\kappa}{\omega^2 F_0^2} \int_0^L |\theta'|^2 dx. \quad (4.1.77)$$

よって次の式を x について積分する:

$$\begin{aligned} |\theta'|^2 &= \frac{1}{(\chi k^2)^2 + \omega^2} \left(\frac{SE\alpha T}{\rho C} \right)^2 \\ &\quad \times \left(\frac{\omega F_0 k^2}{M\omega^2 \sin kL - SEk \cos kL} \right)^2 \left| \frac{\sin kL}{\sin k'L} \sin k'x - \sin kx \right|^2. \end{aligned} \quad (4.1.78)$$

ここで $\sin(a + ib) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$ を用いると絶対値の部分は次のようになる:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\sin kL}{\sin k'L} \sin k'x - \sin kx \right|^2 \\ &= \left| \sin kL \frac{\sin k''x \cosh k''x - i \cos k''x \sinh k''x}{\sin k''L \cosh k''L - i \cos k''L \sinh k''L} - \sin kx \right|^2 \\ &= \sin^2 kx + \frac{\sin^2 kL (\sin^2 k''x \cosh^2 k''x + \cos^2 k''x \sinh^2 k''x)}{\sin^2 k''L \cosh^2 k''L + \cos^2 k''L \sinh^2 k''L} \\ &\quad - \frac{2 \sin kL \sin kx}{\sin^2 k''L \cosh^2 k''L + \cos^2 k''L \sinh^2 k''L} \\ &\quad \times (\sin k''L \cosh k''L \sin k''x \cosh k''x + \cos k''L \sinh k''L \cos k''x \sinh k''x). \end{aligned} \quad (4.1.79)$$

第 1 項の積分は、

$$\int_0^L \sin^2 kx \, dx = \int_0^L \frac{1 - \cos 2kx}{2} \, dx = \frac{L}{2} - \frac{\sin 2kL}{4k} \sim \frac{1}{3} k^2 L^3. \quad (4.1.80)$$

第 3 項の積分は、次の関係

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \sin k'' x \cosh k'' x \sin kx \, dx \\
&= \frac{1}{k^4 + 4k''^4} \{ \cosh k'' L (- k^3 \cos kL \sin k'' L \\
&\quad + k^2 k'' \sin kL \cos k'' L - 2k''^3 \sin kL \cos k'' L) \\
&\quad + \sinh k'' L (k^2 k'' \sin kL \sin k'' L \\
&\quad + 2k k''^2 \cos kL \cos k'' L + 2k''^3 \sin kL \sin k'' L) \}, \tag{4.1.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \cos k'' x \sinh k'' x \sin kx \, dx \\
&= \frac{1}{k^4 + 4k''^4} \{ \cosh k'' L (k^2 k'' \sin kL \cos k'' L \\
&\quad - 2k k''^2 \cos kL \sin k'' L + 2k''^3 \sin kL \cos k'' L) \\
&\quad + \sinh k'' L (- k^3 \cos kL \cos k'' L \\
&\quad - k^2 k'' \sin kL \sin k'' L + 2k''^3 \sin kL \sin k'' L) \}, \tag{4.1.82}
\end{aligned}$$

を用いると次のようになる:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L dx \frac{2 \sin kL \sin kx \sin k'' L \cosh k'' L \sin k'' x \cosh k'' x}{\sin^2 k'' L \cosh^2 k'' L + \cos^2 k'' L \sinh^2 k'' L} \\
&\quad + \frac{2 \sin kL \sin kx \cos k'' L \sinh k'' L \cos k'' x \sinh k'' x}{\sin^2 k'' L \cosh^2 k'' L + \cos^2 k'' L \sinh^2 k'' L} \\
&= \frac{2 \sin kL}{k^4 + 4k''^4} \left(k^3 \cos kL - k^2 k'' \sin kL \frac{\sinh 2k'' L + \sin 2k'' L}{\cosh 2k'' L - \cos 2k'' L} \right. \\
&\quad \left. - 2k''^3 \sin kL \frac{\sinh 2k'' L - \sin 2k'' L}{\cosh 2k'' L - \cos 2k'' L} \right) \tag{4.1.83}
\end{aligned}$$

$$\sim -4L^2 \frac{k^2 k''^3}{k^4 + 4k''^4} \frac{\sinh 2k'' L - \sin 2k'' L}{\cosh 2k'' L - \cos 2k'' L}. \tag{4.1.84}$$

第 2 項の積分は、

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (\sin^2 k'' x \cosh^2 k'' x + \cos^2 k'' x \sinh^2 k'' x) \, dx \\
&= \frac{\sinh 2k'' L - \sin 2k'' L}{4k''}, \tag{4.1.85}
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} & \sin^2 kL \int_0^L \frac{\sin^2 k''x \cosh^2 k''x + \cos^2 k''x \sinh^2 k''x}{\sin^2 k''L \cosh^2 k''L + \cos^2 k''L \sinh^2 k''L} dx \\ &= \frac{\sin^2 kL}{2k''} \frac{\sinh 2k''L - \sin 2k''L}{\cosh 2k''L - \cos 2k''L} \end{aligned} \quad (4.1.86)$$

$$\sim L^2 \frac{k^2}{2k''} \frac{\sinh 2k''L - \sin 2k''L}{\cosh 2k''L - \cos 2k''L}. \quad (4.1.87)$$

と書ける。以上よりパワースペクトルは次のようになる:

$$\begin{aligned} S_{x_Le_app} &= \frac{4k_B\kappa}{\omega^2 F_0^2} \int_0^L |\theta'|^2 dx \\ &\sim \frac{4k_B\kappa}{(\chi k^2)^2 + \omega^2} \left(\frac{SE\alpha T}{\rho C} \right)^2 \left(\frac{k^2}{M\omega^2 \sin kL - SEk \cos kL} \right)^2 \\ &\quad \times \left| \frac{L^3 k^2}{3} + \frac{L^2 k^2 k^4 - 4k''^4}{2k''} \frac{\sinh 2k''L - \sin 2k''L}{k^4 + 4k''^4 \cosh 2k''L - \cos 2k''L} \right| \\ &= \frac{k_B\alpha^2 T^2}{\kappa} \frac{1}{\left(\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL - k \cos kL \right)^2} \frac{4k^4}{k^4 + 4k''^4} \\ &\quad \times \left| \frac{L^3 k^2}{3} + \frac{L^2 k^2 k^4 - 4k''^4}{2k''} \frac{\sinh 2k''L - \sin 2k''L}{k^4 + 4k''^4 \cosh 2k''L - \cos 2k''L} \right|. \end{aligned} \quad (4.1.88)$$

$$\begin{aligned} &\sim \frac{4k_B T^2 \alpha^2}{\kappa} \frac{k^2}{\left(\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL - k \cos kL \right)^2} \\ &\quad \times \left| \frac{L^3 k^4}{3 k''^4} - \frac{L^2 k^4}{2 k''^5} \frac{\sinh 2k''L - \sin 2k''L}{\cosh 2k''L - \cos 2k''L} \right| \end{aligned} \quad (4.1.89)$$

なお $kL \ll 1, k \ll k''$ かつ $M = 0$ のとき、

$$\sim \frac{k_B\alpha^2 T^2}{\kappa} \left| \frac{L^3 k^4}{3 k''^4} - \frac{L^2 k^4}{2 k''^5} \frac{\sinh 2k''L - \sin 2k''L}{\cosh 2k''L - \cos 2k''L} \right| \quad (4.1.90)$$

と書ける。

近似なし

ここでは式 (4.1.68) の左辺第 2 項を無視せずに計算をおこなう。弾性方程式を一階微分して熱拡散方程式を u' について解き代入すると次のような θ の 4 階微分方程式となる:

$$\theta'''' + \left(-\frac{i\omega}{\chi} + \frac{SE\alpha^2 T i\omega}{\rho C \chi} + \frac{\rho\omega^2}{ES} \right) \theta'' - \frac{\rho\omega^2 i\omega}{ES \chi} \theta = 0. \quad (4.1.91)$$

次の関係式、

$$k^4 - k^2 \left(-\frac{i\omega}{\chi} + \frac{SE\alpha^2 T i\omega}{\rho C \chi} + \frac{\rho\omega^2}{ES} \right) - \frac{\rho\omega^2 i\omega}{ES \chi} = 0 \quad (4.1.92)$$

より、積分定数 A, B, C, D を用いて解は次のようになる:

$$\theta(x, \omega) = A \cos k_1 x + B \sin k_1 x + C \cos k_2 x + D \sin k_2 x, \quad (4.1.93)$$

ただし、

$$\begin{cases} k_1^2 = -\frac{i\omega}{\chi} \left(1 - \frac{SE\alpha^2 T^2}{\rho C} \frac{SE}{SE - i\chi\rho C} \right) \\ k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{ES} \left(1 + \frac{SE\alpha^2 T^2}{\rho C} \frac{SE}{SE - i\chi\rho C} \right). \end{cases} \quad (4.1.94)$$

$$(4.1.95)$$

境界条件は式 (4.1.1), (4.1.71) で与えられる。しかし、ここでは方程式内の項の有無における影響を見ることが目的であるから、簡単のために式 (4.1.71) の鏡の慣性項を無視して考える。なお、鏡の慣性項を含めた計算結果は § A.5.1 に載せておく。 $\theta'(0) = 0$ の条件から $Bk_1 + Dk_2 = 0$ となる。また $u(0) = 0$ を弾性方程式に熱拡散方程式を代入して $x = 0$ のときを考えると、

$$0 = E \frac{\rho C}{SE\alpha T} \frac{1}{i\omega} (i\omega\theta'(0) - \chi\theta'''(0)) \quad (4.1.96)$$

$$\theta'''(0) = 0. \quad (4.1.97)$$

の 2 式が成り立ち、 $k_1 \neq k_2$ より $B = D = 0$ となる。次に $\theta'(L) = 0$ より、

$$C = -\frac{k_1 \sin k_1 L}{k_2 \sin k_2 L} A. \quad (4.1.98)$$

最後に $u'(L) = \frac{F_0}{SE}$ を用いると、 A, C は次のようになる:

$$\begin{cases} A = \frac{-\frac{\alpha T}{\rho C} F_0 \frac{i\omega}{\chi} \frac{1}{k_1 \sin k_1 L}}{\left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2\right) \frac{\cot k_1 L}{k_1} - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2\right) \frac{\cot k_2 L}{k_2}}, \\ C = \frac{\frac{\alpha T}{\rho C} F_0 \frac{i\omega}{\chi} \frac{1}{k_2 \sin k_2 L}}{\left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2\right) \frac{\cot k_1 L}{k_1} - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2\right) \frac{\cot k_2 L}{k_2}}. \end{cases} \quad (4.1.99)$$

$$(4.1.100)$$

ゆえに解は次のようになる:

$$\theta(x, \omega) = \frac{\frac{\alpha T}{\rho C} F_0 \frac{i\omega}{\chi} (-k_2 \sin k_2 L \cos k_1 x + k_1 \sin k_1 L \cos k_2 x)}{\left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2\right) k_2 \sin k_2 L \cos k_1 L - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2\right) k_1 \sin k_1 L \cos k_2 L}. \quad (4.1.101)$$

