

深層学習を用いた鏡の姿勢制御について

東京工業大学大学院理学院物理学系
20M00544 立原 浩輝

2022年3月31日

概要

本研究の目的は、光学実験系の構築をより速く、より簡単に行うことである。例えば、現在の重力波検出器はレーザーを干渉させる Michelson 干渉計を原理とした型が主流であり、いわば大規模な光学実験装置である。その重力波に対する高い感度は光学の様々な要素技術に支えられており、これらの技術は実験室での光学実験によって検証される。光学実験は微小距離の計測が可能な分、繊細である。例えば、実験室で構築するような 1m スケールの光共振器という単純なセットアップでも、フロントミラーが 1mrad ずれるだけでも共振は見えなくなりレーザー光は汚くなる。このようなアライメントのずれがある状態では実験を行うことはできないので、研究者は実験室でこの微小な傾きを正確に配置する必要がある、一般的には光学系の応答を確認しながら長時間かけ光学系を構築する。この構築の速度や精度は実験者のセンスに依存している面が大きく、理想的なアライメントを作れたとしても、地面振動や温度変化によってアライメントは簡単に崩れてしまう。

このように実験の前段階に過ぎないアライメントという作業に多くの労力をかけている現状があるが、人間が行っている作業である以上、これは人工知能によって再現可能ではないか。つまり、アライメントの情報と光学系の応答をニューラルネットワークに学習させれば、これらの手順は自動化できるのではないか、という期待が本研究のモチベーションである。

従来の角度制御法として Wave Front Sensor 法 (WFS 法) が存在し、これは Hermite Gaussian モードの 00 モードと 10 モードの干渉を検出することで鏡の姿勢制御を行う。一方で、ミラーが傾いたときに現れる高次モードは 10 モード以外にもあり、CCD カメラを用いることでこれらの高次モードを計測し、ミラーの角度との関係をニューラルネットワークに学習させることで制御領域を WFS 法よりも広げられる期待がある。

本研究では共振器長 1m の Fabry Perot 共振器のシミュレーションをコンピューター上で行い、WFS 法を元に CCD カメラでビームの画像を取得し、ミラーの回転角と CCD カメラ画像の出力の教師データセットを生成した。次に、CCD カメラ画像を主成分分析することで特徴量を抽出し、これを説明変数、ミラーの自由度を目的変数としてこれをニューラルネットワークに学習させ、CCD カメラの画像からミラーの姿勢を予測するモデルを作成した。このモデルに対して、ランダムに生成したテストデータのカメラ画像を流し込み Fabry Perot 共振器の自由度を推定、そのモデルの正当性を評価した。

Abstract

The purpose of this study is to construct an optical experimental system more quickly and easily. For example, current gravitational wave detectors are mainly based on Michelson interferometer, which is a large-scale optical experimental device. The high sensitivity to gravitational waves is supported by various elemental technologies of optical systems, and these technologies are verified by optical experiments in the laboratory. These technologies are verified by optical experiments in the laboratory. Optical experiments are delicate because they can measure small distances. For example, even in a simple setup such as a 1-meter scale optical cavity constructed in a laboratory, even a 1.0-mrad misalignment of the front mirror makes the resonance invisible and the laser beam dirty. Experiments cannot be carried out with such misalignment, and researchers need to accurately position this minute tilt in the laboratory, and generally spend a long time constructing the optical system while checking the response of the optical system. The speed and accuracy of this construction is largely dependent on the experimenter's sense, and even if an ideal alignment can be created, the alignment can easily be broken by ground vibration or temperature change.

In this way, a lot of effort is currently spent on alignment, which is only the preliminary stage of an experiment, but since it is a task performed by humans, it should be reproducible by artificial intelligence. In other words, the motivation for this research is the expectation that these procedures can be automated if a neural network is made to learn the alignment information and the response of the optical system.

The conventional angle control method is the Wave Front Sensor (WFS) method, which controls the attitude of the mirror by detecting the interference between the 00 and 10 modes of the Hermite Gaussian mode. On the other hand, there are higher-order modes other than the 10 modes that appear when the mirror is tilted. By using a CCD camera to measure these higher-order modes and learning the relationship between them and the mirror angle in a neural network, it is expected that the control area can be expanded beyond the WFS method.

In this study, we simulated a FP resonator with a resonator length of 1 m on a computer, acquired images of the beam using a CCD camera based on the WFS method, and generated a teacher data set of the rotation angle of the mirror and the output of the CCD camera image. Next, the CCD camera images were subjected to principal component analysis to extract the feature values, which were then used as explanatory variables and the degree of freedom of the mirror as the objective variable in a neural network. The degree of freedom of the FP resonator was estimated from the camera images of randomly generated test data, and the validity of the model was evaluated.

目次

概要 / Abstract	1
第 1 章 導入	9
第 2 章 重力波理論と検出器	12
2.1 Einstein 方程式	12
2.2 弱重力場	13
2.3 重力波	14
2.4 重力波の検出	15
第 3 章 レーザー光学	16
3.1 Gaussian ビーム	16
3.1.1 電磁波	16
3.1.2 近軸 Helmholtz 方程式	17
3.1.3 Gaussian ビーム	18
3.1.4 ビームパラメータ	21
スポットサイズ $w(z)$	21
ビームウエスト z_0	22
Rayleigh レンジ z_R	23
曲率半径 $R(z)$	23
Gouy 位相 $\eta(z)$	25
ビームパラメータの関係	25
3.2 Herimite Gaussian モード	25
3.2.1 ビームの平行移動	26
3.2.2 ビームの回転移動	28
3.2.3 ビーム移動の行列表現	30
3.3 Fabry Perot 共振器	31
3.3.1 反射光強度と透過光強度	31
3.3.2 共振条件と共振器の評価	33
3.4 Pound Drever Hall 法 (PDH)	34
3.4.1 エラー信号	34
3.4.2 位相変調	35
3.4.3 サイドバンド光に対する共振器の応答	35

3.4.4	PDH 信号のフィードバック	37
3.5	Wave Front Sensing 法 (WFS)	37
3.5.1	共振器の反射行列	37
3.5.2	ミスアラインされた共振器のエラー信号	38
3.5.3	PDH 信号と WFS 信号の分離	39
3.5.4	共振状態における WFS 信号	40
3.5.5	分割 PD による WFS 信号の取得	41
第 4 章	深層学習	43
4.1	主成分分析 (PCA)	43
4.2	標準化	45
4.3	ノード	45
4.4	階層型ニューラルネットワーク	45
4.5	損失関数	46
4.6	勾配法	46
4.7	誤差逆伝播法	49
4.8	活性化関数の勾配消失問題	51
第 5 章	実験	52
5.1	実験の手順	52
5.2	実行環境	52
5.3	光学シミュレーション	52
5.3.1	光学系のセットアップ	53
5.3.2	PDH 信号の計測とフィードバック	55
5.3.3	WFS 信号の計測	57
5.3.4	ミラーのミスアライメント	61
5.3.5	CCD カメラ画像の取得	63
5.4	PCA による基底の抽出	66
5.5	NN による深層学習	76
5.5.1	ミラー角の推定	76
5.5.2	ビームパラメータの推定	80
第 6 章	結論と考察	81
	参考文献	82
	謝辞	84

目次

1.1	共振器長 1m の光共振器	9
1.2	フロントミラーを傾けた時の透過光パワー (シミュレーション)	10
1.3	図 1.1 の光学系における反射光 CCD カメラ画像 (シミュレーション)	10
1.4	y 軸から 1mrad の傾きを持った直線のグラフ (青線)	11
2.1	Michelson 干渉計による重力波の検出	15
3.1	Gaussian ビームの xy 平面での断面	21
3.2	横から見た Gaussian ビーム	22
3.3	FabryPerot 共振器	31
3.4	FabryPerot 共振器の反射光パワー $P_r(\phi)$ と透過光パワー $P_t(\phi)$	33
4.1	元の特徴量空間	44
4.2	新しい特徴量空間	44
4.3	ノード	45
4.4	階層型ニューラルネットワーク (例)	46
4.5	損失関数と重みの関係	47
4.6	重みの初期値	47
4.7	重みの更新	48
4.8	勾配法での発散	48
4.9	ノードの座標	49
4.10	ノードの入出力	50
5.1	シミュレーションを行う FP 共振器のセットアップ	54
5.2	共振器長を変えた場合の透過光の計測 横軸は EM の位相. 光の往復する共振器長が入射光波長の定数倍になるときに FP 共振器の 共振が見られる.	55
5.3	EOM 変調器を導入した FP 共振器のセットアップ	56
5.4	PDH 信号	56
5.5	PDH フィードバックのセットアップ	57
5.6	揺らすモードにおける Gouy 位相に対する応答の違い	58
5.7	それぞれのモードに最適化した Gouy 位相に設置した検出器における応答	59
5.8	WFS 信号 (MAXTEM=6)	60

5.9	WFS 信号 (MAXTEM=3)	61
5.10	ミラーの回転	62
5.11	ミラーを回転させた際の透過光強度	63
5.12	CCD カメラのセットアップ	64
5.13	アライメントの取れた検出器での反射光 CCD カメラ画像	64
5.14	ハードモードで 0.1mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像	65
5.15	ソフトモードで 0.1mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像	65
5.16	ハードモードで 1.0mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像	66
5.17	ソフトモードで 1.0mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像	66
5.18	PCA0 (CH モード用検出器)	67
5.19	PCA1 (CH モード用検出器)	67
5.20	PCA2 (CH モード用検出器)	67
5.21	PCA3 (CH モード用検出器)	68
5.22	PCA4 (CH モード用検出器)	68
5.23	PCA5 (CH モード用検出器)	68
5.24	PCA6 (CH モード用検出器)	69
5.25	PCA7 (CH モード用検出器)	69
5.26	PCA8 (CH モード用検出器)	69
5.27	PCA9 (CH モード用検出器)	70
5.28	PCA10 (CH モード用検出器)	70
5.29	PCA11 (CH モード用検出器)	70
5.30	PCA12 (CH モード用検出器)	71
5.31	PCA0 (CS モード用検出器)	71
5.32	PCA1 (CS モード用検出器)	71
5.33	PCA2 (CS モード用検出器)	72
5.34	PCA3 (CS モード用検出器)	72
5.35	PCA4 (CS モード用検出器)	72
5.36	PCA5 (CS モード用検出器)	73
5.37	PCA6 (CS モード用検出器)	73
5.38	PCA7 (CS モード用検出器)	73
5.39	PCA8 (CS モード用検出器)	74
5.40	PCA9 (CS モード用検出器)	74
5.41	PCA10 (CS モード用検出器)	74
5.42	PCA11 (CS モード用検出器)	75
5.43	PCA12 (CS モード用検出器)	75
5.44	PCA13 (CH モード用検出器)	76
5.45	基底に対する寄与率	76
5.46	ニューラルネットワークへの学習	77
5.47	1mrad の範囲内でミラーを傾けた時の NN の予測値	79
5.48	ロス関数	79

5.49	1mrad の範囲内でミラーを傾けた時の NN の予測値	80
5.50	ロス関数	80

ソースコード目次

5.1	FINESSE を実行する Python コード (例)	53
5.2	FP 共振器の FINESSE コード	54
5.3	EM の位相を変更する FINESSE コード	55
5.4	位相変調を行う FINESSE コード	55
5.5	位相変調を行う FINESSE コード	56
5.6	PDH 信号のフィードバックを行う FINESSE コード	56
5.7	伝達関数の計測	57
5.8	Gouy 位相の計測	58
5.9	WFS 信号の計測	59
5.10	ミラーを傾けてミスアライメントさせる FINESSE コード	61
5.11	ランダムなミラー角を生成する Python コード	62
5.12	CCD カメラの画像を取得する FINESSE コード	63
5.13	ニューラルネットワークを定義する Python コード	77
5.14	ニューラルネットワークに学習を行う Python コード	78

第 1 章

導入

本研究の目的は、光学実験系の構築をより速く、簡単に行うことである。光学実験はレーザー光をミラーなどの光学部品に通し、その応答を計測することで物理を調べるものであり、特に微小距離の計測が得意で、例えば Michelson 干渉計を原理とした重力波検出器では、地球と太陽間の距離を水素原子 1 個分揺らす程度の重力波の検出が可能である。このような高度な分解能を持つ測定が可能であるということは、裏を返せば光学系はそれだけ繊細であるということでもある。

例えば、実験室で構築するような 1m スケールの光共振器（図 1.1）を考えよう。光共振器は 2 枚の鏡を向かい合わせたような光学系で、共振器内部を光が何度も往復することで重力波検出器に導入すると重力波への感度を上げることができる。このような単純なセットアップでも、ミラーの小さな傾きが検出感度を下げる要因になり、例えばフロントミラーが 1mrad ずれるだけでも共振は見えなくなり（図 1.2）、レーザー光は汚くなってしまう（図 1.3b）。このようなアライメントのずれがある状態では実験を行うことはできず、光学実験では 1mrad 以下のスケールで鏡を正確に配置する必要がある。

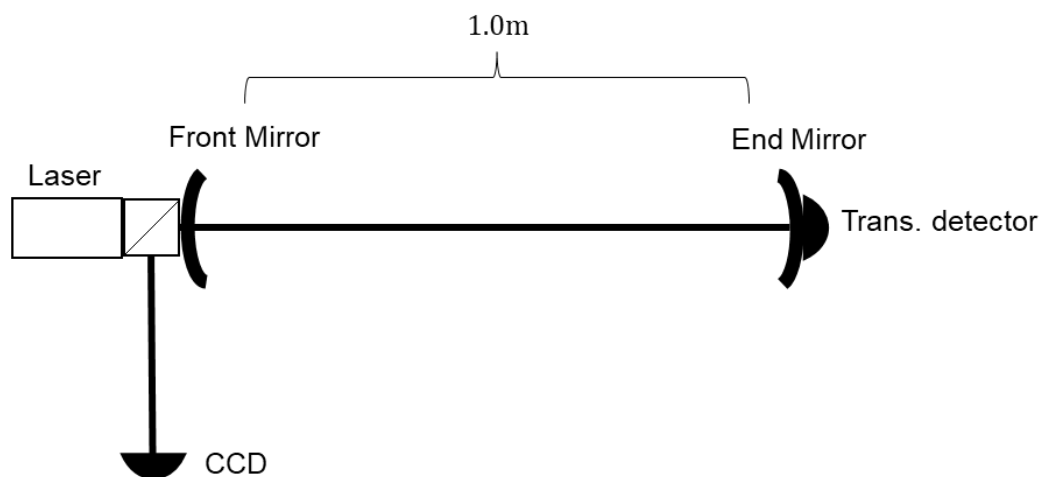


図 1.1: 共振器長 1m の光共振器

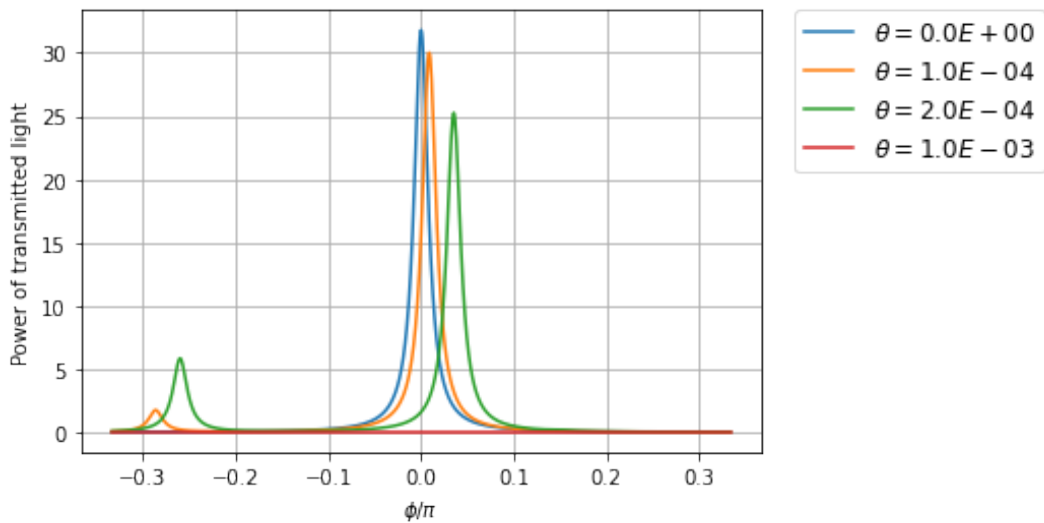
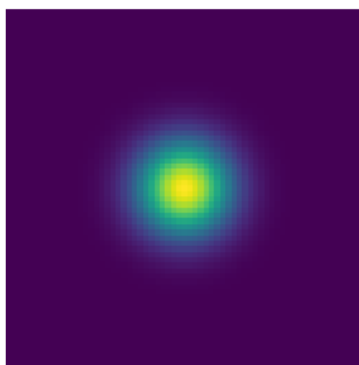
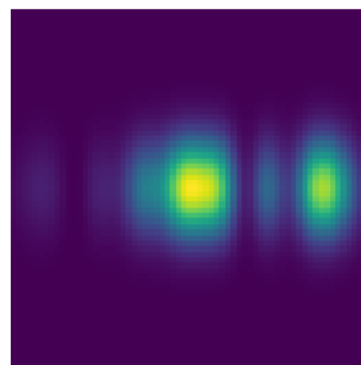


図 1.2: 図 1.1 の光学系でフロントミラーを θ [rad] 傾けた時の透過光パワー (シミュレーション)
理想的な状態 (青線) に対して, 0.10mrad (橙線) 程度で共振位置がずれ始め, 1.0mrad (赤線) では完全に共振は見えない.



(a) 理想的なセットアップ



(b) フロントミラーを 1.0mrad 傾けた時

図 1.3: 図 1.1 の光学系における反射光 CCD カメラ画像 (シミュレーション)

ここで 1mrad という傾きは, 視覚的に見れば 図 1.4 の傾きである. 研究者は実験室でこの微小な傾きを正確に配置する必要があり, 一般的には光学系の応答を確認しながら長時間かけ光学系を構築する. この構築の速度や精度は実験者のセンスに依存している面が大きい. また, 理想的なアライメントを作れたとしても, 地面振動や温度変化によってアライメントは 1 日で簡単に崩れてしまう.

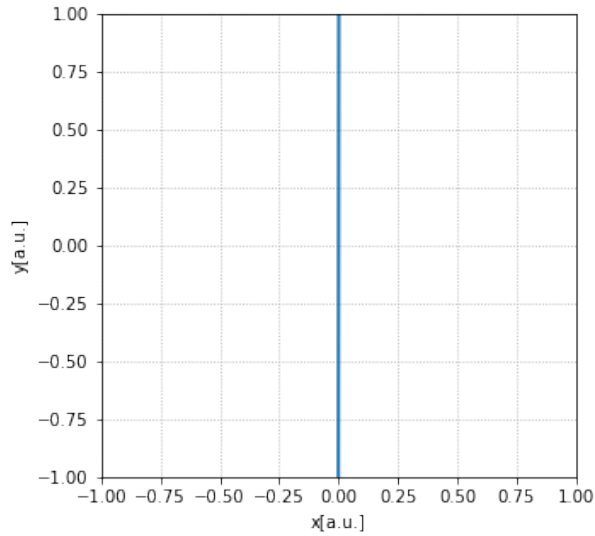


図 1.4: y 軸から 1mrad の傾きを持った直線のグラフ (青線)

アライメントという作業はあくまで実験の前段階に過ぎないにも関わらず、実験者は多くの時間と労力をかけている現状がある。しかしながら、人間が行っている作業である以上、これは人工知能によって再現できるはずである。つまり、アライメントの情報と光学系の応答をニューラルネットワークに学習させれば、これらの手順は自動化できるのではないかと、という期待が本研究のモチベーションである。

本論文の構成を説明する。続く第 2 章では光学実験の 1 つとして重力波検出器について記述する。第 3 章ではレーザー光を記述するための Gaussian ビームを導出したのち、光軸のずれによって高次モードが現れることを示す。また、本実験系の Fabry Perot 共振器の特性およびその制御方法である Pound Drever Hall 法と Wave Front Sensing 法 (WFS 法) についても説明する。WFS 法は Hermite Gaussian モードの 00 モードと 10 モードの干渉を検出する既存の角度制御手法である。第 4 章では深層学習の一般的な理論について記述することで、ニューラルネットワークの学習原理を説明する。第 5 章では FINESSE を用いた光学シミュレーションで PDH 信号、WFS 信号確認したのち、深層学習のためのデータセットを生成する手法について説明する。最後に第 6 章で深層学習による結果を評価することで本論文を締める。

第 2 章

重力波理論と検出器

本研究はレーザー共振器におけるミラーの姿勢制御に関する研究である。レーザー共振器は重力波検出器の要素技術の 1 つであり、本章ではまず重力波の理論および検出原理について説明する。重力波は連星ブラックホールや連星中性子星の合体などによって発生する時空の歪みの波で、電磁波でない新たな観測手段として未だ解明されていない原子核物理や重力理論への裏付けとなりうる。

2.1 Einstein 方程式

重力波は一般相対論から導かれる結果の 1 つである。本節では Einstein 方程式について確認しよう。

四次元座標上の点 $x^\mu = (-ct, x, y, z)$ 、及びこれから dx^μ だけ離れた点 $x^\mu + dx^\mu$ を考える。この 2 点の距離 ds^2 は、一般相対性理論に基づいて

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

と表される。ここで $g_{\mu\nu}$ は計量テンソル (metric tensor) と呼ばれる量で、時空の幾何学を特徴づける物理量である。平坦な時空 (Minkowski 空間) においては、計量テンソルは次式である。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式より次式を満たす。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

ここで左辺は時空の状態を表し、右辺は物質の状態を表す。 G : 重力定数, $T_{\mu\nu}$: エネルギー運動量テンソル, $R_{\mu\nu}$: Ricci テンソル, R : Ricci スカラー, c : 光速であり、それぞれ次式によって表される。

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.4a)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda \quad (2.4b)$$

$$R_{\mu\rho\nu}{}^\delta = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma_{\rho\nu}^\delta + \frac{\partial}{\partial x^\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\delta - \Gamma_{\mu\mu}^\delta\Gamma_{\rho\nu}^\mu + \Gamma_{\rho\mu}^\delta\Gamma_{\mu\nu}^\mu \quad (2.4c)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\delta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}g_{\nu\delta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu}g_{\mu\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta}g_{\mu\nu}\right) \quad (2.4d)$$

Γ は Christoffel 記号と呼ばれる量である。

物質の存在しない状態，つまり $T_{\mu\nu} = 0$ において Einstein 方程式 (2.3) は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.5)$$

と書き換えられる．これを真空中の Einstein 方程式と呼ぶ．

2.2 弱重力場

ここで Minkowski 空間がわずかに歪んでいる場合の計量テンソルを考えよう．すなわち

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

として， $\eta_{\mu\nu}$ に摂動項 $h_{\mu\nu}$ を加える．ここで， $\eta_{\mu\nu}$ に対して $h_{\mu\nu}$ は十分に小さい．

この計量テンソルを用いて真空中の Einstein 方程式 (2.5) を解く．まず，定義に従って Christoffel 記号 $\Gamma(2.4d)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}(\eta^{\rho\delta} + h^{\rho\delta}) \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\eta_{\nu\delta} + h_{\nu\delta}) + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\eta_{\mu\delta} + h_{\mu\delta}) - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\rho\delta} + h^{\rho\delta}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}h_{\nu\delta} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}h_{\mu\delta} - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}h_{\mu\nu} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\rho\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}h_{\nu\delta} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}h_{\mu\delta} - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}h_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

となるから，Ricci テンソル (2.4b) は次式で計算できる．

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\lambda\nu}{}^{\lambda} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\mu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} \\ &\simeq -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}h_{\nu\delta} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}h_{\lambda\delta} - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}h_{\lambda\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}h_{\nu\delta} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}h_{\mu\delta} - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}h_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}h_{\nu\delta} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}h_{\lambda\delta} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\delta}}h_{\lambda\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}h_{\nu\delta} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}h_{\mu\delta} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\delta}}h_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}h_{\lambda\delta} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\delta}}h_{\lambda\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}h_{\mu\delta} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\delta}}h_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}h + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}h^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}h_{\mu}{}^{\lambda} - \square h_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

この結果より，Ricci スカラー (2.4a) は

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}h + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}h^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}h_{\mu}{}^{\lambda} - \square h_{\mu\nu} \right) \\ &= -\square h + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}h^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.9)$$

であるから、Einstein 方程式 (2.5) の左辺は次式となる。

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &\simeq R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} h^\lambda{}_\nu + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu{}^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \left(-\square h + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} h^{\mu'\nu'} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで、 $h_{\mu\nu}$ のトレースリバーstensoren $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ を導入すれば

$$\tilde{h} = \tilde{h}^\mu{}_\mu = -h \tag{2.11}$$

であるから

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\tilde{h} \tag{2.12}$$

となり、これを用いれば

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \tilde{h}^\lambda{}_\nu + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \tilde{h}_\mu{}^\nu - \square \tilde{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \tilde{h}^{\mu'\nu'} \right) \tag{2.13}$$

となる。

ここでさらに、次式で表される Lorentz ゲージを課す。

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.14}$$

このとき、Einstein 方程式 (2.3) は次式のように線形化される。

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.15}$$

従って、真空中の Einstein 方程式は $T_{\mu\nu} = 0$ より次式である。

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.16}$$

2.3 重力波

真空中の Einstein 方程式 (2.16) は波動方程式であるので、Minkowski 時空の摂動は波動として伝搬することが分かる。これを重力波と呼ぶ。波動方程式の解として次の波数 k_λ の平面波解を考える。

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp[ik_\lambda x^\lambda] \tag{2.17}$$

これを Lorentz ゲージの条件 (2.14) 及び波動方程式 (2.16) に代入すれば、次式が成り立つ。

$$A_{\mu\lambda} k^\lambda = 0 \tag{2.18a}$$

$$k_\lambda k^\lambda = 0 \tag{2.18b}$$

ここでさらに、次式のトランスバース・トレースレスゲージを課す。

$$\tilde{h}_{\mu 0} = 0 \tag{2.19a}$$

$$\tilde{h} = 0 \tag{2.19b}$$

この時、重力波 (2.17) は次式のように表される.

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ik(ct - z)] \quad (2.20)$$

つまり重力波は h_+ と h_\times という二種類の偏光を持った横波として伝搬する.

2.4 重力波の検出

Einstein が予言した重力波であるが、現在では重力波による光路長の変化を観測するレーザー干渉を原理とした検出器が主流である. 図 2.1 は Michelson 干渉計を用いた重力波検出の仕組みを示したものである. 光源から出たレーザー光はビームスプリッターによって2つの経路に分けられ、ミラーで反射したのちビームスプリッターで合流し、光の干渉が検出器で観測される. 通常時は光が打ち消し合うように調整しておく、重力波が到来した時に光路長が変化することで光が干渉し、重力波信号として得られる仕組みである.

