KAGRAの懸架系における非平衡熱雑音の検証

東京工業大学理学院物理学系
佐々木　開

2020年7月17日

はじめに

重力波とは時空の歪みが光速で伝わる波動現象であり、1916 年に A.Einstein が一般相対性理論においてその存在を予想した。重力波は質量を持った物体が加速度運動をすることで生じるが、その効果は非常に小さいため実際に検出することは困難であると考えられていた。その約 60 年後の 1978 年に J.H.Taylor と R.A.Hulse によって、間接的な重力波の存在検証が成された。直接的な重力波の存在検証は、広帯域に重力波を検出できるという特徴からレーザー干渉計型の検出器を用いて試みられていた。2015 年に、アメリカの LIGO が 2 台のレーザー干渉計型大型重力波望遠鏡によってブラックホール連星合体からの重力波を初検出したことによって重力波の存在が直接的に証明された。

日本の重力波望遠鏡である KAGRA は 2020 年 2 月に観測が開始され、日本での重力波信号の初検出を目指している。KAGRA の従来の重力波望遠鏡にない特徴として、地下に建造することによる地面振動雑音の低減、反射鏡やその懸架系を極低温に冷却することによる熱雑音の低減があげられる。特に熱雑音は干渉計の感度を最終的に決める雑音であるとされている。KAGRA の懸架ファイバーの熱雑音には、ブラウニアン熱雑音と熱弾性雑音の 2 種類があり、揺動散逸定理を用いて計算されてきたが、揺動散逸定理は平衡系にしか適用できない。実際の KAGRA の懸架系では、下端で反射鏡にレーザーから入った熱が懸架ファイバーを伝って上端の冷却器に流れ、懸架ファイバーに温度勾配を作り非平衡系を形成する。KAGRA の懸架ファイバーにおいて、ブラウニアン熱雑音は局所的平衡系の導入によって計算されたが [7]、熱弾性雑音については、非平衡であることの効果が小さいとして、系が平衡状態であると仮定した上での計算で見積もられている。このことは、仮に非平衡であることの効果がもたらす雑音が実は大きかった場合、干渉計の感度を制限する問題になりうる。そのため本研究室では、非平衡系の熱弾性雑音の計算方法について考案されてきた。

本論文では、宗宮研究室で考案された懸架系の縦方向の非平衡熱弾性雑音の計算方法の説明とその検証のための実験の提案をする。非平衡熱弾性雑音の計算では、従来のラン

ジュバン方程式を経由した方法に加え、入熱と吸熱があることによる効果を境界条件に組み込んで計算した。さらに、クーラーとヒーターを上下に取り付けた板バネの Q 値変化の測定実験をすることにより、非平衡熱雑音の直接的な検出と提案した理論との比較を目指す。

Abstract

Gravitational waves are a phenomenon in which a distortion of space-time travels at the speed of light, and were first proposed by A. Einstein in 1916. In 2015, using two large laser interferometer-type gravitational wave telescopes, LIGO accomplished the first detection of gravitational waves from a black-hole binary star conjunction. This proves the existence of gravitational waves.

KAGRA, a Japanese gravitational wave telescope, has two unique features not implemented in other gravitational wave telescopes. The ground vibration noise is reduced by building underground, and the thermal noise is reduced by cooling the reflector and its suspension system to a very low temperature. In particular, thermal noise is considered to be the noise that ultimately limits the sensitivity of the laser interferometer. There are two types of thermal noise in KAGRA suspension fibers: Brownian thermal noise and thermoelastic noise. These have been calculated using fluctuation-dissipation theorem, but for this purpose, an equilibrium system must be assumed. In the actual KAGRA suspension system, the heat from the laser entering the mirror at the bottom end flows through the suspension fiber to the cooler at the top end, creating a temperature gradient in the suspension fiber. Since the amount of the heat flow is constant in time, the system is in the steady state but it is in a non-equilibrium state. In KAGRA suspended fibers, calculation of BR TN has been conducted with assuming that the system is divided into parts and each part is is in a local equilibrium. For the thermoelastic noise, on the other hand, the dissipation source is non-local and the assumption of the local equilibrium is not appropriate. If the noise caused by the non-equilibrium effect is actually large.

In this paper, we describe a method for calculating the longitudinal non-equilibrium thermoelastic noise of a suspended system and report experiment to verify the method.

We aim to directly detect the non-equilibrium thermal noise and compare it with the proposed theory by measuring the change in the Q-value of a blade spring with a cooler and heater mounted above and below it.

目次

第 1 章

重力波

1916 年に Albert Einstein が一般相対性理論を提唱し、重力の理論的な説明を行った。一般相対論の基礎方程式である Einstein 方程式を線形近似すると Minkowski 時空からの metric の摂動が波動方程式を満たす。この章では Einstein 方程式からの重力波の導出をする。

1.1 Einstein 方程式

一般相対論において時空のある点 x^μとそこから微小に離れた点 $x^\mu + dx^\mu$ までの線素 ds は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

で表される。ここで $g_{\mu\nu}$は計量テンソルである。この計量テンソル $g_{\mu\nu}$を用いてクリストッフェル記号$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$、リーマンテンソル $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$が以下のように定義される。

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\mu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\alpha}) \tag{1.2}$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma_{\nu\alpha} \tag{1.3}$$

さらに上記のリーマンテンソル $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$から、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$、リッチスカラー R、アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ が以下のように定義される。

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \tag{1.4}$$

$$R = R^\alpha_\alpha \tag{1.5}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.6}$$

上記のアインシュタインテンソルを用いると、アインシュタイン方程式は以下のようになる。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

ここで、$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルと呼ばれ、質量やエネルギーの時空における分布を示す。

1.2 Einstein 方程式の線形近似

ここで弱い重力場におけるアインシュタイン方程式の線形近似を考える。このときの計量テンソル $g_{\mu\nu}$は、重力がないときの計量テンソル$\eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

に摂動 $h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1)$ を加えたものと考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.9}$$

ここで線形近似、つまり $h_{\mu\nu}$の一次の項までを考える。すると、アインシュタインテンソルは以下のような形になる。

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[h^{\delta}_{\nu,\mu\delta} + h^{\delta}_{\mu,\nu\delta} - \Box h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma} - \Box h)\right] \tag{1.10}$$

ここで $\Box$ はダランベルシアンであり $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ である。ここでトレース反転テンソル $\bar{h}_{\mu\nu}$ を定義する。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h \tag{1.11}$$

$h_{\mu\nu}$とトレース反転テンソル$\bar{h}_{\mu\nu}$の間には、trace $\bar{h}_{\mu\nu} = -$ trace $h_{\mu\nu}$ の関係が成り立つ。摂動項 $h_{\mu\nu}$をトレース反転テンソル$\bar{h}_{\mu\nu}$の形に定義すると、アインシュタインテンソルを以下のように書き直すことができる。

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{h}^{\delta}_{\lambda,\nu\delta} + \bar{h}^{\delta}_{\nu,\lambda\delta} - \Box \bar{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\bar{h}^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma}) \tag{1.12}$$

ここで以下の微小なゲージ変換を考える。

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{1.13}$$

この変換に伴い $h_{\mu\nu}$ と $\bar{h}_{\mu\nu}$ は、

$$h^{'}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \tag{1.14}$$
$$\bar{h}^{'}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,alpha} \tag{1.15}$$

のように変換される。この変換によって、

$$h^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0 \tag{1.16}$$

の条件を満たすように一般性を失うことなく変形することができる。式 (1.16) をローレンツ条件という。このローレンツ条件下において、アインシュタインテンソルは摂動を一次の項まで見ることで次のように表される。

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu} \tag{1.17}$$

よって摂動を一次まで見ることでアインシュタイン方程式は以下のようになる。

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (\bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0) \tag{1.18}$$

ただし G は万有引力定数である。
さらに、真空中では波動方程式の形になる。真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ なので、

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \qquad (\bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0) \tag{1.19}$$

この一次までの時空の摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ が重力波である。

1.3 重力波の伝播

式 (1.19) を満たす最も簡単な解は以下のような平面波解である。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \tag{1.20}$$

ここで以下の式を満たしている必要がある。

$$k_{\alpha}k^{\alpha} = 0 \tag{1.21}$$

$$A_{\mu\alpha}k^{\alpha} = 0 \tag{1.22}$$

式 (1.21) は重力波が光速で伝播することを示し、式 (1.22) は重力波が横波であることを示す。前節でローレンツ条件 (1.16) を課してアインシュタインテンソルの変換を行なった

が、座標の取り方に任意性が残っている。そこで以下のトランスバーストレースレスゲージ条件を課す。

$$A^{\alpha}_{\alpha} = 0 \tag{1.23}$$

$$A_{\mu\nu}\delta^{\nu} = 0 \tag{1.24}$$

この条件下で $\delta^{\nu} = (1,0,0,0), k^{\alpha} = (\omega,0,0,k), \omega = ck$ とすると、このとき

$$h^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\left[(i(-\omega t + kz))\right] \tag{1.25}$$