パワースペクトル密度を求めるために $\int_0^L |\theta'|^2 dx$ を計算していく。

$$\int_0^L |\theta'|^2 dx \equiv \left(\frac{\alpha T}{\rho C} F_0\right)^2 \frac{\omega^2}{\chi^2} \left| \frac{H_{nume}}{H_{deno}} \right|^2. \quad (4.1.102)$$

ただし、

$$|H_{deno}|^2 = \left| \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2\right) k_2 \sin k_2 L \cos k_1 L - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2\right) k_1 \sin k_1 L \cos k_2 L \right|^2 \quad (4.1.103)$$

$$|H_{nume}|^2 = \int_0^L |(-k_2 \sin k_2 L \cos k_1 x + k_1 \sin k_1 L \cos k_2 x)|^2 dx. \quad (4.1.104)$$

とおいた。まずこの絶対値 $|H_{nume}/H_{deno}|^2$ の分母 $|H_{deno}|^2$ を計算していく。
 $k_1 = p + iq, k_2 = s + it (p, q, s, t \in \mathbb{R})$ とおく。式 (I),(II) を用いると、

$$\begin{aligned}
& |H_{deno}|^2 \\
&= \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + k_1^{2*} \right) |k_2|^2 |\sin k_2 L \cos k_1 L|^2 \\
&\quad + \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + k_2^{2*} \right) |k_1|^2 |\sin k_1 L \cos k_2 L|^2 \\
&\quad - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + k_2^{2*} \right) k_2 k_1^* \sin k_2 L \cos k_1 L \sin k_1^* L \cos k_2^* L \\
&\quad - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + k_1^{2*} \right) k_1 k_2^* \sin k_1 L \cos k_2 L \sin k_2^* L \cos k_1^* L
\end{aligned} \tag{4.1.105}$$

$$\equiv h_{d1} + h_{d2} + h_{d3} + h_{d4}. \tag{4.1.106}$$

さらにこの分母を最後の等式のように 4 つの項に分離して計算していく。まず第 1 項について、

$$\begin{aligned}
& h_{d1} \\
&= \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + k_1^{2*} \right) |k_2|^2 |\sin k_2 L \cos k_1 L|^2 \\
&= \left\{ (p^2 - q^2)^2 + \left(2pq + \frac{\omega}{\chi} \right)^2 \right\} \frac{(s^2 + t^2)}{4} \\
&\quad \times (-\cos 2sL + \cosh 2tL) (\cos 2pL + \cosh 2qL). \tag{4.1.107}
\end{aligned}$$

同様にして第 2 項は、

$$\begin{aligned}
& h_{d2} \\
&= \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + k_2^{2*} \right) |k_1|^2 |\sin k_1 L \cos k_2 L|^2 \\
&= \left\{ (s^2 - t^2)^2 + \left(2st + \frac{\omega}{\chi} \right)^2 \right\} \frac{(p^2 + q^2)}{4} \\
&\quad \times (-\cos 2pL + \cosh 2qL) (\cos 2sL + \cosh 2tL). \tag{4.1.108}
\end{aligned}$$

第 3 項は、

$$\begin{aligned}
h_{d3} &= - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + k_2^{2*} \right) k_2 k_1^* \sin k_2 L \cos k_1 L \sin k_1^* L \cos k_2^* L \\
&= - \left(\frac{i\omega}{\chi} + 2ipq + p^2 - q^2 \right) \left(-\frac{i\omega}{\chi} + 2ist + s^2 - t^2 \right) (s+it)(p-iq) \\
&\quad \times \sin(s+it)L \cos(s-it)L \cos(p+iq)L \sin(p-iq)L \\
&= - \left\{ \left((p^2 - q^2)(s^2 - t^2) + \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \left(\frac{\omega}{\chi} - 2st \right) \right) (sp + tq) \right. \\
&\quad + \left((p^2 - q^2) \left(-\frac{\omega}{\chi} + 2st \right) + (s^2 - t^2) \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \right) (sq - tp) \\
&\quad + i \left\{ \left((p^2 - q^2) \left(-\frac{\omega}{\chi} + 2st \right) + (s^2 - t^2) \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \right) (sp + tq) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left((p^2 - q^2)(s^2 - t^2) + \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \left(\frac{\omega}{\chi} - 2st \right) \right) (-sq + tp) \right\} \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{4} \left\{ \sin 2sL \sin 2pL + \sinh 2tL \sinh 2qL \right. \\
&\quad \left. + i(\sin 2pL \sinh 2tL - \sin 2sL \sinh 2qL) \right\}. \quad (4.1.109)
\end{aligned}$$

第 4 項は、第 3 項の複素共役であるので第 3 項と第 4 項の和は次のように書ける:

$$\begin{aligned}
h_{d3} + h_{d4} &= -\frac{A_d}{2} (\sin 2sL \sin 2pL + \sinh 2tL \sinh 2qL) \\
&\quad + \frac{B_d}{2} (\sin 2pL \sinh 2tL - \sin 2sL \sinh 2qL). \quad (4.1.110)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
A_d &= \left\{ (p^2 - q^2)(s^2 - t^2) + \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \left(\frac{\omega}{\chi} - 2st \right) \right\} (sp + tq) \\
&\quad + \left\{ (p^2 - q^2) \left(-\frac{\omega}{\chi} + 2st \right) + (s^2 - t^2) \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \right\} (sq - tp), \\
&\quad (4.1.111)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_d &= \left\{ (p^2 - q^2) \left(-\frac{\omega}{\chi} + 2st \right) + (s^2 - t^2) \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \right\} (sp + tq) \\
&\quad \left\{ (p^2 - q^2)(s^2 - t^2) + \left(\frac{\omega}{\chi} + 2pq \right) \left(\frac{\omega}{\chi} - 2st \right) \right\} (-sq + tp). \\
&\quad (4.1.112)
\end{aligned}$$

とおいた。

次に分子を計算する:

$$\begin{aligned} |H_{nume}|^2 &= |k_1 k_2|^2 (|\sin k_2 L \sin k_1 x|^2 + |\sin k_1 L \sin k_2 x|^2 \\ &\quad - \sin k_2 L \sin k_1^* L \sin k_1 x \sin k_2^* x - \sin k_2^* L \sin k_1 L \sin k_1^* x \sin k_2 x) \end{aligned} \quad (4.1.113)$$

$$\equiv |k_1 k_2|^2 (h_{n1} + h_{n2} + h_{n3} + h_{n4}) \quad (4.1.114)$$

括弧内を 4 つの項に分けて x で積分していく。第 1 項について、

$$\begin{aligned} h_{n1} &= \int_0^L |\sin k_2 L \sin k_1 x|^2 dx \\ &= |\sin k_2 L|^2 \int_0^L \sin(p+iq)x \sin(p-ix)x dx \\ &= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{\sin 2pL}{2p} + \frac{\sinh 2qL}{2q} \right\} (-\cos 2sL + \cosh 2tL). \end{aligned} \quad (4.1.115)$$

同様にして第 2 項は、

$$\begin{aligned} h_{n2} &= \int_0^L |\sin k_1 L \sin k_2 x|^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{\sin 2sL}{2s} + \frac{\sinh 2tL}{2t} \right\} (-\cos 2pL + \cosh 2qL). \end{aligned} \quad (4.1.116)$$

第 3 項について、

$$\begin{aligned} h_{n3} &= - \int_0^L \sin k_2 L \sin k_1^* L \sin k_1 x \sin k_2^* x dx \\ &= \sin k_2 L \sin k_1^* L \int_0^L \frac{1}{2} (-\cos(k_1 + k_2^*)x + \cos(k_1 - k_2^*)x) dx \\ &= \sin k_2 L \sin k_1^* L \frac{1}{k_1^2 - k_2^{*2}} (-k_1 \cos k_1 L \sin k_2^* L + k_2^* \sin k_1 L \cos k_2 L) \\ &= \frac{p^2 - q^2 - s^2 + t^2 - 2i(pq + st)}{(p^2 - q^2 - s^2 + t^2)^2 + 4(pq + st)^2} \frac{1}{4} \\ &\quad \times \{ (p \sin 2pL + q \sinh 2qL + iq \sin 2pL - ip \sinh 2qL)(-\cos 2pL + \cosh 2qL) \\ &\quad - (s \sin 2sL + t \sinh 2tL - it \sin 2sL + is \sinh 2qL)(-\cos 2pL + \cosh 2qL) \}. \end{aligned} \quad (4.1.117)$$

第 4 項は第 3 項の複素共役のため、第 3 項と第 4 項を足し合わせると次のよ

うになる:

$$\begin{aligned}
& h_{n3} + h_{n4} \\
&= \frac{1}{2\{(p^2 - q^2 - s^2 + t^2)^2 + 4(pq + st)^2\}} \\
&\quad \times \left\{ (p^2 - q^2 - s^2 + t^2) \{ (p \sin 2pL + q \sinh 2qL)(-\cos 2sL + \cosh 2tL) \right. \\
&\quad \quad \left. - (s \sin 2sL + t \sinh 2tL)(-\cos 2pL + \cosh 2qL) \right\} \\
&\quad + 2(pq + st) \{ (q \sin 2pL - p \sinh 2qL)(-\cos 2sL + \cosh 2tL) \\
&\quad \quad \left. - (t \sin 2sL - s \sinh 2tL)(-\cos 2pL + \cosh 2qL) \right\}. \tag{4.1.118}
\end{aligned}$$

以上より、パワースペクトル密度を計算できる:

$$\begin{aligned}
S_{x-Le-wo-app} &= \frac{4k_B \kappa}{\omega^2 F_0^2} \int_0^L |\theta'|^2 dx = \frac{4k_B \alpha^2 T^2}{\kappa} \left| \frac{H_{nume}}{H_{deno}} \right|^2 \\
&= \frac{4k_B \alpha^2 T^2}{\kappa} \frac{|k_1 k_2|^2 (h_{n1} + h_{n2} + h_{n3} + h_{n4})}{h_{d1} + h_{d2} + h_{d3} + h_{d4}}. \tag{4.1.119}
\end{aligned}$$

4.2 境界で熱流あり

ファイバの両端での温度勾配がゼロにならないような境界条件で Levin の方法を用いて計算した結果を載せる。ただし、この系において $u(0) = 0$, $u'(L_2) = M\omega^2 u(L_2)/S + F_0/SE$ としている。より正確な系を考えるには、 $u(h) = 0$, $u'(L_1) = M\omega^2 u(L_1)/S + F_0/SE$ とおく。 $x = 0, h, L_1, L_2$ の定義は次節を参照。

4.2.1 Levin's method

§ 1.3 で述べたように実際の実験系では境界で熱流が存在する。よって本節では固定端と自由端それぞれで実際のファイバの長さ h, h' より先の点で熱流がゼロになっていると仮定して境界で熱流がある場合での熱弾性雑音を求める。この熱流がゼロになる仮想的なファイバの全長を $L_2 = L + h + h'$ とする。このとき § 4.1.3 において $L \rightarrow L_2$ とできる。つまり式 (4.1.77) で積分範囲を変えればよくその範囲は $[h, L_1]$ とできる。 $L_1 = h + L$ とおく。これを概念的な図にすると次の図 4.1 のようになる。灰色点線は境界 $x = h, L_1$ で温度勾配 θ' がゼロとなることを表し、青線は本節で考える境界条件でより外側で温度勾配がゼロになる。なお $x = [h, L_1]$ の範囲の図はあくまで概念的なもので実際の描像を表したものではない。