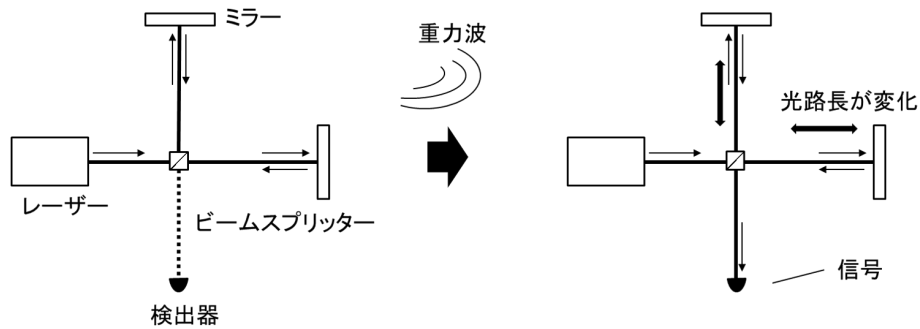


図 2.1: Michelson 干渉計による重力波の検出

第3章

レーザー光学

重力波検出器を初めとして、レーザー光は様々な物理実験に利用されている。ここでは Maxwell 方程式から近軸 Helmholtz 方程式を導出したのち、解の1つである Gaussian ビームを導出する。さらに Gaussian ビームが平行移動あるいは回転移動することで理想的な光軸からずれた場合の物理を記述する。そのあと Fabry Perot 共振器の特性について議論したのち、共振器長を制御するための Pound Drever Hall 法やミラーの姿勢を制御するための Wave Front Sensing 法の理論を記述する。

3.1 Gaussian ビーム

この節では Maxwell 方程式から Gaussian ビームの導出を行う。

3.1.1 電磁波

レーザー光は電磁気学に基づく現象であるから、その振る舞いは真空中の Maxwell 方程式に従う。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.1d)$$

まず、この Maxwell 方程式から一般的な電磁波を導出しよう。式 (3.1c) の両辺の rot を取ると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.2)$$

この左辺はベクトル三重積の公式と式 (3.1a) を用いて

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.3)$$

また、式 (3.2) の右辺は式 (3.1d) より

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

従って、式 (3.2) は次式の波動方程式に書き換えられ、真空中で電場が光速で伝わることが分かる。これが電磁波である。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0 \quad (3.5)$$

ここで解の1つとして平面波解を考え、電磁波が z 軸方向に進むとして次式のように表す。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = u(x, y, z) \exp[i(\omega_0 t - kz)] \quad (3.6)$$

この実部が実際の電場であり、 ω_0 は電磁波の角周波数、 k は $k = \omega_0/c$ となる波数、 u は平面波からのずれを表す係数である。

ここで平面波解 (3.6) を波動方程式 (3.5) に代入して、 u が満たすべき方程式を考えよう。

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} &= \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u \exp[i(\omega_0 t - kz)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u \exp[i(\omega_0 t - kz)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{u \exp[i(\omega_0 t - kz)]\} + \frac{\omega_0^2}{c^2} u \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} u - iku\right) \exp[i(\omega_0 t - kz)] \right\} + k^2 \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u \exp[i(\omega_0 t - kz)] + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} u - ik \frac{\partial}{\partial z} u\right) \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &\quad - ik \left(\frac{\partial}{\partial z} u - iku\right) \exp[i(\omega_0 t - kz)] + k^2 \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} u - ik \frac{\partial}{\partial z} u\right) \exp[i(\omega_0 t - kz)] - ik \frac{\partial}{\partial z} u \exp[i(\omega_0 t - kz)] \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u - 2ik \frac{\partial}{\partial z} u \right\} \exp[i(\omega_0 t - kz)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

従って平面波解における u は次式を満たす。

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = 0 \quad (3.8)$$

3.1.2 近軸 Helmholtz 方程式

ここで、 z 軸方向における変化は小さいとして、次式の近似を行う。これを近軸近似という。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sim 0 \quad (3.9)$$

このとき、波動方程式 (3.8) は次式のように近似される。

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = 0 \quad (3.10)$$

これを近軸 Helmholtz 方程式という.

3.1.3 Gaussian ビーム

近軸 Helmholtz 方程式 (3.10) の解の 1 つとして, 次式で表される Gaussian 分布を考える.

$$u = A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right] \quad (3.11)$$

これを近軸 Helmholtz 方程式 (3.10) の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} u \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left[A \exp \left[-i \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right] \right] \\ &= A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp \left[-i \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right] + A \frac{\partial^2}{\partial y^2} \exp \left[-i \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right] - 2ik \frac{\partial}{\partial z} A \exp \left[-i \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right] \\ &= \left[- \left(\frac{k}{q} \right)^2 A (x^2 + y^2) - 2ik \frac{A}{q} - 2ik \frac{dA}{dz} + \left(\frac{k}{q} \right)^2 A \frac{dq}{dz} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right] \\ &= \left[\left(\frac{k}{q} \right)^2 \left(-1 + \frac{dq}{dz} \right) (x^2 + y^2) - 2ik \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} \right) \right] A \exp \left[-i \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

式 (3.10) よりこれが x, y に対して常に 0 であるから, パラメータ A と q は次の微分方程式を満たす.

$$-1 + \frac{dq}{dz} = 0 \quad (3.13a)$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} = 0 \quad (3.13b)$$

これらは簡単に解くことができ, 式 (3.13a) を z で積分すれば積分定数 $q_0 = q(0)$ として q は次のように書ける.

$$q(z) = z + q_0 \quad (3.14)$$

q_0 はビームパラメータと呼ばれる量である. また, 式 (3.13b) を変形すれば

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{1}{q} \quad (3.15)$$

と書けるので, 両辺を z で積分すれば $\frac{dq}{dz} = 1$ より

$$\log A = -\log q + c_0 \quad (3.16)$$

c_0 は積分定数であるが,

$$\begin{aligned} c_0 &= \log A + \log q \\ &= \log Aq \end{aligned} \quad (3.17)$$

と書けるので, $A(0) = A_0$ とすると

$$c_0 = \log A_0 q_0 \quad (3.18)$$

従って,

$$A(z)q(z) = A_0q_0 \quad (3.19)$$

が成り立ち, $A(z)$ は $q(z)$ の関数であると言える.

ここで, ビームが光軸から十分離れた領域では強度は十分小さいという要請をする. つまり, $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ のとき, $|u| \rightarrow 0$ であるとしよう. これを境界条件として $q(z)$ が満たすべき条件を計算すると

$$\begin{aligned} |u|^2 &\propto \exp\left[-i\frac{k}{2q(z)}r^2\right] \left(\exp\left[-i\frac{k}{2q(z)}r^2\right]\right)^* \\ &= \exp\left[\frac{-ikr^2}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^*}\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{-ikr^2}{2|q|^2}(q^* - q)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{kr^2}{|q|^2}\text{Im}[q]\right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

よって, $r^2 \rightarrow \infty$ で $|u| \rightarrow 0$ に収束するためには, q の虚部が正であれば良い. これを z_R とする. また, A が q の関数であるから, u も q の関数である. q_0 の実部は (3.14) を見ると z 軸の平行移動に相当することが分かるので, これをビームの中心 z_0 とする.

以上より, ビームパラメータ q_0 は2つの長さ z_0 と z_R によって次式で書ける.

$$q_0 = -z_0 + iz_R \quad (3.21a)$$

$$q(z) = z - z_0 + iz_R \quad (3.21b)$$

q_0 の具体形が分かったので, q, A を展開すれば Gaussian ビーム (3.11) は定数 z_0, z_R を用いて次式で書ける.

$$u(r, z) = A_0 \frac{-z_0 + iz_R}{z - z_0 + iz_R} \exp\left[-i\frac{k}{2(z - z_0 + iz_R)}r^2\right] \quad (3.22)$$

すなわち, z_0 と z_R を決めればビームの形状を決定づけることができということであり, これらもまたビームパラメータと呼ぶ. z_0 はビームウエストの位置, z_R を Rayleigh レンジ (あるいは Rayleigh 長) と呼ぶ.

最後にこの式を簡略化して一般的な表式を導こう. Rayleigh レンジ z_R は正であったから, 適当な実数 w_0 を使えば

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} \quad (3.23)$$

と書くことができる.

このとき、式 (3.22) の係数部分は

$$\begin{aligned}
\frac{-z_0 i z_R}{z - z_0 + i z_R} &= \frac{i z_R (z - z_0 - i z_R)}{(z - z_0 + i z_R)(z - z_0 - i z_R)} \\
&= \frac{z_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2} \{z_R + i(z - z_0)\} \\
&= \frac{z_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2} \sqrt{(z - z_0)^2 + z_R^2} \exp \left[i \arctan \frac{z - z_0}{z_R} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2}} \exp \left[i \arctan \frac{z - z_0}{z_R} \right]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

e の指数部分は

$$\begin{aligned}
-i \frac{k}{2(z - z_0 + i z_R)} (x^2 + y^2) &= -i \frac{1}{w_0^2} \frac{z_R (z - z_0 - i z_R)}{(z - z_0)^2 + z_R^2} r^2 \\
&= -\frac{1}{w_0^2} \frac{1 + i \frac{z}{z_R}}{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} r^2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

と変形できるから、次式のように書ける。

$$u(r, z) = A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2}} \exp \left[-\frac{1}{w_0^2} \frac{1 + i \frac{z}{z_R}}{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} r^2 + i \arctan \frac{z - z_0}{z_R} \right] \tag{3.26}$$

簡略化のため、次の関数を導入する。

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2 \right] \tag{3.27a}$$

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2 \right] \tag{3.27b}$$

$$\eta(z) = \arctan \left[\frac{z - z_0}{z_R} \right] \tag{3.27c}$$

$w(z), R(z)$ はそれぞれスポットサイズ、曲率半径と呼ばれる長さの次元を持った量、 $\eta(z)$ は Gouy 位相と呼ばれる無次元量であり、ビームの形を決定づける関数であるので z_0, z_R と同様にビームパラメータと呼ばれる。これらの関数を導入すると、最終的に Gaussian ビーム (3.11) は次式のように z_0, z_R を陰に含む形で書いて、これが Gaussian ビームの一般的な表式である。

$$u(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w} \exp \left[-\left(\frac{1}{w^2} + i \frac{k}{2R} \right) r^2 + i \eta \right] \tag{3.28}$$

3.1.4 ビームパラメータ

この節では、先に導いた Gaussian ビームの表式を詳しく考えることで、定数 z_0, z_R および関数 $w(z), R(z), \eta(z)$ の物理的意味について議論する。

スポットサイズ $w(z)$

Gaussian ビームの各点での強度 $I(r, z)$ は次式のように計算できる。

$$\begin{aligned} I(r, z) &= |u|^2 \\ &= A_0^2 \frac{w_0^2}{w^2} \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2}\right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

ある z での xy 平面での断面を考えると、図 3.1 のようにビーム中心 ($r = 0$) から離れるにつれ強度が弱くなっていく Gaussian 分布である。

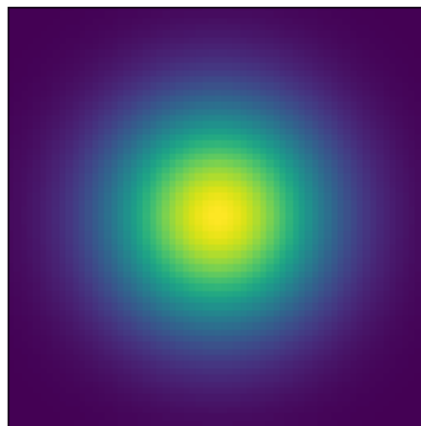


図 3.1: Gaussian ビームの xy 平面での断面

z 軸を中心とした半径 r_0 内でのパワー $P(r_0)$ は

$$\begin{aligned}
 P(r_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y, z) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} I(r, z) r \, dr \, d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^{r_0} I(r, z) r \, dr \\
 &= 2\pi A_0^2 \frac{w_0^2}{w^2} \int_0^{r_0} \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2}\right] r \, dr \\
 &= \pi A_0^2 \frac{w_0^2}{w^2} \int_0^{r_0^2} \exp\left[-\frac{2s}{w^2}\right] \, ds \\
 &= \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2 \left(1 - \exp\left[-\frac{2r_0^2}{w^2}\right]\right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

ある面全体でのパワー P_0 は $r_0 \rightarrow \infty$ を考えて

$$P_0 = \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2 \tag{3.31}$$

ここで、半径 $w(z)$ での範囲内でのパワー $P(w)$ は

$$\begin{aligned}
 P(w(z)) &= \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2 (1 - e^{-2}) \\
 &= P_0 (1 - e^{-2})
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

すなわち $w(z)$ はパワーが $1 - \exp[-2] \sim 86.4\%$ が含まれる領域であり、ビームの太さを特徴づけることからスポットサイズと呼ばれる長さである。

ビームウエスト z_0

今度は yz 平面での断面、つまり横から見た Gaussian ビームを考えてみよう。



図 3.2: 横から見た Gaussian ビーム

式 (3.27a) を見れば分かるように、 $w(z)$ は $z = z_0$ で最小となる。すなわち Gaussian ビームが最も絞られる位置が z_0 であり、これをビームウエストという。ビームの基準となる位置と言ってよい。定数 w_0 はビームウエストでのスポットサイズ $w_0 = w(z_0)$ である。

Rayleigh レンジ z_R

また、ビームウエストから z_R だけ離れた位置 ($z = z_0 \pm z_R$) では、

$$w(z_0 \pm z_R) = \sqrt{2}w_0 \quad (3.33)$$

となる。つまり、ビームウエストのスポットサイズ $w(z)$ に比べ $\sqrt{2}$ 倍となる距離が z_R で、これは Rayleigh レンジと呼ばれる。 z_R が長いほど、ビームは広がりにくくなる。ただし、(3.23) を見ると分かるように z_R が長くなるとビームウエストでのスポットサイズ w_0 は大きくなるので、ビームを絞り込みたい場合は z_R を小さくする必要がある。

曲率半径 $R(z)$

Gaussian ビームの等位相面における曲率半径を計算しよう。等位相面の曲率半径は、例えばビームをミラーで反射させるときに位相をずらさずに反射させるために必要な量である。Gaussian ビームの位相が ϕ となるような等位相面は式 (3.6),(3.1.4) より、

$$-\frac{k}{2R(z)}r^2 - kz + \eta(z) = \phi \quad (3.34)$$

を満たす曲面である。この等位相面を M_ϕ とし、この節では座標を (r, z) として表す。

z 軸と M_ϕ の交わる点を $(0, z_\phi)$ とすると、式 (3.34) より、次式が成立する。

$$-kz_\phi + \eta(z_\phi) = \phi \quad (3.35)$$

従って、 M_ϕ は

$$-\frac{k}{2R(z)}r^2 - kz + \eta(z) = -kz_\phi + \eta(z_\phi) \quad (3.36a)$$

$$\frac{k}{2R(z)}r^2 + k(z - z_\phi) = \eta(z) - \eta(z_\phi) \quad (3.36b)$$

この右辺は Gouy 位相による位相変化を表していて、実際に計算すると Gouy 位相の定義 (3.27c) より

$$\begin{aligned} \eta(z) - \eta(z_\phi) &= \arctan \left[\frac{z - z_0}{z_R} \right] - \arctan \left[\frac{z_\phi - z_0}{z_R} \right] \\ &= \arctan \left[\frac{\frac{z - z_0}{z_R} - \frac{z_\phi - z_0}{z_R}}{1 + \frac{z - z_0}{z_R} \frac{z_\phi - z_0}{z_R}} \right] \\ &= \arctan \left[\frac{z_R(z - z_\phi)}{z_R^2 + (z - z_0)(z_\phi - z_0)} \right] \\ &\sim \frac{z_R}{z_R^2 + (z - z_0)(z_\phi - z_0)}(z - z_\phi) \end{aligned} \quad (3.37)$$

ここで、1 行目から 2 行目の変形には任意の実数 x_1, x_2 について成り立つ次の公式を用いた。この式は tan の加法定理から導かれる。

$$\arctan x_1 - \arctan x_2 = \arctan \left[\frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} \right] \quad (3.38)$$

また3行目から4行目への式変形では、等位相面について $|z - z_\phi| \ll z_R$ であるとして次の公式の1次近似を用いた。この式は $\arctan x$ のマクローリン展開であり、 $|x| < 1$ となる実数 x に対して成立する。

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots \quad (3.39)$$

ここで、一般的なレーザーにおいては $1/k = \lambda \sim 10^{-7}[\text{m}]$ に対して $z_R \sim 10^0[\text{m}]$ 程度である。従って $\lambda \ll z_R$ としてよいので、次式が成り立つ。

$$\eta(z) - \eta(z_\phi) \sim \frac{1}{z_R}(z - z_\phi) \ll k(z - z_\phi) \quad (3.40)$$

すなわち、平面波としての位相の変化に対して Gouy 位相の変化は極めて小さいと考えてよいということである。以上より、等位相面 M_ϕ の式 (3.36b) は Gouy 位相の項を無視して次式のように書ける。

$$\frac{k}{2R(z)}r^2 + k(z - z_\phi) = 0 \quad (3.41a)$$

$$r^2 + 2R(z)(z - z_\phi) = 0 \quad (3.41b)$$

$R(z)$ の定義 (3.27b) より、

$$\begin{aligned} R(z) - R(z_\phi) &= (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right] - (z_\phi - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z_\phi - z_0} \right)^2 \right] \\ &= z - z_\phi + \left\{ \frac{z}{(z - z_0)^2} - \frac{z_\phi}{(z_\phi - z_0)^2} \right\} z_R^2 - z_0 \left\{ \frac{1}{(z - z_0)^2} - \frac{1}{(z_\phi - z_0)^2} \right\} z_R^2 \\ &= z - z_\phi + \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z_\phi - z_0} \right) z_R^2 \\ &= z - z_\phi - \frac{z_\phi - z}{(z - z_0)(z_\phi - z_0)} z_R^2 \\ &= (z - z_\phi) \left\{ 1 - \frac{z_R^2}{(z - z_0)(z_\phi - z_0)} \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

ここで等位相面について $z \sim z_\phi$ であるとして、 $(z - z_\phi)^2$ の項は無視すると

$$r^2 + 2 \left\{ R(z_\phi) + (z - z_\phi) \left\{ 1 - \frac{z_R^2}{(z - z_0)(z_\phi - z_0)} \right\} \right\} (z - z_\phi) = 0 \quad (3.43a)$$

$$r^2 + 2R(z_\phi)(z - z_\phi) = 0 \quad (3.43b)$$

$$r^2 + [z - \{z_\phi - R(z_\phi)\}]^2 = R(z_\phi) \quad (3.43c)$$

すなわち、等位相面は中心 $(0, z_\phi - R(z_\phi))$ で半径 $R(z_\phi)$ の球面である。よって $R(z)$ は等位相面の曲率半径であると分かる。

ビームウエスト付近での曲率半径は

$$\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = \infty \quad (3.44)$$

遠方での曲率半径は

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = z - z_0 \quad (3.45)$$

従って、Gaussian ビームはビームウエスト付近で平面波、遠方で球面波に近似できる。

Gouy 位相 $\eta(z)$

Gaussian ビームは伝搬するにつれ、平面波に対する位相のずれが発生する。この位相のずれが Gouy 位相であり、式 (3.27c) で表されているように、ビームウエストからの距離 $z - z_0$ が Rayleigh レンジ z_R 程度離れれば $\frac{\pi}{4}$ 、最大で $\frac{\pi}{2}$ だけ位相がずれる。高次モード（後述：3.2 節）では、次数に応じて Gouy 位相は大きくなる。

ビームパラメータの関係

ところで、 $q(z), R(z), w^2(z)$ の逆数を計算すると

$$\frac{1}{q} = \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 + z_R^2} - i \frac{z_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2} \quad (3.46a)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 + z_R^2} \quad (3.46b)$$

$$\frac{1}{w^2} = \frac{k}{2} \frac{z_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2} \quad (3.46c)$$

従って、これらのビームパラメータの間に次式の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{kw^2} \quad (3.47)$$

3.2 Hermite Gaussian モード

前節で求めた Gaussian ビームは近軸 Helmholtz 方程式 (3.10) の無数にある解の 1 つであり、基本モードと呼ばれる。レーザー項を記述する解として、Gaussian ビームを高次に拡張した解 Hermite Gaussian モード（以下「HG モード」と呼ぶ）が存在する。導出 [9, P.643] は割愛するが、HG モードの一般的な表式は次式である。

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp[-ik(z - z_0) + i(l + m + 1)\eta] \quad (3.48)$$

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R}\right] \quad (3.49)$$

ここでビームパラメータは Gaussian ビームの時 (3.27) と同様である（再掲）。

$$\begin{aligned} w^2(z) &= w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2 \right] \\ R(z) &= (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0}\right)^2 \right] \\ \eta(z) &= \arctan \left[\frac{z - z_0}{z_R} \right] \end{aligned}$$

特に基本モード ($l = 0, m = 0$) は Gaussian ビームであり

$$U_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp \left[-i \{ k(z - z_0) - \eta \} - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} \right) \right] \quad (3.50)$$

基本モードを用いて高次モード ($l > 0$ or $m > 0$) を表すと

$$U_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) U_{00}(x, y, z) \exp[i(l + m)\eta] \quad (3.51)$$

ここで Hermite 多項式の直交性より

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) H_m(x) \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi} 2^l l! \delta_{lm} \quad (3.52)$$

であるから、次が成り立つ。

$$U_l U_m^* \in \mathbb{R} \quad (3.53a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_l(x) U_m^*(x) dx = \delta_{lm} \quad (3.53b)$$

3.2.1 ビームの平行移動

ここでは Gaussian ビームの光軸が理想的な状態からずれた場合の近似を行う。本来レーザー光が通るべき元の座標系を (x', y', z') とし、そこから x 方向に δx だけ移動した座標系を (x, y, z) とする。元の座標系で光軸が δx だけずれた Gaussian ビームを考えると、次式が成立する。

$$U_{00}(x, y, z) = U_{00}(x' - \delta x, y, z) \quad (3.54)$$

元の座標系で考えると $(x', y') = (\delta x, 0)$ が光軸であるため、 $U(x, y, z)$ はずれた Gaussian ビームを表している。この $U(x, y, z)$ を元の座標系 $U_{lm}(x', y', z')$ の重ね合わせで表すことを考える。

ビームウェストではビームパラメータが簡単に計算できるため、以降ビームウェスト $z' = z_0$ でのビームのモードを考える。Gaussian ビームのモードは z によって変化することはないので、これで充分である。

ずれた座標系におけるビームウェストでの 00 モードを計算する。(3.48) より

$$\begin{aligned} U_{00}(x, y, z) \Big|_{z'=z_0} &= U_0(x, z) \Big|_{z'=z_0} U_0(y, z) \Big|_{z'=z_0} \exp[-ik(z - z_0) + i(l + m + 1)\eta(z)] \Big|_{z=z_0} \\ &= U_0(x, z) \Big|_{z'=z_0} U_0(y, z) \Big|_{z'=z_0} \end{aligned} \quad (3.55)$$

ここで式 (3.49) より

$$\begin{aligned}
U_0(x, z) \Big|_{z=z_0} &= \left(\frac{2}{\pi w(z_0)^2} \right)^{1/4} H_0 \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z_0)} \right) \exp \left[- \left(\frac{x}{w(z_0)} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R(z_0)} \right] \\
&= \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x}{w_0} \right)^2 \right] \\
&= \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x' - \delta x}{w_0} \right)^2 \right] \\
&= \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \exp \left[2 \frac{x' \delta x}{w_0^2} \right] \exp \left[- \left(\frac{\delta x}{w_0} \right)^2 \right] \\
&\sim \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \left(1 + 2 \frac{x' \delta x}{w_0^2} \right) \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \\
&= U_0(x', z_0) + \left(\frac{\delta x}{w_0} \right) U_1(x', z_0)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

ここで4行目から5行目への近似では、 $\exp[x]$ のマクローリン展開を行い δx^2 の項を無視した。このように、ずれたビームは理想的なビームの00モードと10モードの重ね合わせであるといえる。

同様にずれた10モードも計算しよう。

$$\begin{aligned}
U_1(x, z) \Big|_{z=z_0} &= \left(\frac{2}{\pi w(z)^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left[- \left(\frac{x}{w(z)} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R(z)} \right] \Big|_{z'=z_0} \\
&= \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \left(2 \frac{x' - \delta x}{w_0} \right) \exp \left[- \left(\frac{x' - \delta x}{w_0} \right)^2 \right] \\
&\sim \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \left(2 \frac{(x' - \delta x)}{w_0} \right) \left(1 + 2 \frac{x' \delta x}{w_0^2} \right) \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \\
&\sim \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \left[-2 \frac{\delta x}{w_0} + 2 \frac{x'}{w_0} + \left(4 \frac{x'^2 \delta x}{w_0^3} - \frac{\delta x}{w_0} \right) \right] \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \\
&= - \left(\frac{\delta x}{w_0} \right) U_0(x, z_0) + U_1(x, z_0) + \sqrt{2} \left(\frac{\delta x}{w_0} \right) U_2(x, z_0)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

以上の結果をまとめると、 x 軸方向に δx だけビームを平行移動したとき、00モードと10モードは次式のように表される。

$$U_{00}(x, y, z) \Big|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + \left(\frac{\delta x}{w_0} \right) U_{10}(x', y', 0) \tag{3.58a}$$

$$U_{10}(x, y, z) \Big|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) - \left(\frac{\delta x}{w_0} \right) U_{00}(x', y', 0) \tag{3.58b}$$

ここで (3.57) において、ずれた 10 モードから発生する 20 モードの項 $\sqrt{2} \left(\frac{\delta x}{w_0} \right) U_2(x, z_0)$ は δx の 1 乗項であるため無視できないように思われる。しかし、最初に入射するモードを 00 モードのみであると仮定すると、ずれた 00 モードから発生する 10 モード自体が δx あるいは $\delta \theta$ (後述) の 1 乗項であるので、20 モードの大きさは δx や $\delta \theta$ の 2 乗程度である。従って、20 モードの項は無視してよい。

3.2.2 ビームの回転移動

次にビームが回転方向のずれ $\delta \theta$ をもっている場合について考よう。平行移動の議論と同じように、ずれた座標系 (x, y, z) と本来レーザーが通るべき座標系 (x', y', z') を考える。

$(x, z) = (0, z_0)$ を通る y 軸と平行な直線周りに座標系を $\delta \theta$ だけ回転させると、変換前後の座標系では回転行列を用いた次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ z - z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\delta\theta) & -\sin(-\delta\theta) \\ \sin(-\delta\theta) & \cos(-\delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' - z_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \delta\theta & \sin \delta\theta \\ -\sin \delta\theta & \cos \delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' - z_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.59)$$

ずれた座標系におけるビームウェストでの 00 モードを計算する。Gaussian ビームの表式 (3.48) より

$$U_{00}(x, y, z) \Big|_{z'=z_0} = U_0(x, z) \Big|_{z'=z_0} U_0(y, z) \Big|_{z'=z_0} \exp[-ik(z - z_0) + i\eta(z)] \Big|_{z'=z_0} \quad (3.60)$$

ここで位相の項は、 $\delta \theta$ は十分小さいとして $\delta \theta^2$ の項を無視すれば

$$\begin{aligned} \exp[-ik(z - z_0) + i\eta(z)] \Big|_{z'=z_0} &= \exp[ikx' \sin \delta\theta + i\eta(-x' \sin \delta\theta + z_0)] \\ &= \exp[ikx' \sin \delta\theta] \exp \left[-i \arctan \left(\frac{x'}{z_R} \sin \delta\theta \right) \right] \\ &\sim \exp[ikx' \delta\theta] \exp \left[-i \arctan \left(\frac{x'}{z_R} \delta\theta \right) \right] \\ &\sim \exp[ikx' \delta\theta] \exp \left[-i \frac{x'}{z_R} \delta\theta \right] \\ &= \exp \left[i \left(k - \frac{1}{z_R} \right) x' \delta\theta \right] \\ &\sim 1 + i \left(k - \frac{1}{z_R} \right) x' \delta\theta \\ &\sim 1 + ikx' \delta\theta \end{aligned} \quad (3.61)$$