ここで摂動 $h_{\mu\nu}$にトランスバーストレースレスゲージ条件を課していることを明示するために $h^{TT}_{\mu\nu}$とした。この式から重力波は 2 つの自由度を持っていることがわかる。$h_{+} \neq 0, h_{\times} = 0$ はプラスモード、$h_{+} = 0, h_{\times} \neq 0$ はクロスモードと呼ばれる。

1.4 自由質点に対する重力波の影響

2 つの自由質点 A、B が各々座標 x^{μ}_{A}, x^{μ}_{B} に存在するとする。ここに重力波が到来したときにどのような影響があるの考えてみる。このとき自由質点は以下の測地線方程式に従う。

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0 \tag{1.26}$$

ここに τ は固有時間である。これを解くと以下の式が得られ質点は座標で静止していることがわかる。

$$\frac{dx^{i}}{d\tau} = 0 \tag{1.27}$$

$$\frac{dx^{0}}{d\tau} = 0 \tag{1.28}$$

つまり、１つの自由質点を観測するだけでは重力波の影響は見られない。重力波の影響を見るためには２つの自由質点間の測地線距離を観測する必要がある。
ここで、TT ゲージ条件下で z 方向にプラスモードのみの重力波が到来したと考える。$x^{\mu}_{A} = (0,0,0,0), x^{\mu}_{B} = (0,\delta,0,0)$ としてδ を非常に小さいとする。自由質点 A、B 間の測

地線距離は、

$$\int_{x_A^\mu}^{x_B^\mu} |g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|^{1/2} = \int_0^\delta |g_{11}|^{1/2}dx^1 \tag{1.29}$$

$$\sim |g_{11}^{1/2}|\delta \tag{1.30}$$

$$\sim (1+\frac{h_+}{2})\delta \tag{1.31}$$

となり、重力波のプラスモード成分に依存して 2 つの自由質点間の測地線距離が変化する。図 (1.1) はそれぞれのモードの偏光している重力波が来たときの、円状に配置した自由質点の位置の変化である。

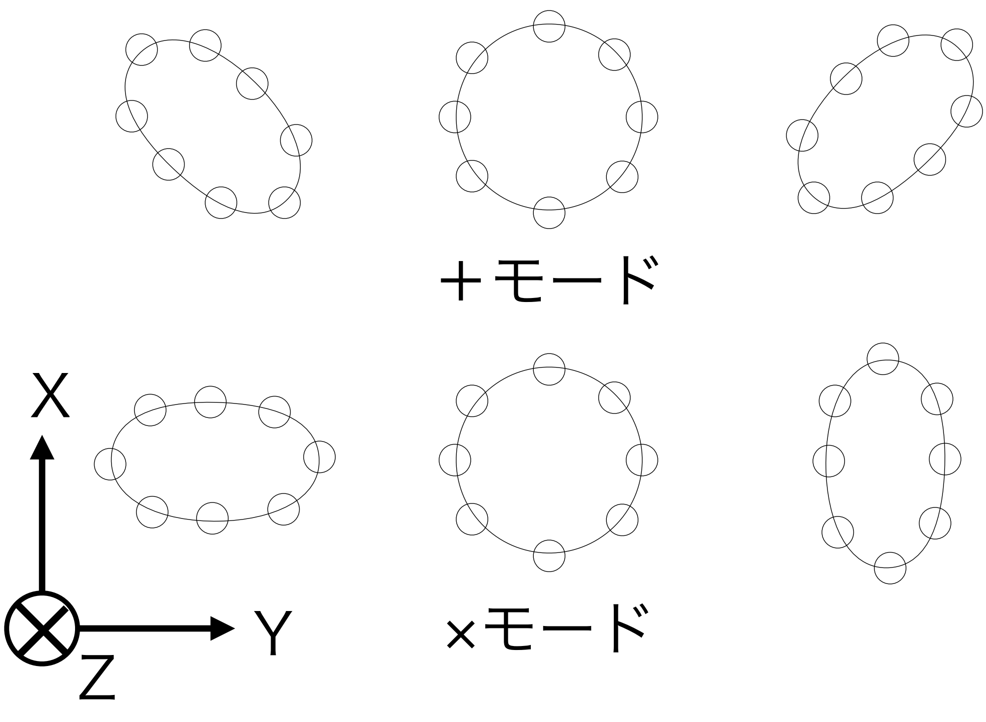

図 1.1　重力波による円状配置した自由質点の変位

第 2 章

重力波の検出

前節で述べたように、重力波の影響は自由質点間の測地線距離に現れる。現在まで、このような重力波の影響を観測するために、様々な検出器が開発されてきたが、現在主流となっているのはマイケルソン干渉計を原理としたレーザー干渉計型の重力波検出器である。日本の重力波望遠鏡 KAGRA もレーザー干渉計型の重力波検出器である。

2.1 マイケルソン干渉計

まず、マイケルソン干渉計の原理について説明する。入射レーザーの周波数を Ω とすると電場は

$$E_{in} = E_0 \exp{(i\Omega t)} \tag{2.1}$$

となる。図 (2.1) の x、y 方向の腕の長さを L_x、L_yとすると、レーザー光が各々の腕を往復した時の位相のズレを$\phi_x = 2L_x\Omega c, \phi_y = 2L_y\Omega c$ と書くことができる。ビームスプリッターでの反射では位相がπ ずれるので、このときのフォトディテクターにおけるレーザー光の電場は

$$E_{out} = \frac{1}{2}E_0 \exp{[i(\Omega t - \phi_x)]} - \frac{1}{2}E_0 \exp{[i(\Omega t - \phi_y)]} \tag{2.2}$$

となる。実際のフォトディテクターで検出されるのは光強度であり、それは以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_{out} &= |E_{out}|^2 &(2.3)\\ &= \frac{1}{2}|E_{in}|^2(1 - \cos{(\phi_x - \phi_y)}) &(2.4) \end{aligned}$$

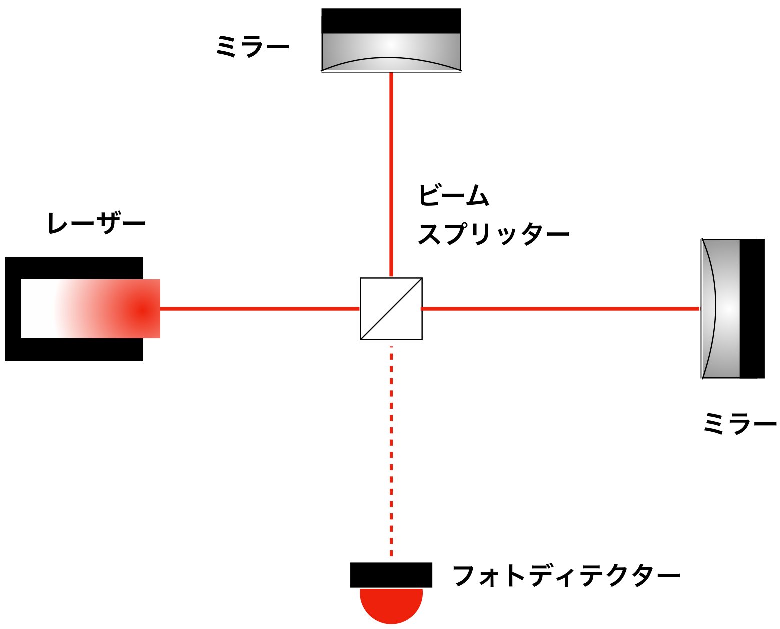

図 2.1　マイケルソン干渉計

この式より、レーザー光強度はマイケルソン干渉計の 2 つの腕を反射してきたレーザー光の位相の差 $\delta\phi = \phi_x - \phi_y$ に依存することがわかる。

2.2　マイケルソン干渉計の重力波に対する応答

図 (2.1) において z 方向からプラスモードの偏光を持つ重力波が到来することを考える。式 (1.25) より

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\left[(i(-\omega t + kz))\right] \tag{2.5}$$

このとき、x 方向に進行する光子の線素 ds は

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (1 + h(t))dx^2 = 0 \tag{2.6}$$

よって

$$dx^2 = \frac{c^2}{1 + h_+(t)} dt^2 \tag{2.7}$$

重力波が微小なので、$|h_+(t)| \ll 1$ とすると

$$dx \sim c\left(1 - \frac{1}{2}h_+(t)\right)dt \tag{2.8}$$

光子がビームスプリッターと x 軸方向のエンドミラーの間を往復するのにかかる時間を Δt_xとして、その間に渡って式 (2.8) の両辺を積分すると

$$\int_{t-\Delta t_x}^{t}\left(1 - \frac{1}{2}h_+(t')\right)dt' = \frac{2L_x}{c} \tag{2.9}$$

$$\rightarrow \Delta t_x = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} h_+(t')dt' \tag{2.10}$$