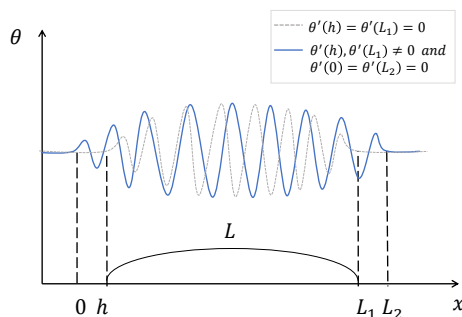


図 4.1: ファイバの両端 $x = 0, L_1$ で温度勾配をもつときの温度と長さについての概念図(青線)。このとき仮想的な長さ $x = -h, L_2$ で温度勾配 θ' はゼロにする。灰色点線は境界 $x = 0, L_1$ で温度勾配 θ' がゼロとなることを表す。

式 (4.1.77) より積分部分は次のようになる:

$$\begin{aligned} & \int_h^{L_1} |\theta'|^2 dx \\ &= \left(\frac{\alpha T}{\chi \rho C} \right)^2 \frac{\omega^2 F_0^2 k^2}{(k^4 + 4k''^4) \cos^2 kL_2} \int_h^{L_1} \left| \frac{\sin kL_2}{\sin k'L_2} \sin k'x - \sin kx \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

この積分部分を計算する。

$$\begin{aligned} & \int_h^{L_1} \left| \frac{\sin kL_2}{\sin k'L_2} \sin k'x - \sin kx \right|^2 dx \\ &= \int_h^{L_1} \left\{ \frac{\sin^2 kL_2}{|\sin k'L_2|^2} |\sin k'x|^2 + \sin^2 kx \right. \\ & \quad \left. - \sin kL_2 \sin kx \left(\frac{\sin k'x}{\sin k'L_2} + \frac{\sin k'^*x}{\sin k'^*L_2} \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$\equiv h_1 + h_2 + h_3. \quad (4.2.3)$$

なお最後の等号において各項を h_1, h_2, h_3 とおいた。項ごとに計算をおこなっていく。まず第 2 項について、

$$\begin{aligned} h_2 &\equiv \int_h^{L_1} \sin^2 kx \, dx = \int_h^{L_1} \frac{1}{2} (1 - \cos 2kx) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ L_1 - h - \frac{1}{2k} (\sin 2kL_1 - \sin 2kh) \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

第 1 項について、

$$\begin{aligned} h_1 &\equiv \int_h^{L_1} \frac{\sin^2 kL_2}{|\sin k'L_2|^2} |\sin k'x|^2 \, dx \\ &= \frac{\sin^2 kL_2}{|\sin k'L_2|^2} \int_h^{L_1} \sin k''(-1+i)x \sin k''(-1-i)x \, dx \\ &= \frac{\sin^2 kL_2 (-\sin 2k''L_1 + \sin 2k''h + \sinh 2k''L_1 - \sinh 2k''h)}{2k''(-\cos 2k''L_2 + \cosh 2k''L_2)}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

第 3 項について、

$$\begin{aligned}
h_3 &\equiv -\frac{\sin k_2 L}{|\sin k' L_2|^2} \int_h^{L_1} (\sin k' x \sin k'^* L_2 + \sin k'^* x \sin k' L_2) dx \\
&= -\frac{\sin k_2 L}{|\sin k' L_2|^2} \left\{ \frac{\sin k'^* L_2}{k'^2 - k^2} \{ k' (-\sin k L_1 \cos k' L_1 + \sin k h \cos k' h) \right. \\
&\quad \left. + k (\sin k' L_1 \cos k L_1 - \sin k' h \cos k h) \} + c.c. \right\} \\
&= \frac{2}{4k''^4 + k^4} \left\{ (k^2 + 2k''^2) \sin k'' L_2 \cosh k'' L_2 + 2k''^2 \cos k'' L_2 \sinh k'' L_2 \right\} \\
&\quad \times \left\{ k'' \{ \sin k L_1 (\cos k'' L_1 \cosh k'' L_1 + \sin k'' L_1 \sinh k'' L_1) \right. \\
&\quad \left. - \sin k h (\cos k'' h \cosh k'' h + \sin k'' h \sinh k'' h) \} \right. \\
&\quad \left. + k (-\cos k L_1 \sin k'' L_1 \cosh k'' L_1 + \cos k h \sin k'' h \cosh k'' h) \right\} \\
&+ \left\{ 2k''^2 \sin k'' L_2 \cosh k'' L_2 + (k^2 + 2k''^2) \cos k'' L_2 \sinh k'' L_2 \right\} \\
&\quad \times \left\{ k'' \{ \sin k L_1 (\sin k'' L_1 \sinh k'' L_1 - \cos k'' L_1 \cosh k'' L_1) \right. \\
&\quad \left. - \sin k h (\sin k'' h \sinh k'' h - \cos k'' h \cosh k'' h) \} \right. \\
&\quad \left. + k (\cos k L_1 \cos k'' L_1 \sinh k'' L_1 - \cos k h \cos k'' h \sinh k'' h) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

ただし $c.c$ は複素共役 (complex conjugate) を示す。以上よりパワースペクトル密度は、

$$\begin{aligned}
S_{x,heat} &= \frac{4k_B \kappa}{\omega^2 F_0^2} \int_h^{L_1} |\theta'|^2 dx \\
&= \frac{4k_B \alpha^2 T^2}{\kappa} \frac{k^2 (h_1 + h_2 + h_3)}{(k^4 + 4k''^4) \cos^2 k L_2}
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

と書ける。

鏡の慣性項

鏡の慣性項を含めると積分部分は次のようにかける：

$$\begin{aligned}
\int_h^{L_1} |\theta'|^2 dx &= \left(\frac{SE\alpha T}{\chi\rho C} \right)^2 \frac{1}{k^4 + 4k''^4} \left(\frac{\omega F_0 k^2}{M\omega^2 \sin k L_2 - SEk \cos k L_2} \right)^2 \\
&\quad \times \int_h^{L_1} \left| \frac{\sin k L_2}{\sin k' L_2} \sin k' x - \sin k x \right|^2 dx. \tag{4.2.8}
\end{aligned}$$

よって、鏡の慣性項を含めた境界条件でのパワースペクトル密度は、

$$\begin{aligned}
S_{x,heat} &= \frac{4k_B \kappa}{\omega^2 F_0^2} \int_h^{L_1} |\theta'|^2 dx \\
&= \frac{4k_B \alpha^2 T^2}{\kappa} \frac{k^4}{k^4 + 4k''^4} \frac{h_1 + h_2 + h_3}{\left(\frac{M\omega^2}{SE} \sin k L_2 - k \cos k L_2 \right)^2}
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

となる。

4.3 計算手法

本研究において、グラフを描くために Python と Mathematica を用いた。Python では数式を文字のみで打ち込むことができるが、本研究のように分数を多く含んでいるなど数式が複雑化すると見づらくなってしまふ。それに対して Mathematica は数式が手書きで書くように可視化されるため、数式を打ち込んだ際にミスがないか確認をしやすいという利点がある。

また計算ソフトを用いるにあたって、計算の最中に特定の項などの値が発散することであまりく数值を出せないことがある。これは式を変形することで回避できる場合もある。例えば次のような式変形が考えられる。

$$\sinh a = \frac{1 - e^{-2a}}{2e^{-a}} = \frac{e^{2a} - 1}{2e^a} \quad (4.3.1)$$

$$\cosh a = \frac{1 + e^{-2a}}{2e^{-a}} = \frac{e^{2a} + 1}{2e^a} \quad (4.3.2)$$

ここでは e^a または e^{-a} が発散することでソフトの中で数值計算の値を出せない可能性がある。このとき、分母分子にそれぞれ e^{-a} または e^a をかけることによって数值が発散することを防げる。本研究では、式 (4.3.1), (4.3.2) のような式変形を用いて発散しないようにしながら数值を出している。

本研究に対する別の観点からのアプローチとして、有限要素法を用いたシミュレーションソフトを用いて計算することも考える。具体的には Ansys などが挙げられる [42]。干渉計型重力波望遠鏡のサスペンション系の雑音の計算において、このようなシミュレーションソフトが用いられていることも多い [41]。また、Python の Fipy や NumPy を用いた有限要素法も存在する [44]。

4.4 計算結果

§4で導出した各アプローチでのパワースペクトル密度の計算結果を式 (2.2.1) を用いて感度にした結果をみる。

4.4.1 Langevin の方法で近似ありとなしの比較

Langevin の方法で方程式の項を落とす近似をしたときと近似をせずに解いた時のグラフを図 4.2 に載せる。ただしこの図を作成するときの計算において簡単のために境界条件の鏡の慣性項を落として計算している。つまり、式 (4.1.40) において $M \rightarrow 0$ としたものの結果である。図 4.2 から近似をし

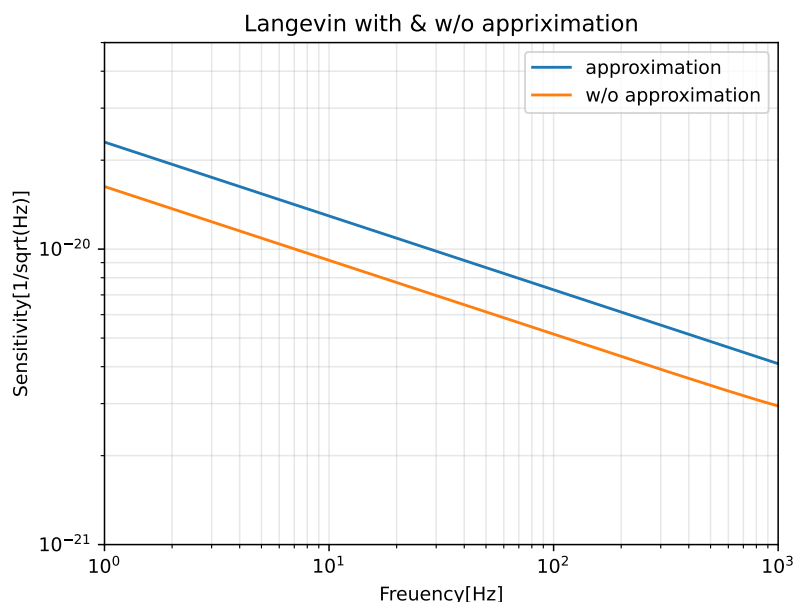


図 4.2: Langevin の方法で近似をして解いたときと近似をせずに解いたときの計算結果。ただし簡単のため鏡の慣性項を境界条件に含めずに解いている。

た結果のほうが、近似をしていない結果よりも全周波数帯域においてその感度はやや大きくなっている。しかし低周波においても高周波においても 2 倍も変わらないことが分かる。またグラフは単調減少している。