ここで、最後の近似では $\lambda \ll z_R$ を用いた。

$U_0(x, z)$ の項は

$$\begin{aligned}
U_0(x, z) \Big|_{z'=z_0} &= \left(\frac{2}{\pi w(z)^2} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x}{w(z)} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R(z)} \right] \Big|_{z'=z_0} \\
&\sim \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x' \cos \delta\theta}{w_0} \right)^2 \right] \\
&\sim \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \\
&= U_0(x', z_0)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

従って、回転方向にずれた基本モード U_{00} は元の座標系では次式のように表される。

$$\begin{aligned}
U_{00}(x, y, z) \Big|_{z'=z_0} &= U_0(x', z_0) U_0(y', z_0) (1 + ikx' \delta\theta) \\
&= U_{00}(x', y', z_0) + i \frac{k w_0}{2} \delta\theta U_{10}(x', y', z_0)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

同様にしてずれた 10 モードを計算しよう。

$$\begin{aligned}
U_1(x, z) \Big|_{z'=z_0} &= \left(\frac{2}{\pi w(z)^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left[- \left(\frac{x}{w(z)} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R(z)} \right] \Big|_{z'=z_0} \\
&\sim \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} 2 \frac{x' \cos \delta\theta}{w_0} \exp \left[- \left(\frac{x' \cos \delta\theta}{w_0} \right)^2 \right] \\
&\sim \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \frac{\sqrt{2}x'}{w_0} \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \\
&= U_1(x', z_0)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

従って、回転方向にずれた 10 モード U_{10} は元の座標系では次式のように表される。

$$\begin{aligned}
U_{10}(x, y, z) \Big|_{z'=z_0} &= U_1(x', z_0) U_0(y', z_0) (1 + ikx' \delta\theta) \\
&= U_{10}(x', y', z_0) + ik \frac{\delta\theta}{w_0} \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} 2x'^2 \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] U_0(y', z_0) \\
&= U_{10}(x', y', z_0) + i \frac{k w_0^2 \delta\theta}{2 w_0} \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] U_0(y', z_0) \\
&\quad + i \frac{k w_0^2 \delta\theta}{\sqrt{8} w_0} \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 4 \left(\frac{\sqrt{2}x'}{w_0} \right)^2 - 2 \right\} \exp \left[- \left(\frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] U_0(y', z_0) \\
&= U_{10}(x', y', z_0) + i \frac{k w_0}{2} \delta\theta U_{00}(x', y', z_0) + i \frac{k w_0}{\sqrt{2}} \delta\theta U_{20}(x', y', z_0)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

以上の結果をまとめると、 y 軸を中心に $\delta\theta$ だけビームを回転方向にずれているとき、00 モードと 10 モードは元の座標系において次式のように近似される。20 モードの項は平行移動の議論と同様の理由で無視できる。

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + i \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U_{10}(x', y', 0) \quad (3.66a)$$

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) + i \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U_{00}(x', y', 0) \quad (3.66b)$$

ここで

$$\alpha_0 = \frac{2}{kw_0} \quad (3.67)$$

と置いた。

3.2.3 ビーム移動の行列表現

ここで、微小な座標のずれによって 00 モードと 10 モードが相互に変換されることが分かったので、行列表現を用いるとさらに簡略化して表現することができる。

00 モードと 10 モードのみを持つ Gaussian ビームを考えたとき、00 モードの係数を a_0 、10 モードの係数を a_1 とすると、次式のように Gaussian ビームを表すことができる。

$$E = (U_{00} \ U_{10}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 \exp[i\Omega t] \quad (3.68)$$

このとき、ベクトル $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ が平行移動や回転でどのように変化するかを行列で表現できる。平行移動の結果 (3.58) より、行列表現においてビームの平行移動は次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

回転移動の結果 (3.66) より、行列表現においてビームの回転移動は次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

従って、平行移動と回転移動を同時に考慮するには、行列の積を考えれば良いので、

$$\begin{aligned} M(\delta x, \delta\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.71)$$

ここで、座標系の移動を表す量

$$\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \quad (3.72)$$

を導入すれば

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

と書ける。

3.3 Fabry Perot 共振器

図のように光軸上に二枚の鏡を並べた光学系を、Fabry Perot 共振器 (FP 共振器) と呼ぶ。重力波検出器で十分な感度を得るためには建設するには現実的でない光路長が必要になってしまうが、2枚のミラーを向かい合わせて光を何度も往復させることで光路長を稼ぐことが出来る。

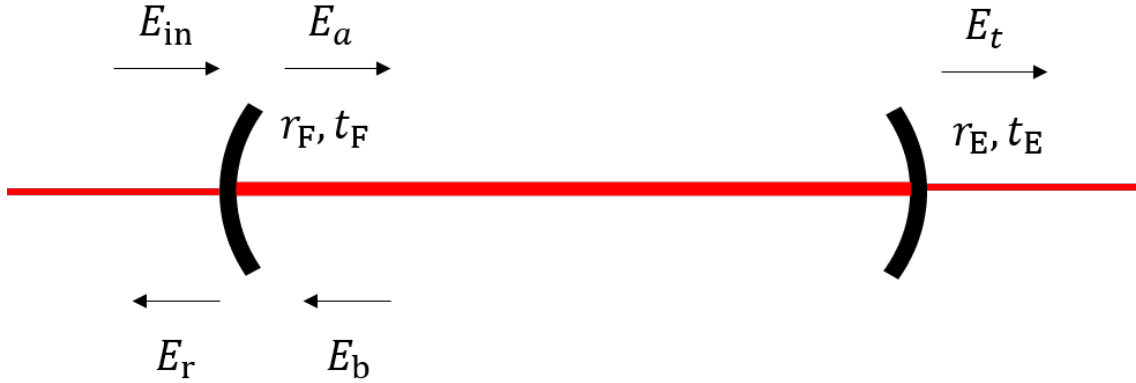


図 3.3: FabryPerot 共振器

3.3.1 反射光強度と透過光強度

一般的に、光源側の鏡をフロントミラー、もう一方をエンドミラーと呼ぶ。ここでそれぞれの鏡の反射率を r_F, r_E 、透過率を t_F, t_E とし、次式で表される角周波数 ω の単色波 E_{in} を入射する。

$$E_{in} = E_0 \exp[i\omega t] \quad (3.74)$$

このとき、反射光 E_r は、フロントミラーでの直反射と共振器内を n 回往復した光の和で表されるので、共振器長を L として次式で表される。

$$\begin{aligned} E_r(\phi) &= r_F E_{in} + \sum_{n=0}^{\infty} t_F^2 (-r_E) \exp\left[-2i \frac{L\omega}{c}\right] \left(r_F r_E \exp\left[-2i \frac{L\omega}{c}\right] \right)^n \\ &= \left(r_F - \frac{t_F^2 r_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]} \right) E_{in} \end{aligned} \quad (3.75)$$

ここで、 ϕ は光が共振器を往復する際の位相差であり、入射光の角周波数と共振器長を用いて次式で表される。

$$\phi = \frac{2L\omega}{c} \quad (3.76)$$

同様に、透過光 E_t は

$$E_t(\phi) = \frac{t_F t_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]} E_{\text{in}} \quad (3.77)$$

式 (3.75), (3.77) より, FP 共振器の反射率 $r_{\text{cav}}(\phi)$ と透過率 $t_{\text{cav}}(\phi)$ は

$$r_{\text{cav}}(\phi) = \frac{E_r}{E_{\text{in}}} = r_F - \frac{t_F^2 r_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]} \quad (3.78a)$$

$$t_{\text{cav}}(\phi) = \frac{E_t}{E_{\text{in}}} = \frac{t_F t_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]} \quad (3.78b)$$

また, 反射光パワー P_r , 透過光パワー P_t は, 入射光パワーを P_{in} とすると

$$\begin{aligned} P_r(\phi) &= |E_r(\phi)|^2 \\ &= |r_{\text{cav}}(\phi)|^2 P_{\text{in}} \\ &= \frac{\{(t_F^2 + r_F^2)r_E - r_F\}^2 + 4r_F r_E (t_F^2 + r_F^2) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{(1 - r_F r_E)^2 \left\{1 + F \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}} P_{\text{in}} \end{aligned} \quad (3.79a)$$

$$\begin{aligned} P_t(\phi) &= |E_t(\phi)|^2 \\ &= |t_{\text{cav}}(\phi)|^2 P_{\text{in}} \\ &= \frac{(t_F t_E)^2}{(1 - r_F r_E)^2 \left\{1 + F \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}} P_{\text{in}} \end{aligned} \quad (3.79b)$$

ここで簡略化のために次式の定数 F を導入した.

$$F = \frac{4r_F r_E}{(1 - r_F r_E)^2} \quad (3.80)$$

ϕ に対する P_t, P_r をプロットしたグラフが 図 3.4 である.

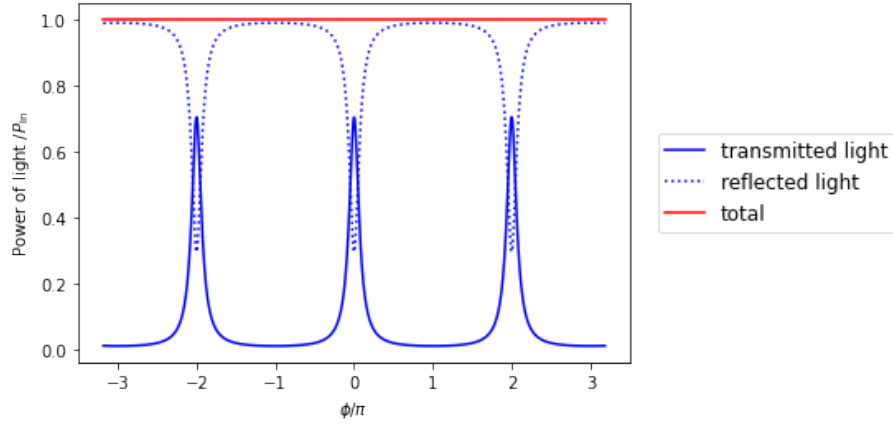


図 3.4: FabryPerot 共振器の反射光パワー $P_r(\phi)$ (青点線) と透過光パワー $P_t(\phi)$ (青実線), およびその合計 $P_r + P_t$ (赤実線)

光学系の設定は $r_F = \sqrt{0.7}, r_E = \sqrt{0.9}, t_F = \sqrt{0.3}, t_E = \sqrt{0.1}, P_{in} = 1$

エネルギー保存則より, 透過光と反射光の合計 (赤実線) は $P_t + P_r = P_{in}$ で一定となっていることが分かる.

3.3.2 共振条件と共振器の評価

図 3.4 をみると, 次式の条件

$$\phi_c = 2n\pi \quad (3.81)$$

を満たすときに透過光パワーが最大となっている. この状態を「共振」と呼び, 式 (3.81) を「共振条件」と呼ぶ. この共振条件は, 入射光の角周波数 ω_c と共振器長 L で表せば, 式 (3.76) より,

$$L\omega_c = n\pi c \quad (3.82)$$

である. 共振が起こる間隔は Free Spectrum Range (以下「FSR」と呼ばれ, 共振器長間隔 L_{FSR} や入射レーザの周波数間隔 f_{FSR} といった量で評価される. これらの値は共振条件 (3.82) から次式のように表される.

$$L_{FSR} = \frac{c}{2f} \quad (3.83a)$$

$$f_{FSR} = \frac{c}{2L} \quad (3.83b)$$

また, 共振ピークの半値全幅 (Full Width at Half Maximum; 以下「FWHM」と呼ぶ) も計算しよう. 式 (3.79b) より, 透過光強度が半分となる位相 ϕ_H を計算すると

$$P_t(\phi_H) = \frac{1}{2}P_t(0) \quad (3.84a)$$

$$\frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\phi_H}{2}\right)} = \frac{1}{2} \quad (3.84b)$$

$$\sin\left(\frac{\phi_H}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{F}} \quad (3.84c)$$

$$\phi_H \sim \frac{2}{\sqrt{F}} \quad (3.84d)$$

従って、周波数領域における半値全幅 f_{FWHM} は

$$\begin{aligned} f_{\text{FWHM}} &= \frac{c}{4\pi L}(2\phi_H) \\ &= \frac{c}{\pi L\sqrt{F}} \\ &= \frac{c}{2\pi L} \frac{1 - r_F r_E}{\sqrt{r_F r_E}} \\ &= \frac{1 - r_F r_E}{\pi\sqrt{r_F r_E}} f_{\text{FSR}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

ここで FSR と FWHM の日は共振器のフィネス \mathcal{F} と呼ばれる量で、次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{FWHM}}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \end{aligned} \quad (3.86)$$

3.4 Pound Drever Hall 法 (PDH)

本論文では鏡の姿勢制御について記述するが、共振器の長さ制御で使われる Pound Drever Hall 法（以下「PDH 法」と呼ぶ）を拡張する方法であるので、まずは PDH 法についてに説明する。

PDH 法では、光共振器の反射率がレーザーの周波数によって変化する特性を利用する。共振器に対して共振周波数から少し外れた周波数の光（サイドバンド光）を入射することで、共振条件からのずれを得るという仕組みである。この共振器のずれが入射光の周波数によるのか、共振器の長さによるのかという区別はつかない。

3.4.1 エラー信号

エラー信号とは、光学部品の自由度、例えば位置や角度の検出器に対する応答を示した表式である。一般的な手法として、キャリア光の位相に対して変調をかけサイドバンド光を生成し、検出器で復調を行うことで誤差信号を取得する変調復調方式が主流である。干渉計を安定に制御するためには、目標のパラメーターの値（動作点）の周りでエラー信号が自由度に対して線形である必要がある。

3.4.2 位相変調

サイドバンド光を発生させるため，一般的には入射光に対して位相変調を行う．角周波数 ω_c の入射光に対して，変調指数 m ，変調周波数 ω_m の位相変調を掛けると，変調された入射光 $E_{\text{in,mod}}$ は次式で書ける．

$$\begin{aligned} E_{\text{in,mod}} &= E_0 \exp[i(\omega_c t + m \sin(\omega_m t))] \\ &= E_0 \exp[i\omega_c t] \exp[im \sin(\omega_m t)] \end{aligned} \quad (3.87)$$

ここでさらに， $\exp[im \sin(\omega_m t)]$ は Bessel 関数 $J_n(m)$ を用いて簡単に書くことが出来る．Bessel 関数の公式より，

$$\exp\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)x^n \quad (3.88)$$

であり，

$$x - \frac{1}{x} = 2i \sin \omega_m t \quad (3.89)$$

を x について解けば

$$x = \exp[i\omega_m t] \quad (3.90)$$

となる．従って，変調された入射光 (3.87) は Bessel 関数を用いて次式で書ける．

$$E_{\text{in,mod}} = E_0 \exp[i\omega_c t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp[in\omega_m t] \quad (3.91)$$

さらに次の Bessel 関数の公式を用いて

$$J_{n \geq 0}(m) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)! s!} \left(\frac{m}{2}\right)^{n+2s} \quad (3.92)$$

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m) \quad (3.93)$$

変調指数 m が十分小さい ($m \ll 1$) として，Bessel 関数の 2 次以降を無視すれば，変調された入射光 (3.91) は次式のように書ける．

$$\begin{aligned} E_{\text{in,mod}} &\simeq E_0 \exp[i\omega_c t] \{J_0(m) + J_1(m)(\exp[i\omega_m t] - \exp[-i\omega_m t])\} \\ &= E_0 J_0 \exp[i\omega_c t] + E_0 J_1 \exp[i(\omega_c + \omega_m)t] - E_0 J_1 \exp[i(\omega_c - \omega_m)t] \end{aligned} \quad (3.94)$$

このように位相変調を行うと，キャリア光の他に $\omega_c \pm \omega_m$ の周波数で振動するサイドバンド光が現れる．これらは Radio Frequency(RF) サイドバンドと呼ばれ，参照光として用いられる．

3.4.3 サイドバンド光に対する共振器の応答

位相変調された光 E_{mod} を FP 共振器に入射して，その反射光 $E_{\text{r,mod}}$ を考えよう．

3.3 節で求めた FP 共振器の応答は入射光の角周波数に基づくものであったから，サイドバンドの周波数 $\omega = \omega_c \pm \omega_m$ を入射した時の応答を考えてやればよい．

つまり、式 (3.94) 中のそれぞれの周波数成分に対する共振器の応答 (3.78a) を足し合わせれば良いので、反射光 $E_{r,\text{mod}}$ は

$$E_{r,\text{mod}} = E_0 J_0 r_{\text{cav}}(\omega_c) \exp[i\omega_c t] + E_0 J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) \exp[i(\omega_c + \omega_m)t] - E_0 J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m) \exp[i(\omega_c - \omega_m)t] \quad (3.95)$$

となる。ここで、共振器長 L を固定した時の角周波数 ω に対する共振器の反射率を $r_{\text{cav}}(\omega) := r_{\text{cav}}\left(\frac{2L\omega}{c}\right)$ として再定義した。

この反射光のパワー $P_{r,\text{mod}}$ は、キャリア光とサイドバンド光の干渉で表されて、入射光パワー $P_{\text{in}} = |E_0|^2$ を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} P_{r,\text{mod}} &= |E_{r,\text{mod}}|^2 \\ &= E_{r,\text{mod}} E_{r,\text{mod}}^* \\ &= \left[J_0^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)|^2 \right] P_{\text{in}} \\ &\quad + [2J_0 J_1 \text{Re}\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\} \exp[-i\omega_m t]] P_{\text{in}} \\ &\quad + f_{\text{DF}}(\exp[2i\omega_m t]) \\ &= \left[J_0^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)|^2 \right] P_{\text{in}} \\ &\quad + 2J_0 J_1 [\text{Re}[r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)] \cos(\omega_m t) \\ &\quad + \text{Im}[r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)] \sin(\omega_m t)] P_{\text{in}} + f_{\text{DF}}(\exp[2i\omega_m t]) \end{aligned} \quad (3.96)$$

と表される。ここで第1項が DC 成分であり、第2項は RF 成分である。また、第3項 f_{DF} は倍周波項 $\exp[2i\omega_m t]$ をまとめた項であり、PDH 信号を取り出す際には取り除く。なお、3行目から4行目への式変形には、一般の複素数 z, z_1, z_2 について成り立つ次式を用いた。

$$\text{Re}[z_1 z_2] = \text{Re}[z_1] \text{Re}[z_2] - \text{Im}[z_1] \text{Im}[z_2] \quad (3.97a)$$

$$\text{Re}[z] = \text{Re}[z^*] \quad (3.97b)$$

$$\text{Im}[z] = -\text{Im}[z^*] \quad (3.97c)$$

ここで得た干渉光の信号 $P_{r,\text{mod}}$ の DC 成分 V_{DC} は次式である。

$$V_{\text{DC}} = \left[J_0^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)|^2 \right] P_{\text{in}} \quad (3.98)$$

また、干渉光 $P_{r,\text{mod}}$ から RF 成分を取り出すと共振周波数周りで線形な信号が得られる。具体的には変調周波数で復調 ($\times \sin(\omega_m t)$) を行い、ローパスフィルターを含む制御回路を用いて高周波の項を取り除いてやれば、次の制御信号 V_{RF} が得られ、これが長さ方向を制御するための PDH 信号 V_{PDH} である。

$$\begin{aligned}
V_{\text{RF}} &= J_0 J_1 \text{Im} [r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)] P_{\text{in}} \\
&= J_0 J_1 \text{Im} \left[r_{\text{cav}}(\omega_c) \frac{r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c)}{\omega_m} + r_{\text{cav}}^*(\omega_c) \frac{r_{\text{cav}}(\omega_c) - r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)}{\omega_m} \right] \omega_m P_{\text{in}} \\
&\simeq J_0 J_1 \text{Im} \left[r_{\text{cav}}(\omega_c) \frac{dr_{\text{cav}}^*}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_c} + \frac{dr_{\text{cav}}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_c} r_{\text{cav}}^*(\omega_c) \right] \omega_m P_{\text{in}} \\
&= J_0 J_1 \omega_m \text{Im} \left[\frac{d|r_{\text{cav}}|^2}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_c} \right] P_{\text{in}} \\
&= J_0 J_1 \omega_m \text{Im} \left[\frac{dP_r}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_c} \right] \\
&\equiv V_{\text{PDH}}
\end{aligned} \tag{3.99}$$

ここで $\omega_m \ll \omega_c$ として微分を用いた近似をした。

3.4.4 PDH 信号のフィードバック

この結果が意味するところは、復調したエラー信号 V_{PDH} はキャリア光の反射光パワーの微分に比例するということだ。共振器が共振している場合、反射光パワーは最小値を取るから、 $V_{\text{PDH}} = 0$ になる。共振周波数よりキャリア光の周波数が高ければ、 ω の増加に応じて反射光パワーは上がっていくから、 $V_{\text{PDH}} > 0$ となる。反対に共振周波数よりキャリア光の周波数が低い場合は $V_{\text{PDH}} < 0$ となる。

つまり、共振器長を固定してキャリア光の周波数を制御する場合、 $V_{\text{PDH}} > 0$ ならキャリア光の周波数を低く、 $V_{\text{PDH}} < 0$ ならキャリア光の周波数を高くしてやれば共振状態に制御することが出来る。

また、キャリア光の周波数を固定して共振器長を制御する場合、 $V_{\text{PDH}} > 0$ なら共振器長を短く、 $V_{\text{PDH}} < 0$ なら共振器長を長くしてやればよい。

3.5 Wave Front Sensing 法 (WFS)

ミスアライメントを微調する手法として、Wave Front Sensing (以下「WFS」という) が主流である。WFS とは、共振器の鏡の傾きに応じて発生する 10 モードと 00 モードの干渉を検出する手法である。ここでは WFS の原理について記述する。

3.5.1 共振器の反射行列

式 (3.78a) は基本モードでの反射率である。10 モードの反射率を $r_{\text{cav},10}$ とすると、Gouy 位相の分だけ位相がずれるため、

$$r_{\text{cav},10} = r_{\text{F}} - \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} \exp[-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})]}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}} \exp[-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})]} \tag{3.100}$$

となる。ここで、 η_{FP} は、光が共振器を片道進む時の Gouy 位相である。

これを用いて、3.2.3 節のように 00 モードと 10 モードの変換行列を反射行列として表現する。Gouy 位相の分だけ高次モードでは反射率が異なるため、アライメントされた FP 共振器の反射行列は次式である。

$$R_{\text{FP}}^{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{\text{cav},00} & 0 \\ 0 & r_{\text{cav},10} \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

ここで、基本モードの反射率を $r_{\text{cav},00}(:=r_{\text{cav}})$ として明記した。

次に、ミスアライメントされた状態、つまり入射光軸と共振器軸が一致していない場合を考えよう。式(3.72)と同様に、入射光からみた共振器の座標系のずれ γ 、共振器からみた1次反射光のずれ γ_r を導入すれば、式(3.73)、(3.101)より1次反射光の反射行列は

$$\begin{aligned} R_{\text{FP}}^{\text{misalign}} &= M^*(\gamma_r) R_{\text{FP}}^{\text{align}} M(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma_r^* \\ -\gamma_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{\text{cav},00} & 0 \\ 0 & r_{\text{cav},10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{\text{cav},00} - r_{\text{cav},10}\gamma_r^*\gamma^* & r_{\text{cav},00}\gamma + r_{\text{cav},10}\gamma_r^* \\ -r_{\text{cav},00}\gamma_r - r_{\text{cav},10}\gamma^* & r_{\text{cav},10} - r_{\text{cav},00}\gamma\gamma_r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.102)$$

と書ける。入射光の00モードと10モードがアライメントのずれ γ, γ_r によって相互に変換されることが分かる。

γ が十分小さい、つまりある程度アライメントが取れているとして γ の1次までを考えると

$$R_{\text{FP}}^{\text{misalign}} \simeq \begin{pmatrix} r_{\text{cav},00} & r_{\text{cav},00}\gamma + r_{\text{cav},10}\gamma_r^* \\ -r_{\text{cav},00}\gamma_r - r_{\text{cav},10}\gamma^* & r_{\text{cav},10} \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

特に、入射光が基本モードのみの時、1次反射光は

$$R_{\text{FP}}^{\text{misalign}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\text{cav},00} \\ -r_{\text{cav},00}\gamma_r - r_{\text{cav},10}\gamma^* \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

となる。これは言い換えれば、00モードの光に対する、ミスアラインされた共振器の反射率 $r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}$ が次式のように書けるといことだ。

$$r_{\text{cav}}^{\text{misalign}} = r_{\text{cav},00}U_{00} - (r_{\text{cav},00}\gamma_r + r_{\text{cav},10}\gamma^*)U_{10} \quad (3.105)$$

3.5.2 ミスアラインされた共振器のエラー信号

位相変調をかけた光をミスアラインされた共振器へ入射した時の反射光を考える。アライメントされた共振器でのエラー信号は $V_{\text{DC}}, V_{\text{RF}}$ (3.99) で表されたから、共振器がミスアラインされていれば共振器の反射率を $r_{\text{cav}} \rightarrow r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}$ と置き換えられたエラー信号 $V_{\text{RF}}^{\text{misalign}}$ を考えれば良い。

$$V_{\text{DC}}^{\text{misalign}} = \left[J_0^2 |r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c - \omega_m)|^2 \right] P_{\text{in}} \quad (3.106a)$$

$$V_{\text{RF}}^{\text{misalign}} = J_0 J_1 \text{Im} \left[r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^{\text{misalign}*}(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^{\text{misalign}*}(\omega_c) r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c - \omega_m) \right] P_{\text{in}} \quad (3.106b)$$

ここで簡略化のために次の量を導入する。

$$c_0 := r_{\text{cav},00}(\omega_c)\gamma_r + r_{\text{cav},10}(\omega_c)\gamma^* \quad (3.107a)$$

$$s_{\pm} := r_{\text{cav},00}(\omega_c \pm \omega_m)\gamma_r + r_{\text{cav},10}(\omega_c \pm \omega_m)\gamma^* \quad (3.107b)$$

すなわち、ミスアラインされた共振器の反射率の表示を次式のように簡略化する。

$$r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c) = r_{\text{cav},00}(\omega_c)U_{00} - c_0U_{10} \quad (3.108a)$$

$$r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c \pm \omega_m) = r_{\text{cav},00}(\omega_c \pm \omega_m)U_{00} - s_{\pm}U_{10} \quad (3.108b)$$