ここで $|h(t)| \ll 1$ であり、$h(t) = 0$ のとき$\Delta t_x = \frac{2L_x}{c}$となるので、これを積分の下限とすると

$$\Delta t_x = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^{t} h_+(t')dt' \tag{2.11}$$

y 方向の光子についても同様に考えると、y 方向の腕を往復する間に要する時間Δt_y は、

$$\Delta t_y = \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L_y}{c}}^{t} h_+(t')dt' \tag{2.12}$$

となる。

以上より、$L \sim L_x \sim L_y$として、重力波が入射したときの x 方向の腕を反射してきたレーザー光と y 方向の腕を反射してきたレーザー光の位相差$\delta\phi'$ は

$$\begin{aligned} \delta\phi' &= \Omega(\Delta t_x - \Delta t_y) && (2.13)\\ &\sim \frac{2(L_x - L_y)\Omega}{c} + \Omega\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} h_+(t')dt' && (2.14)\\ &= \delta\phi + \delta\phi_{GW} && (2.15) \end{aligned}$$

となる。ここでおいた

$$\delta\phi_{GW} = \Omega\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} h_+(t')dt' \tag{2.16}$$

は重力波の影響による位相変化の項である。

2.3 レーザー干渉型重力波検出器の雑音源

2.3.1 地面振動雑音

現在までのレーザー干渉型重力波検出器は、地上あるいは地中に建造されており、地面振動の影響を受ける。この地面振動は地震などの大きなものから人が歩くことで起きる小さな振動まで重力波検出器の雑音減になりうる。地面振動雑音の振幅スペクトル密度は経験的に

$$\delta x_{seismic}(f) \propto \left(\frac{1[\mathrm{Hz}]}{f}\right)^2 \qquad [\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \tag{2.17}$$

程度であると知られている。式から地面振動雑音は 周波数 f の二乗に反比例して減衰し、主に低周波数帯域で感度を制限する雑音になる。地面振動による鏡の振動を制限するために防振をする必要がある。実際、KAGRA では多段振り子の防振効果を利用した懸架系が導入されている。

2.3.2 散射雑音

光を量子化して光子として考える。散射雑音はフォトディテクターに入る光子数が統計的に揺らぎ、その光子数の変化が、鏡の変位由来でないにもかかわらず、位相変化として検出されてしまうことによる雑音である。散射雑音のパワースペクトル密度は、e を素電荷、I_Pをフォトディテクターの光電流として

$$G_{shot}(f) = \sqrt{2eI_P} \tag{2.18}$$

と表される [1]。この雑音により干渉計で観測できる位相差の最小値は制限され、その値は以下のようになる。

$$\delta\phi_{shot} = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \tag{2.19}$$

ここで $\hbar$ はディラック定数、Ω は光の角周波数、η はフォトディテクターの量子効率、P はレーザーのパワーである。式からレーザーパワー P を上げれば、観測できる位相差の最小値は 0 に近づく、つまり散射雑音が低減することがわかる。そのため重力波検出器には高出力のレーザー光源が用いられている。

2.3.3 輻射圧雑音

光子数が揺らぐことによって、光子が鏡に与える反作用が変化し、鏡の変位となってしまう雑音を輻射圧雑音という。輻射圧雑音の振幅スペクトルは次のように表される。

$$\delta x_{rad} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi m f^2}\sqrt{\frac{4hP}{\pi^4 c\lambda}} \tag{2.20}$$

ここで、$\mathcal{F}$ は干渉計の腕に構成されているフェブリーペロー共振器のフィネス、m は鏡の質量、λ はレーザー光の波長である。式から鏡の質量 m を大きくする、あるいはレーザーパワー P を低くすれば輻射圧雑音が低減することがわかる。レーザーパワーにおいて輻射圧雑音と散射雑音はトレードオフの関係にあり、２つの雑音を合わせて量子雑音と呼ぶ。また量子雑音によって定められるレーザー干渉型重力波検出器の感度の限界を標準量子限界 (SQL) という。

2.3.4 熱雑音

熱雑音は、系が熱浴との間でランダムなエネルギーのやり取りをすることで揺らぎが生じる現象である。熱雑音は精密測定の原理的な限界の１つであり、重力波検出器もその例に漏れない。レーザー干渉型重力波検出器の主な熱雑音は、懸架系の振動が励起され鏡の位置が揺らぐ懸架系の熱雑音、および鏡の表面が揺らぐ鏡の熱雑音の 2 種類に分けられる。10Hz から 100Hz までの帯域で懸架系の熱雑音が、100Hz 付近で鏡の熱雑音が主な雑音になる。[2]
熱雑音には系のエネルギー散逸の経路によって幾つかの種類がある。以下で代表的なものについて記す。

ブラウニアン雑音

ブラウニアン熱雑音とは、熱浴とのやり取りによって物体中の分子のブラウン運動が励起されることで物体に変位や変形が起きる雑音である。ブラウニアン熱雑音は機械的損失（後述する「Q 値」）から揺動散逸定理を介して計算される。

熱弾性雑音

熱浴とのやり取りによって励起されたブラウン運動によって物体の非一様な変形が生じたとき、熱膨張率とカップリングし物体中にランダムで局所的な温度分布が生じ、その熱

緩和が由来となって発生する雑音である。熱弾性雑音は、局所的な温度分布が解消されるときの散逸から揺動散逸定理を介して計算される。しかしながら、その計算においては平衡系を仮定しなければならず [4]、実際の重力検出器の鏡や懸架系のような非平衡系においての計算は未だなされていない。

2.4 重力波望遠鏡 KAGAR の感度

日本の重力波検出器 KAGRA における様々な雑音と、それらを合計したときの感度スペクトルを図 (2.2) に示した。縦軸は歪み感度、横軸は周波数を表している両対数のグラフである。値が大きくなるほど感度がよく、より小さな重力波信号を検出できることを表している。黒波線 total が雑音を合計したときの感度である。

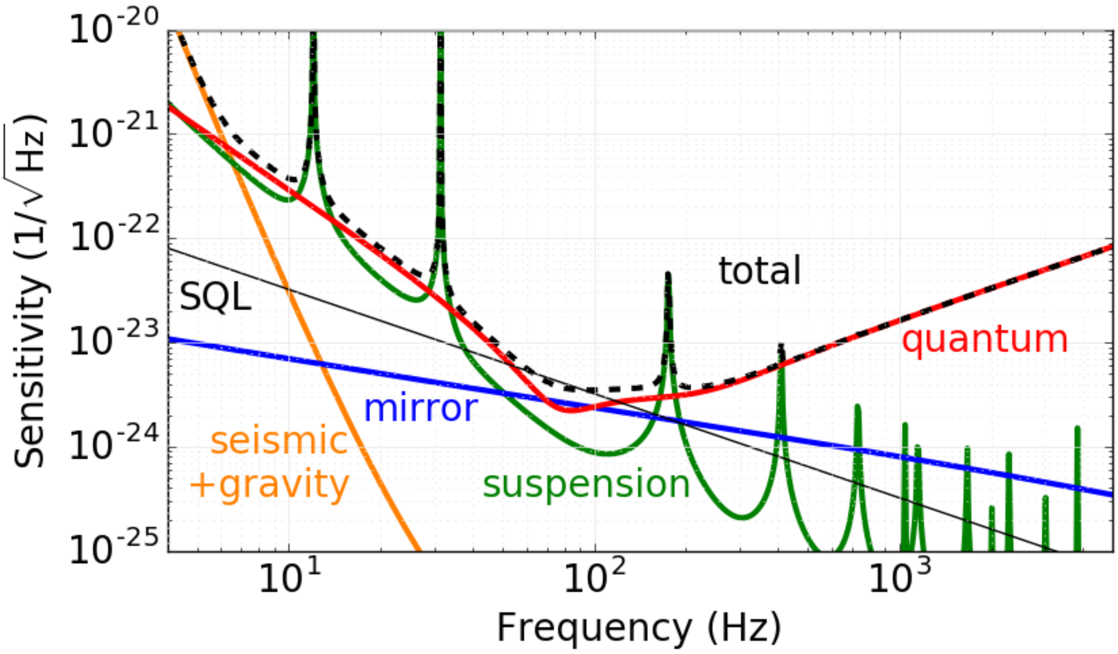

図 2.2 KAGRA の感度スペクトル

第 3 章

熱雑音

熱雑音とは、系が熱浴からエネルギーを受け取ることによって、物理量が揺らぐ現象である。

3.1　干渉計型重力波検出器における熱雑音

調和振動子を例にとって熱雑音の大きさをどのように考えるかをみる。熱浴中に調和振動子が存在すると、それはエネルギーをやり取りし、平衡位置から揺らぐ。このゆらぎが熱雑音に相当し、ゆらぎの大きさ、つまりゆらぎの二乗平均 $\overline{x^2}$はエネルギー等分配則を用いて容易に計算できる。振動子の質量を m、共鳴角周波数をω_0、Boltzmann 定数を $\mathrm{k_B}$ 、温度を T とすると

$$\bar{x}^2 = \frac{k_B T}{m\omega_0^2} \tag{3.1}$$

重力波検出器の雑音の大きさは、周波数空間で議論するため、$\bar{x}^2$ の周波数成分を知る必要がある。そのため、パワースペクトル密度という概念を導入する。パワースペクトル密度とは以下のような関数である。

$$\bar{x}^2 = \int_0^\infty G_x(\omega) d\omega \tag{3.2}$$

ここで、ω は周波数、$G_x(\omega)$ は$\bar{x}^2$ への各周波数成分の寄与を表す関数である。例えば、前述の調和振動子においては、このパワースペクトルは共鳴周波数 $\omega_0 = 2n\pi$ で極大になり、他の周波数で非常に小さくなる。しかし、0 にはならない。重力波干渉計の場合、小さい値でも問題になりうるので、精密な雑音の見積もりのためには、$G_x(\omega)$ の具体的な表式を求める必要がある。そのために次節で説明する揺動散逸定理を利用する。