4.4.2 Levin の方法で近似ありとなしの比較

Levin の方法で方程式の項を落とす近似をしたときと近似をせずに解いた時のグラフを図 4.3 に載せる。ここでも前節と同様に簡単のために境界条件

の鏡の慣性項を落として計算している。つまり式 (4.1.89) において $M \rightarrow 0$ としたものの計算結果である。

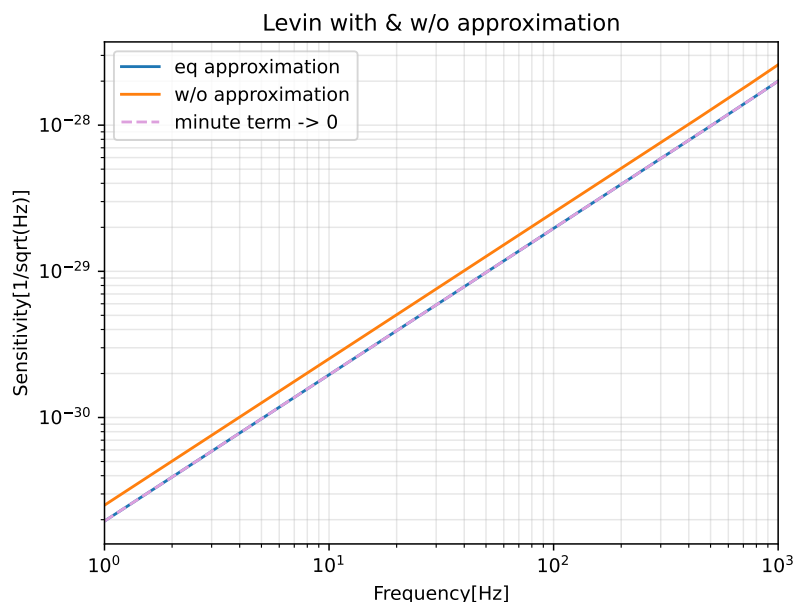


図 4.3: Levin の方法で近似をして解いたときと近似をせずに解いたときの計算結果。ただし、鏡の慣性項を無視して解いている。また、‘minute term $\rightarrow 0$ ’ のグラフは、方程式で項を無視する近似なしの結果で最後に微小項をゼロにしたときの結果である。

図 4.3 より近似ありの結果は近似なしの結果に対して全周波数にわたって小さくなっていることが分かる。またその差は 2 倍にも満たない。グラフは単調増加している。さらに、‘minute term $\rightarrow 0$ ’ のグラフは近似ありの結果と重なっていることを確認できる。

4.4.3 3つの方法の比較

図 4.4 に KAGRA の設計感度と比較した Langevin の方法、Levin の方法、Gonzalez の方法によるそれぞれの計算結果を載せる。この図 4.4 は Python を用いて出力した。なお KAGRA の感度データは文献 [40] のデータ spectrum_DRSE.txt を用いている。また Langevin、Levin の方法において近似をおこない、鏡の慣性項を含めて計算をした結果である。

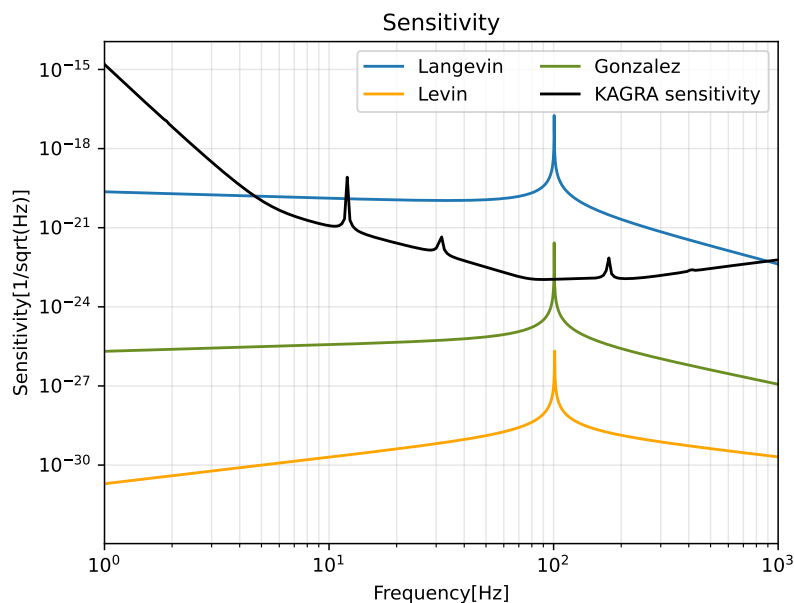


図 4.4: KAGRA の設計感度曲線と Langevin、Levin、Gonzalez の方法の比較。
(Python)

図 4.4 のグラフにおいて Langevin, Gonzalez, Levin の順で 5 桁ずつほど小さくなっていることが分かる。また図 4.4 より Langevin の方法による結果が KAGRA の設計感度を超過していることを確認できる。

4.4.4 境界で熱流をもつときの結果

§ 4.2 より Levin の方法を用いて境界で熱流をもつとしたときの計算結果を載せる。ファイバの両端から等しい長さ $h = h'$ だけ離れたところで熱流がゼロになるとき (§ 4.4.4) と、異なる長さ $h \neq h'$ 離れたところで熱流がゼロになるとき (§ 4.4.4) に分けて結果を示す。

等しい長さ $h = h'$

ファイバの両端から同じ長さ h だけ離れたところで温度勾配がゼロになると仮定したとき、つまり $L_1 = L + h$, $L_2 = L_1 + h$ とおけるときの結果を考える。 $h = 0, 5, 30, 60[\text{cm}]$ と変化させたときの結果に加え、はじめから境界で熱流がないとしたときの式 (4.1.89) の結果と KAGRA の設計感度を併せて図 4.5 に載せる。

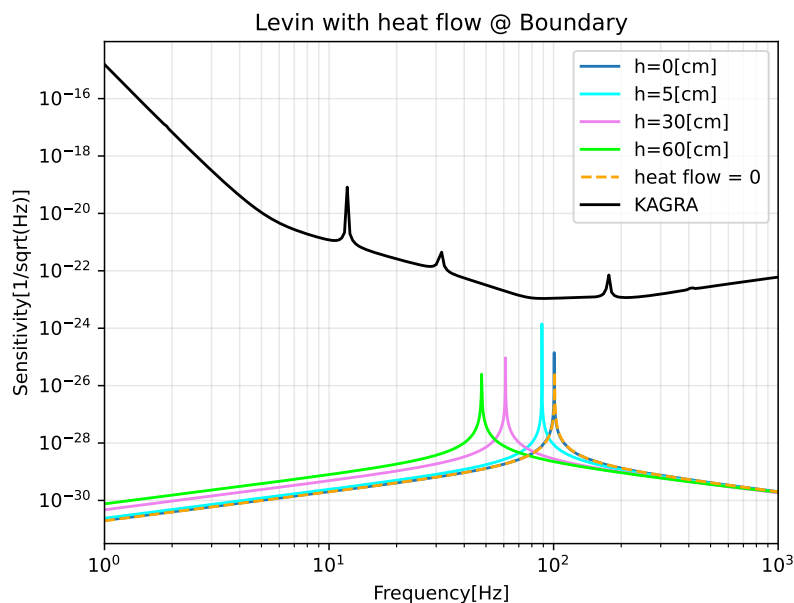


図 4.5: ファイバの両端で熱流をもち、そこから同じ長さ h だけ離れたところで温度勾配がゼロになるときの感度曲線。 $h = 0, 5, 30, 60$ [cm] と変化させたときはじめから境界で熱流がないとしたときの式 (4.1.89) の結果と KAGRA の設計感度を載せる。

図 4.5 よりはじめから境界で熱流をゼロとおいたときの曲線 (橙点線) と $h = 0$ とした時の曲線 (青線) が一致していることがわかる。また h を大きくすると、ピークは左にずれピーク幅が大きくなっていることが読み取れる。低周波で感度が大きくなっているが高周波はあまり差がみられない。

異なる長さ $h \neq h'$

ファイバの両端から異なる長さ h, h' ($h \neq h'$) だけ離れたところで温度勾配がゼロになると仮定したとき、つまり $L_1 = L + h, L_2 = L_1 + h'$ としたときの結果を図 4.6 に載せる。

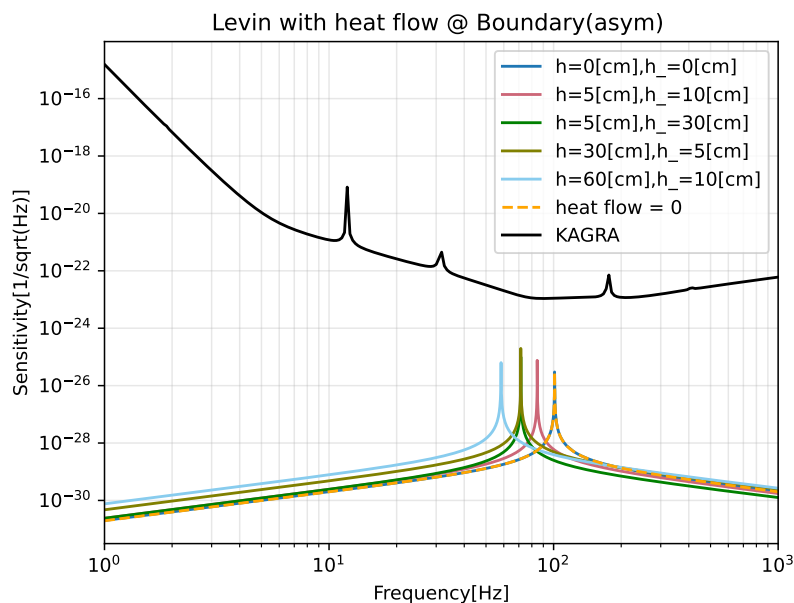


図 4.6: ファイバの両端で熱流をもち、そこから異なる長さ h, h' だけ離れたところで温度勾配がゼロになるときの感度曲線。 $(h, h') = (0, 0), (5, 10), (5, 30), (30, 5), (60, 10)$ [cm] と変化させたときと、境界で熱流がないという境界条件で計算したときの式 (4.1.89) の結果と KAGRA の設計感度を載せる。なお図中の h_+ は h' を表す。

図 4.6 より、はじめから境界で熱流をゼロとおいたときの曲線（橙点線）と $h = h' = 0$ とした時の曲線（青線）が一致していることを確認できる。また $h + h'$ を大きくするとピークは左にずれていることを確認できる。 $(h, h') = (5, 30)$ と $(h, h') = (30, 5)$ のグラフについてピーク位置は一致しているがそれより低周波と高周波での値は $(h, h') = (5, 30)$ のほうが $(h, h') = (30, 5)$ よりも小さくなっていることが分かる。

4.5 考察

懸架系ファイバ系で求めた感度曲線の結果に関する考察をおこなっていく。前節と同様に境界で熱流がないとき (§ 4.5.1) とあるとき (§ 4.5.2) に分けて考察をおこなう。

4.5.1 境界で熱流なし

低周波

図 4.4 の Langevin, Levin, Gonzaletz のグラフについて、低周波での傾きについて述べておく。それぞれの方法で 1Hz と 10Hz の値を調べ、両対数グラフの傾きを求め表 4.1 にまとめる。

Approach	1Hz	10Hz	Slope
Langevin	2.3×10^{-20}	1.3×10^{-20}	-0.2
Levin	2.7×10^{-31}	2.4×10^{-30}	1.0
Gonzaletz	2.0×10^{-26}	3.5×10^{-26}	0.2