このとき、DC 信号 (3.106a) は

$$\begin{aligned}
V_{\text{DC}}^{\text{misalign}} &= \left[J_0^2 |r_{\text{cav},00}(\omega_c) U_{00} - c_0 U_{10}|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav},00}(\omega_c + \omega_m) U_{00} - s_+ U_{10}|^2 \right. \\
&\quad \left. + J_1^2 |r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m) U_{00} - s_- U_{10}|^2 \right] P_{\text{in}} \\
&= J_0^2 \left\{ |r_{\text{cav},00}(\omega_c)|^2 |U_{00}|^2 + |c_0|^2 |U_{10}|^2 - 2 \operatorname{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) c_0^* U_{00} U_{10}^*] \right\} P_{\text{in}} \\
&\quad + J_1^2 \left\{ |r_{\text{cav},00}(\omega_c + \omega_m)|^2 |U_{00}|^2 + |s_+|^2 |U_{10}|^2 - 2 \operatorname{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c + \omega_m) s_+^* U_{00} U_{10}^*] \right\} P_{\text{in}} \\
&\quad + J_1^2 \left\{ |r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)|^2 |U_{00}|^2 + |s_-|^2 |U_{10}|^2 - 2 \operatorname{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m) s_-^* U_{00} U_{10}^*] \right\} P_{\text{in}} \\
&= \left(J_0^2 |r_{\text{cav},00}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav},00}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)|^2 \right) |U_{00}|^2 P_{\text{in}} \\
&\quad + \left(J_0^2 |c_0|^2 + J_1^2 |s_+|^2 + J_1^2 |s_-|^2 \right) |U_{10}|^2 P_{\text{in}} \\
&\quad - 2 \operatorname{Re} \left\{ J_0^2 r_{\text{cav},00}(\omega_c) c_0^* + J_1^2 r_{\text{cav},00}(\omega_c + \omega_m) s_+^* + J_1^2 r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m) s_-^* \right\} U_{00} U_{10}^* P_{\text{in}}
\end{aligned} \tag{3.109}$$

RF 信号 (3.106b) は

$$\begin{aligned}
V_{\text{RF}}^{\text{misalign}} &= J_0 J_1 \operatorname{Im} \left[\{r_{\text{cav},00}(\omega_c) U_{00} - c_0 U_{10}\} \{r_{\text{cav},00}^*(\omega_c + \omega_m) U_{00}^* - s_+^* U_{10}^*\} \right. \\
&\quad \left. - \{r_{\text{cav},00}^*(\omega_c) U_{00}^* - c_0^* U_{10}^*\} \{r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m) U_{00} - s_- U_{10}\} \right] P_{\text{in}} \\
&= J_0 J_1 \operatorname{Im} [r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},00}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav},00}^*(\omega_c) r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)] |U_{00}|^2 P_{\text{in}} \\
&\quad - J_0 J_1 \operatorname{Im} \left\{ r_{\text{cav},00}(\omega_c) s_+^* - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m) c_0^* \right\} U_{00} U_{10}^* P_{\text{in}} \\
&\quad + J_0 J_1 \operatorname{Im} \left\{ r_{\text{cav},00}^*(\omega_c) s_- - r_{\text{cav},00}^*(\omega_c + \omega_m) c_0 \right\} U_{00}^* U_{10} P_{\text{in}} + J_0 J_1 \operatorname{Im} [c_0 s_+^* - c_0^* s_-] |U_{10}|^2 P_{\text{in}}
\end{aligned} \tag{3.110}$$

ここで RF 信号における第 1 項 $|U_{00}|^2$ の係数はまさしく PDH 信号 (3.99) である。第 2 項 $U_{00} U_{10}^*$ および第 3 項 $U_{00}^* U_{10}$ は 00 モードと 10 モードの干渉を表しており、これが WFS 信号 V_{WFS} である。第 4 項 $|U_{10}|^2$ は γ の二次の項であるので、無視してよい。

つまり、ミスアラインされた共振器のエラー信号は次式で表すことができる。

$$V_{\text{RF}}^{\text{misalign}} = V_{\text{PDH}} + V_{\text{WFS}} \tag{3.111a}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{WFS}} &= J_0 J_1 \operatorname{Im} \left[\{r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m) c_0^* - r_{\text{cav},00}(\omega_c) s_+^*\} U_{00} U_{10}^* \right. \\
&\quad \left. - \{r_{\text{cav},00}^*(\omega_c + \omega_m) c_0 - r_{\text{cav},00}^*(\omega_c) s_-\} U_{00}^* U_{10} \right] P_{\text{in}}
\end{aligned} \tag{3.111b}$$

3.5.3 PDH 信号と WFS 信号の分離

さて、ミスアラインされた共振器から出てくるエラー信号を取得することで、共振器のずれの情報 $V_{\text{PDH}}, V_{\text{WFS}}$ を得ることができると分かった。しかしながら (3.111a) を見る限り、得られる信号 $V_{\text{PDH}}^{\text{misalign}}$ は共振器長制御のための PDH 信号 V_{PDH} とミラーの姿勢制御のための WFS 信号 V_{WFS} の足し合わせであり、それらを区別できないように見える。

ここで式 (3.49) を見てみると、 $U_0(x)$ は x に対して偶関数、 $U_1(x)$ は奇関数である。つまり、 V_{WFS} は奇関数であるので、PD のような検出器では全体を積分すると次式のように打ち消しあう。

$$P_{\text{WFS}}^{\text{PD}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy V_{\text{WFS}}(x, y) = 0 \tag{3.112}$$

すなわち V_{WFS} は高次モードの干渉を含んだ信号で、単なる PD では情報を得ることができない。一方で、共振器がミスアラインされていても単なる PD を使えば PDH 信号を取り出すことができることを示している。

3.5.4 共振状態における WFS 信号

3.5.3 節より、ミスアライメントされた共振器でも PD を使えば PDH 信号のみを取り出せることが分かった。この PDH 信号を用いてキャリア光 ω_c に対して共振器を共振状態に制御して、共振条件下における V_{WFS} を解く。

式 (3.78a) より、共振状態の周りで次が成立する。また、反射率は実数であると仮定する。

$$r_{\text{cav}}^*(\omega_c) = r_{\text{cav}}(\omega_c) \quad (3.113a)$$

$$r_{\text{cav}}^*(\omega_c \pm \omega_m) = r_{\text{cav}}(\omega_c \mp \omega_m) \quad (3.113b)$$

従って、 c_0 と s_{\pm} を展開して、RF 復調した WFS 信号 (3.111b) は次式で書き換えられる。

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}} &= J_0 J_1 \text{Im} [-\{r_{\text{cav},00}(\omega_c)[r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)\gamma_r^* + r_{\text{cav},10}(\omega_c - \omega_m)\gamma] \\ &\quad - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)[r_{\text{cav},00}(\omega_c)\gamma_r^* + r_{\text{cav},10}(\omega_c)\gamma]\} U_{00}U_{10}^* \\ &\quad + \{r_{\text{cav},00}(\omega_c)[r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)\gamma_r + r_{\text{cav},10}(\omega_c - \omega_m)\gamma^*] \\ &\quad - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)[r_{\text{cav},00}(\omega_c)\gamma_r + r_{\text{cav},10}(\omega_c)\gamma^*]\} U_{00}^*U_{10}] P_{\text{in}} \\ &= J_0 J_1 \text{Im} [\{r_{\text{cav},00}(\omega_c)r_{\text{cav},10}(\omega_c - \omega_m) - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)r_{\text{cav},10}(\omega_c)\} \{\gamma^*U_{00}^*U_{10} - \gamma U_{00}U_{10}^*\}] P_{\text{in}} \\ &= J_0 J_1 \{\text{Re} [r_{\text{cav},00}(\omega_c)r_{\text{cav},10}(\omega_c - \omega_m) - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)r_{\text{cav},10}(\omega_c)] \text{Im} [\gamma^*U_{00}^*U_{10} - \gamma U_{00}U_{10}^*] \\ &\quad + \text{Im} [r_{\text{cav},00}(\omega_c)r_{\text{cav},10}(\omega_c - \omega_m) - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)r_{\text{cav},10}(\omega_c)] \text{Re} [\gamma^*U_{00}^*U_{10} - \gamma U_{00}U_{10}^*]\} P_{\text{in}} \\ &= 2J_0 J_1 \text{Re} [r_{\text{cav},00}(\omega_c)r_{\text{cav},10}(\omega_c - \omega_m) - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m)r_{\text{cav},10}(\omega_c)] \text{Im} [\gamma^*U_{00}^*U_{10}] P_{\text{in}} \end{aligned} \quad (3.114)$$

ここで、式変形には次式を用いた。

$$\text{Re} [z - z^*] = 0 \quad (3.115a)$$

$$\text{Im} [z - z^*] = 2 \text{Im} [z] \quad (3.115b)$$

$$\text{Im} [z_1 z_2] = \text{Re} [z_1] \text{Im} [z_2] + \text{Im} [z_1] \text{Re} [z_2] \quad (3.115c)$$

γ の定義 (3.72) に従って $\text{Im} [\gamma^*U_{00}^*U_{10}]$ を展開すると

$$\text{Im} [\gamma^*U_{00}^*U_{10}] = \text{Im} [U_{00}^*U_{10}] \frac{\delta x}{w_0} + \text{Re} [U_{00}^*U_{10}] \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \quad (3.116)$$

高次モードの定義 (3.48) より、基本モードと 1 次モードの干渉項は Gouy 位相を用いて次式で表される。

$$U_{00}U_{10}^* = U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y) \exp[-i\eta] \quad (3.117a)$$

$$U_{00}^*U_{10} = U_0^*(x)U_0^*(y)U_1(x)U_0(y) \exp[i\eta] \quad (3.117b)$$

式 (3.53a) より、 $U_1^*U_m \in \mathbb{R}$ であるから

$$\text{Re} [U_{00}U_{10}^*] = U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y) \cos \eta \quad (3.118a)$$

$$\text{Im} [U_{00}U_{10}^*] = -U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y) \sin \eta \quad (3.118b)$$

$$\text{Re} [U_{00}^*U_{10}] = U_0^*(x)U_0^*(y)U_1(x)U_0(y) \cos \eta \quad (3.118c)$$

$$\text{Im} [U_{00}^*U_{10}] = U_0^*(x)U_0^*(y)U_1(x)U_0(y) \sin \eta \quad (3.118d)$$

以上より、共振状態における WFS 信号は次式で書ける。

$$V_{\text{WFS}} = J_0 J_1 R_0 U_0^* U_0^* U_1 U_0 \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta + \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) P_{\text{in}} \quad (3.119\text{a})$$

$$R_0 = \text{Re} [r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c - \omega_m) - r_{\text{cav},00}(\omega_c - \omega_m) r_{\text{cav},10}(\omega_c)] \quad (3.119\text{b})$$

また、DC 信号 (3.109) の干渉項も同様に計算すると式 (3.97a) より

$$\begin{aligned} \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) c_0^* U_{00} U_{10}^*] &= \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},00}(\omega_c)^* \gamma_r^* U_{00} U_{10}^*] + \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^* \gamma U_{00} U_{10}^*] \\ &= |r_{\text{cav},00}(\omega_c)|^2 \text{Re}[\gamma_r^* U_{00} U_{10}^*] + \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^* \gamma U_{00} U_{10}^*] \\ &= \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},00}(\omega_c)^* \gamma_r^* U_{00} U_{10}^*] + \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^* \gamma U_{00} U_{10}^*] \\ &= |r_{\text{cav},00}(\omega_c)|^2 \text{Re}[\gamma_r^* U_{00} U_{10}^*] + \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^*] \text{Re}[\gamma U_{00} U_{10}^*] \\ &\quad - \text{Im}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^*] \text{Im}[\gamma U_{00} U_{10}^*] \\ &= |r_{\text{cav},00}(\omega_c)|^2 \left(\text{Re}[U_{00} U_{10}^*] \frac{\delta x_r}{w_0} - \text{Im}[U_{00} U_{10}^*] \frac{\delta \theta_r}{\alpha_0} \right) \\ &\quad + \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^*] \left(\text{Re}[U_{00} U_{10}^*] \frac{\delta x}{w_0} - \text{Im}[U_{00} U_{10}^*] \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \\ &\quad - \text{Im}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^*] \left(\text{Im}[U_{00} U_{10}^*] \frac{\delta x}{w_0} + \text{Re}[U_{00} U_{10}^*] \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \\ &= U_0(x) U_0(y) U_1^*(x) U_0^*(y) \left\{ |r_{\text{cav},00}(\omega_c)|^2 \left(\frac{\delta x_r}{w_0} \cos \eta + \frac{\delta \theta_r}{\alpha_0} \sin \eta \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Re}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^*] \left(\frac{\delta x}{w_0} \cos \eta + \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \sin \eta \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}[r_{\text{cav},00}(\omega_c) r_{\text{cav},10}(\omega_c)^*] \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta - \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) \right\} \quad (3.120) \end{aligned}$$

3.5.5 分割 PD による WFS 信号の取得

3.5.3 節より、単なる PD では WFS 信号を取得できないと分かった。そこで WFS 信号を検出するためには、左右に分割された PD (以下「分割 PD」と呼ぶ) を用意して、次のように左右の信号の差 $P_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}}$ を取ればよい。

$$\begin{aligned} P_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}}(x, y) - \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}}(x, y) \\ &= 2 \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}}(x, y) \quad (3.121) \\ &= 2 J_0 J_1 R_0 \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta + \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) P_{\text{in}} \int_0^\infty U_0^*(x) U_1(x) dx \int_{-\infty}^\infty U_0^*(y) U_0(y) dy \end{aligned}$$

ここで、 x の積分項は式 (3.49) に従って U_0, U_1 を具体的に書き下せば次式のように計算できる.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty U_0^*(x)U_1(x) dx &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}w^2(z)} \int_0^\infty x \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (3.122)$$

また、 y の積分項は規格化条件より次式が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^\infty U_0^*(y)U_0(y) dy = 1 \quad (3.123)$$

以上より,

$$P_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} J_0 J_1 R_0 \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta + \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) P_{\text{in}} \quad (3.124)$$

ここで η は Gouy 位相であった. つまり, 光の進行方向 z に依存する値で, 異なる適切な位置に分割 PD を置いてやれば, $P_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}}$ は δx と $\delta \theta$ に比例した信号を得ることができると分かる.

ここで Gouy 位相の定義 (3.27c) より, $z = z_{z_0}$ で $\eta = 0$, すなわち $\cos \eta = 1, \sin \eta = 0$ であるから

$$P_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}} \propto \delta \theta \quad (3.125)$$

$z = \infty$ で $\eta = 90 \text{ deg}$, すなわち $\cos \eta = 0, \sin \eta = 1$ であるから

$$P_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}} \propto \delta x \quad (3.126)$$

となる. すなわち, 平行移動の成分は共振器のより遠くで, 回転移動の成分は共振器のより近くで観測しやすい.

第 4 章

深層学習

本研究では、CCD カメラ画像の主成分を説明変数、ミラーの角度を目的変数としてニューラルネットワークに深層学習を行う。この節ではニューラルネットワーク、および前処理としての主成分分析について記述する。

4.1 主成分分析 (PCA)

本研究のような、説明変数が画像であるような深層学習では畳み込みニューラルネットワーク (Convolutional Neural Network; CNN) が用いられるのが一般的である。しかし本研究では、シミュレーションで得られた CCD カメラの画像を直接ニューラルネットに学習させることはせず、主成分分析 (Principal Component Analysis, 以下「PCA」と呼ぶ) という処理を施したデータを学習させる。PCA は次元削減の一種で、データの特徴量を抽出することでデータの圧縮やデータの可視化を目的として使用される。第 3 章で導出したように、ガウシアンビームは HG モードを基底として記述できる。本研究では PCA を行うことで CCD カメラから得られる画像データから基底を抽出することで情報量の削減を行った。ニューラルネットについての説明は次の節で行い、ここでは PCA について記述する。

主成分分析では、最も分散の大きい方向に新しい基底を取ることで、次元の削減を行う。例えば、図 4.1 のように二次元上 (x_1, x_2) に存在するデータ点の情報を圧縮することを考えよう。

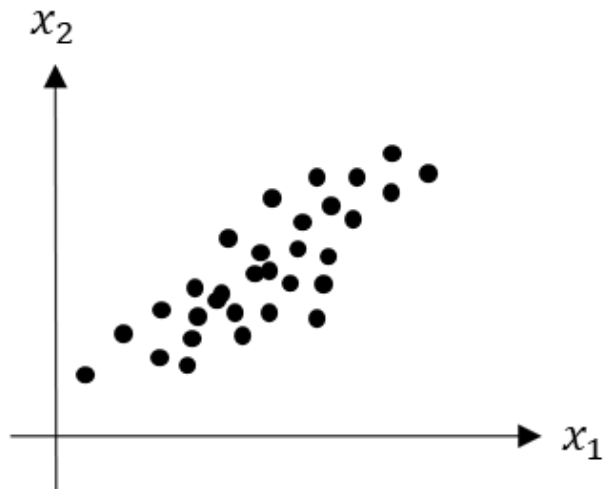


図 4.1: 元の特徴量空間

次に 図 4.2 のように、データの分散の最も大きい方向が基底の 1 つとなるよう、新しい基底 (y_1, y_2) を取る。

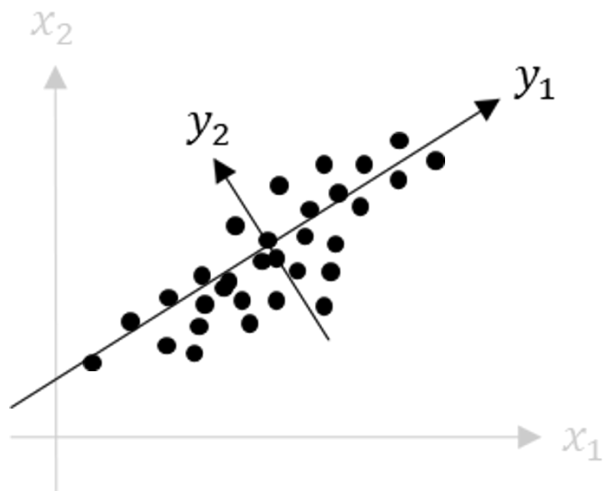


図 4.2: 新しい特徴量空間

この時、例に挙げたようなデータの分布であれば、 y_2 の持つ情報は y_1 の持つ情報に比べて十分小さくなる。つまり、これらのデータは y_1 という情報だけで十分に表すことができ、2次元の情報を1次元に圧縮することができる。

この方法は当然、2次元以上に拡張することができる。それぞれの基底がどの程度情報を持っているか、という値は寄与率と呼ばれ、これを考慮して新しい基底をどの次元まで減らしてよいか考える必要がある。

4.2 標準化

標準化は全ての特徴量の平均値および分散を一致させる処理である。この処理により、異なる単位系でも同様に評価することができる。例えば、1m と 1000mm は人間にとっては同じであるが、深層学習においては後者の方が損失関数（後述）が大きくなるため、NN に対して与える影響が大きくなる。また、単位系が同じでも 0 から 100 の範囲で動く変数と 0 から 0.1 の範囲で動く変数では、重みの更新によって変化する割合が異なる。この問題を解決するために、平均値や分散が意味を持たないデータの場合、標準化の操作を行うとよい。

4.3 ノード

ノードはニューラルネットワークの最小単位である。人間の神経細胞をモデルに考案されたため、人工ニューロンとも呼ばれる [7]。

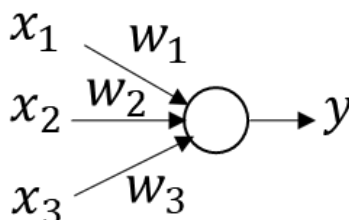


図 4.3: ノード

ノードの働きを式で表すと次式のようなになる。ノードは他のノードからの出力 x_i にそれぞれ重み w_i を付けた和を入力として受け付け、活性化関数 f_{act} と呼ばれる非線形関数を通した出力 y を吐き出す。

$$y = f_{\text{act}} \left(\sum_i w_i x_i \right) \quad (4.1)$$

活性化関数は様々であるが、ステップ関数や sigmoid 関数、tanh 関数などが一般的に用いられる。活性化関数が線形であると、いくつかのノードを組み合わせても線形な結果しか得られず、非線形な表現が不可能になってしまうため、活性化関数は非線形でなくてはならない。

4.4 階層型ニューラルネットワーク

ニューラルネットワークは複数のノードの組み合わせであり、特にノードを階層状に重ねた階層型ニューラルネットワーク（図 4.4）が一般的に用いられる。以降、ニューラルネットワークといえば階層型を指すものとする。

説明変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$ から目的変数の正解値 y を予測するニューラルネットワークについて考える。

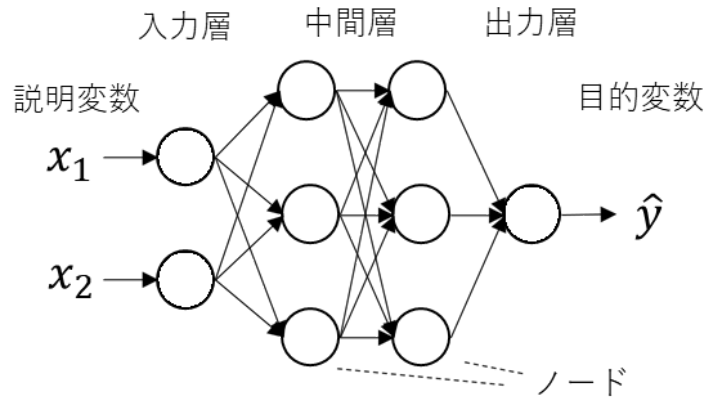


図 4.4: 階層型ニューラルネットワーク (例)

ニューラルネットワークでは入力層に説明変数の値 x を入れると、中間層のそれぞれのノードに対して情報が送られる。各ノードで式 (4.1) に従った計算結果がさらに次のノードへと送られ、最終的に出力層のノードが目的変数の予測値 \hat{y} を提示する。ここで当然、それぞれのノードの重み付け w_i を変化させれば出力 \hat{y} は変化する。 x に対する正解値 y に予測値 \hat{y} が一致するよう、適切な全ての重みの組み合わせ $w = (w_1, w_2, \dots)$ を見つける作業がニューラルネットワークの学習である。すなわち、重みをどう変えれば予測値が正解値に近づくのか、という問題を解けばよい。

4.5 損失関数

ニューラルネットワークを学習させるとき、「正解値と予測値がどれだけずれているか」を評価するため、損失関数と呼ばれる式を定義する。ロス関数、誤差関数とも呼ばれる。損失関数は様々な種類があり目的によって使い分けるものだが、ここでは次式のような二乗和誤差関数を例示する。

$$E(w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}(w) \right)^2 \quad (4.2)$$

ここで n はデータセットの件数、 $y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}$ は i 番目のデータの正解値、予測値である。

予測値 $\hat{y}^{(i)}$ が正解値 $y^{(i)}$ に近づく重み w とはつまり、損失関数 $E(w)$ が最も小さくなる重み w である。

4.6 勾配法

損失関数が小さくなる重みを探せばよいと言っても、重みは複数のパラメータの組み合わせ $w = (w_1, w_2, \dots)$ であるから、総当たりに調べることはコンピュータを用いても困難である。例えば重みのパラメータ 30 個に対してそれぞれ 100 件掃引するとしたら 100^{30} 回もニューラルネットワークによる予測、及び損失関数を計算せねばならず現実的でない。

そこでニューラルネットワークでは、勾配法と呼ばれる方法を用いて最適な重みの組み合わせを探索する。例えば、1つの重み w_i に対して、損失関数 $E(w_i)$ が図 4.5 のように変化するとしよう。これの最小値を見つきたい。

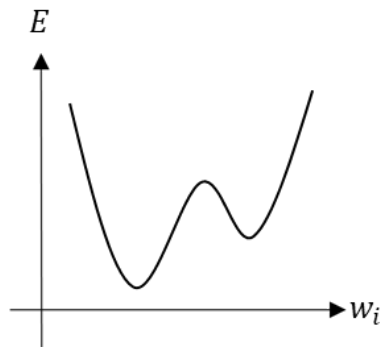


図 4.5: 損失関数と重みの関係

勾配法ではまず、重み w_i の初期値 $w_i^{(0)}$ を適当にとる。例えば 図 4.6a や 図 4.6b のような初期値をとることを考えよう。

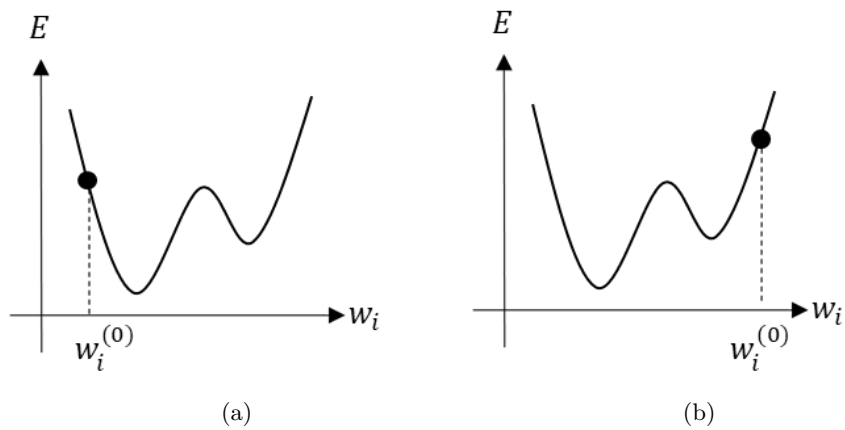


図 4.6: 重みの初期値

これより損失関数が小さくなる新しい重み $w_i^{(1)}$ を取りたい。

そのためには、重みに対する損失関数の微分が負であれば重みが大きくなる方向 (図 4.7a), 微分が正であれば重みが小さくなる方向 (図 4.7b) へ新しい重み $w_i^{(1)}$ を選べばよい。

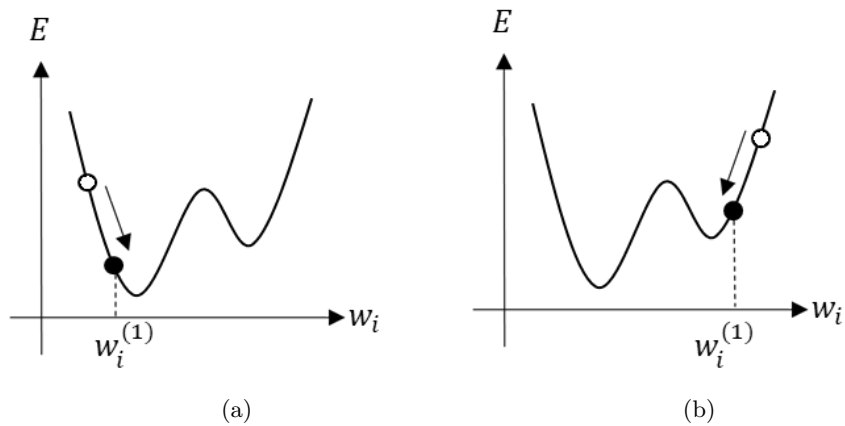


図 4.7: 重みの更新

この作業を繰り返していけば、最終的に最小値あるいは極小値へ収束することが分かる．この作業は「重みの更新」と呼ばれ、次式で表される．

$$w_i^{(k+1)} = w_i^{(k)} - \eta_{\text{train}} \left. \frac{dE(w_i)}{dw_i} \right|_{w_i=w_i^{(k)}} \quad (4.3)$$

η_{train} は学習率と呼ばれ、重みをどれだけ大きく更新するかという設定値である． η_{train} が小さすぎる場合、収束に時間がかかる上、最小値でなく極小値で収束しやすくなってしまふ．一方、 η_{train} が大きすぎる場合、収束せず発散してしまふ、何度更新を繰り返しても最小値に収束することはない (図 4.8). つまり勾配法は必ず最小値に収束するとは限らず、適当な学習率 η_{train} を選ぶ必要がある．