3.2 揺動散逸定理

揺動散逸定理とは、物理系における揺動と散逸の関係を記述する定理である。例えば、調和振動子では、前節で述べたように熱浴とのエネルギーのやりとりによって質点に揺動力が加わりゆらぎ $\bar{x^2}$ が生じると考えることができた。しかし、揺動散逸定理の主張するところによれば、このときの揺動力の性質は調和振動子系の散逸の性質によって一意に定まる。つまり **揺動と散逸は独立ではなく、互いに関係づいたもの** である。
ここで、揺動散逸定理について記す。ある物理系を表す座標の 1 つ x についての揺動を求めることを考える。そのために、物理系のハミルトニアンに摂動項 $-f(t)x$ を導入し、運動方程式を導くことをができれば良い。
その後、運動方程式をフーリエ変換してこの系のインピーダンス $Z(\omega)$ を求める。

$$Z(\omega) \equiv \tilde{f}(\omega)/\tilde{\dot{x}}(\omega) = \tilde{f}(\omega)/i\omega\tilde{x}(\omega) \tag{3.3}$$

またインピーダンスの実部 R をレジスタンス、インピーダンスの逆数 Y をアドミッタンス、アドミッタンスの実部をコンダクタンスと呼び、以下のように定義される。

$$R(\omega) \equiv \mathrm{Re[Z(\omega)]} \tag{3.4}$$

$$Y(\omega) \equiv 1/Z(\omega) \tag{3.5}$$

$$\sigma(\omega) \equiv \mathrm{Re[Y(\omega)]} \tag{3.6}$$

また

$$H(\omega) \equiv \tilde{x}(\omega)/\tilde{f}(\omega) \tag{3.7}$$

を伝達関数という。アドミッタンスを用いてパワースペクトル密度 $G_x(\omega)$ について、以下の関係式が成り立つ。

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT\sigma(\omega)}{\omega^2} \tag{3.8}$$

一般にレジスタンスやアドミッタンスは系の散逸を表すのでこの式は系の揺動と散逸の関係を表している。このように、系の散逸（この場合は $\sigma(\omega)$）に対して、揺動力の性質（この場合は $G_x(\omega)$）が一意に決まっており、これはまさしく揺動散逸定理の主張するところである。

3.3 調和振動子の熱雑音

揺動力の働く調和振動子のパワースペクトル密度

ここで、具体的な例として一次元調和振動子の熱雑音を求めてみる。質量を m、共鳴周波数をω、位置を x、揺動力を $f(t)$ とすると一次元調和振動子の運動方程式は以下のようになる。

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = f(t) \tag{3.9}$$

この時点では散逸を表す項が運動方程式に入っていない。後の便利のために先にフーリエ変換を行い、それから周波数 ω に依存する散逸項 $\phi(\omega)$ を導入する。すると、

$$-m\omega^2\tilde{x} + m\omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]\tilde{x} = \tilde{f} \tag{3.10}$$

となる。上式をみてみると、バネ定数が $m\omega_0^2 \to \omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]$ となっていて、これを複素バネ定数と呼ぶ。
ここでインピーダンスを求めると

$$Z(\omega) = \frac{-m\omega^2 + m\omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]}{i\omega} \tag{3.11}$$

となり、式 (3.5)、(3.6) を式 (3.8) に代入すると以下のように、一次元調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度が求まる。

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT}{m\omega}\frac{\omega_0^2\phi(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi^2(\omega)} \tag{3.12}$$

散逸のモデル

ここで、散逸 $\phi(\omega)$ のモデルである viscous damping モデルと structure damping モデルについて説明する。特に、structure damping に起因する雑音をブラウニアン雑音という。
viscous damping モデルは散逸 $\phi(\omega)$ が速度に比例した減衰力が加わるモデルである (例：空気抵抗)。そのとき散逸項 $\phi(\omega)$ は以下のような形になる。

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q} \tag{3.13}$$

Q は正定数であり、Q **値** と呼ばれる。

Q 値は散逸の大きさを表す。Q 値が大きいほど散逸は小さい。

viscous damping モデルを採用したときのパワースペクトル密度は、式 (3.13) を式 (3.12) に代入して以下のように求まる。

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT}{mQ}\frac{\omega_0}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega_0^2\omega^2/Q^2} \tag{3.14}$$

共振点から離れた周波数でのパワースペクトル密度 $G_x(\omega)$ の近似形を求める。

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT}{m\omega_0^3Q} = \text{constant} \quad (\omega \ll \omega_0) \tag{3.15}$$

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT\omega_0}{mQ}\frac{1}{\omega^4} \propto \omega^{-4} \quad (\omega \gg \omega_0) \tag{3.16}$$

structure damping モデルを採用した場合の散逸項 $\phi(\omega)$ は次のような形になる。

$$\phi(\omega) = \frac{1}{Q} \tag{3.17}$$

structure damping モデルを採用したときの雑音のパワースペクトル密度は、式 (3.17) を式 (3.12) に代入して以下のように求まる。

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT}{mQ\omega}\frac{\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega_0^4/Q^2} \tag{3.18}$$

さらに、共振点から離れた周波数でのパワースペクトル密度 $G_x(\omega)$ の近似形を求める。

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT}{m\omega_0^2Q}\frac{1}{\omega} \propto f^{-1} \quad (\omega \ll \omega_0) \tag{3.19}$$

$$G_x(\omega) = \frac{4k_BT\omega_0^2}{mQ}\frac{1}{\omega^5} \propto f^{-5} \quad (\omega \gg \omega_0) \tag{3.20}$$

重力波検出器において、鏡の熱雑音については共振が 10kHz 以上なので $\omega \ll \omega_0$、懸架系の熱雑音については共振が 1Hz 程度なので $\omega \gg \omega_0$ という近似を行う。

鏡のブラウニアン熱雑音は

$$G_{\rm sus}(\omega) \simeq \frac{4k_BT\omega_0^2}{m\omega^5}\phi(\omega) \qquad (\omega \ll \omega_0) \tag{3.21}$$

懸架系のブラウニアン熱雑音は

$$G_{\rm sus}(\omega) \simeq \frac{4k_BT}{m\omega_0^2\omega}\phi(\omega) \qquad (\omega \gg \omega_0) \tag{3.22}$$

となる。

Q 値

一次元調和振動子を例にとって、Q の性質を具体的にみていく。
実は今までの議論において Q は以下の関係式を満たすように定義されていたのである。

$$\phi(\omega_0) = \frac{1}{Q} \tag{3.23}$$

つまり、Q は 共振周波数ω_0 における散逸の大きさを表しているのである。この式は、viscous damping モデルでも structure damping モデルでも成立する。式 (3.15)(3.19) などから、熱雑音のパワースペクトルを求めるためにはその系の Q を知らなければならないことがわかる。以上では一次元調和振動子を例にとって説明したが、一般に、揺動散逸定理を介してある系の熱雑音を計算する場合、Q 値を実験で測定する必要がある。

節 (6.2) では、実際の Q 値測定で取られる 2 つのアプローチを紹介する。

3.4　ランジュバンアプローチ

この節では、ランジュバン方程式のようにランダムな項を熱伝導方程式に導入することによって熱雑音を導出する方法 (ランジュバンアプローチと呼ぶことにする) を説明する。

ランジュバン方程式

液体や気体中に浮遊する微粒子は周囲の液体分子や気体原子からランダムな力を受けてランダムな運動（ブラウン運動）をする。ランジュバン方程式はあるポテンシャルを仮定した上でのブラウン運動を記述する方程式である。
以下はポテンシャルが定数、すなわち最も簡単なランジュバン方程式である。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \eta\boldsymbol{v} = R(t) \tag{3.24}$$