表 4.1: Langevin, Levin, Gonzaletz の 3 つの方法における低周波での傾きの計算結果。(Python)

表 4.1 の低周波における 3 つの方法での傾きの値をみても分かるとおり、それぞれが異なる挙動を示していることが分かる。よって、単に各感度の定数倍だけ係数が異なっているという可能性は低い。

KAGRA の感度との比較

図 4.4 において Langevin の方法による結果が KAGRA の設計感度を超えていることを確認できる。このことと表 4.1 の結果から 3 つの理論のいずれかもしくは全てにおいて計算が間違っている可能性などが挙げられる。特に Langevin の方法では設計感度を超えており、適切な結果ではない可能性が考えられる。

ピーク位置

鏡の慣性項を含めた境界条件を考えると分母がゼロになるところでピークを持つはずである。これを確認するために、次式を満たす周波数 $f_0 = \omega_0/2\pi$

を求める。ただし $\omega = k\sqrt{SE/\rho}$ である。

$$\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL - k \cos kL = 0 \quad (4.5.1)$$

$$\longleftrightarrow \frac{M}{\rho} k^2 \sin kL - \cos kL = 0. \quad (4.5.2)$$

これを解析的に解くことは難しいため、左辺がゼロになるときに数値的に見つける。 $y(k) = \frac{\rho}{M} - k \tan kL$ とおいて k を変化させたときの y の値を見る。するとおよそ $k = 6.3 \times 10^{-2}$ のとき y は最もゼロに近づいた。これを周波数に直すと 101[Hz] である。この結果は、図 4.4 の結果に一致していると言える。

4.5.2 境界で熱流をもつときの計算

等しい長さ $h = h'$

ファイバの両端から同じ長さ h だけ離れたところで温度勾配がゼロになると仮定したとき、つまり $L_1 = L + h$, $L_2 = L_1 + h$ とおけるときの感度曲線である図 4.5 について考察をおこなう。特に低周波において仮想長さ $h (= h')$ が大きくなるほど感度の値が大きくなるという傾向がみられた。 h が大きいということはより離れたところで温度が安定になることを意味し、それに対する実際のファイバ長さではより安定しにくいという直感に従っている考えられる。

またピーク位置について、式 (4.1.89) の分母

$$\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL_2 - k \cos kL_2 \quad (4.5.3)$$

がゼロになるときの周波数 ω_0 と一致しているか確認する。

$$y = k \frac{M}{\rho} \tan kL_2 - 1 \quad (4.5.4)$$

がゼロになる k を探し、そこから ω_0 を求めた結果を表 4.2 に載せる。図 4.5

$h[\text{cm}]$	$\omega_0[\text{Hz}]$
0	101
5	89
30	61
60	48

表 4.2: それぞれの h において $y = k \frac{M}{\rho} \tan kL_2 - 1$ がゼロになるときの周波数 ω_0 の計算結果。

と表 4.2 よりピーク位置と計算結果が一致しており、このピークは式 (4.1.89) の分母 $\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL_2 - k \cos kL_2$ に起因するものだと言える。

異なる長さ $h \neq h'$

ファイバの両端から異なる長さ $h, h' (h \neq h')$ だけ離れたところで温度勾配がゼロになると仮定したとき、つまり $L_1 = L + h, L_2 = L_1 + h'$ としたときの感度曲線である図 4.6 について考察をおこなう。 $(h, h') = (5, 30)$ と $(h, h') = (30, 5)$ のグラフについて、ピーク位置より低周波と高周波での値は $(h, h') = (30, 5)$ のほうが $(h, h') = (5, 30)$ よりも大きくなっていることを確認した。このような h, h' を入れ替えたときの傾向は他のパラメータ値を代入しても見られた。§ 4.5.2 で対称な仮想長さ $h = h'$ が長くなるほど感度が大きくなるという議論を発展させることでこの意味を考える。このとき全長 L_2 は同じ値であるから L_2 によるものではないはずである。また式 (4.2.9) より積分域は (h, L_1) であるから h と $L_1 = L + h$ に着目すると、§ 4.5.2 と同様に h が長い方が、つまり上端においてより遠くで温度勾配がゼロになるほうが安定しにくいと考えることができる。ゆえに $(h, h') = (30, 5)$ のほうが $(h, h') = (5, 30)$ よりも雑音の感度が大きくなっていると予測できる。

さらに前節と同様にピーク位置について、式 (4.1.89) の分母 $\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL_2 - k \cos kL_2$ のゼロになるときの周波数 ω_0 と一致しているか確認する。計算結果を表 4.3 に載せる。

$(h, h')[\text{cm}]$	$\omega_0[\text{Hz}]$
(0,0)	101
(5,10)	84
(5,30), (30,5)	71
(60,10)	58

表 4.3: それぞれの h, h' において、 $y = k \frac{M}{\rho} \tan kL_2 - 1$ がゼロになるときの周波数 ω_0 の計算結果

図 4.6 と表 4.3 よりピーク位置と計算結果が一致していることが確認できる。よってこれらのピークは式 (4.1.89) の分母 $\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL_2 - k \cos kL_2$ がゼロになることによるものであると言える。

仮想長さの扱い

懸架系ファイバの計算でも熱流が境界でゼロになる仮想的な長さ $L_2(h, h')$ をおいたが実際の懸架系を考えたときどのように決定できるか、板ばねのときの議論 § 3.3.4 と同様にして考察をおこなう。簡単のため、図 1.4 のようにファイバが接続する冷凍機 ($\sim 16[\text{K}] (x = 0)$) と鏡 ($\sim 22[\text{K}] (x = L_2)$) において温度勾配がゼロになり、その間の温度は線形に変化するとする。このとき、温度 T は x について $T = 6x/L_2 + 16$ とかける。ファイバと冷凍機、鏡

間の温度差をそれぞれ T_{0c}, T_{0m} とおく。

$$\begin{cases} T_{0c} = \frac{6h}{L_2} = \frac{6h}{L+h+h'} & (4.5.5) \\ T_{0m} = 6 - \frac{6L_1}{L_2} = \frac{6h'}{L+h+h'} & (4.5.6) \end{cases}$$

これを仮想的な長さ h, h' について解くと、次のようになる:

$$\begin{cases} h = \frac{6T_{0c}L}{(6-T_{0c})(6-T_{0m}) - T_{0c}T_{0m}} & (4.5.7) \\ h' = \frac{6T_{0m}L}{(6-T_{0c})(6-T_{0m}) - T_{0c}T_{0m}}. & (4.5.8) \end{cases}$$

ファイバの両端での温度が特定できた場合、この式を用いて h, h' を予想することができると思われる。

4.5.3 熱弾性雑音を求める複数の理論

先行研究 [37] より Langevin の方法と Levin の方法で鏡の熱雑音の計算結果が一致している (§ 1.5.5) とのことから、我々はこの 2 つの手法で懸架系ファイバの縦方向の熱弾性雑音を求めた。しかし結果が一致しなかったためそれぞれの手法で用いている方程式中の微小項を落とすという近似をせずに解くことで値の変化を見ようと試みた。その結果は図 4.2, 4.3 よりそれぞれの方法で近似の有無によるパワースペクトル密度の値の変化は 1-2 倍程度であった。また図 4.4 からわかるように Langevin の方法は Levin の方法より 10 桁以上も大きい。特に Langevin の方法の結果は、KAGRA の設計感度と比べて大きいことから現実的ではないと考えられる。§ 4.5.1 で見たようにそもそも 3 つの理論に計算間違いが存在する可能性もある。特に Langevin のアプローチでは Langevin 項を熱拡散方程式に導入しており、本論文で扱った他の方法での熱拡散方程式とは異なる形になっている。この確率方程式が今回計算している系では適用できないことも考えられる。

過去の文献を調べていくと Levin と同じ式を解き、アドミッタンスからパワースペクトル密度を求めるという手法 (Gonzaletz の手法) を発見した。そこで同様の手法でパワースペクトル密度を求めたが、図 4.4 より Langevin と Levin と一致せず、それぞれから 5 桁程度離れて中間程度に位置する結果となった。今後、どの理論が正しいか理論的な検証は必須であるが、別の観点からのアプローチとしてこのような熱弾性雑音の実験による検証も有効だと考えられる。

第5章 まとめ

本研究では、2つのパートに分けて縦方向の非平衡熱雑音の理論的な考察をおこなってきた。前半では、板ばねを用いた検証実験のために上面と下面の各境界において温度勾配がゼロでない境界条件で Q 値の算出をおこなった。温度勾配がゼロになるときの仮想的な長さをおき、板ばねの材質や大きさに依存する横軸に対する Q 値の逆数の変化をみた。熱流が境界でゼロになっているグラフと比べて仮想長さを大きくとるほどピークの左側で Q 値の逆数は大きくなっていった。一方でピークの右側では小さくなっていき、さらに周期的なディップをもつことが分かった。さらに、より具体的に板ばねの大きさと材料を定めたときに予測される Q 値を求めた。

後半では、より重力波望遠鏡の懸架系に近い状況での考察として、ファイバの上端と下端で温度勾配をもつ1次元ファイバの系で過去に熱雑音の計算で用いられたことのある3つの手法を考察した。1つ目は Gonzaletz の方法で、同様に仮想的な振動力を境界条件として加え、アドミッタンスを求めてからパワースペクトル密度を求める手法である。2つ目は Langevin の方法で、熱拡散方程式に Langevin 項を用いてアンサンブル平均からパワースペクトル密度を求める手法である。3つ目は Levin の方法で、境界条件に仮想的な振動力を加えて平衡温度との差を求めてパワースペクトル密度を計算する手法である。

Langevin の方法と Levin の方法の先行研究 [39] においてその結果は一致しており、運動方程式や熱拡散方程式の微小な項を無視する近似などが行われているが、本研究ではその項を無視せずに解いた場合の結果をみた。しかし、図 4.2, 4.3 からわかるように近似の有無での差は1-2倍程度で大きな差は見られなかった。そこで Levin の方法と同じ式を用いてアドミッタンスからパワースペクトル密度を求める Gonzaletz の方法からも感度曲線を求めた。これら3つの理論の結果を KAGRA の感度曲線と比較した図 4.4 より、Langevin, Gonzaletz, Levin の順で5桁ほどずつ小さくなっており、さらに Langevin の方法では KAGRA の設計感度よりも大きい結果となった。また低周波での傾きの違いから単に各感度の定数倍だけ係数が異なっているという可能性は低い。3つの手法において我々の計算に間違いがあるか、適用限界が存在する可能性が考えられる。特に Langevin の方法では適切な結果ではないこともあり得る。さらに Levin の方法において、境界条件としてファイバの両端で温度勾配がある場合での計算もおこなった。温度勾配がゼロに

なる仮想的な長さをおき、その値を変化させたときの感度の値を求めた。ここでは実際のファイバの両端から等しい長さだけ離れたところで温度勾配がゼロになる場合と、異なる長さだけ離れたところで温度勾配がゼロになる場合に分けた。図 4.5, 4.6 より、仮想的な長さを大きくしていくと、つまりより離れたところで温度勾配がゼロになると仮定すると、より雑音の感度が大きくなることを確認した。