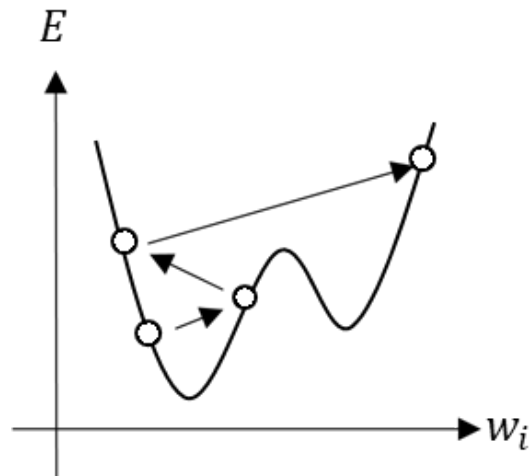


図 4.8: 勾配法での発散

これまでは1つの重みの更新について考えていたが、全ての重み $w = (w_1, w_2, \dots)$ に拡張すれば次式のようになる．

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} - \eta_{\text{train}} \left. \nabla E(w) \right|_{w=w^{(k)}} \quad (4.4)$$

ここで、学習データ 1 件ずつに対して勾配法を適用する手法をオンライン学習、すべての学習データを同時に適用する手法をバッチ学習と呼ぶ。オンライン学習は最小値でない極小値へ収束しにくくなるメリットがあるが、外れ値に対しても大きく重みを更新してしまうデメリットがある。一方バッチ学習では平均的に重みを更新できるが、極小値へ収束しやすい。本研究ではこの中間にあたる、学習データを分割して少しずつ勾配法を適用するミニバッチ学習と呼ばれる手法を用いた。ミニバッチ法で 1 度に用いる学習データの件数をバッチサイズと呼ぶ。

また、全ての学習データに対して重みを更新する回数をエポック数と呼ぶ。エポック数は大きいほど学習が進むが、大きすぎると過学習となるので適当なエポック数で学習をやめる必要がある。過学習とはニューラルネットワークが学習データに適応しすぎた場合に発生する現象で、汎用性が失われることでテストデータへの精度が悪くなる。

以上の学習率、バッチサイズ、エポック数が勾配法に用いるパラメータである。また、勾配法自体にも拡張したアルゴリズムが開発されており、これらを最適化アルゴリズムと呼ぶ。

4.7 誤差逆伝播法

勾配法の結果 (4.3) より、損失関数の重みによる偏微分 $\frac{\partial E}{\partial w}$ を用いて最小値を探索することができると分かった。しかしながら、損失関数 (4.2) は正解値 y と予測値 \hat{y} の関数であったから、 w_i で直接微分することはできない。この節では、損失関数の重みによる微分を連鎖率を用いて計算する誤差逆伝播法 (Backpropagation) について記述する。

これまでの議論では 1 つの重みについて w_i と適当に呼んでいたが、この節の議論ではどのノードからどのノードへの伝達における重みなのかを考える必要があるため、新たに命名することとする。図 4.9 のように、 k 層 i 番目のノードをノード (k, i) とし、 k 番目の層に存在するノードの数を N_k 、層数を K とする。

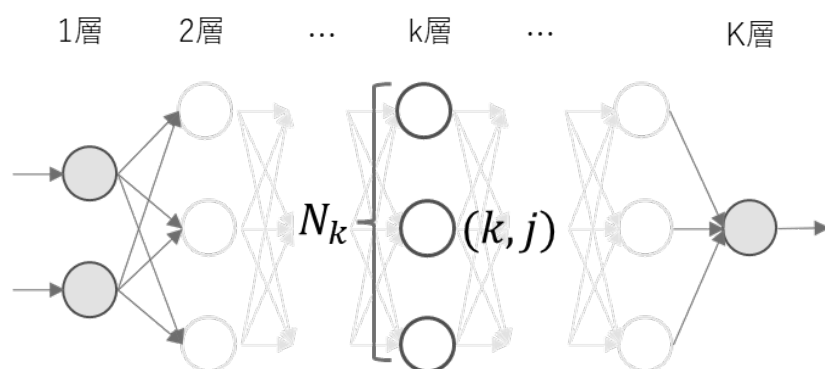


図 4.9: ノードの座標

また、図 4.10 のようにノード (k, i) からノード $(k + 1, j)$ への重みを $w_{(k,i) \rightarrow (k+1,j)}$ 、ノード (k, i) への入力のを $I_{(k,i)}$ 、出力を $O_{(k,i)}$ と命名する。

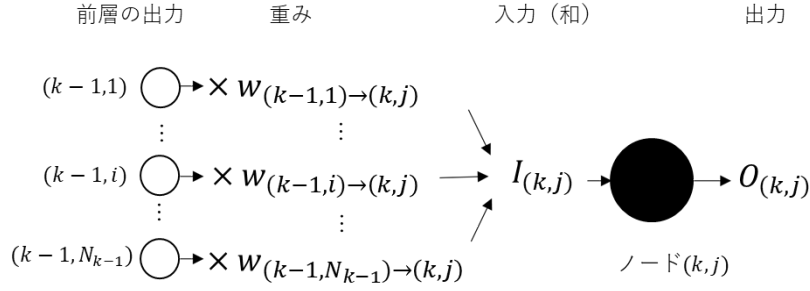


図 4.10: ノードの入出力

これらの量を用いて、ノードの入出力の関係 (4.1) は次式のように書ける.

$$O_{(k,j)} = f_{\text{act}}(I_{(k,j)}) \quad (4.5a)$$

$$I_{(k,j)} = \sum_{i=1}^{N_{k-1}} w_{(k-1,i) \rightarrow (k,j)} O_{(k-1,i)} \quad (4.5b)$$

これより、次式の偏微分が成立する.

$$\frac{\partial O_{(k,j)}}{\partial I_{(k,j)}} = f'_{\text{act}}(I_{(k,j)}) \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial I_{(k,j)}}{\partial O_{(k-1,i)}} = w_{(k-1,i) \rightarrow (k,j)} \quad (4.6b)$$

以上を前提として、ノード $(k-1, i)$ からノード (k, j) への重み $w_{(k-1,i) \rightarrow (k,j)}$ を勾配法を使って更新して、損失関数 E を小さくしたい。ここで、全ての重み $w_{(k-1,i) \rightarrow (k,j)}$ に対して適当な初期値が設定されていて、入力値 x に対する正解値 y 、および入力値 x をニューラルネットワークに流し込んだ時のすべてのノードの入出力の結果 $O_{(k,j)}, I_{(k,j)}$ は記録されているとし、これらの情報は重みの更新に用いることができる。また、活性化関数 f_{act} の導関数も分かっているものとする。式 (4.3) より、損失関数をこの重みで偏微分した値が分かればよいから、次式を計算しよう。ノードからの入力 $I_{(k,j)}$ を用いれば、連鎖律より

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial w_{(k-1,i) \rightarrow (k,j)}} &= \frac{\partial E}{\partial I_{(k,j)}} \frac{\partial I_{(k,j)}}{\partial w_{(k-1,i) \rightarrow (k,j)}} \\
 &= \frac{\partial E}{\partial O_{(k,j)}} \frac{\partial O_{(k,j)}}{\partial I_{(k,j)}} O_{(k-1,i)} \\
 &= \frac{\partial E}{\partial O_{(k,j)}} f'_{\text{act}}(I_{(k,j)}) O_{(k-1,i)}
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで、出力層 $k = K$ においては、ノードの出力 $O_{(K,1)}$ はまさに予測値 \hat{y} であり、損失関数 (4.2) は予測値の関数であったから、次式が成立する.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial O_{(K,1)}} &= \frac{\partial E}{\partial \hat{y}} \\
 &= \hat{y} - y
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

中間層 $k < K$ においては、 $O_{(k,j)}$ は次の層のすべての入力 $I_{(k+1,l)}$ に作用するから、連鎖率を用いて、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial O_{(k,j)}} &= \sum_{l=1}^{N_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial I_{(k+1,l)}} \frac{\partial I_{(k+1,l)}}{\partial O_{(k,j)}} \\ &= \sum_{l=1}^{N_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial O_{(k+1,l)}} \frac{\partial O_{(k+1,l)}}{\partial I_{(k+1,l)}} w_{(k,j) \rightarrow (k+1,l)} \\ &= \sum_{l=1}^{N_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial O_{(k+1,l)}} f'_{\text{act}}(I_{(k+1,l)}) w_{(k,j) \rightarrow (k+1,l)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

つまり、次の層における全ての $\frac{\partial E}{\partial O_{(k+1,l)}}$ が分かれば $\frac{\partial E}{\partial O_{(k,j)}}$ も計算可能である。ここで、出力層における $\frac{\partial E}{\partial O_{(k,j)}}$ は明確な値 $\hat{y} - y$ として計算可能であったから、帰納的に考えることで全ての層における $\frac{\partial E}{\partial O_{(k,j)}}$ も計算が可能である。

以上より、出力層の誤差 $\hat{y} - y$ の情報を前の層に伝えていくことで全ての重みの更新量 $\frac{\partial E}{\partial w_{(k-1,i) \rightarrow (k,j)}}$ を計算可能である。

4.8 活性化関数の勾配消失問題

重みの更新量には活性化関数の勾配 f'_{act} が含まれる。しかしながら式 (4.9) を見ても分かるように、入力層に向かって誤差を伝搬させるたびに活性化関数の勾配を掛けることになり、活性化関数によっては層が深くなりすぎるとこの勾配の積が指数関数的に 0 に近くなり、重みが更新されなくなってしまう。これを勾配消失問題という。

これは活性化関数の勾配の最大値に起因するため、活性化関数の選ぶ一つの指標になる。例えばシグモイド関数 ($\max[f'_{\text{act}}] = 1/4$) は tanh 関数 ($\max[f'_{\text{act}}] = 1$) よりもこの問題が起こりやすい。

第 5 章

実験

この章ではシミュレーションによる FP 共振器の応答を確認したのち、光共振器の状態と応答のデータセットをニューラルネットワークに学習させる方法および結果について述べる。

5.1 実験の手順

1. PC 上でシミュレーションを行い、FP 共振器のミラーの傾きを変更した状態で共振器長を掃引し FP 共振器を共振させる (5.3 節)。
2. 共振状態における反射光を CCD カメラで検出する。このシミュレーションを大量に行い、ミラーの傾きと反射光画像のデータセットを生成する。
3. 反射光画像に対して PCA を行い、特徴量を抽出する (5.4 節)。
4. 特徴量を説明変数、ミラーの傾きを目的変数として NN に対して深層学習を行う (5.5 節)。

5.2 実行環境

実験の再現性担保のため、コードを動かした環境を記述しておく。

OS : Microsoft Windows 10 Home

CPU : AMD Ryzen 7 3700X 8-Core Processor 3.59 GHz

GPU : NVIDIA GeForce RTX 3070

RAM : 16.0GB

Python : 3.8.11

PyKat : 1.2.81

FINESSE : 2.3.1.6

5.3 光学シミュレーション

本研究では、光学シミュレーションライブラリ「FINESSE 2」(以下「FINESSE」と呼ぶ)を用いてコンピュータ上で光学系を再現した。\$abc で表される構文は FINESSE の変数、{ABC} で表される構文は Python によって代入される変数である。

例えば ソースコード 5.11 で生成した Python の変数値を ソースコード 5.10 の FINESSE コードに渡し実行するコードは以下である。

ソースコード 5.1: FINESSE を実行する Python コード (例)

```
1 import pykat
2 import random
3
4 def generate_random_rotation(max_rotation):
5     return random.uniform(-max_rotation, +max_rotation)
6
7 FM_xbeta = generate_random_rotation(1e-3)
8 FM_ybeta = 0
9 EM_xbeta = generate_random_rotation(1e-3)
10 EM_ybeta = 0
11
12 base_code = """
13 attr FM xbeta {FM_xbeta}
14 attr FM ybeta {FM_ybeta}
15 attr EM xbeta {EM_xbeta}
16 attr EM ybeta {EM_ybeta}
17 """
18
19 code = base_code.format(
20     FM_xbeta = FM_xbeta,
21     FM_ybeta = FM_ybeta,
22     EM_xbeta = EM_xbeta,
23     EM_ybeta = EM_ybeta,
24 )
25
26 kat = pykat.finesse.kat();
27 kat.parse(code);
28 out = kat.run(usePipe = False);
```

文字列クラスの `format()` メソッドを用いて FINESSE コードに代入し、`pykat` パッケージを利用して FINESSE を実行している。

また、本研究では FINESSE の以下のデフォルト値をそのまま利用した。

- 光速 $c = 299792458.0\text{m/s}$
- レーザー光の波長 $\lambda = 1064\text{nm}$

5.3.1 光学系のセットアップ

本研究では、光学系のセットアップとして 図 5.1 のような FP 共振器を用いた。

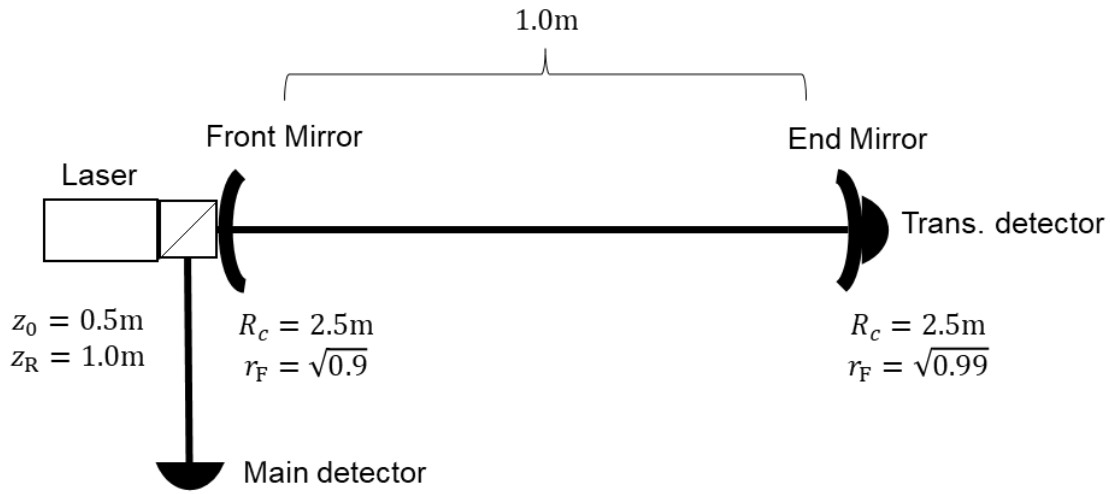


図 5.1: シミュレーションを行う FP 共振器のセットアップ

実験の再現性担保のため、使用したシミュレーションコードも記載しておく。実験ではこれらのコードを Python で生成し、FINESSE に渡すことでシミュレーションを実行した。

ソースコード 5.2: FP 共振器の FINESSE コード

```

1 l i1 100 0 nL
2 gauss* input i1 nL -0.5 1
3
4 bs refl 0.0001 0.9999 0 45 nL dump n0 nREFL
5
6 s s0 0 n0 n1
7
8 m FM 0.7 0.3 0 n1 nC1
9 s sCav 1 nC1 nC2
10 m EM 0.8 0.2 0 nC2 nTrans
11
12 attr FM Rc -2.5
13 attr EM Rc 2.5
14
15 pd trans nTrans
16
17 maxtem 6

```

本実験では 100W のレーザー光を発生させ (1 行目), ビームウェストが共振器の中心 $z_0 = 0.5\text{m}$, Rayleigh レンジが $z_R = 1.0\text{m}$ となるような Gaussian ビームとした (2 行目). レーザーの直後には透過率 99.99% のビームスプリッターを設置し, FP 共振器の反射光を Main Detector で検出できるようにしている (4 行目). フロントミラー, エンドミラーであり透過率および反射率はそれぞれ $r_F = \sqrt{0.9}$, $t_F = \sqrt{0.1}$, $r_E = \sqrt{0.99}$, $t_E = \sqrt{0.01}$ とした (8 行目および 10 行目). ミラーの間隔, つまり共振器長は 1m に設定し (9 行目), また, ミラーの曲率半径はモードマッチするように 2.5m とした (12 行目および 13 行目). エンドミラーの後ろに透過光パワー P_{trans} を検出するための PD を設置し (15 行目), これは共振状態の計測に使う. 以上が FP 共振器のセットアップである.

また、17行目の MAXTEM では、FINESSE 上で計算される高次モードのオーダーを決めている。 $n + m \leq \text{MAXTEM}$ を満たす nm モードまでが計算される。多ければ多いほど正確なシミュレーションが可能だが、実行時間が指数関数的に伸びる。本実験では MAXTEM = 6 を設定した。

ソースコード 5.3 によってエンドミラーの位相 ϕ を動かした場合の透過光パワー P_{trans} をプロットしたグラフが図 5.2 であり、 $\phi = n\pi$ で共振が見られる。共振条件 (3.81) における ϕ_c は光が共振器を往復する際の位相差であるので $\phi_c = 2\phi$ であり、確かに共振条件に一致した結果である。

ソースコード 5.3: EM の位相を変更する FINESSE コード

```
1 xaxis* EM phi lin -270 270 1000
```

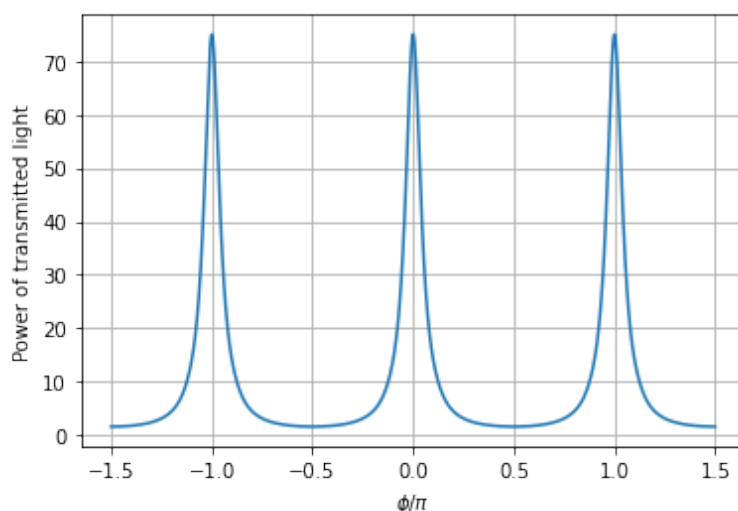


図 5.2: 共振器長を変えた場合の透過光の計測

横軸は EM の位相。光の往復する共振器長が入射光波長の定数倍になるときに FP 共振器の共振が見られる。

5.3.2 PDH 信号の計測とフィードバック

この節では FINESSE を用いて、3.4 節で説明した PDH 信号を計測する。ソースコード 5.2 では位相変調は行っていないが、PDH 信号や WFS 信号の計測には位相変調によるサイドバンド光が必要なので、ソースコード 5.2 の 4 行目を以下のようなコードで置換する。このコードでは EOM コマンドで変調周波数 $f_{\text{mod}} = 16.875\text{MHz}$ の位相変調器を導入しており、セットアップとしては図 5.3 である。

ソースコード 5.4: 位相変調を行う FINESSE コード

```
1 const fmod 16.875M
2 mod eol $fmod 0.15 2 pm 0 nL neo1
3 s eol1 0 neo1 neo2
4 bs refl 0.0001 0.9999 0 45 neo2 dump n0 nREFL
```

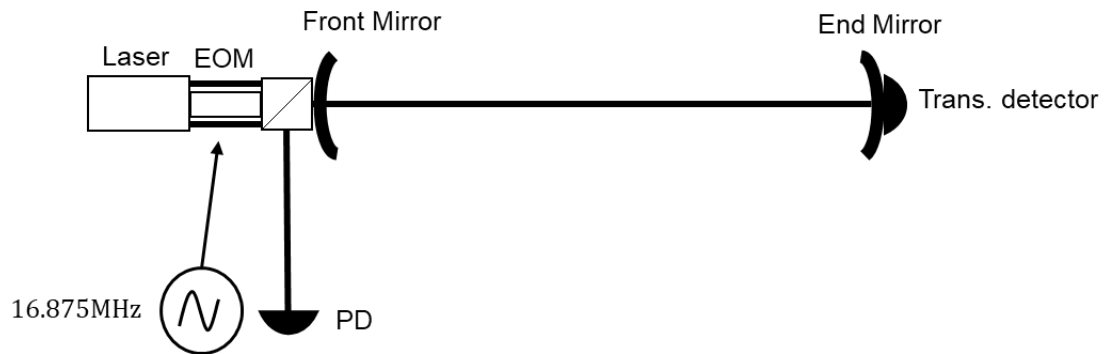


図 5.3: EOM 変調器を導入した FP 共振器のセットアップ

反射光を変調周波数で復調するコードが以下である。復調位相 $\{pdh_demod_Iphase\}, \{pdh_demod_Qphase\}$ は I-phase の信号が最も大きくなるよう適当にとった。

ソースコード 5.5: 位相変調を行う FINESSE コード

```
1 pd1 ReI1 $fmod {pdh_demod_Iphase} nREFL
2 pd1 ReQ1 $fmod {pdh_demod_Qphase} nREFL
```

これらの PDH 信号をプロットしたグラフが 図 5.4 である。 $\phi = 0$ 周りで確かに線形信号が取れており、共振周りで制御可能であることが分かる。

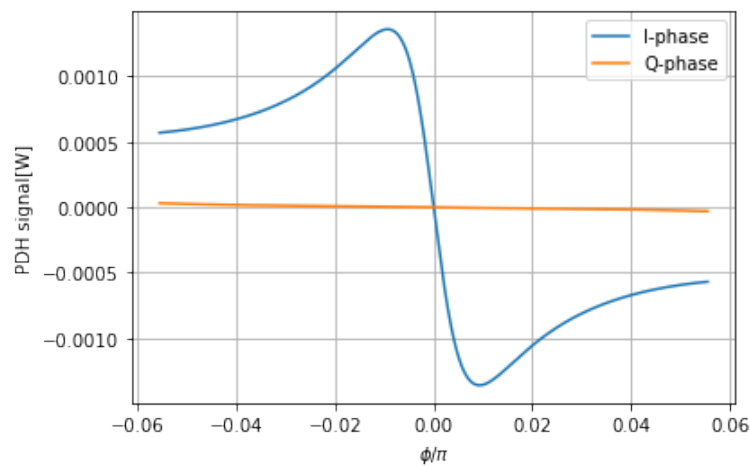


図 5.4: PDH 信号

ここで得た PDH 信号は、 finesse の lock コマンドを用いて共振器長にフィードバックすることができる。以下のコードでミラーの位相を動かすことで長さ方向の制御を行い、干渉計は共振状態にロックされる。

ソースコード 5.6: PDH 信号のフィードバックを行う FINESSE コード

```
1 set err ReI1 re
2 lock pdh $err -0.1 1e-6
3 put* EM phi $pdh
```

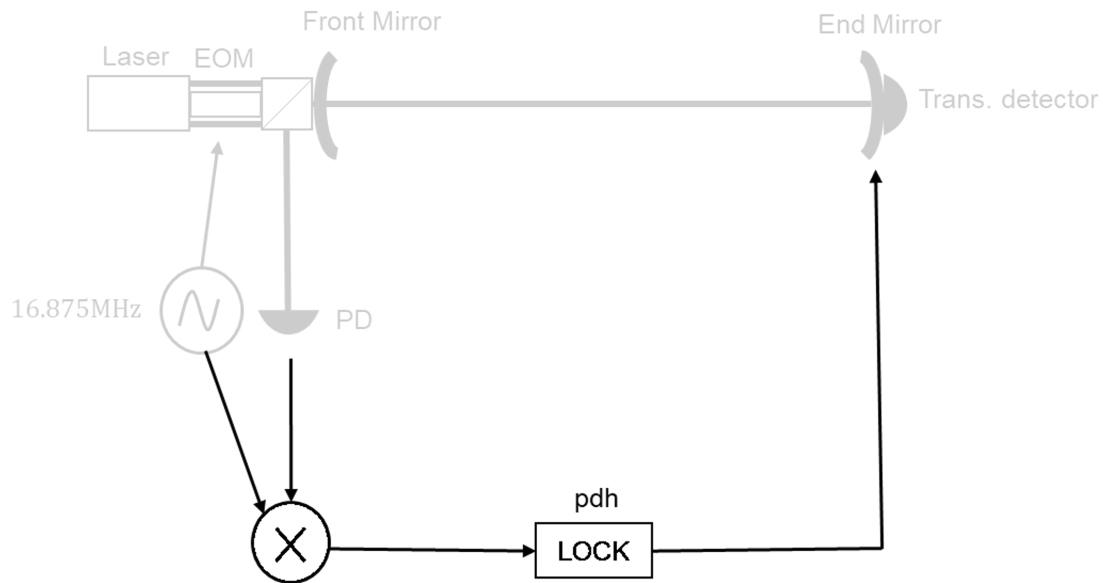


図 5.5: PDH フィードバックのセットアップ

2 行目の lock コマンドは次式を繰り返すことで共振器を共振状態へ近づける.

$$\text{\$pdh} \leftarrow \text{\$pdh} + \text{LOCK}_{\text{GAIN}} * \text{\$err} \quad (5.1)$$

ReI1 が反射光を変調周波数で復調した信号であるから, 3.4.4 節で記述したように, 共振器長からこの信号の定数倍を引いてやれば共振状態へロックできる. このコードでは 3 行目で鏡の位相をずらすことで共振器長を変えている. この操作を繰り返し, $\text{\$err}$ の大きさが $\text{LOCK}_{\text{ACCURACY}}$ を下回った時点で共振したと判定してフィードバック処理を終了する.

5.3.3 WFS 信号の計測

5.3.2 節によって干渉計を共振状態にロックできたので, 次に 3.5 節で説明した WFS 信号の計測を行う.

まず, 分割 PD を設置するために最適な Gouy 位相を計測する. これは式 (3.119) における最適な η を探す作業である. fsig コマンドを用いて鏡を 10Hz で揺らし, 伝達関数の計測を行う.

ソースコード 5.7: 伝達関数の計測

```
1 fsig sig_FM FM xbeta 10 {FM_fsig_phase}
2 fsig sig_EM EM xbeta 10 {EM_fsig_phase}
```

{FM_fsig_phase} はフロントミラー, {EM_fsig_phase} はエンドミラーをそれぞれ揺らす際の位相である. これらの値は表 5.2 に従って, モードによって変える. ハードモードではフロントミラーとエンドミラーを同位相に揺らし, これは光軸を x 軸方向にずらす効果である. 一方, ソフトモードでは逆位相で揺らし, これは光軸を回転方向にずらす効果である.

モード	フロントミラー	エンドミラー
ハード	0	0
ソフト	0	π

表 5.1: モードによるミラーの位相

次に, fsig によって発生した角度揺れの信号を PD で復調することで WFS 信号として計測する. この時, PD までの空間の Gouy 位相を変えることによって, それぞれのモードで信号が最も大きくなる Gouy 位相を探し, これを適切な Gouy 位相とする. また, PDH 信号の時と同様に, WFS 信号が最も大きくなるようそれぞれの Gouy 位相における復調位相も計測する.

ソースコード 5.8: Gouy 位相の計測

```

1 s sGouy 0 nREFL nREFL2
2 attr sGouy g {wfs_Gouy_phase}
3
4 pd2 ReI2 $fmod max 10 0 nREFL2
5 pdtype ReI2 x-split
6 xaxis sGouy gx lin 0 360 360
7 put sGouy gy $x1

```

計測の結果, ハードモード, ソフトモードの応答が最も大きくなる Gouy 位相は 29deg, 119deg であった. 最適な Gouy 位相がちょうど 90 度ずれていて理論と一致している. 一方のモードが検出される Gouy 位相に検出器を設置すれば, もう一方のモードの情報は含まれないということである.