ここで、m は微粒子の質量、η は粘性係数、$R(t)$ は周囲から受けるランダムな力を表す項である。$R(t)$ はランダムな力をあらわしているので時間で平均をとった場合 0 になる。

$$\langle R(t)\rangle = 0 \tag{3.25}$$

さらに $R(t)$ には時間的な周期性もないので自己相関はデルタ関数の形になる。

$$\langle R(t)R(t')\rangle \propto \delta(t-t') \tag{3.26}$$

ここで、$\langle\rangle$ は以下のように表される時間平均である。

$$\langle f(t)\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{3.27}$$

ランジュバンアプローチ

ここで熱弾性雑音のパワースペクトルの計算のためのランジュバンアプローチを紹介する。これは V.B. Braginsky がレーザー干渉型重力波検出器の反射鏡の熱弾性雑音を計算するために導入した計算手法である。[4]
以下では α は線熱膨張率、λ は熱伝導率、ρ は密度、C は比熱容量、k_B はボルツマン定数である。

まず、熱力学から導かれることとして、温度 T 体積 V の物質に対して温度揺らぎの二乗 δT^2 の時間平均は以下のように求められる。

$$\langle\delta T^2\rangle = \frac{k_B T^2}{\rho C V} \tag{3.28}$$

この温度揺らぎには、物体の変形と熱膨張率のカップリングによる温度変化の効果は考慮されていない。一般に物質は熱膨張率が 0 ではないので、式 (3.28) で表される温度揺らぎをそのまま熱弾性雑音の計算に使うことはできない。そこで熱伝導方程式を解くことで、熱膨張率が 0 でない場合の温度揺らぎを導出することを考える。一般に、物体内に発熱がある場合の熱伝導方程式は

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho C}\Delta u(\boldsymbol{r},t) = Q \tag{3.29}$$

という形をとる。ここでは Q は発熱を表す。この方程式で u を平均温度からの温度差 (温度揺らぎ) と置き、右辺の発熱項 Q を局所的な温度差を生み出す揺らぎ項 $F(\boldsymbol{r},t)$ に置き換える。すると、熱伝導方程式は以下のように変更される。

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - a^2\Delta u(\boldsymbol{r},t) = F(\boldsymbol{r},t) \tag{3.30}$$

ただし、$a^2 = \lambda/\rho C$ とおいた。ここで導入した揺らぎ項 $F(\boldsymbol{r}, t)$ は、ランダムな揺らぎを表しているので、時間で平均を取れば 0 となる。

$$\langle F(\boldsymbol{r}, t)\rangle = 0 \tag{3.31}$$

また、アンサンブル平均は以下のような形であるとする。

$$\langle F(\boldsymbol{r}, t)F(\boldsymbol{r'}, t')\rangle = F_0^2\delta(t - t') \times \nabla\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) \tag{3.32}$$

上式 (3.31)、(3.32) の形は前節で述べたランジュバン方程式のランダム力 $R(t)$ の条件式 (3.25)、(3.26) を基にしたものである。温度揺らぎ $u(\boldsymbol{r}, t)$ は式 (3.28) を満たすように正規化されており、このことから揺らぎ項 $F(\boldsymbol{r}, t)$ 中の F_0 は決定される。

第 4 章

非平衡定常状態における懸架ファイバーの熱弾性雑音

本章では、定常非平衡系の縦方向熱弾性雑音の計算手法について述べる。この手法は宗宮研究室で議論、提案された手法である。

4.1 背景

重力波望遠鏡 KAGRA では、懸架したサファイア鏡にレーザーからの入熱があり、この熱は懸架ファイバーを通して懸架系の上段へ伝導され、そこからいくつかのマスを経由して冷却器へと流れる。冷却器の温度は約 16K ほどと想定されており、サファイア鏡は 20K になるように制御されている。このとき懸架ファイバーには下段から上段にかけて温度勾配が形成されている (図 (4.1))。これは温度分布が大局的には安定しているが熱流が存在する状態、すなわち定常非平衡状態である。

懸架ファイバーの熱雑音には、熱浴とのやり取りによってファイバーの物理的振動が励起されるブラウニアン熱雑音と熱浴とのやり取りによってファイバー内に形成される局所的な温度分布が熱膨張率とカップリングして変形を生じる熱弾性雑音の 2 つがある (2.3.4 節参照)。熱弾性雑音の計算には揺動散逸定理が用いられるが、3.2 節で述べたように、揺動散逸定理の適用には平衡系を仮定しなければならず、KAGRA の懸架ファイバーのような非平衡な系ではそのまま用いることができない。ブラウニアン熱雑音に関しては、ブラウン運動の影響がランダムなため場所によって相関がないので、局所平衡系を考えることによって揺動散逸定理を適用することができる [7]。しかし熱弾性雑音に関しては位置に関してランダムではなく揺らぎの相関があるため、局所平衡系を考えることができな

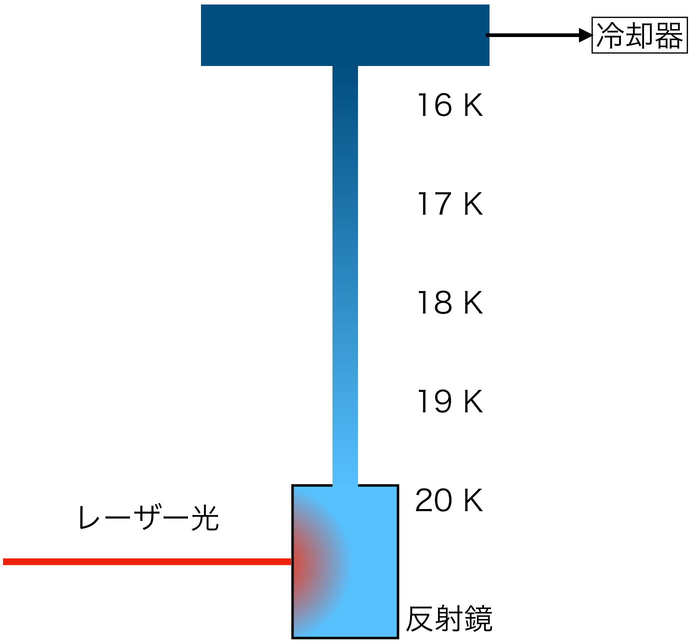

図 4.1　KAGRA の懸架ファイバーの温度勾配

い。そのため、ファイバーの両端に温度制御が働いているような系を考える。このような温度制御の効果が、非平衡系であることによる付加的な雑音を生み出すものだと考えて、ランジュバンアプローチ（3.4 節）を用いてファイバーの熱弾性雑音を算出する。懸架系の熱雑音には振り子方向の雑音と縦方向の雑音があり、本手法では縦方向の熱弾性雑音を導出する。

4.2　ランジュバンアプローチを用いた導出

3.4 節のようにランジュバンアプローチを用いてファイバーの熱弾性雑音のパワースペクトルを導出していく。ファイバーが一次元空間中の $0 \leq x \leq L$ の領域を占めていると考える。ファイバー内の温度揺らぎを $u(x,t)$ とすると、ファイバー内の熱源としてランダムな熱揺らぎ $F(x,t)$ があるときの熱伝導方程式は 式 (3.29) より

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho C}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = F(x,t) \tag{4.1}$$

となる。ここで λ[W·m·K] は熱伝導率にファイバーの断面積をかけたもの、ρ^*[g/cm] は線密度、C[J/kg·K] は比熱容量である。ここで熱拡散率を

$$a^2 \equiv \frac{\lambda}{\rho C} \tag{4.2}$$

とおく。最初に式 (4.1) の斉次の解を導出する。斉次の解を変数分離形として

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.3}$$

とおき、式 (4.1) の右辺を 0 としたものに代入し変数分離を行うと

$$X\dot{T} - a^2\ddot{X}T = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{X} \quad (\equiv \mu) \tag{4.5}$$

となる。以下で X、T のそれぞれについて解く。

4.2.1 ファイバーに温度勾配がない場合

温度制御をしていなくてファイバーに温度勾配がない場合について考える。このときの境界条件を以下のようにする。

$$\dot{u}(0,t) = \dot{u}(L,t) = 0 \tag{4.6}$$

まず X について解く。$\mu \leq 0$ の場合、

$$X(x) = A\exp-\sqrt{-\mu} + B\exp\sqrt{-\mu} \quad (\mu < 0) \tag{4.7}$$

$$X(x) = Ax + B \quad (\mu = 0) \tag{4.8}$$

となり、境界条件 (4.6) より $X = 0$ 以外の非自明解が存在しない。$\mu < 0$ については

$$X(x) = A\cos\sqrt{\mu}x + B\sin\sqrt{\mu}x \tag{4.9}$$

となり、$\dot{X} = 0$ より $B = 0$ で、$\dot{X}(L) = 0$ を満たす非自明な解は、$\sqrt{\mu} = \frac{n\pi}{L}$、つまり

$$X(x) = A\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.10}$$

となる。T(t) について解くと以下のようになる。

$$T(t) = -\mu a^2 T(t) = \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t \tag{4.11}$$

$$\rightarrow T(t) = T_0 e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t} \tag{4.12}$$