今後の展望として、

- Levin の方法や Langevin の方法でその元となる理論を検証、適用条件を考える
- ファイバの両端で温度勾配がゼロでない系の計算において、変位 u の境界条件を実際の系と同じ条件でおこなう (§ 4.2)
- 矩形柱の曲げ運動を Langevin の方法で計算し、Lifshitz や Levin の方法の結果と一致するか確かめる
- 有限要素法を用いてシミュレーションをおこなう

などが考えられる。このように複数の理論で異なる結果を示していることから理論的側面だけでなく、本研究室では縦方向の熱弾性雑音の実験的側面からの検証も考えられている。

付録A 理論の補足

本章では理論に関する情報をまとめる。

A.1 揺動散逸定理

A.1.1 等分配の原理 (Equipartition theorem) との関係

§ 2.3.1 で見てきたように揺動散逸定理から熱雑音を減らす方法は散逸を減らすということであると考えられる。ここで他の熱力学の理論、等分配の原理と矛盾がないか言及しておく。等分配の原理とは、ハミルトニアンの中の全ての2次の項が平均エネルギー $k_B T/2$ をもつというものである。1次元調和振動子において2次の項は $mv^2/2$ と $kx^2/2$ であり、特に後者についてみると等分配により、

$$\bar{x}^2 = \frac{k_B T}{k} \quad (\text{A.1.1})$$

となる。この式は散逸の強さにかかわらず保たれる。この事実は揺動のパワースペクトルの異なる側面を見ているため揺動散逸定理と矛盾しない。等分配の原理が2乗平均の理論であるのに対し、揺動散逸定理は各周波数でのパワースペクトル密度を見ており、それはアドミッタンスに比例する: $x_{therm}^2 \propto \text{Re}\{Y(\omega)\}$ 。

ここで例として速度に比例した摩擦をもつ調和振動子のアドミッタンスを考える。式 (2.3.7) より分子の実部は速度に比例する摩擦の係数 b のみである。共振から離れたところにおいて分母は高周波数で m のみ、低周波で k のみにほぼ依存する。一方で共振に近いところで b が支配的である。つまり共振周波数から離れたところで変位のスペクトル密度の熱雑音の値は小さく、共振周波数近くでの応答が多くを占める。正味の影響は変位のパワースペクトルであるが、その全周波数に対する積分は散逸の量に独立である。より正確に、揺動散逸定理を用いてどの共振からも離れた熱雑音のスペクトル密度を減らすためには、散逸の量を減らす必要があるということが分かる [1]。

A.1.2 非平衡での揺動散逸定理

揺動散逸定理において非平衡とするとき、力学的系の自由度を拡張することを考える。個々の全自由度の相互作用は1つの温度で表される程度に十分

に局所化される。この時のインピーダンスは、散逸のない項 Z_{free} とわけて、行列表記で次のように書ける:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{free} + \sum_l \mathbf{Z}_l = \mathbf{Z}_{free} + \int \mathbf{z}(\mathbf{r})d^3r. \quad (\text{A.1.2})$$

ここで添え字 l は相互作用の自由度の組み合わせについて走る。これをベクトル化した式 (2.3.1) に代入すればよい [12]。

A.2 Langevin 方程式と Nyquist 定理

ブラウン運動における古典論として次のような現象論的な確率方程式をよく用いる [14]:

$$m\dot{u}(t) = -m\gamma u + R(t). \quad (\text{A.2.1})$$

これは 1 次元の自由なブラウン粒子に対する最もシンプルな Langevin 方程式である。右辺の第 1 項が媒質による摩擦力、第 2 項 $R(t)$ が周囲の分子のランダムな衝突に起因するランダムな力を表す。簡単のためランダム力は 2 つの条件を満たす。1 つ目はガウシアン分布を満たすということで、2 つ目はその相互作用の時間は非常に短く $R(t)$ の自己相関関数が、

$$\langle R(t_1)R(t_2) \rangle = 2\pi G_R \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{A.2.2})$$

という形で書けるということである。ただし G_R は定数である。これらの仮定は、衝突の分子よりずっと大きな質量をもつブラウン粒子に対してその衝突が非常に多くの連続した衝突であるため有効である。さらにこの Langevin 方程式から導かれる Fokker-Planck 方程式によって、時刻 t_0 での速度 u_0 から時刻 t での速度 u への遷移確率 $W(u_0, t_0; u, t)$ を求められる:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \frac{\partial}{\partial u} \left(D_u \frac{\partial}{\partial u} + \gamma u \right) W \quad (\text{A.2.3})$$

$$W(u_0, t_0; u, t) = \delta(u - u_0). \quad (\text{A.2.4})$$

よって、速度空間での散逸の定数 D_u はランダム力によって定められる:

$$D_u = \frac{1}{m^2} \int_0^\infty \langle R(t_0)R(t_0 + t) \rangle dt. \quad (\text{A.2.5})$$

ここでブラウン運動は熱平衡にある媒質で行われていると考えているから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(u_0, t_0; u, t) = C \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \frac{mu^2}{k_B T} \right) \right\} \quad (\text{A.2.6})$$

が成り立つ。これは摩擦と散逸の間に $D_u = \gamma k_B T / m$ の関係が成り立つことを要求する。これを式 (A.2.5) に代入すると、

$$m\gamma = \frac{m^2 D_u}{k_B T} = \frac{1}{k_B T} \int_0^\infty \langle R(t_0) R(t_0 + t) \rangle dt. \quad (\text{A.2.7})$$

この式は揺動散逸定理の別の表現の 1 つであり、摩擦として現れる微視的な力の規則的な部分がランダム力の相関によって定まるということを示す。以上の考察をポテンシャル場のブラウン粒子に導入すると、Langevin 方程式は次のように書ける:

$$\begin{cases} \dot{x} = u & (\text{A.2.8}) \\ m\dot{u} = -m\gamma u - \frac{\partial V}{\partial x} + R(t). & (\text{A.2.9}) \end{cases}$$

このとき遷移確率 $W(x_0, u_0, t_0; x, u, t)$ に対する Fokker-Planck 方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} \right) W = \frac{\partial}{\partial u} \left(D_u \frac{\partial}{\partial u} + \gamma u \right) W \quad (\text{A.2.10})$$

$$W(x_0, u_0, t_0; x, u, t) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0). \quad (\text{A.2.11})$$

この方程式の静止解がカノニカル分布にのるとすると、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} W(x_0, u_0, t_0; x, u, t) = C \exp \left\{ \left\{ -\frac{1}{k_B T} \left(\frac{1}{2} m u^2 + V(x) \right) \right\} \right\}. \quad (\text{A.2.12})$$

つまり、我々のとった仮定においてランダム力は力場の存在に依存しないということを示す。

式 (A.2.2) の仮定は、ランダム力のパワースペクトルは単に G_R に等しい定数であることを意味する。よってランダム力は白色スペクトルをもち、式 (A.2.7) は、

$$G_R = \frac{m k_B T \gamma}{\pi}, \quad (\text{A.2.13})$$

または

$$\langle R(\omega) R(\omega') \rangle = \frac{k_B T m \gamma}{\pi} \delta(\omega + \omega') \quad (\text{A.2.14})$$

と書ける。式 (A.2.14) の関係はより大きな意味をもちランダム力は摩擦によって定められるパワースペクトルをもつべきということである。これは Nyquist によって最初に見つけられた。摩擦とは、またはより一般に与えられた系の抵抗とは、外からの仕事を微視的なエネルギーに散逸させる方法である。逆のプロセスは熱的な揺動の結果としてランダム力が発生するというものである。よって Nyquist は抵抗に表れる起電力がそのインピーダンスによって定まることを証明した [14]。

A.3 Wiener-Khinchin の定理

自己共分散関数 $\gamma(t)$ をもつどんな実数値化された静的な確率論的プロセスに対しても、単調増加する関数 $F(\omega)$ で次のようにかける:

$$\gamma(t) = \int_0^\pi \cos \omega t \, dF(\omega). \quad (\text{A.3.1})$$

これは自己共分散関数のスペクトル描像と呼ばれる。 F がもつ物理的描像をみることができ $(0, \omega)$ の範囲にある周波数によって占められる級数の分散への寄与である。

負の周波数で次が定義されているとする:

$$F(\omega) = 0 \quad (\omega < 0). \quad (\text{A.3.2})$$

時間の単位周期で測定される離散時間のプロセスに対して考えうる最大の周波数は Nyquist 周波数 π であり、ゆえに全ての分散 σ^2 は π より小さな周波数によって占められる。よって、

$$F(\pi) = \sigma_X^2 \quad (\text{A.3.3})$$

となり、この最後の結果は単に式 (A.3.1) に $k = 0$ を代入すると得られる:

$$\gamma(0) = \sigma_X^2 = \int_0^\pi dF(\omega) = F(\pi). \quad (\text{A.3.4})$$

ここで ω が 0 から π で F は単調増加する [43]。

A.4 つり合いの方程式

物体が重力場にあるとき、内部応力と物体の単位体積あたりに作用する重力 ρg の和はゼロとならねばならない。これより、つり合い方程式が成り立つ [32] [33]:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \quad (\text{A.4.1})$$

ここで ρ は密度、 \mathbf{x} は鉛直下方向に向かう重力加速度ベクトルである。この一般方程式に応力テンソル $\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right)$ の式を代入する必要がある。さらに $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ を代入するとつり合い方程式は次のようにかける:

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \quad (\text{A.4.2})$$

ただし u は物体の相対縮み、 E はヤング率、 σ はポアソン係数である。これをベクトル形式で書いておくと、

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\rho \mathbf{g} \frac{2(1+\sigma)}{E}. \quad (\text{A.4.3})$$

これはベクトル解析の公式 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ を用いて次のように変形することもできる:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\rho \mathbf{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \quad (\text{A.4.4})$$

A.5 境界条件の鏡の慣性項

u についての境界条件で実際の系では鏡の慣性項が含まれる。この慣性項について述べておく。鏡を吊るした点における運動方程式を考える:

$$M \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = -T. \quad (\text{A.5.1})$$

ここで張力 (tension) T について σ を応力、 λ をひずみとすると、

$$\begin{aligned} T &= S \times \sigma \\ &= S \times E \times \lambda \\ &= SE \times \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L}. \end{aligned} \quad (\text{A.5.2})$$

これを式 (A.5.1) に代入して両辺を時間についてフーリエ変換すると、

$$-M\omega^2 u(L, \omega) = -SE \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \Big|_{x=L}. \quad (\text{A.5.3})$$

よって u の $x = L$ における境界条件は次のようにおける:

$$u'(L) = \frac{M\omega^2}{SE} u(L). \quad (\text{A.5.4})$$

以上のようにして鏡の慣性項を含んだ境界条件を導出できる。

A.5.1 近似をしない Levin の方法で鏡の慣性項を含む

境界条件に鏡の慣性項をいれて考えると式 (4.1.71) を用いて計算できる。このときの積分定数 A, C を求める。なお θ についての境界条件から $B, D = 0$ である。熱拡散方程式 (4.1.69) を微分して $x = L$ を代入すると、

$$u''(L) = -\frac{\rho C}{SE\alpha T} \left(\theta'(L) - \frac{\chi}{i\omega} \theta'''(L) \right) = \frac{\rho C}{SE\alpha T} \frac{\chi}{i\omega} \theta'''(L). \quad (\text{A.5.5})$$