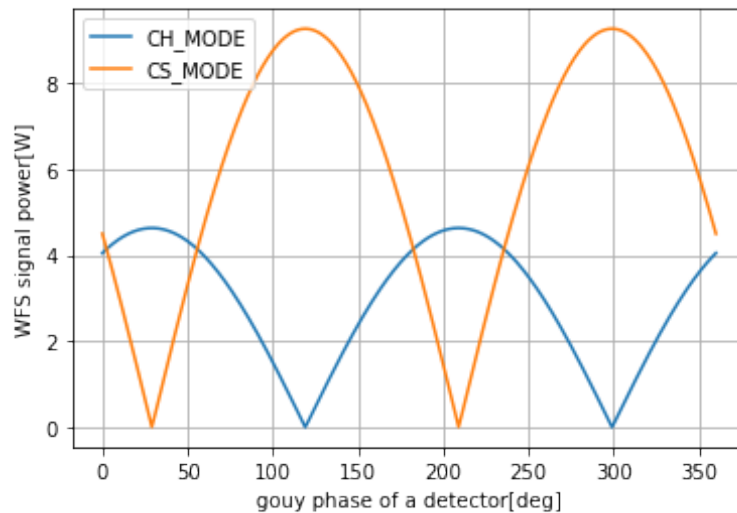
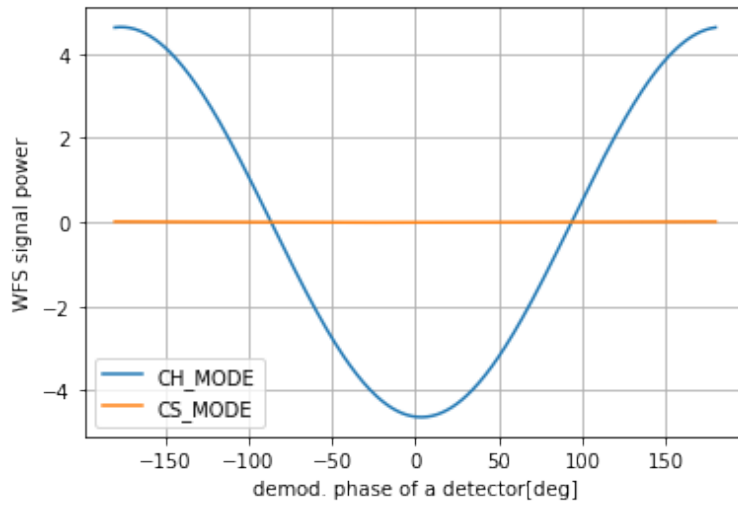
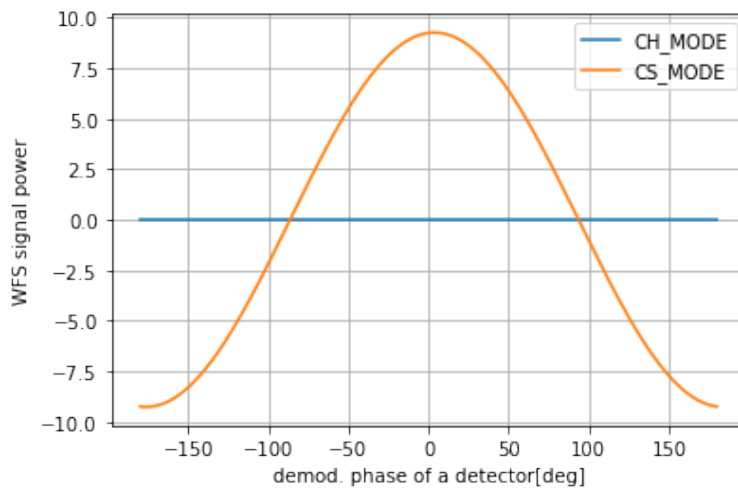


図 5.6: 揺らすモードにおける Gouy 位相に対する応答の違い

また, それぞれの Gouy 位相に検出器を設置し, 応答が最も大きくなるよう適切な復調位相を計測した. これらはそれぞれ -176deg , 4deg であった.



(a) ハードモードに最適化



(b) ソフトモードに最適化

図 5.7: それぞれのモードに最適化した Gouy 位相に設置した検出器における応答

モード	Gouy 位相	復調位相
ハード	29deg	-176deg
ソフト	119deg	4deg

表 5.2: モードに対する検出器のセットアップ

このセットアップのもとで、次のコードを用いて WFS 信号を計測する。

ソースコード 5.9: WFS 信号の計測

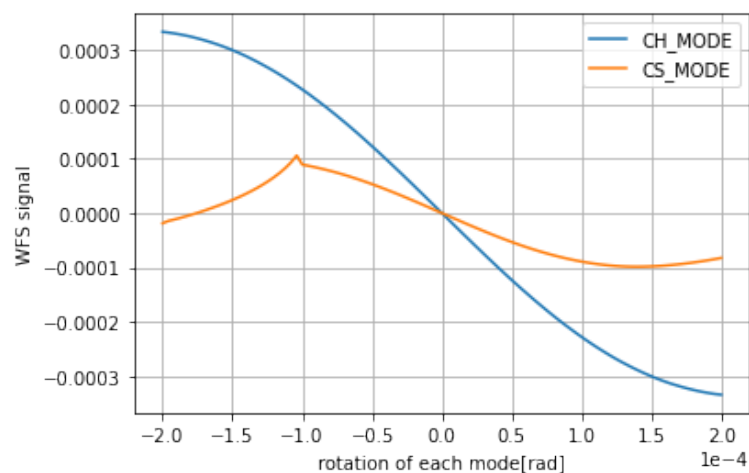
```

1 pd1 ReI2 $fmod {wfs_demod_phase} nREFL2
2 pdtype ReI2 x-split
3 xaxis* FM xbeta lin -0.0002 0.0002 100
4 put* EM xbeta {EM_swing_direction}

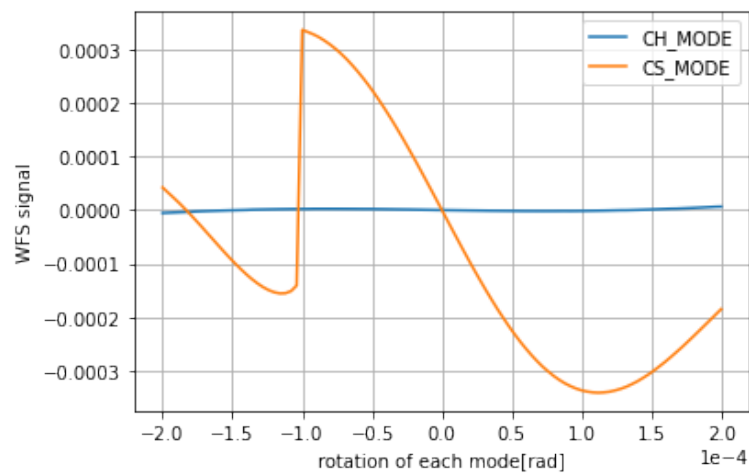
```

ここで {EM_swing_direction} はモードによってフロントミラーとエンドミラーを同じ方向に動かすか逆方向に動かすかを指定する値である。ハードモードでは"\$x1", ソフトモードでは"\$mx1"が代入される。

図 5.8a および 図 5.8b が FINESSE で得られる WFS 信号である。ソフトモードにおいて $-2mrad$ から $-1mrad$ の範囲で WFS 信号が正しく計算できておらず、これは FINESSE のロックコマンドによる仕様である。



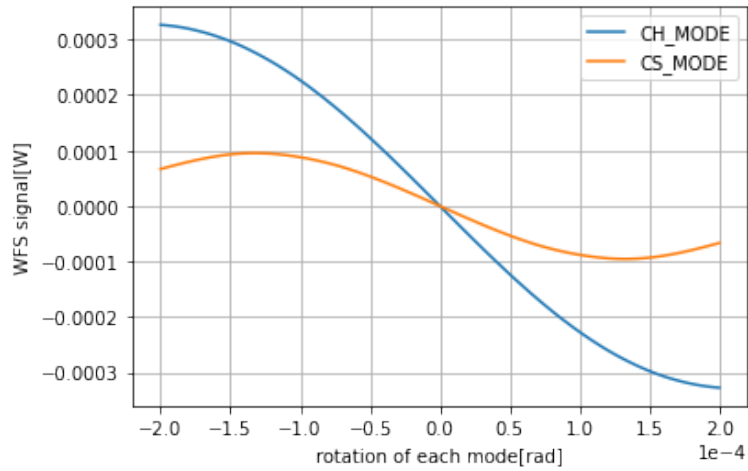
(a) ハードモード用検出器



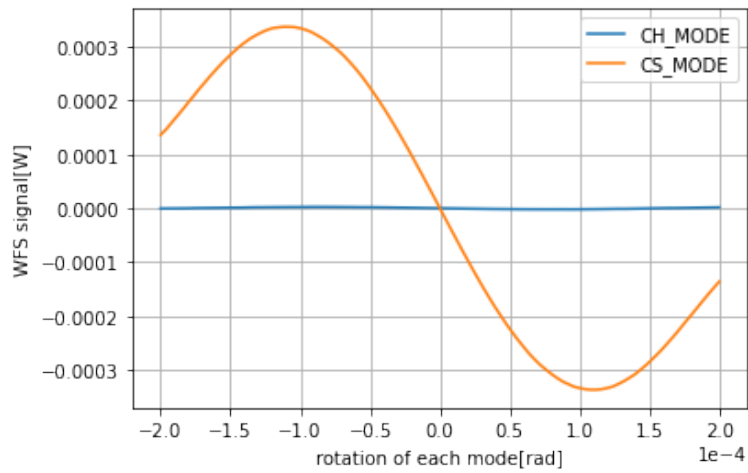
(b) ソフトモード用検出器

図 5.8: WFS 信号 (MAXTEM=6)

このグラフの崩れは MAXTEM の値を下げることで解消される。図 5.9a および 図 5.9b は MAXTEM=3 における WFS 信号である。



(a) ハードモード用検出器



(b) ソフトモード用検出器

図 5.9: WFS 信号 (MAXTEM=3)

いずれにせよ、ハードモードでは 0.20mrad、ソフトモードでは 0.10mrad 程度が WFS 信号の線形領域である。

5.3.4 ミラーのミスアライメント

本研究では 5.3.1 節のセットアップのミラーを傾けてミスアライメントを引き起こし、理想的でない FP 共振器の応答を見る。ミラーを傾ける FINESSE シミュレーションコードは以下である。

ソースコード 5.10: ミラーを傾けてミスアライメントさせる FINESSE コード

```

1 attr FM xbeta {FM_xbeta}
2 attr FM ybeta {FM_ybeta}
3 attr EM xbeta {EM_xbeta}
4 attr EM ybeta {EM_ybeta}

```

attr コマンドを用いてミラーに傾きを設定している。xbeta が yaw 方向、ybeta が pitch 方向の回転である。

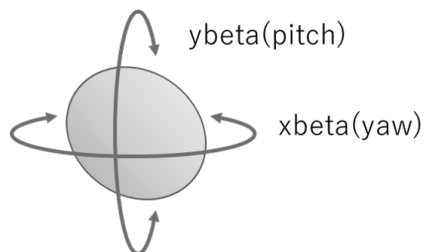


図 5.10: ミラーの回転

これらミラーの角度のうち xbeta (yaw 方向) のみをランダムに変更して複数回実行し、学習データとテストデータを生成した。すなわち、5.3.4 節のコードに対して Python で生成した {FM_xbeta}, {EM_xbeta} のランダムな数値の組み合わせを代入する。本実験では第 1 章で記述したように、1.0mrad を回転方向の上限とした。

以下は random パッケージを用いて $\pm 1.0\text{mrad}$ の範囲で乱実数を発生させるコードである。

ソースコード 5.11: ランダムなミラー角を生成する Python コード

```
1 import random
2
3 def generate_random_rotation(max_rotation):
4     return random.uniform(-max_rotation, +max_rotation)
5
6 FM_xbeta = generate_random_rotation(1e-3)
7 EM_xbeta = generate_random_rotation(1e-3)
```

ミスアライメントを起こしているとき、FP 共振器の共振器長が伸びることで共振の位置がずれる。また、共振パワーも小さくなる。ミラーをハードモードで傾けた時の透過光のグラフが図 5.11 である。

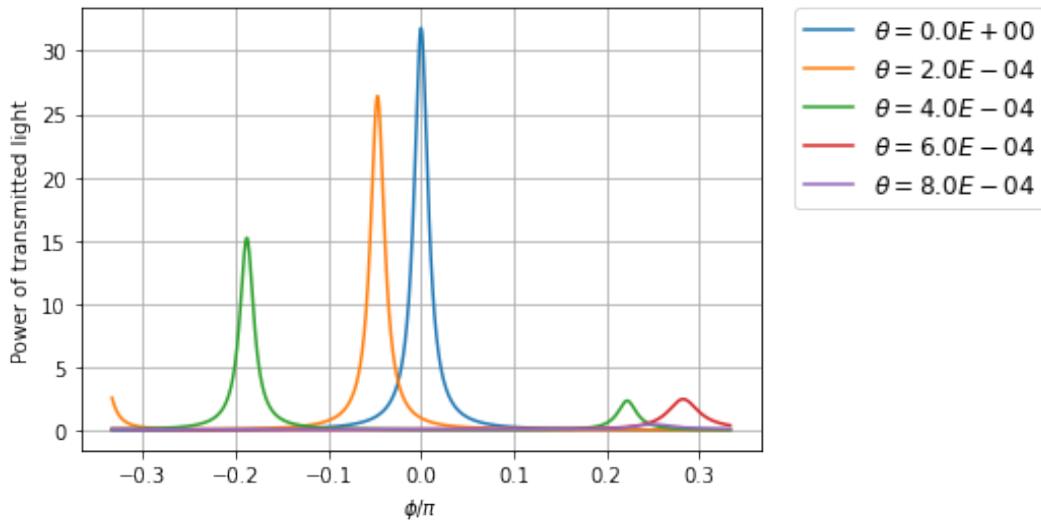


図 5.11: ミラーを回転させた際の透過光強度

本実験ではミスアライメントしていても共振するように、最も透過光強度が強くなるようエンドミラーの位相を設定した。

5.3.5 CCD カメラ画像の取得

WFS 信号が取得できたところで、いよいよ深層学習用の CCD カメラ画像を取得する。FINESSE2 では直接的に CCD カメラを検出器として使うコマンドはないため、ビームの形状を取得する beam コマンドを用いて、疑似的に CCD カメラを再現した。

ソースコード 5.12: CCD カメラの画像を取得する FINESSE コード

```

1 beam ccd nREFL2
2 xaxis ccd x lin -3 3 64
3 x2axis ccd y lin -3 3 64
4 yaxis lin abs

```

この CCD カメラを 5.3.3 節によって求めた Gouy 位相となる位置に設置する。FINESSE の仕様上、この仮想 CCD カメラは FINESSE 上で 2 ヶ所に設置することは出来ないため、それぞれのモードにおける最適な Gouy 位相に対して CCD カメラを移動して再度コードを実行する方法を取った。

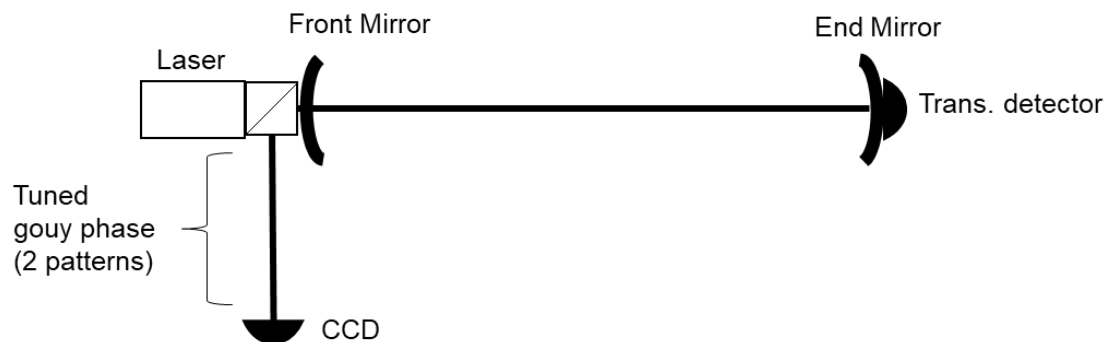


図 5.12: CCD カメラのセットアップ

ここで、アライメントが取れている状態での CCD カメラの画像が 図 5.13a および 図 5.13b である。画像の縦と横の長さはビームウェストでのスポットサイズ w_0 の 6 倍である。

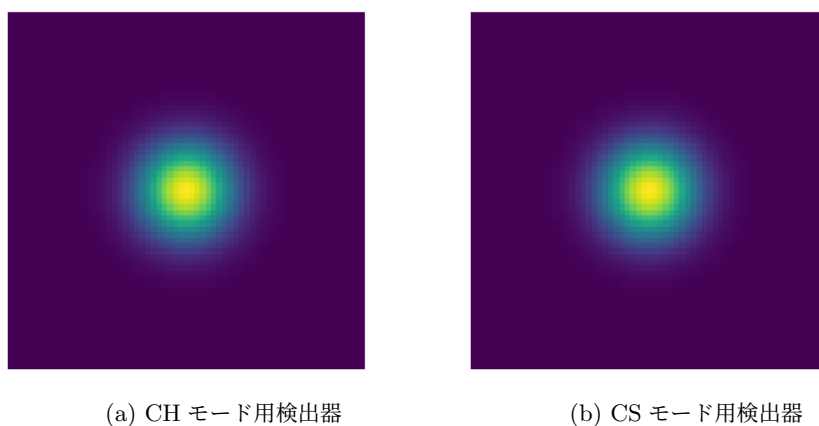


図 5.13: アライメントの取れた検出器での反射光 CCD カメラ画像

また、5.3.4 節のコードを用いてミラーを yaw 方向に 0.1mrad 傾けた時の CCD 画像は 図 5.14a , 図 5.14b , 図 5.15a および 図 5.15b である。ハードモードでは 2 台の検出器で同じ方向にビームが移動しているのに対し、ソフトモードでは逆方向に移動していることが分かる。これらの違いを読み取れば、ミラーの傾きを予測可能である。

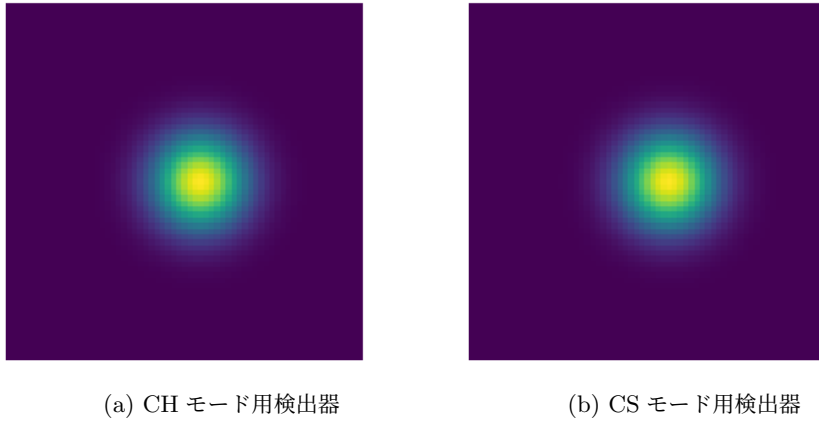


図 5.14: ハードモードで 0.1mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像

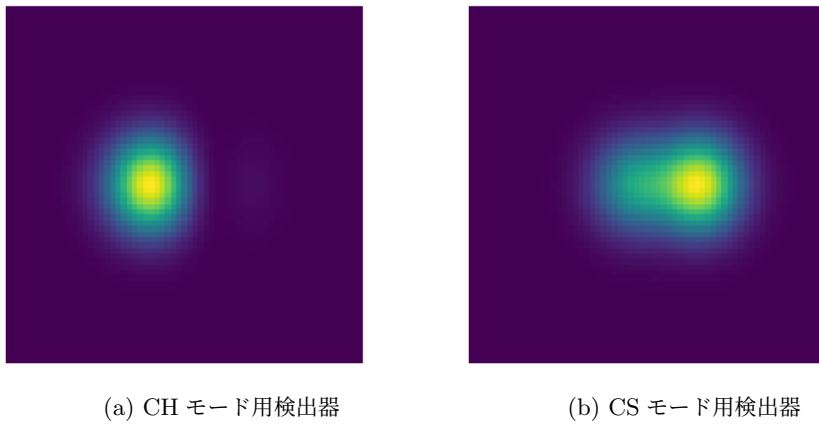


図 5.15: ソフトモードで 0.1mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像

また CCD カメラは分割 PD とは異なり高次モードの情報が含まれる． 図 5.16a ， 図 5.16b ， 図 5.17a および 図 5.17b はミラーを 1.0mrad 傾けた時の CCD カメラ画像である． これらの応答の違いをニューラルネットワークに学習させれば， WFS の制御限界を超えられるのではないか， という期待が本実験にある．

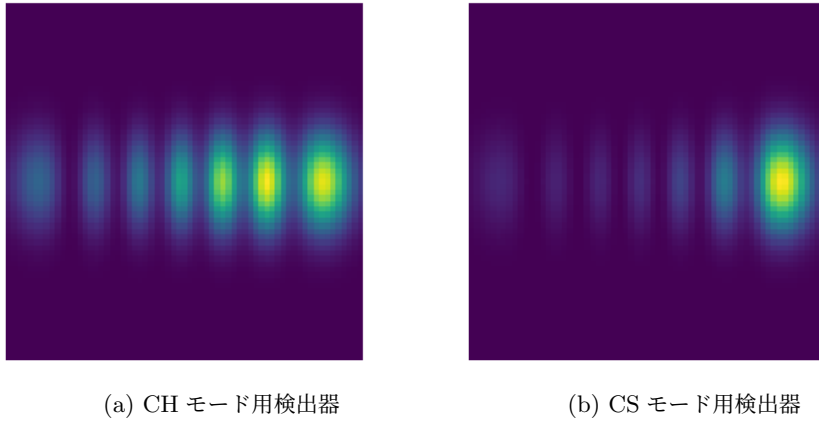


図 5.16: ハードモードで 1.0mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像

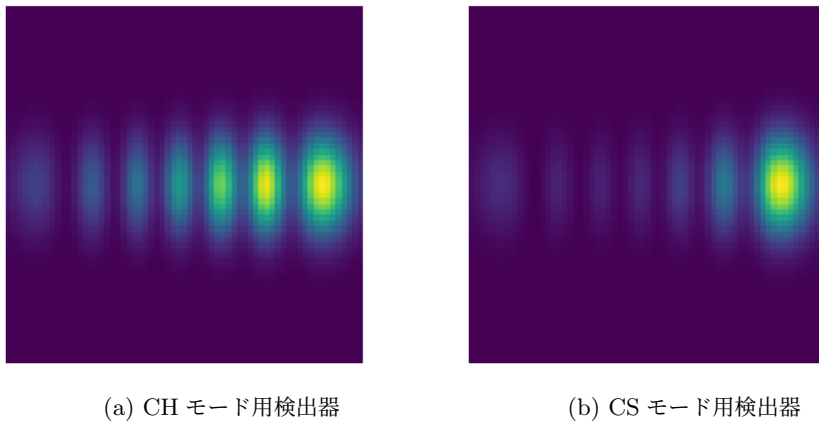


図 5.17: ソフトモードで 1.0mrad 傾けた反射光 CCD カメラ画像

5.4 PCA による基底の抽出

本研究では 64×64 の仮想 CCD カメラを用いたので、元の特徴量空間は 4096 次元であるが、第 3 章で計算したようにガウシアンビームは基底が存在するため、PCA (4.1 節) を施すことによって基本モードや高次モードといった固有モードの情報だけを取り出すことができる。

以下はフロントミラーとエンドミラーを $\pm 1.0\text{mrad}$ の範囲でミラーをランダムに傾けたときの PCA 変換の結果である。寄与率の大きい順に並べてあり、左の図が基底、中央の図がハードモードで揺らした際の応答、右の図がソフトモードで揺らした際の応答である。

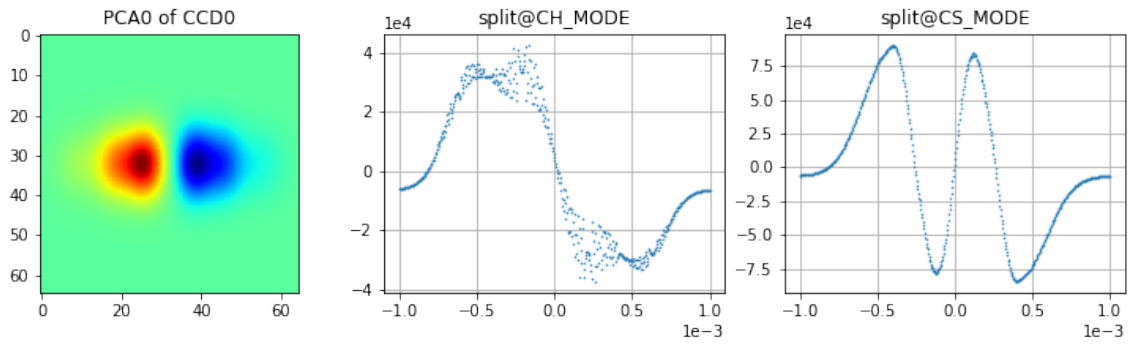


図 5.18: PCA0 (CH モード用検出器)

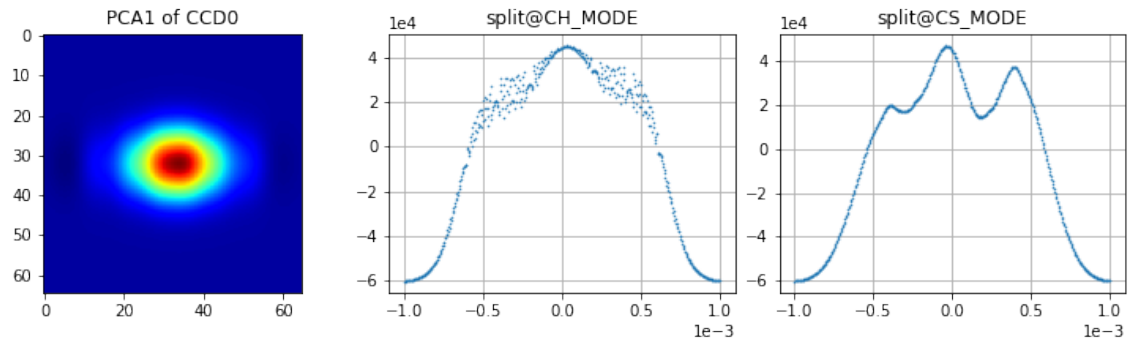


図 5.19: PCA1 (CH モード用検出器)