よって温度勾配のない場合の 4.1 の斉次の解は、それぞれの n についての係数を u_n とすると

$$u(x,t) = \sum_n u_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t} \tag{4.13}$$

となる。

次に非斉次の解を導出する。右辺の揺らぎ項 $F(x,t)$ を x について フーリエ級数展開すると

$$F(x,t) = \sum_n u_n \left\{F_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + F'_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\} \tag{4.14}$$

となる。さらに t についても フーリエ変換すると、

$$F(x,t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_n u_n \left\{\tilde{F}_n(\omega)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \tilde{F'}_n(\omega)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\} e^{i\omega t} \tag{4.15}$$

と表せる。この式のフーリエ級数は

$$\tilde{F}_n(\omega) = \frac{2}{L}\int_0^L \left[2\pi\int_{-\infty}^{\infty} F(x,t)e^{i\omega t}dt\right]\cos\frac{n\pi a}{L}dx \tag{4.16}$$

で与えられる。式 (4.13) の展開係数 u_n を非斉次解を満たすように選ぶと、

$$\tilde{u}(x,t) = 2\pi\int u_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}e^{i\omega t}dt \tag{4.17}$$

として

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{F}_n(\omega)}{n^2\pi^2a^2/L^2 + i\omega} \tag{4.18}$$

となる。

4.2.2 ファイバーに温度勾配がある場合

ファイバー内に温度勾配がある場合のモデルを以下のように設定する。ファイバーの上端と下端に断面積と熱伝導率と線密度が等しく、比熱が異なるファイバーを接続する。上端に接続されたファイバーの比熱を $C_1 \neq C$、下端に接続されたファイバーの比熱を $C_2 \neq C$ とする。また、熱拡散係数は $a_1^2 \equiv \lambda/\rho C$、$a_2^2 \equiv \lambda/\rho C$ で与えられる。温度揺ら

ぎを u_1, u_2 とすると、各々の領域での熱伝導方程式は

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x,t) = F(x,t) \quad (0 \leq x \leq L) \tag{4.19}$$
$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x,t) = F(x,t) \quad (-\infty \leq x \leq 0) \tag{4.20}$$
$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x,t) = F(x,t) \quad (L \leq x \leq \infty) \tag{4.21}$$

となる。斉次の解は以下のように書ける。

$$u = \{A \cos \sqrt{\mu} x + B \sin \sqrt{\mu} x\} e^{-\mu a^2 t} \tag{4.22}$$
$$u_1 = \{A_1 \cos \sqrt{\eta_1} x + B_1 \sin \sqrt{\eta_1} x\} e^{-\eta_1 a_1^2 t} \tag{4.23}$$
$$u_2 = \{A_2 \cos \sqrt{\eta_2} x + B_2 \sin \sqrt{\eta_2} x\} e^{-\eta_2 a_2^2 t} \tag{4.24}$$

境界条件を以下のようにする。

・ファイバーの境目で温度揺らぎが等しい

$$u(0,t) = u_1(0,t) \tag{4.25}$$
$$u(L,t) = u_2(L,t) \tag{4.26}$$

・ファイバーの境目で熱流束が等しい

$$\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \lambda \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{4.27}$$
$$\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = \lambda \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=L} \tag{4.28}$$

・ファイバーの境目から外側に δL 進んだ位置で熱流束がなくなる

$$\lambda \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=-\delta L} = 0 \tag{4.29}$$
$$\lambda \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=L+\delta L} = 0 \tag{4.30}$$

境界条件 (4.25)、(4.26) より、

$$\lambda a^2 = \eta_1 a_1^2 = \eta_2 a_2^2 \tag{4.31}$$

となる必要がある。この上で 6 つの境界条件から非自明解を持つためには

$$\sqrt{\mu} L = n\pi + \phi \tag{4.32}$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{\mu\eta_1}\tan\sqrt{\eta_1}\delta L_1 + \sqrt{\mu\eta_2}\tan\sqrt{\eta_2}\delta L_2}{\sqrt{\eta_1\eta_2}\tan\sqrt{\eta_1}\delta L_1\tan\sqrt{\eta_2}\delta L_2 - \mu} \tag{4.33}$$

を満たさないといけないことがわかる。ここで、$\tan\phi_1 \equiv \sqrt{\frac{\eta_1}{\lambda}}\tan\theta_1$、$\tan\phi_2 \equiv \sqrt{\frac{\eta_2}{\lambda}}\tan\theta_2$ とすると、$\tan\phi = -\tan(\phi_1+\phi_2)$ が成立するので、式 (4.33) は

$$\phi = -\arctan\left[\sqrt{\frac{\eta_1}{\mu}}\tan\theta_1\right] - \arctan\left[\sqrt{\frac{\eta_2}{\mu}}\tan\theta_2\right] \tag{4.34}$$

となる。式 (4.32) 中の λ をナンバリングして μ_n として整理すると

$$\sqrt{\lambda_n}L + \arctan\left[\sqrt{\frac{\eta_1}{\mu}}\tan\theta_1\right] + \arctan\left[\sqrt{\frac{\eta_2}{\mu}}\tan\theta_2\right] = n\pi \tag{4.35}$$

となる。ここで、

$$\sqrt{\mu_n}\Lambda_n \equiv n\pi \tag{4.36}$$

と Λ_n を定義すると、ファイバーの両端に熱流がないとき ($\theta_1 = \theta_2 = 0$ のとき) は $\Lambda_n = L$ であるのに対して、熱流があるときは $\Lambda_n < L$ となっている。これは、温度差があることによって実効的な熱伝導率が上がっていることを示している。
上式を μ_n とすると斉次の解は

$$u(x,t) = \sum_n u_n \cos\left(\sqrt{\mu_n}x\right) e^{-\mu_n a^2 t} \tag{4.37}$$

となる。前節と同様に非斉次解を満たすように u_n を選ぶと

$$\tilde{u}(x,t) = 2\pi\int u_n e^{-\mu_n a^2 t} e^{i\omega t} dt \tag{4.38}$$

として

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{F}_n(\omega)}{\mu_n a^2 + i\omega} \tag{4.39}$$

となる。揺らぎ項 $F(x,t)$ を x と t についてフーリエ変換すると

$$F(x,t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\sum_n u_n \left\{\tilde{F}_n(\omega)\cos\left(\sqrt{\mu_n}x\right) + \tilde{F}'_n(\omega)\sin\left(\sqrt{\mu_n}x\right)\right\} e^{i\omega t} \tag{4.40}$$

と表せる。この式のフーリエ級数は

$$\tilde{F}_n(\omega) = \frac{2}{\Lambda_n}\int_0^{\Lambda_n}\left[2\pi\int_{-\infty}^{\infty} F(x,t)e^{i\omega t}dt\right]\cos(\sqrt{\mu_n}x)dx \tag{4.41}$$

で与えられる。
以降でチルダを省略する。

4.2.3 揺らぎ項のアンサンブル平均

ここで揺らぎ項のアンサンブル平均を計算する。式 (??) を一次元の場合に修正すると

$$\langle F(x,t)F^*(x',t')\rangle = \frac{2k_BT^2\lambda}{(\rho C)^2} \times \delta(t-t')\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x-x') \tag{4.42}$$

となる。ここで式 (4.41) のフーリエ級数

$$\tilde{F}_n(\omega) = \frac{2}{\Lambda_n}\int_0^{\Lambda_n}\left[2\pi\int_{-\infty}^{\infty}F(x,t)e^{i\omega t}dt\right]\cos(\sqrt{\mu_n}x)dx \tag{4.43}$$

のアンサンブル平均は

$$\langle F_n(\omega)F_m^*(\omega')\rangle \tag{4.44}$$

$$= \frac{4}{\Lambda_n\Lambda_m}\left\langle\int_0^{\Lambda_n}\int_0^{\Lambda_m}\int\int F(x,t)F^*(x',t')(2\pi)^2e^{i(\omega t-\omega' t')}dtdt'\cos\sqrt{\mu_n}x\cos\sqrt{\mu_m}x'dxdx'\right\rangle$$

$$= \frac{16\pi^2}{\Lambda_n\Lambda_m}\int_0^{\Lambda_n}\int_0^{\Lambda_m}\int\int\langle F(x,t)F^*(x',t')\rangle e^{i(\omega t-\omega' t')}dtdt'\cos\sqrt{\mu_n}x\cos\sqrt{\mu_m}x'dxdx'$$

$$= \frac{16\pi^2}{\Lambda_n\Lambda_m}\int_0^{\Lambda_n}\int_0^{\Lambda_m}\int\int\frac{2k_BT^2\lambda A}{(\rho C)^2}\times\delta(t-t')e^{i(\omega t-\omega' t')}dtdt'$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x-x')\right)\cos\sqrt{\mu_n}x\cos\sqrt{\mu_m}x'dxdx'$$

$$= \frac{16\pi^2}{\Lambda_n\Lambda_m}\frac{2k_BT^2\lambda}{(\rho C)^2}\delta(\omega-\omega')\sqrt{\mu_n\mu_m}\int_0^{\Lambda_n}\cos\sqrt{\mu_n}x\cos\sqrt{\mu_m}xdx \tag{4.45}$$