この式と運動方程式 (4.1.68) で $x = L$ とした式を用いて、

$$u(L) = -\frac{SE}{\rho\omega^2}(u''(L) + \alpha\theta'(L)) = -\frac{C}{\alpha T\omega^2} \frac{\chi}{i\omega} \theta'''(L). \quad (\text{A.5.6})$$

熱拡散方程式 (4.1.69) で $x = L$ のとき、 $u'(L)$ についての境界条件と式 (A.5.6) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{\chi}\theta(L) - \theta''(L) &= -\frac{SE\alpha T}{\rho C} \frac{i\omega}{\chi} \left(\frac{F_0}{SE} + \frac{M\omega^2}{SE} u(L) \right) \\ &= -\frac{SE\alpha T}{\rho C} \frac{i\omega}{\chi} \frac{F_0}{SE} - \frac{M}{\rho} \theta'''(L). \end{aligned} \quad (\text{A.5.7})$$

ここに $u(x) = A \cos k_1 x + C \cos k_2 x$ を代入して積分定数 A, C を定める。ただし、ここでも A と C は式 (4.1.98) の関係を満たしている:

$$\begin{aligned} &\frac{i\omega}{\chi}\theta(L) - \theta''(L) + \frac{M}{\rho}\theta'''(L) \\ &= A \left\{ \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \cos k_1 L - \frac{M}{\rho} k_1^3 \sin k_1 L \right\} \\ &\quad + C \left\{ \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2 \right) \cos k_2 L - \frac{M}{\rho} k_2^3 \sin k_2 L \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.5.8})$$

$$\begin{aligned} &= A k_1 \sin k_1 L \left\{ \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \frac{1}{k_1} \cot k_1 L \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2 \right) \frac{1}{k_2} \cot k_2 L - \frac{M}{\rho} (k_1^2 - k_2^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5.9})$$

以上より、積分定数は次のようにかける:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{-\frac{\alpha T}{\rho C} F_0 \frac{i\omega}{\chi} \frac{1}{k_1 \sin k_1 L}}{\left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \frac{\cot k_1 L}{k_1} - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2 \right) \frac{\cot k_2 L}{k_2} - \frac{M}{\rho} (k_1^2 - k_2^2)} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.5.10})$$

$$\left\{ \begin{aligned} C &= \frac{\frac{\alpha T}{\rho C} F_0 \frac{i\omega}{\chi} \frac{1}{k_2 \sin k_2 L}}{\left(\frac{i\omega}{\chi} + k_1^2 \right) \frac{\cot k_1 L}{k_1} - \left(\frac{i\omega}{\chi} + k_2^2 \right) \frac{\cot k_2 L}{k_2} - \frac{M}{\rho} (k_1^2 - k_2^2)}. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.5.11})$$

ここで $M \rightarrow 0$ としたとき式 (4.1.99), (4.1.100) に一致している。

付録B LIGO

アメリカにある干渉計型重力波望遠鏡 LIGO において懸架系ファイバの材質は Fused Silica が使われている。Fused silica は常温でも熱弾性雑音が打ち消されるため選ばれた。ただし、ここではファイバの曲げの運動を考えており曲げを起こすための外力が内部応力に比べて小さいという近似を用いている [45]。以下では、LIGO のパラメタを代入して縦方向の熱弾性雑音を求めた結果を載せる。

B.1 LIGO のパラメタにおける縦方向熱弾性雑音

LIGO の Fused Silica 製ファイバのパラメタをいれたときの結果を見てみる。LIGO での懸架系ファイバにおけるパラメタの値を表 B.1 に載せる。

Symbol	Meaning	Value
M	Test mass mass / four fibers	40[kg]/4
L	Total length	60.2[cm]
-	Diameter, central region	400[μm]
-	Diameter, end sections	800[μm]
-	Length of each end section	1.5[cm]
C	Heat capacity	770[J/kg/K]
κ/S	Thermal conductivity	1.38[W/m/K]
α	Thermal expansion coeff.	3.9×10^{-7} [K]
E	Young's modulus	7.2×10^{10} [Pa]
-	Temperature coeff of E	$(1/E)dE/dT$ $= 1.52 \times 10^{-4}$ [/K]
ρ	Linear density	2.2×10^{-3} [kg/m ³] $\times S$

表 B.1: LIGO parameters (Fused Silica) [46]

[47]

B.2 計算結果

Langevin の方法、Levin の方法、Gonzaletz の方法で計算したパワースペクトル密度、式 (4.1.40), (4.1.89), (4.1.18) において表 B.1 のパラメタに置き換えて計算したときの結果を図 B.1 に載せる。ただしファイバの直径は一律に $400[\mu\text{m}]$ とした。

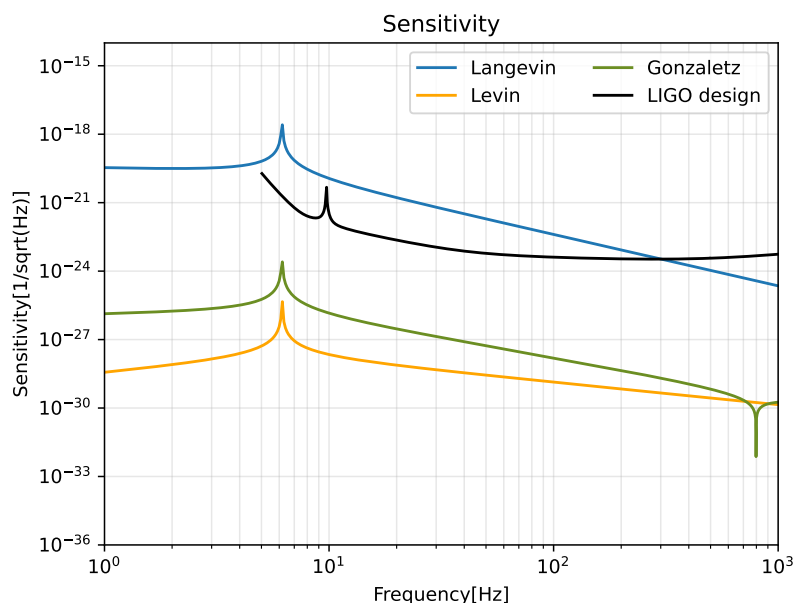


図 B.1: LIGO のパラメタにおいて、Langevin, Levin, Gonzaletz の方法で計算したときの結果。

図 B.1 より図 4.4 と同様に Langevin の方法での感度が最も大きく、順に Gonzaletz の方法、Levin の方法となっている。さらに Langevin の方法での結果は LIGO の設計感度曲線も超えていることが理解できる。また、ピークは 6Hz 程度で低周波側に確認できる。Levin の方法と Gonzaletz の方法について高周波帯で値が近くなっていることが分かる。

次に境界で熱流があると仮定したときのパワースペクトル密度の式 (4.2.9) で、表 B.1 のパラメタに置き換えて計算したときの結果を図 B.2 に載せる。

図 B.2 より、 $h = 0$ とした時の結果ははじめから境界で熱流がゼロとして計算した結果 (橙点線) と重なっていることが分かる。KAGRA のサファイアのときの結果である図 4.5 と同様に、が大きくなるほどピークより低周波側で値が大きくなっている。ピークより高周波側では大きく変わらない。またすべての h に対してピークは低周波側に出ている。

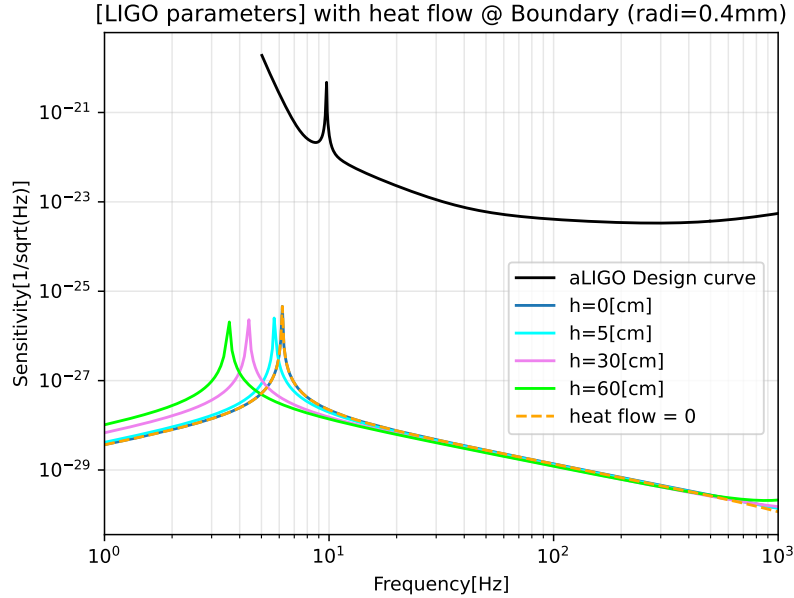


図 B.2: LIGO のパラメタで境界で熱流をもつときの計算結果。KAGRA のサファイアファイバのときと同様に $h = 0, 5, 30, 60$ [cm] とした。さらに aLIGO の設計感度曲線と境界で熱流をゼロとしたときの計算結果 (橙点線) を併せて載せる。

B.3 考察

図 B.1 より Langevin の方法では設計感度を超過しており、現在 LIGO で測定された雑音スペクトルにこのような雑音表れていないことを考慮すると、Langevin の手法には制限がつくか我々の計算手法が間違っている可能性がある。また、Levin の方法と Gonzalez の方法について高周波帯で値が近くなっており、高周波帯では 2 つの手法の値が一致する可能性も考えられる。[38] によると、ブラウン熱雑音の計算においてアドミタンスから求める揺動散逸定理による理論と、Levin による理論が共振から離れたところでは一致すると書いてあり、本研究で用いた手法でも共振から離れているより高周波帯のところでは 2 つの手法が一致することも考えられる。

図 B.2 について、KAGRA のサファイアのときの結果である図 4.5 と比べてピークが全体的に低周波側によっており、さらに aLIGO の設計感度と比べても低周波側にあり、常温でも熱弾性雑音が小さくなるという Fused silica の特性を表した結果と言える。

図 B.1, B.2 のピーク位置について、§ 4.5.2 と同様に式 (4.1.89) の分母が

$$\frac{M\omega^2}{SE} \sin kL_2 - k \cos kL_2 = 0 \quad (\text{B.3.1})$$

となるとき周波数 ω_0 と一致しているか確認する。

$$y \equiv k \frac{M}{\rho} \tan kL_2 - 1 \quad (\text{B.3.2})$$

がゼロになる k を探し、そこから ω_0 を求めた結果を表 B.2 に載せる。

$h[\text{cm}]$	$\omega_0[\text{Hz}]$
0	6.1
5	5.7
30	4.4
60	3.6

表 B.2: LIGO のパラメタでのそれぞれの h において、 $y = k \frac{M}{\rho} \tan kL_2 - 1$ がゼロになるときの周波数 ω_0 の計算結果。