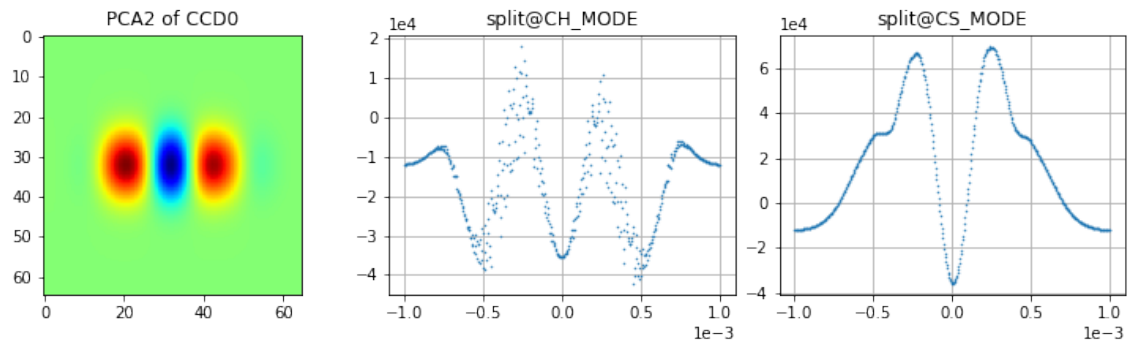


図 5.20: PCA2 (CH モード用検出器)

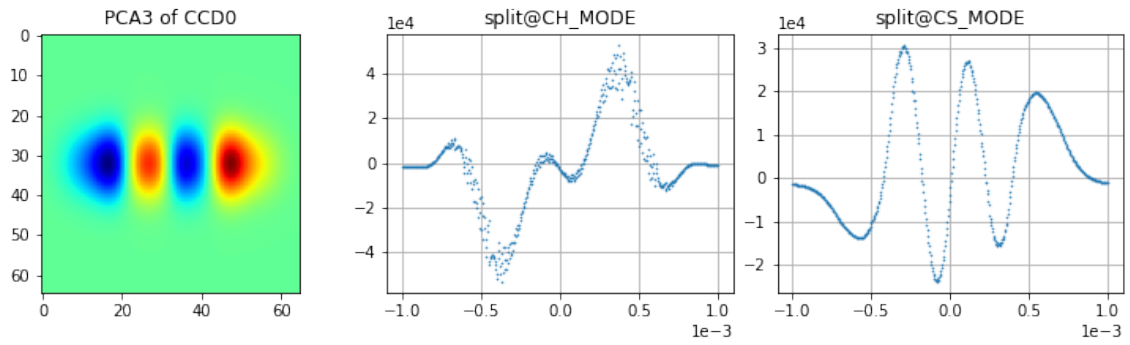


図 5.21: PCA3 (CH モード用検出器)

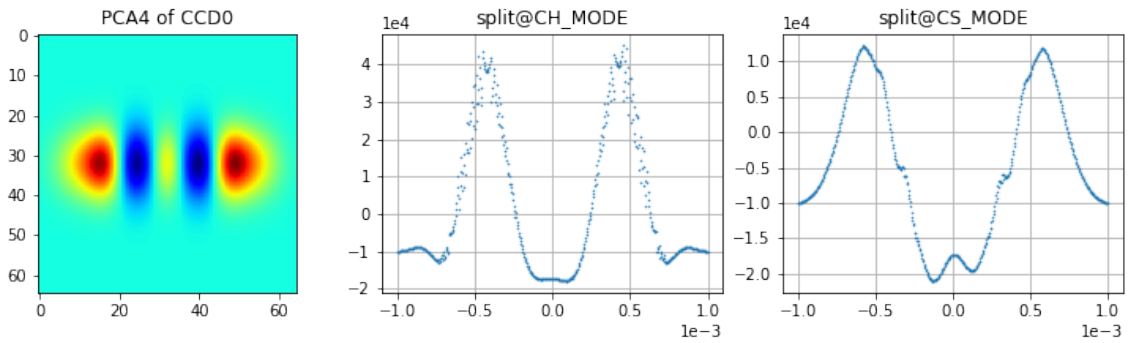


図 5.22: PCA4 (CH モード用検出器)

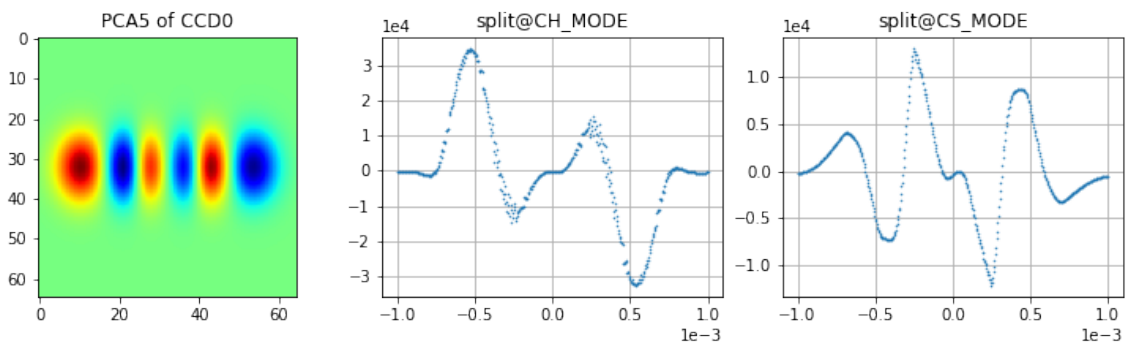


図 5.23: PCA5 (CH モード用検出器)

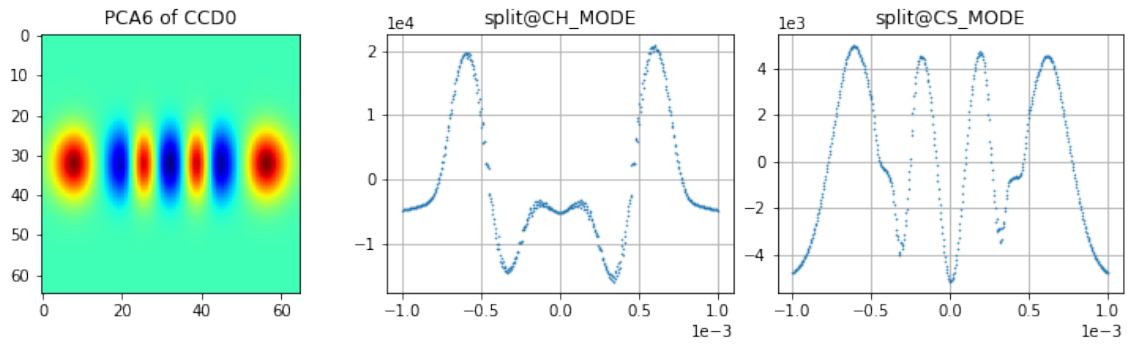


図 5.24: PCA6 (CH モード用検出器)

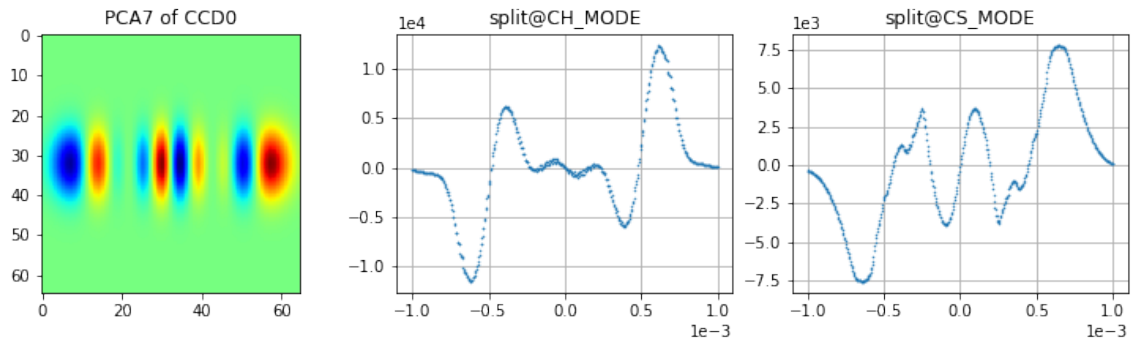


図 5.25: PCA7 (CH モード用検出器)

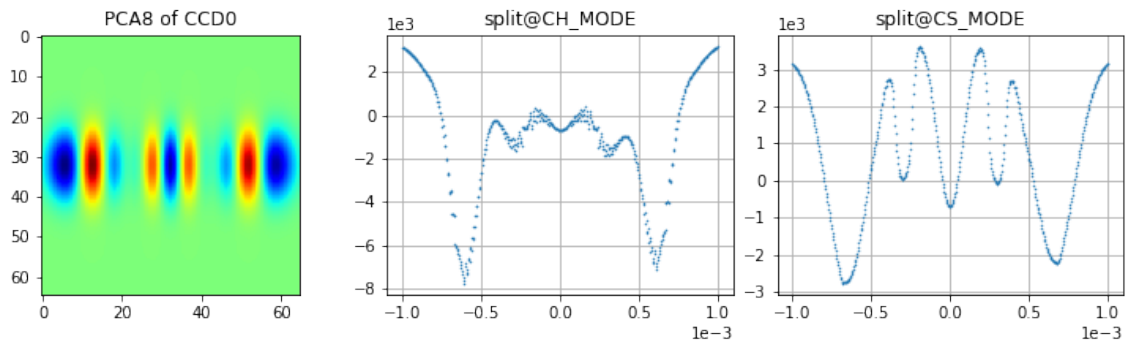


図 5.26: PCA8 (CH モード用検出器)

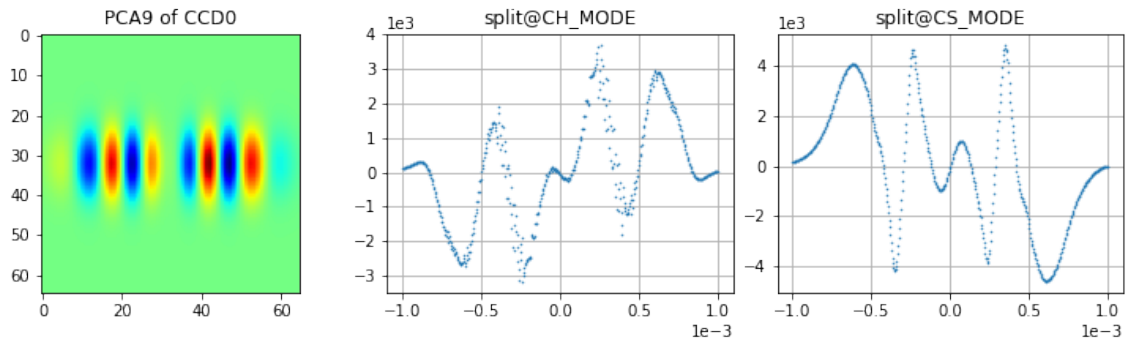


図 5.27: PCA9 (CH モード用検出器)

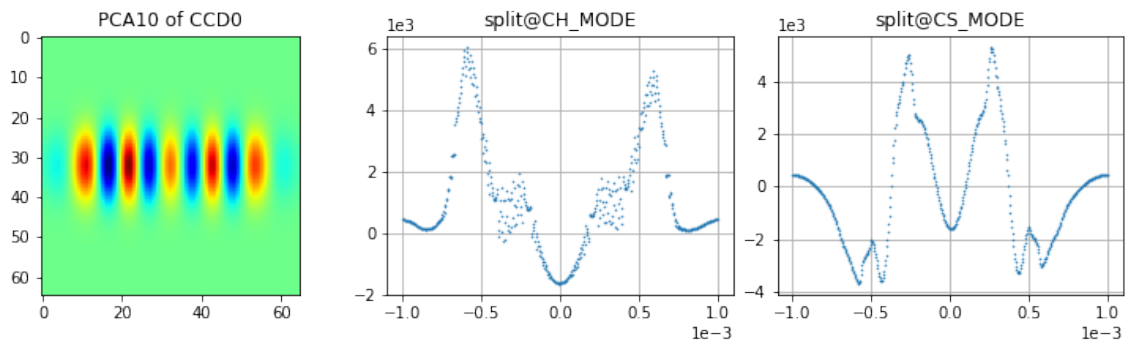


図 5.28: PCA10 (CH モード用検出器)

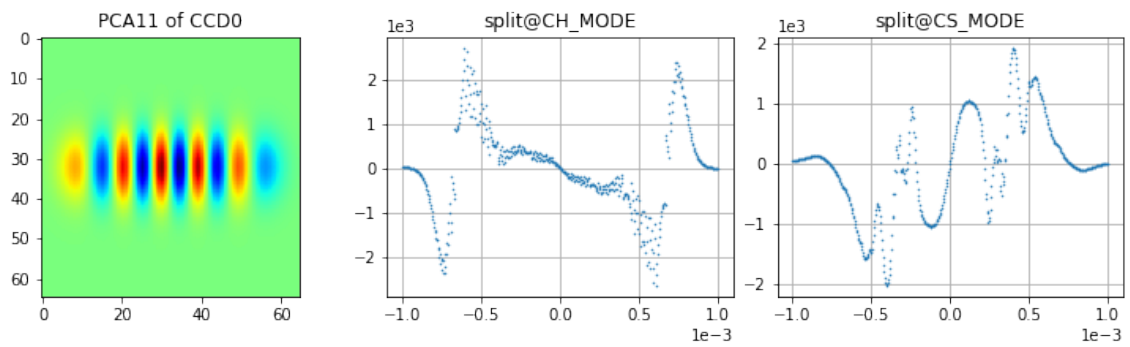


図 5.29: PCA11 (CH モード用検出器)

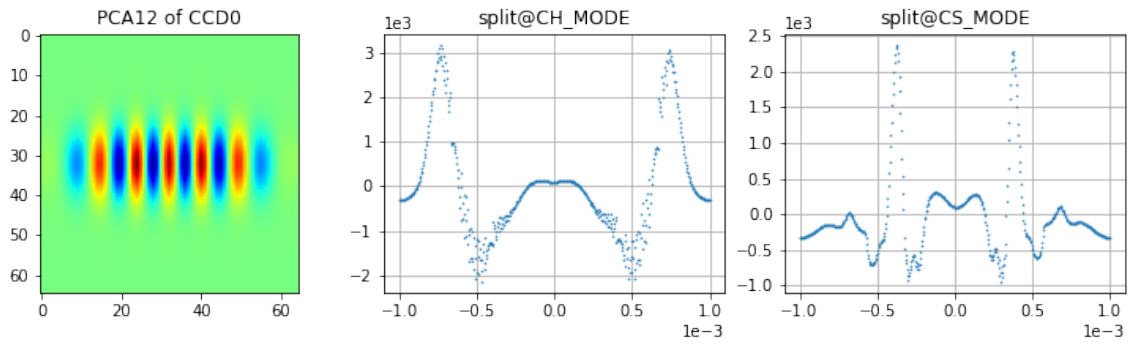


図 5.30: PCA12 (CH モード用検出器)

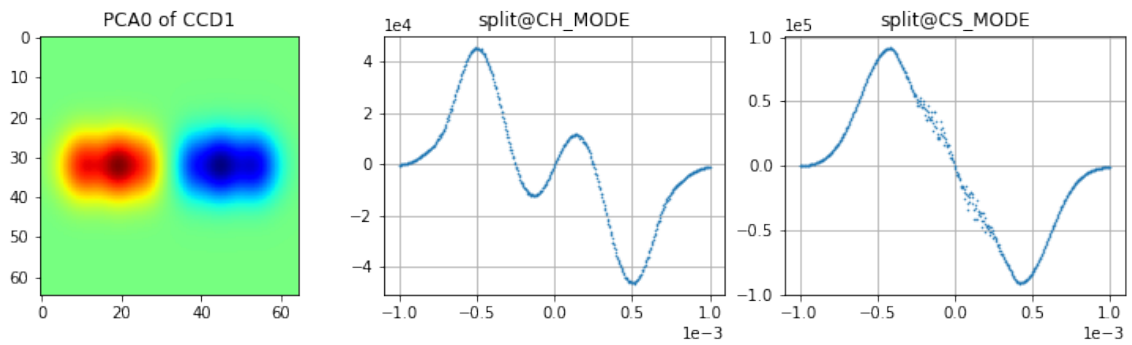


図 5.31: PCA0 (CS モード用検出器)

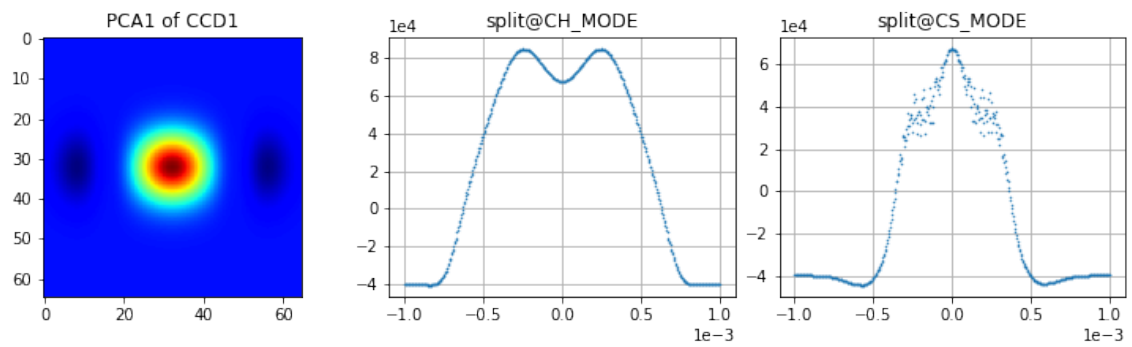


図 5.32: PCA1 (CS モード用検出器)

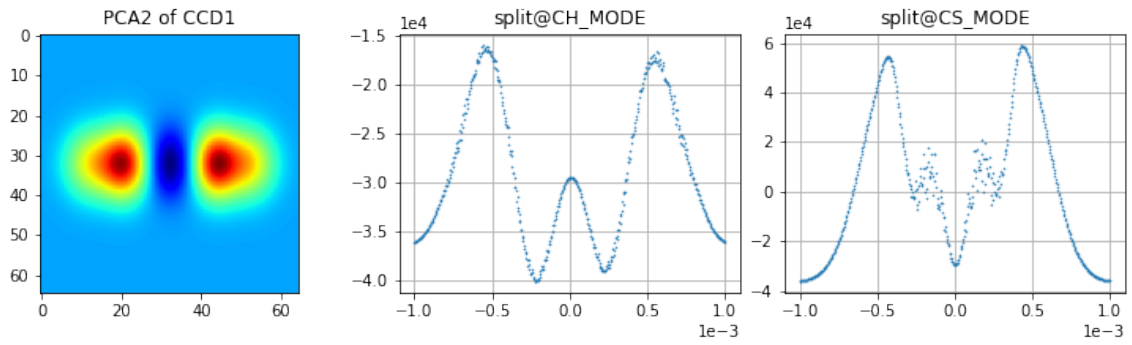


図 5.33: PCA2 (CS モード用検出器)

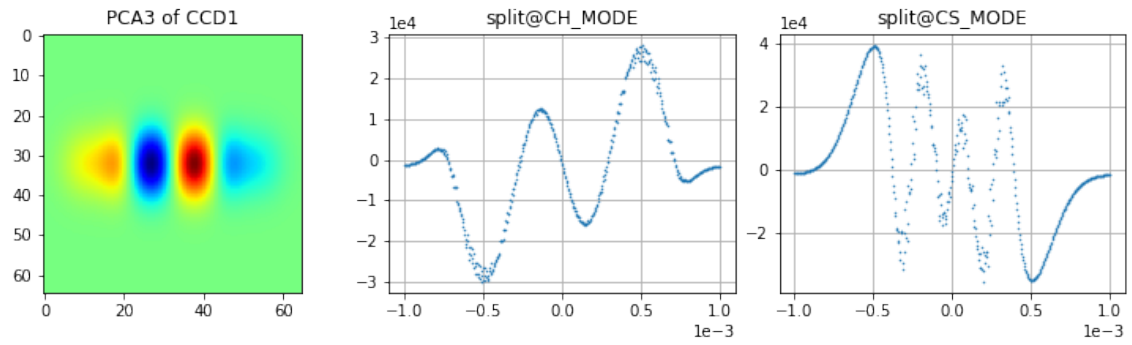


図 5.34: PCA3 (CS モード用検出器)

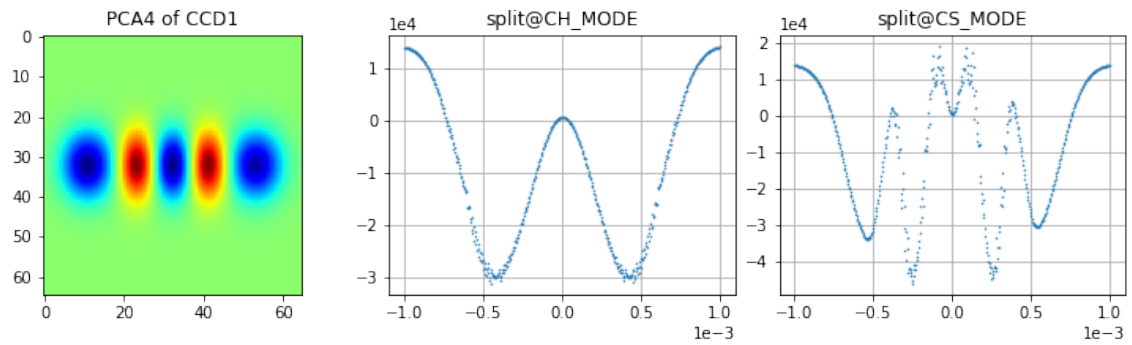


図 5.35: PCA4 (CS モード用検出器)

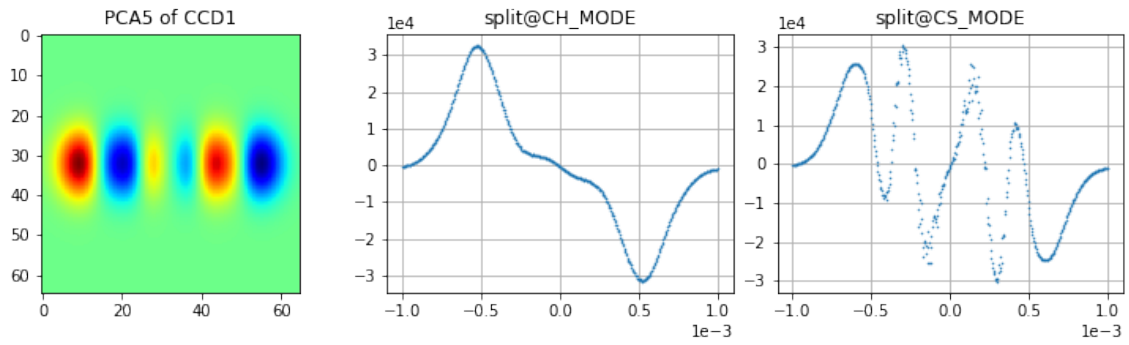


図 5.36: PCA5 (CS モード用検出器)

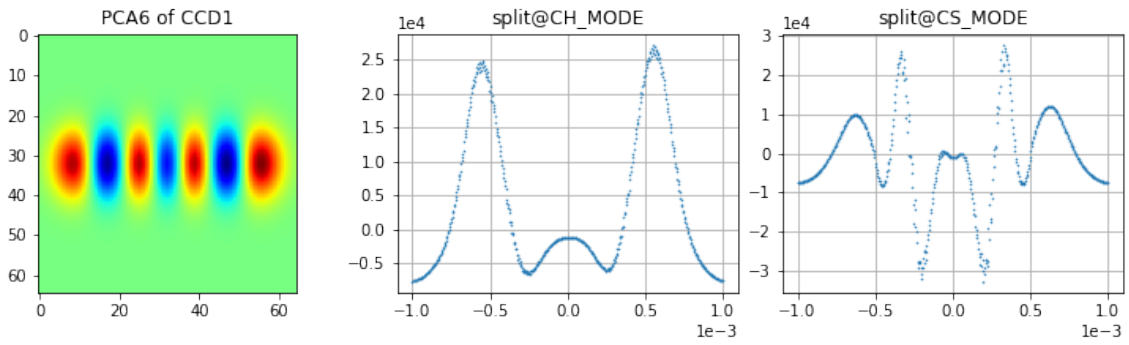


図 5.37: PCA6 (CS モード用検出器)

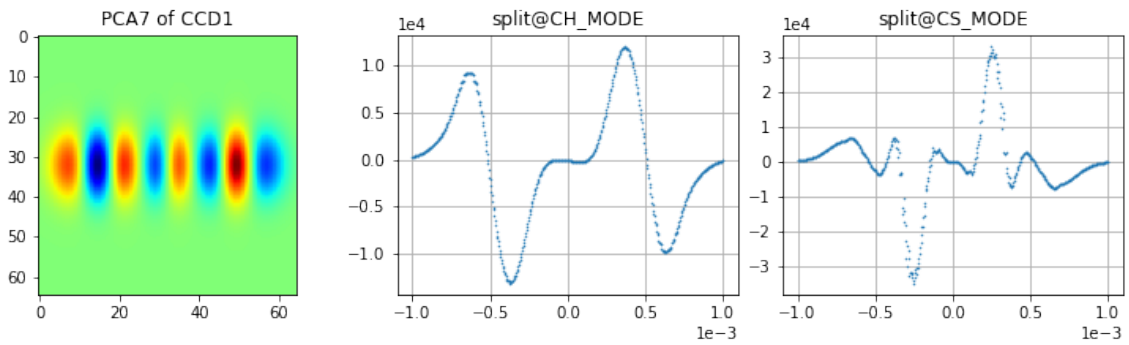


図 5.38: PCA7 (CS モード用検出器)

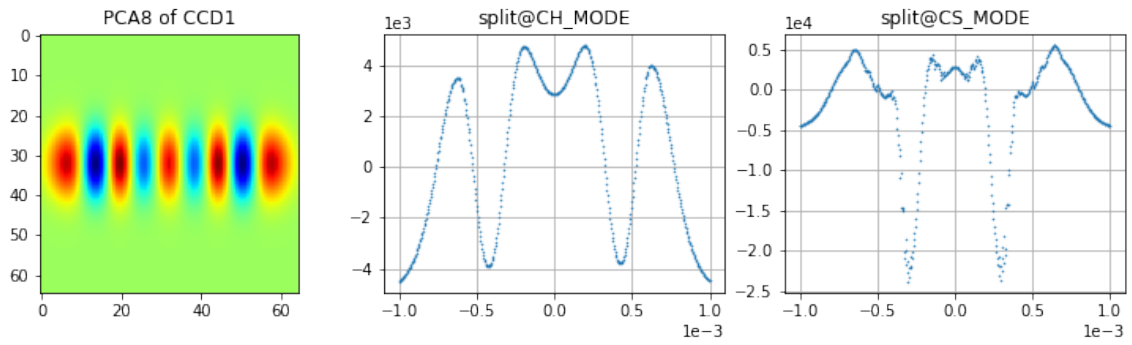


図 5.39: PCA8 (CS モード用検出器)

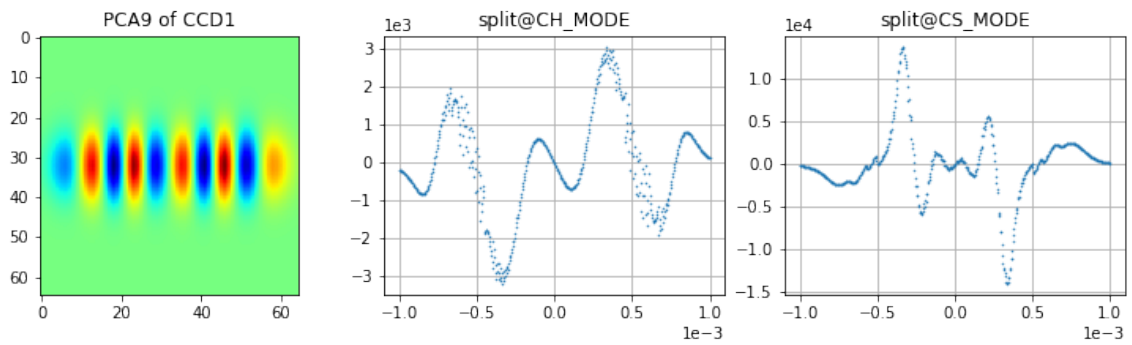


図 5.40: PCA9 (CS モード用検出器)