4.2.4 縦方向熱弾性雑音 (VSTN)

温度揺らぎ u に熱膨張率 α を乗することによってファイバーの伸縮を求めることができる。温度揺らぎによるファイバの伸縮を求めるために、伸縮をファイバー全体に渡って積分したもの $v_n(t)$ のパワースペクトルを計算する必要がある。

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \int_0^L \alpha u(x,t)dx \\ &= \int_0^L \alpha\sum_n u_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\Lambda}\right)e^{-\left(\frac{n\pi a}{\Lambda_n}\right)^2 t}dx \end{aligned} \tag{4.46}$$

ここで $\epsilon = (\Lambda - L)/L \ll 1$ として近似すると

$$v_n(t) \simeq -\alpha L\epsilon\sum_n u_n\cos(n\pi)e^{-\left(\frac{n\pi a}{\Lambda}\right)^2 t}dx \tag{4.47}$$

この両辺を t についてフーリエ変換すると

$$\tilde{v}_n(\omega) = 2\pi \int v_n(t) e^{i\omega t} dt \tag{4.48}$$

$$= \sum_n \frac{-\alpha L \epsilon (-1)^n}{n^2\pi^2 a^2/\Lambda_n^2 + i\omega} F_n \left(\omega + i\mu_n a^2 - i\frac{n^2\pi^2 a^2}{\Lambda^2} \right) \tag{4.49}$$

となる。以上を用いて VSTN のパワースペクトルは

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{VSTN}}(\omega) &= \sum_{n,m} \int \langle v_n(\omega) v_m^*(\omega) \rangle \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \sum_n \frac{n^2}{n^4 + \omega^2 \Lambda^4/(\pi a)^4} \times \frac{32 k_B T^2 k_B \alpha^2 L^2 \epsilon^2}{\rho^2 C^2 a^4} \\ &\simeq \frac{\pi^2 a}{2\sqrt{2\omega}\Lambda_n} \times \frac{32 k_B T^2 \lambda \alpha^2 L^2 \epsilon^2}{\rho^2 C^2 a^4} \\ &\simeq \frac{8\sqrt{2}\pi^2 k_B T^2 \lambda \alpha^2 L}{\sqrt{\omega \lambda \rho C}} \epsilon^2 \end{aligned}$$

となる。途中の級数和の近似には

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + b^b} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}b} \frac{\sinh\sqrt{2}b\pi - \sin\sqrt{2}b\pi}{\cosh\sqrt{2}b\pi - \cos\sqrt{2}b\pi} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}b} \quad (\sqrt{2}b\pi \gg 1) \end{aligned} \tag{4.50}$$

を用いた。最後の行には $\Lambda_n \simeq L$ を用いた。

4.2.5 熱膨張率に位置依存性があるときの縦方向熱弾性雑音 (VSTN)

ここで $\epsilon = 0$ として熱膨張率 $\eta(x)$ が x に依存する場合を考える。

$$
\begin{aligned}
v_n(t) &= \int_0^L \eta(x) \sum_n u_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t} dx \qquad (4.51)\\
&= \left[\eta(x) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right) u_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t}\right] \\
&\quad - \int_0^L \eta'(x) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right) u_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t} dx \\
&\text{部分分数分解を繰り返す} \\
&= \left((\eta'(L) - \eta'(0)) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 u_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t}\right) \\
&\quad + \left[\eta''(x) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right) u_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t}\right] \\
&\quad - \int_0^L \eta'''(x) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right) u_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t} dx \\
&\text{奇数回微分の項のみが残る} \\
&= \left((\eta'(L) - \eta'(0)) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 u_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t}\right) \\
&\quad + \left((\eta'''(L) - \eta'''(0)) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 u_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t}\right) \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

となる。熱膨張率 η が x についての連続関数であれば、最後の式は収束する。

サファイア懸架ファイバの温度の範囲では、以下の関係式が成り立つと考える。

$$
\eta(T) = 7.0 \times 10^{-13} \times T^3 \qquad (4.52)
$$

ファイバ内の温度は、定常状態の熱拡散方程式を解いて求める

$$
\frac{\lambda}{\rho C}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (4.53)
$$

式 (4.53) の解は x の一次関数であるが、そのままでは $x = -\delta L_1$ と $x = L + \delta L_2$ で T

=0 という境界条件を満たすことはない。そこで

$$T(x) = T_{\mathrm{low}} + kx \tag{4.54}$$

として、kx をフーリエ級数展開する。

$$T(x) = T_{\mathrm{low}} - \sum_{-\infty}^{\infty} T_n \cos\left(\frac{n\pi\delta L_1}{L'}\right) + \sum_{-\infty}^{\infty} T_n \cos\left(\frac{n\pi(x+\delta L_2)}{L'}\right) \tag{4.55}$$

ここで、k は温度勾配であり、

$$L \equiv L + \delta L_1 + \delta L_2 \tag{4.56}$$

である。式 (4.55) のフーリエ級数は、

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{L'} \int_{-\delta L_1}^{L+\delta L_2} kx \cos\left(\frac{n\pi(x+\delta L_1)}{L'}\right) \\ &= \frac{1}{L'} \int_0^{L'} kx \cos\left(\frac{n\pi x}{L'}\right) \\ &= \begin{cases} -\frac{2kL'}{n^2\pi^2} & (n : \mathrm{odd}) \\ 0 & (n : \mathrm{even}) \end{cases} \end{aligned} \tag{4.57}$$

となる。このことからファイバーの両端以外で線形関数でかつ境界条件を満たすことになる。

ファイバーの熱雑音に関わる $0 \leq x \leq L$ の範囲では線形関数であると考えればよい。

KAGRA のファイバー温度は、$L = 35$ cm、上端温度 16 K、下端温度 22 K として、

$$T(x) = -17 \times x[\mathrm{m}] + 22[\mathrm{K}] \tag{4.58}$$

とする。以上より、

$$\begin{aligned} \eta(x) &= 7.0 \times 10^{-13} \times (-17 \times x + 22)^3 && (4.59) \\ \eta'(x) &= -3.6 \times 10^{-11} \times (-17 \times x + 22)^2 && (4.60) \\ \eta''(x) &= 1.2 \times 10^{-9} \times (-17 \times x + 22) && (4.61) \\ \eta'''(x) &= 2.1 \times 10^{-8} && (4.62) \\ & && (4.63) \end{aligned}$$

を得る。これより、式 (4.51) でゼロでない項は、j = 1 の項だけであり、

$$v_n(t) = (\eta'(L) - \eta'(0)) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 u_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}$$

$$= -3.6 \times 10^{-11} \times (16^2 - 22^2) \sum_n \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 u_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t} \tag{4.64}$$

$$\tag{4.65}$$

となる。VSTN のパワースペクトルは、

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{VSTN}}(\omega) &= L^2 \sum_{n,m} \int \langle v_n(\omega) v_m^*(\omega) \rangle \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= (8.2 \times 10^{-9})^2 L^2 \sum_{n,m} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2 \int \langle v_n(\omega) v_m^*(\omega) \rangle \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= 6.7 \times 10^{-17} \times \sum_n \frac{(2L)^3}{\pi} \frac{2k_BT^2\lambda}{\rho^2C^2} \frac{n^{-2}}{(n^2\pi^2a^2/L^2)^2 + \omega^2} \\
&= \begin{cases} 6.7 \times 10^{-17} \times \frac{(2L)^3}{\pi} \frac{2k_BT^2\lambda}{\rho^2C^2} \times \frac{\pi^2}{6} \times \frac{1}{\omega^2} & (\omega \gg \pi^2a^2/L^2) \\ 6.7 \times 10^{-17} \times \frac{(2L)^3}{\pi} \frac{2k_BT^2\lambda}{\rho^2C^2} \times \frac{\pi^6}{945} \times \left(\frac{L}{\pi a}\right)^4 & (\omega \ll \pi^2a^2/L^2) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 6.7 \times 10^{-17} \times \frac{8\pi L^3}{3} \frac{k_BT^2\lambda}{\rho^2C^2\omega^2} & (\omega \gg 2\pi \times 74\mathrm{Hz}) \\ 6.7 \times 10^{-17} \times \frac{16\pi L^7}{945} \frac{k_BT^2}{\lambda} & (\omega \gg 2\pi \times 74\mathrm{Hz}) \end{cases}
\end{aligned}$$