図 B.2 と表 B.2 より、ピークの位置と計算結果がほとんど一致していることが分かる。

B.4 まとめ

LIGO における Fused silica 製の懸架系ファイバでの熱弾性雑音の計算結果をみた。図 B.1, B.2 から 3 つの方法と熱流を考えた Levin の方法の全てにおいて低周波側にピークがあり、LIGO の設計感度と比較すると感度に影響を与えにくい領域にピークがでていることを確認できた。これは、常温でも熱弾性雑音の影響が小さいという事実に沿う結果である。また、図 B.1 より Langevin の方法では明らかに LIGO の設計感度を超過しており、これは LIGO で重力波を観測できている事実と反するため結果は計算が間違っていると考えられる。

謝辞

本論文を作成するにあたり、非常に多くの方に力添えして頂きました。大学院での2年間、私に関わってくださった全てのみなさまに心から感謝の意を表します。

指導教官の宗宮健太郎准教授には、私の実力以上とも思えるような機会を数多く与えていただき、大きな成長と発見を得られ私の人生にとってとても大切な時間となりました。フランスでの4週間のサマースクールへの参加では、世界中から集まった若手の研究者や博士学生とともに物理学の基礎から最新の研究を学ぶことができ、知識だけでなく研究への姿勢にも影響を受けました。本郷でのFWG meetingの発表は、不安が大きかったのですが事前練習など手厚いサポートのおかげで無事に乗り越えることができ、自信につながりました。自分自身の今の実力と可能性を身をもって感じることができ、これまでにない貴重な体験ができました。そして先生からは、研究に関する知識だけでなく実際にご活躍されている姿勢から非常に多くのことを学ぶことができたと思います。入学当初の希望とは異なる研究テーマを選んできましたが、最後まで私の意思を尊重し支えていただき誠にありがとうございました。

同期の笹岡聖也さんは、計算などの確認や議論をしてくれたり新しい情報を教えてくれるなど、何度もこの研究を助けてくれました。また熱弾性雑音の研究に関してだけでなく、英語の使い方、日々の暮らしでの知恵など非常に多くのことを教えてくれました。彼自身の研究活動でとても忙しい中でも、いつも私の質問や要望に丁寧に対応してくれ、尊敬の意とともにとても頼もしかったです。

博士2年の阿部誉さんには、熱弾性雑音の研究に関して主に実験的な側面から数多くの助言をしていただきました。また、重力波に関する知識や今まで積まれてきた経験など多くのことを教えてくださいました。研究活動での不安といった感情面に対してもご自身の経験から助言していただき心強かったです。

博士1年の鈴木海堂さんは、研究の取り組み方を教えてくださいたださるだけでなく、研究室で楽しくお話してくれたり皆を集めてご飯を食べたりと大変お世話になりました。毎回新しい発想を得ることができ、とても面白かったです。海堂さんのおかげで楽しい研究生生活を送れたと思います。

同期の竹口浩太郎さんには、フランスでの滞在や日々の研究室での生活など多くのことでお世話になりました。ソフトウェアなど私が全く知らないことに関して、いつもひとつひとつ丁寧に対応してくれとても助かりました。

特別研究員の原田健一先生からは、研究室内の学生たちに声をかけるなど細やかな点によく気を配る姿勢を学びました。同期の白倉航さんは、同期たちで集まろうと声をかけてくれたり仲良くなるきっかけを作ってくれました。そして私は先輩として至らぬ点多かったと思いますが、いつも端然と対応してくれた後輩たち 修士1年の羽場大起さん、学部4年の井殿亮さんと竹下賢徳さんにも感謝いたします。研究で直接関わることは少なかったですが、研究の合間に交わした会話はとても良い気分転換になりました。研究室で皆様と過ごした時間はとても楽しく、大切な思い出です。

I would like to express my gratitude to Diego Dominguez for his warm words and valuable advice on improving my English. His profound knowledge and insightful thinking have always encouraged me. I would also thank Sapna Hassanaly and Li Junlang for their significant contributions. Sapna-san enhanced the sense of community within our lab through her initiative. Despite my limited experience abroad, the time I spent with them was truly valuable.

そして大学院進学を理解し経済的にも不自由なく研究生活に打ち込めたのは、何よりも家族が支えてくれたおかげです。このような環境に身を置くことができ本当に恵まれていたと思います。ここまで育ててくれた両親と妹に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] P. R. Saulson, “Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors”, 2nd edition, World Scientific, 2017.
- [2] M. Maggiore, “Gravitational wave volume1: theory and experiments”, Oxford university press, 2008.
- [3] 須藤靖, “一般相対論入門 [改訂版]”, 日本評論社, 2019.
- [4] T. Akutsu et al, “Overview of KAGRA: Detector design and construction history”, PTEP, 05A101, 2020.
- [5] K. Somiya, “Detector configuration of KAGRA—the Japanese cryogenic gravitational-wave detector”, Class. Quantum Grav. 29 124007, 2012.
- [6] K. Yamamoto, et al., “Measurement of the mechanical loss of a cooled reflective coating for gravitational wave detection”, PHYSICAL REVIEW D 74, 022002, 2006.
- [7] 片岡優, “非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発”, 修士論文, 2017.
- [8] 佐々木開, “KAGRA の懸架系における非平衡熱雑音の検証”, 修士論文, 2020.
- [9] Yu. Levin, “Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach”, PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 57, NUMBER 2, 1998.
- [10] K. Somiya and K. Yamamoto, “Coating thermal noise of a finite-size cylindrical mirror”, PHYSICAL REVIEW D 79, 102004, 2009.
- [11] R. X. Adhikari, “Gravitational radiation detection with laser interferometry”, REVIEWS OF MODERN PHYSICS, VOLUME 86, 2014.
- [12] K. Komori et. al, “Direct approach for the fluctuation-dissipation theorem under nonequilibrium steady-state conditions”, PHYSICAL REVIEW D 97, 102001, 2018.

- [13] K. Somiya, “Detector configuration of KAGRA—the Japanese cryogenic gravitational-wave detector”, *Classical and Quantum Gravity*, 29 124007, 2012.
- [14] R. Kubo, “The fluctuation-dissipation theorem”, *Reports on Progress in Physics*, 29 255, 1966.
- [15] K.S. Fjørland, T. Fjørland and S. K. Ratkje, (監訳 伊藤靖彦), “わかりやすい非平衡熱力学”, オーム社, 1992.
- [16] R. Lifshitz and M.L. Roukes, “Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems”, *Physical Review B*, vol.61, no.8, 1999.
- [17] 岸証, “初心者のための熱測定”, (1) 熱膨張測定, *NETSUSOKUTEI* 8(2) 81-88, 1981.
- [18] C. Zener, “Internal friction in solids II. General theory of thermoelastic internal friction”, *PR*53.90, 1938.
- [19] M. A. Hopcroft, “What is the Young’ s Modulus of Silicon?”, *JOURNAL OF MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS*, VOL. 19, NO. 2, APRIL 2010.
- [20] J. R. Rumble (Edition-in-chief), “CRC HANDBOOK OF CHEMISTRY and PHYSICS”, 102nd edition, CRC Press, 2021-2022, 12-122 127.
- [21] H. R. Shanks et al., “Thermal Conductivity of Silicon from 300 to 1400’K”, *PHYSICAL REVIEW VOLUME* 130, NUMBER 5, 1963.
- [22] A. Goldsmith et al, “Handbook of thermophysical properties of solid materials Revised edition”, Vol.1 elements, The Macmillan Company New York, 1961.
- [23] E.R. Dobrovinskaya et al., “Sapphire: Material”, *Manufacturing, Applications*, 55, Springer Science + Business Media, LLC 2009, p96.
- [24] H. Watanabe et al., “Linear Thermal Expansion Coefficient of Silicon from 293 to 1000K”, *International Journal of Thermophysics*, Vol. 25, No. 1, January 2004.
- [25] Y. Miyashita et al., “Formation behavior of bubbles and its effect on joining strength in dissimilar materials laser spot joining between PET and SUS304”, *Mechanical Engineering Journal*, Vol.2, No.1, 2015.

- [26] Y. Takagi et al., “THE EFFECT OF THE THERMAL EXPANSION COEFFICIENT ON THE SEALING PERFORMANCE OF PIPE FLANGE CONNECTIONS WITH NI-TI SHAPE MEMORY ALLOY GASKETS”, Proceedings of PVP2006-ICPVT-11 2006 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference July 23-27, 2006, Vancouver, BC, Canada.
- [27] T. Akutsu et al, “First cryogenic test operation of underground km scale gravitational-wave observatory KAGRA”, 9 Class. Quantum Grav. 36 165008, 2019.
- [28] Yuk Tung Liu and Kip S. Thorne, “Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses”, PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 62, 122002, 2000.
- [29] R. Lifshitz and M.L. Roukes, “Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems” Physical Review B, vol.61, no.8, 1999.
- [30] C. Zener, “Internal friction in solids I. theory of internal friction in reeds”, Physical Review, Ver.52, p230-p235, 1937.
- [31] G.I.Gonzalez and P.R.Saulson, “Brownian motion of a mass suspended by an anelastic wire”, Acoustical Society of America, 96(1), July 1994.
- [32] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “Theory of Elasticity”, Pergamon Press, Oxford, 1959.
- [33] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, “ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程 弾性理論”, 東京図書株式会社, 1989.
- [34] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, “ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程 流体力学 1, 2”, 東京図書株式会社, 1975.
- [35] C. J. Kamp, et al., “Directional radiative cooling thermal compensation for gravitational wave interferometer mirrors”, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 607, 2009.
- [36] S. Ballmer and V. Mandic, “New Technologies in Gravitational-Wave Detection”, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2015. 65:555–77.
- [37] V.B. Braginsky and Vyatchanin, “Thermodynamical fluctuations in optical mirror coatings”, Physics letters A 312, 2003, Appendix A.
- [38] L. Cuuningham, et al., “Estimate of thermal and seismic noise from aLIGO quad suspension blade springs”, LIGO-T1300595.

- [39] V.B.Braginsky, M.L.Gorodetky, and S.P.Vyatchanin, “Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational antennae”, Physics letters A 264, 1999.
- [40] Y. Enomoto, et al., “Latest estimated sensitivity of KAGRA, v201708”, JGW-T1707038-v9, 2017.
- [41] X. Korveshi, et al., “Cryogenic payloads for the Einstein Telescope - Baseline design with heat extraction, suspension thermal noise modeling and sensitivity analyses”, Physical review D 108, 2023.
- [42] CAD/CAE 研究会編, “有限要素法解析ソフト ANSYS 工学解析入門”, 第 2 版, 2005/ 第 3 版, 2020.
- [43] C. Chatfield and H. Xing, “The analysis of time series; An introduction with R”, Seventh Edition, CRC Press, 2019.
- [44] R.H.Landau et.al., (監訳 小柳義夫), “実践 Python ライブラリー 計算物理学 II -物理現象の解析・シミュレーション-”, 朝倉書店, 2018.
- [45] G. Cagonoli and P. A. Willems, “Effects of nonlinear thermoelastic damping in highly stressed fibers”, Physical review B, Vol.65, 174111, 2002.
- [46] Advanced LIGO Systems Group, P. Fritshel, ed., “Advanced LIGO Systems Design”, LIGO-T010075-v2, Table 6, 2009.
- [47] Fused silica properties from Heraeus, “Fused Quartz and Fused Silica for Optical Applications Data and Properties”, Feb, 2023.