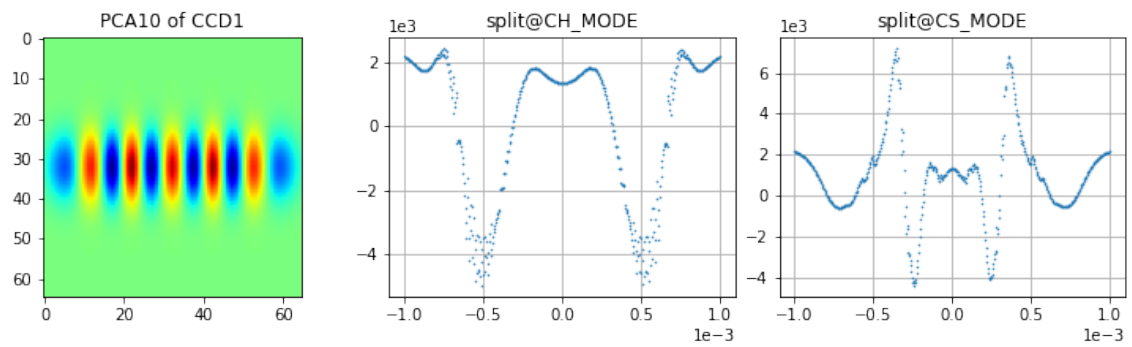


図 5.41: PCA10 (CS モード用検出器)

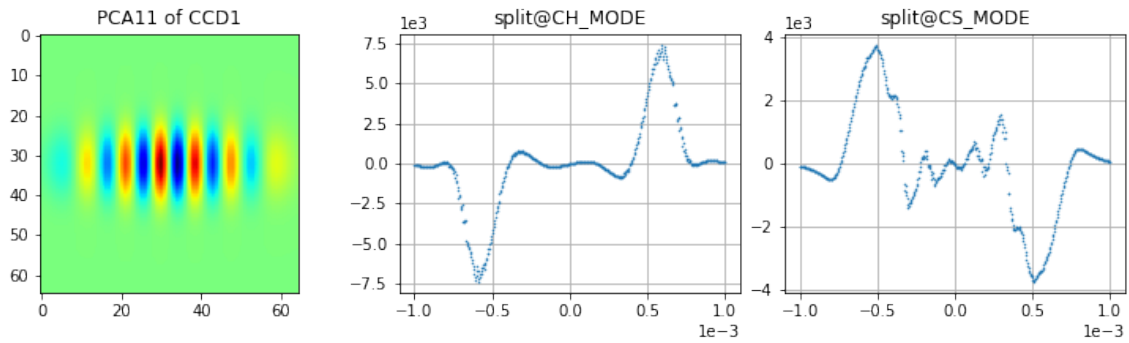


図 5.42: PCA11 (CS モード用検出器)

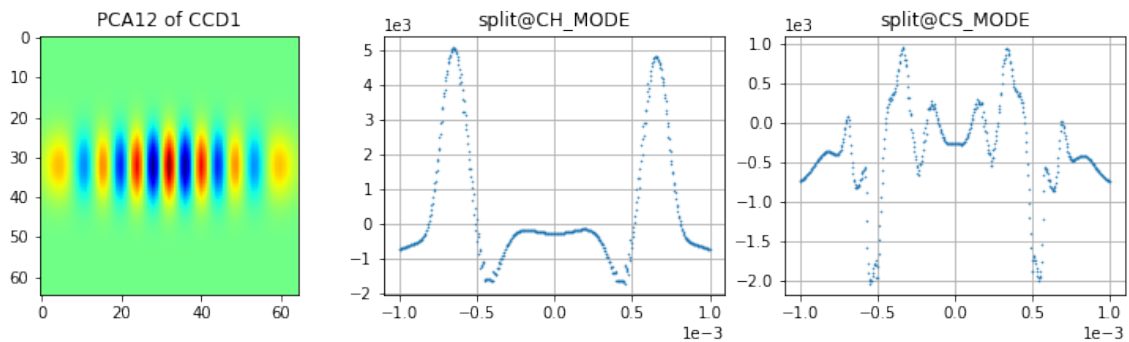


図 5.43: PCA12 (CS モード用検出器)

以上が全ての基底である。MAXTEM = 6 でミラーを yaw 方向に 0.1mrad の範囲内で傾けた時に得られる CCD 画像は、これらの基底の組み合わせで全て表現できるということである。ミラーを傾けた際の各基底の大きさがどのような値になるか、という情報を NN に学習させることでミラーの傾きの情報を推定でき、高次モードの情報を取得できる分 WFS に優位を取れるのではないかと、という期待が本研究のモチベーションである。

PCA はこれ以外の基底も出力するが、図 5.44 ようなノイズである。図 5.45 は基底の寄与率をプロットしたものであるが、これらのノイズは寄与率が小さいので無視してよいと分かる。

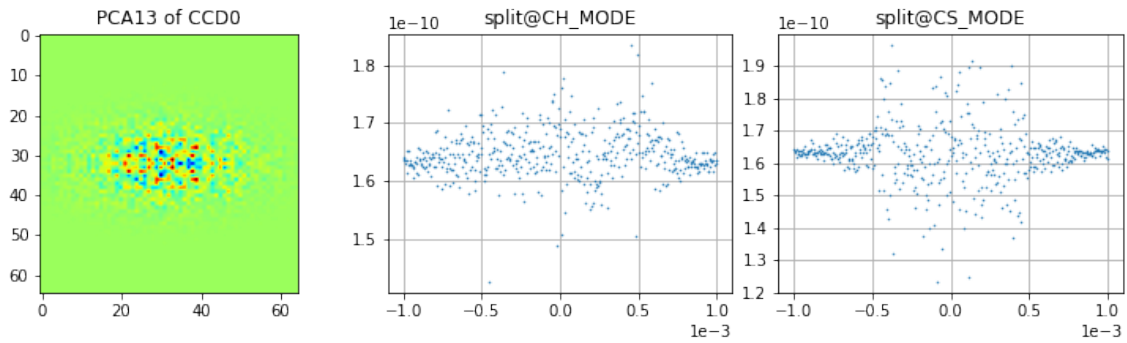


図 5.44: PCA13 (CH モード用検出器)

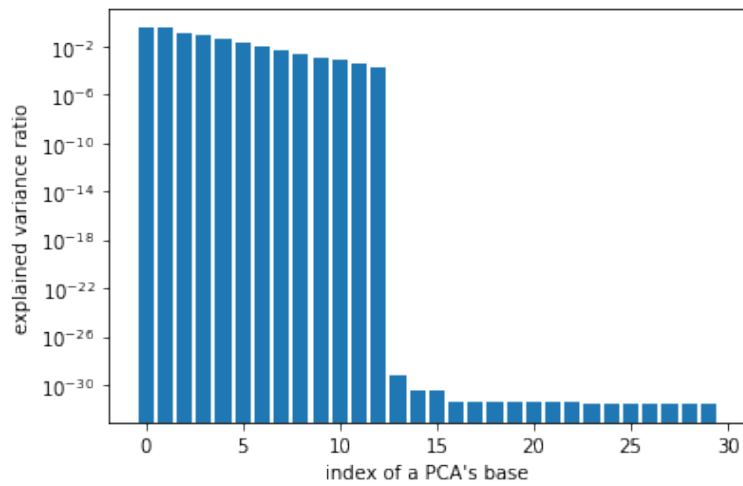


図 5.45: 基底に対する寄与率

5.5 NN による深層学習

5.4 節で生成した特徴量を NN の説明変数, FP 共振器のパラメータを目的変数としてニューラルネットワークに深層学習させる。

5.5.1 ミラー角の推定

FP 共振器のパラメータとして, 1.0mrad の範囲で傾いたフロントミラーとエンドミラーの角度を予測するニューラルネットワークを構築する。ニューラルネットワークのモデルは次のコードで定義した。学習の設定値は表 5.4 に記載した。

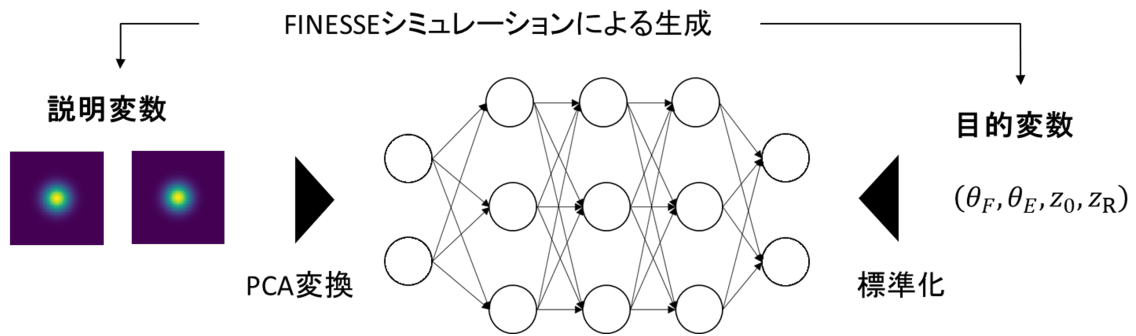


図 5.46: ニューラルネットワークへの学習

学習データ件数	10000
テストデータ件数	200
PCA の基底数	100

表 5.3: 学習データの設定

中間層	20 ノード × 3 層
活性化関数	ReLU

表 5.4: NN の設定

ソースコード 5.13: ニューラルネットワークを定義する Python コード

```

1 import torch
2 import torch.nn as nn
3 import torch.nn.functional as F
4
5 class Net(nn.Module):
6
7     def __init__(self, input_size, output_size):
8         super(Net, self).__init__()
9
10        n = [20, 20, 20]
11
12        self.layer1 = nn.Linear(input_size, n[0])
13        self.layer2 = nn.Linear(n[0], n[1])
14        self.layer3 = nn.Linear(n[1], n[2])
15        self.layer_last = nn.Linear(n[-1], output_size)
16
17        self.act = torch.relu
18
19    def forward(self, x):
20        x = self.act(self.layer1(x))

```

```

21     x = self.act(self.layer2(x))
22     x = self.act(self.layer3(x))
23     x = self.layer_last(x)
24
25     return x

```

学習のアルゴリズムは表 5.5 に記載した。

最適化アルゴリズム	Adam
学習方法	ミニバッチ法 (バッチサイズ 1024 件)
損失関数	MSE (平均二乗平方根誤差)

表 5.5: NN の学習方法

ソースコード 5.14: ニューラルネットワークに学習を行う Python コード

```

1 import torch.optim as optim
2 from torch.autograd import Variable
3 import torch.nn as nn
4
5 DEVICE = torch.device('cuda' if torch.cuda.is_available() else 'cpu')
6
7 net = Net(INPUT_SIZE, OUTPUT_SIZE).to(DEVICE)
8
9 criterion = nn.MSELoss()
10 optimizer = optim.Adam(net.parameters(), lr=LEARNING_RATE)
11
12 for epoch in range(EPOCHS):
13     for x,y in train_data_loader:
14
15         net.train();
16
17         data, target = Variable(x).to(DEVICE), Variable(y).to(DEVICE)
18
19         optimizer.zero_grad()
20         output = net(data)
21
22         loss = criterion(output, target)
23         loss.backward()
24         optimizer.step()

```

エポック数 10000, 学習率 $\eta_{\text{train}} = 1.0 \times 10^{-3}$ として NN 学習させた結果が 図 5.47 である。横軸が真のミラーの角度, 縦軸が NN が予測したミラーの角度である。

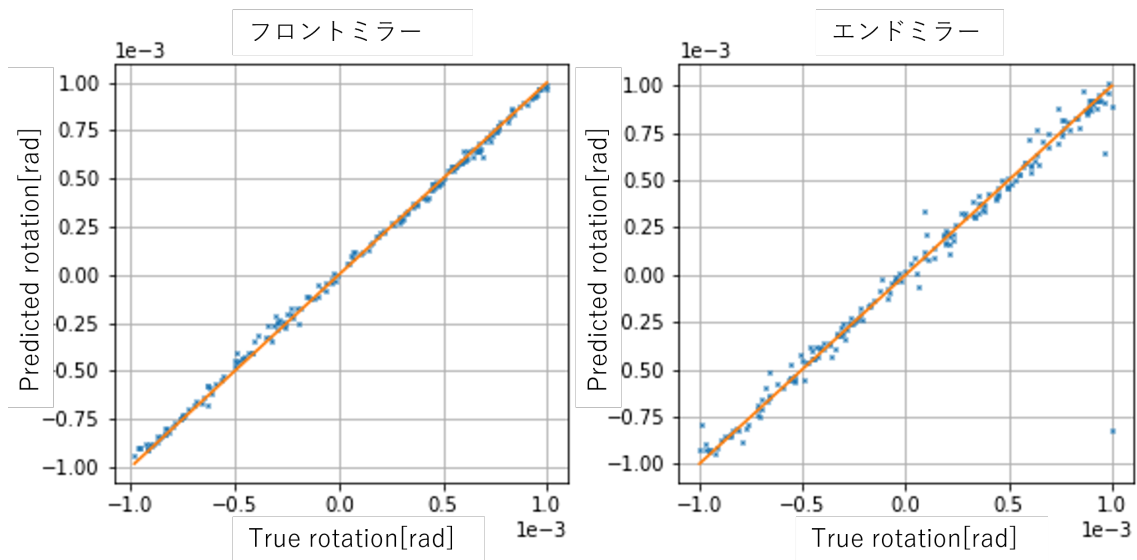


図 5.47: 1mrad の範囲内でミラーを傾けた時の NN の予測値

図 5.48 はエポック数に対する損失関数の値をプロットしたものである。学習を重ねるにつれ、予測値が真の値に近づいて行っていることが分かる。学習データの損失関数の値がテストデータの損失関数の値に比べ小さくなっているため、過学習が進んでいる。エポック数は 5000 程度で充分そうである。

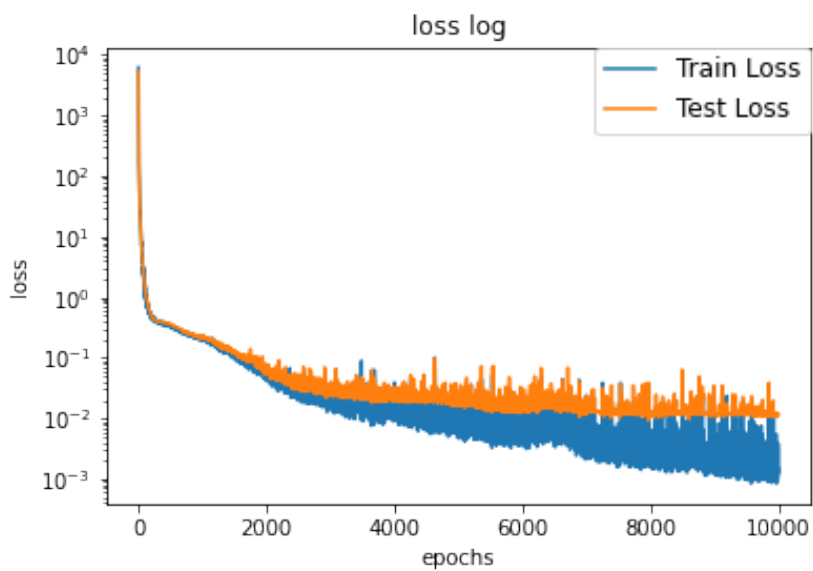


図 5.48: ロス関数

5.5.2 ビームパラメータの推定

同様にして、ミラー角と同時にビームパラメータの推定を行うニューラルネットワークの構築を試みる。CCD カメラはビーム径も計測できるので、ビームパラメータのずれを予測できるはずである。

エポック数 1800, 学習率 $\eta_{\text{train}} = 1.0 \times 10^{-2}$ として NN 学習させた結果が 図 5.49 である。

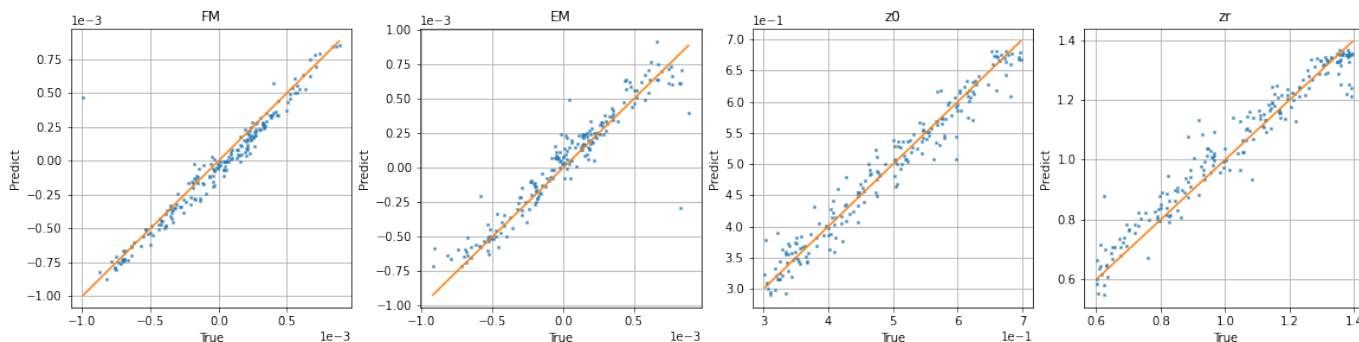


図 5.49: 1mrad の範囲内でミラーを傾けた時の NN の予測値

ミラー角, ビームパラメータ共におおむね予測できているように見える。

損失関数の推移は 図 5.50 である。

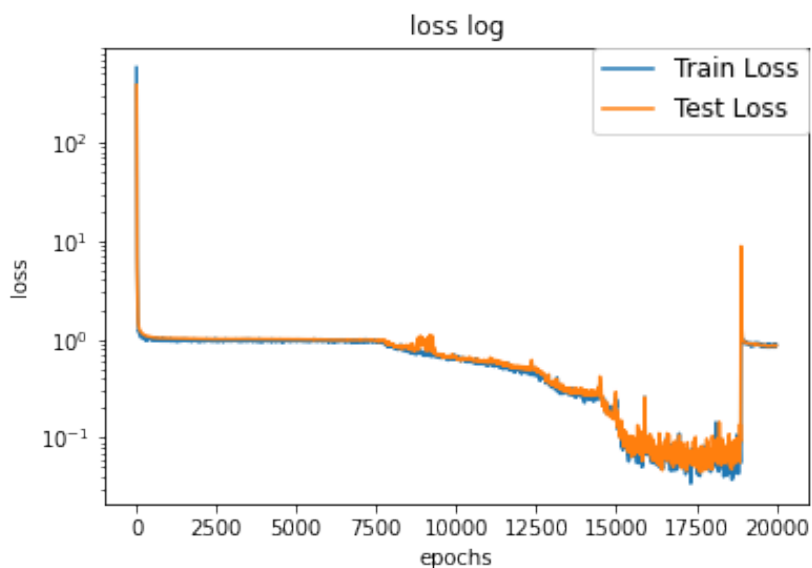


図 5.50: ロス関数

ただしこの結果は再現性が低く, 同様の手法で再度学習用データを生成しニューラルネットワークに学習させても学習はうまくいかなかった。

第6章

結論と考察

本研究では深層学習を用いることで1mradの範囲での角度制御ができることを示した。5.3.3節にてWFS法での制御範囲が高々0.1mrad程度であった結果と比較すると、10倍ほど制御範囲を広げられることになる。また、ビームパラメータを予測することも可能であることから、モードミスマッチを同時に判別できるということであり、この事実はFP共振器の光学実験系構築はニューラルネットワークに任せられることを示している。今回の研究は実験室での光学系を想定して共振器長1mのFP共振器を対象にしたが、この手法はシミュレーションコードを変えるだけで重力波検出器などの大規模な系でも適用可能である。つまり、シミュレーションできる範囲であれば、十分な検出器の数を置けば多くの自由度を1つのシステムで制御できるはずである。また、線形でない光学効果、例えばミラーの表面が理想的な球面でないことに起因する高次モードや、ミラーの非等方性による複屈折の影響も加味して制御できる。この研究を進展させれば、実験者は新しい実験系を構築するとき、その系が複雑であっても、実験者はシミュレーションのコードとニューラルネットワークのモデルおよびハイパーパラメータのみを決めれば光学系を自動で制御する仕組みが構築可能である。より少ない労力で実験を行えるということは、より迅速な実験が可能であり、重力波検出器を始めとした光学技術の開発の高速化につながる。また、実験系の精度を決めるアライメント作業は実験者の技術に任されているが、これをプログラムによって自動で行えるということは実験の再現性の向上にも貢献する。

ただし、この手法によって学習したニューラルネットワークは、その光学系のセットアップでしか適用できない。本研究のニューラルネットワークの学習では、適切なハイパーパラメータを選ばなくてはアライメントをうまく学習することが出来ないことが分かった。よって汎用的に用いることのできる光学実験用のニューラルネットワークのモデルおよびハイパーパラメータを開発する必要がある。

本研究はFP共振器が共振している状態にまである程度アライメントが取れている微調の実験構築を想定していたが、今後の展望としてアライメントが全く取れていない疎調の構築にまで広げたい。本研究では実際にミラーの傾きを予測する「回帰」と呼ばれる手法を用いたが、実際のアライメントではミラーをどちらに動かすかという2種類の「分類」でも代用可能である。

参考文献

- [1] 朽久保邦治, "修士論文 Fabry-Perot 共振器のアラインメント制御", (1996).
- [2] 粕谷順子, "修士論文 重力波検出器 KAGRA の出力モードクリーナの開発", (2018).
- [3] 道村唯太, "Wavefront Sensor 法の原理", (2018).
- [4] 鈴木皓博, "光会合用レーザーシステムの開発", (2013).
- [5] 毛利拓也, 北川廣野, 澤田千代子, 谷一徳, "scikit-learn データ分析 実装ハンドブック", (2019).
- [6] 上田 尚一, "主成分分析", (2003).
- [7] 吉富 康成, "ニューラルネットワーク", (2002).
- [8] 朽久保 邦治, "修士論文 Fabry-Perot 共振器のアラインメント制御", (2002).
- [9] Anthony E. Siegman, "LASERS", (1986).
- [10] Euan Morrison, Brian J. Meers, David I. Robertson, and Henry Ward, "Automatic alignment of optical interferometers", (1994).
- [11] L. Barsotti, M. Evans, LIGO-MIT, "Modeling of Alignment Sensing and Control for Advanced LIGO", (2010).
- [12] R. Aschauer, A. Asenbaum, and H. Geri, "Fabry-Perot interferometer with personal computer control", (1990).
- [13] P. Fulda, D. Voss, C. Mueller, L. F. Ortega, G. Ciani, G. Mueller, And D. B. Tanner, "Alignment sensing for optical cavities using radio-frequency jitter modulation", (2017).
- [14] Daniel Brown, Huy Tuong Cao, Alexei Ciobanu, Peter Veitch, And David Ottaway, "Differential wavefront sensing and control using radio-frequency optical demodulation", (2017).
- [15] D. Tarquin Ralph, Paul A. Altin, David S. Rabeling, David E. McClelland, And Daniel A. Shaddock, "Interferometric wavefront sensing with a single diode using spatial light modulation", (2017).
- [16] 宮崎 祐樹, "ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA のための高感度角度センサの開発", (2020).
- [17] Tomotada Akutsu, Fabián Erasmo Peña Arellano, Ayaka Shoda, et al., "Compact integrated optical sensors and electromagnetic actuators for vibration isolation systems in the gravitational-wave detector KAGRA", (2020).
- [18] G. Ciani, M. A. Arain, S. M. Aston, et al., "Small optic suspensions for Advanced LIGO input optics and other precision optical experiments", (2016).
- [19] 小田部 莊達, "高硬度光ばねを用いた重力波信号増幅システムの開発", (2020).
- [20] Satoru Takano, "Supplement for " How to Simulate WFS Properly with FINESSE" ", (2021).
- [21] Satoru Takano, "How to Simulate WFS Signal Properly with FINESSE", (2021).
- [22] Yohei Nishizaki, Matias Valdivia, Ryoichi Horisaki, Katsuhisa Kitaguchi, Mamoru Saito, Jun Tanida,

And Esteban Vera "Deep learning wavefront sensing", (2019).

謝辞

本修士論文は多くの方々に支えられることで完成させることができました。この場を借りて感謝を申し上げます。

指導教員の宗宮健太郎准教授には3年の間お世話になりました。修士課程で新たに光学実験と深層学習を絡めた研究をしたいという立原に自由に研究をさせて下さり、要所所でアドバイスを頂けたことで最終的に本研究テーマに辿り着くことができました。また、コロナ禍で大学院に行きにくい状況である中、遠隔で研究できる環境を整えて下さりました。ご迷惑をおかけしたことも記憶にありますが、諦めずに最後まで面倒を見てくださりありがとうございました。

原田健一講師には、卒業論文の研究時に実験のご指導をして下さり、その経験が本研究のテーマに繋がりました。私が触ると簡単に壊れてしまう光学系を、原田先生は職人のように正しいアライメントに導くことが出来るのを見て、AIに光学実験系の角度制御をさせることができないか、という着想がこのテーマのきっかけになりました。

D2の小田部さんは、浅学な私の質問に対しても真摯に向き合ってくださいました。特に修士論文執筆の時期には毎日のように私との議論に付き合ってくださいました。また、本論文の推敲にも手伝ってくださいましたことで、稚拙な私の修士論文が見違えるほどになりました。

卒業生の小川さんはB4,M1の時にお世話になりました。私がB4の時には席が近かったこともあり、飽きることなく雑談を楽しめました。

同期の栗林君、阿部君は、研究室だけでなくプライベートでも仲良くして下さい、B4の時から私を支えてくれました。お互いに違う強みと弱みを持ち、助け合いながら成長してきた3年間だったと感じています。2人と無事に共に修了できることを嬉しく思います。

M1の鈴木孝則君、B4の竹口君はコロナ禍でほとんど会うことは出来ませんでしたが、研究室のイベントでは気さくに話して下さい、また、ゼミで真剣に発言している姿は研究室に活気を与えていたと思います。B4の笹岡君は深層学習に精通していて、私の疑問に快く答えてくれました。私のテーマに興味を持って宗宮研究室を選んでくれたという彼の言葉は、私の研究に自信を与えてくれました。M1の鈴木海道君とは食事をしたとき、光学実験のアライメント作業に対して私と同様に難しい作業だと感じていることを知って、本テーマを続けられるモチベーションになりました。

東京大学安藤研究室の高野さんは、見ず知らずの私の質問メールに対し、とても親切で丁寧に回答してくださいました。高野さんの助言でWFS信号に関する理解が深まり、修士論文の質を上げることができました。

最後に、私が大学院へ進むまで不都合なく学問と向き合う環境を作ってくださいました両親に感謝いたします。また、何度か私の修士論文とプログラムを破壊した2匹の猫にも感謝いたします。

皆様、本当にありがとうございました。いつかこのご恩をお返しできるよう、研究での経験を生かしてこれからも成長することを誓います。