となり、$\lambda = 0.032$、$\rho = 0.008$、$C_v = 0.69$ を代入すると、

$$\sqrt{S_{\mathrm{VSTN}}(\omega)} = \begin{cases} 1.7 \times 10^{-20} \times \left(\frac{100[\mathrm{Hz}]}{f}\right) & (\omega \gg 2\pi \times 74\mathrm{Hz}) \\ 1.8 \times 10^{-20} \times \left(\frac{100[\mathrm{Hz}]}{f}\right) & (\omega \gg 2\pi \times 74\mathrm{Hz}) \end{cases}$$

となる。

第 5 章

長方形カンチレバーの力学特性

この章では一般的な長方形カンチレバー（以下、カンチレバーとする）の力学な性質について説明する。図（5.1）のような設定のもと議論する。なお、以降の仮定として、カンチレバーに力がかかったときの変位は、カンチレバーの長さに対して十分小さいものとする。

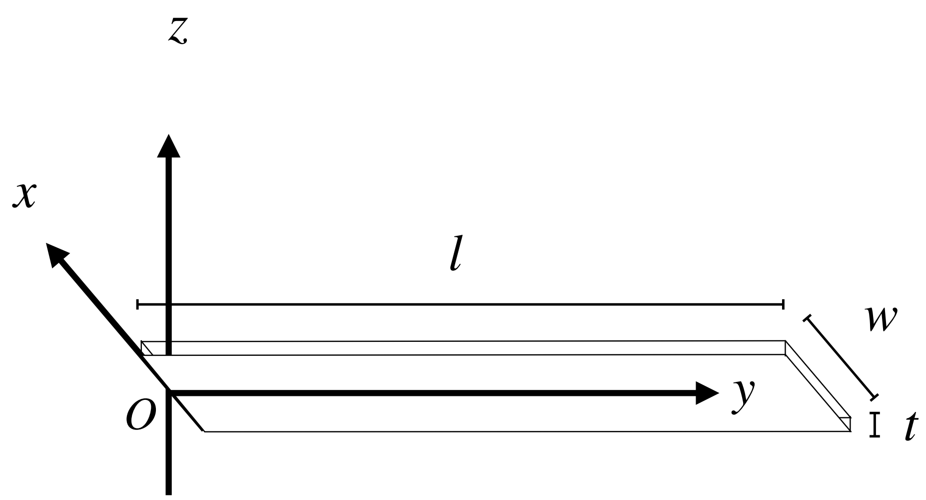

図 5.1　長方形のカンチレバー

5.1　バネ定数

カンチレバーに力がかかったときの変位が、カンチレバーの長さに対して十分小さいことが成り立つ場合に、カンチレバーにかかる力とカンチレバーの変位の間には Hooke の法則が成立する [14]。つまり、

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xz} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zx} & c_{zy} & c_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

ここで、c_{ij} はバネ定数 k_{ij} の逆の次元を持つ定数である。c_{ij} が 0 のとき、k_{ij}は無限大でありバネが硬くどれだけ力を与えても変位が生じないことを指す。

次に、バネ定数の表式を導出する。
図（5.1）のような長さ l、幅 w、厚さ t のカンチレバーについて考える。カンチレバーは $y = 0$ のところで固定されている。

5.1.1　カンチレバー表面に垂直な方向の力による変形

カンチレバーの縦横方向に垂直な力 F_z のみが加わった場合の変形を考える。式（5.1）より、

$$c_{xz}F_x = \Delta x \tag{5.2}$$
$$c_{yz}F_y = \Delta y \tag{5.3}$$
$$c_{zz}F_z = \Delta z \tag{5.4}$$

となる。対称性より $\Delta x = 0$ がいえる。

力がかかりたわんでいるカンチレバーを微小部分に分けて考える。カンチレバーの厚さ t 方向の中心の長さを dl とする。この部分は円弧とみなすことができ、その曲率半径を R とする。このとき、カンチレバーの表面の長さは、曲率中心に近いほうは縮み、曲率中心から遠いほうは伸びている。その変化分を ΔL とする。カンチレバーの断面の微小要素 dS に加わる力 dF_z は、ヤング率 E_c を用いて次のように表される。

$$dF_z = E_c \Delta L dS \tag{5.5}$$
$$= E_c \frac{z'}{R} dS \tag{5.6}$$

ここで、z'　は、長さが変わらない中心の面、すなわち中立面からの z 軸方向の位置である。dF を用いて曲げモーメントを表すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} M_z &= \int_S z' dF \\ &= \frac{E_c}{R} I_z \end{aligned} \tag{5.7}$$

ここで、$\int_S$ は、カンチレバーの横断面全体に対する積分を表している。また、

$$I_z = \int_S z'^2 dS \tag{5.8}$$

は断面二次モーメントである。今回の設定では、

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-w/2}^{w/2} z'^2 dx dz \\ &= \frac{wt^3}{12} \end{aligned} \tag{5.9}$$

と計算される。

カンチレバーの固定端 $(y = 0)$ から見た y におけるカンチレバーのたわみの大きさを $u(y)$ とする。カンチレバーのたわみによる曲率半径が $1/R = d^2u/dy^2$ であることから、曲げモーメント M_z は以下のように表すことができる。

$$M_z = E_c I_z \frac{d^2u}{dy^2} \tag{5.10}$$

つりあいの条件は、カンチレバーの自重を無視すると、$y = l$ の点に加えられた力 F_zによ る y における曲げモーメントと釣り合っていることから、

$$E_c I_z \frac{d^2u}{dy^2} = F_z(l - y) \tag{5.11}$$

となる。よって、両辺を $u(0) = 0$、$du/dy(0) = 0$ の条件のもとに積分すると、

$$u(y) = \frac{F_z}{6E_c I_z}(3l - y)y^2 \tag{5.12}$$

カンチレバーの先端の変位は $\Delta z = u(l)$ なので、式 (5.12) に $y = l$ と代入することにより、以下の関係式を得る。

$$\Delta z = \frac{l^3}{3E_c I_z} F_z \tag{5.13}$$

したがって、Hooke の法則からカンチレバーのバネ定数の zz 成分は

$$\frac{1}{c_{zz}} = k_{zz} = \frac{3E_cI_z}{l^3} = \frac{E_ct^3w}{4l^3} \tag{5.14}$$

である。
カンチレバーの先端が角度 α だけ傾いたとき、カンチレバーの先端は y 方向にも動く。その変位は $\Delta = l(1-\cos\alpha)$ なので、

$$\Delta y = \frac{3}{2}(1-\cos\alpha)c_{zz}\Delta z \tag{5.15}$$

$$k_{zz} = \frac{3}{2}(1-\cos\alpha)k_{yz} \tag{5.16}$$

である。しかし、α が微小なとき、$(1-\cos\alpha) \simeq 0$ となるためこれらの項は無視できる。

5.1.2 長さ方向の力による変形

F_y方向のみの力が加わっている場合のカンチレバーの変形について考える。F_yによって曲げモーメント $M = F_yl(1-\cos\alpha)$ が生じ、カンチレバーはたわむ。これまでと同様に力のつりあいを考えて計算すると、

$$\Delta z = \frac{3}{2}(1-\cos\alpha)c_{zz}F_y \tag{5.17}$$

$$c_{yz} = \frac{3}{2}(1-\cos\alpha)c_{zz} \tag{5.18}$$

さらに、α に関しても同様の計算をすると、以下のようになる。

$$c_{yy} = 3(1-\cos\alpha)^2c_{zz} \tag{5.19}$$

以上より、長さ方向のばね定数は垂直方向のバネ定数を用いて以下のように表される。

$$k_{yy} = \frac{1}{3(1-\cos\alpha)^2}k_{zz} \tag{5.20}$$

また、対称性よりから $c_{xy} = 0$ は明らかである。

5.1.3 横方向の力による変形

F_x方向のみの力が加わっている場合のカンチレバーの変形について考える。x 方向に力が働いた場合、カンチレバーには 2 種類の変形が生じる。1 つはたわみであり、もう 1 つはねじれである。

たわみに関しては、垂直方向の力で考えた結果を w と t を交換することにより、そのまま利用することができる。つまり、

$$c_{xx} = \frac{4l^3}{E_c w^3 t} \tag{5.21}$$

ねじれに関しては、複雑なため結果のみを引用する。

$$k_{lat} = \frac{G_c w t^3}{3l \cdot l^2 (1 - \cos\alpha)^2} \tag{5.22}$$

ここで、$G_c = E_c/2(1+\nu_c)$ はカンチレバーのせん断弾性係数であり、ν_cはカンチレバーのポアソン比である。

以上より、長方形のカンチレバーの試料表面に垂直な方向のバネ定数は式 (5.14) で与えられ、長手方向のバネ定数は式 (5.20)、横方向のバネ定数は式 (5.22) で与えられる。

5.2　共振周波数

この節で、カンチレバーの共振周波数について考える。再び、図 (5.1) のように長さが l、幅が w、厚さが t で $y = 0$ のところで固定されている長方形のカンチレバーを考える。
z 方向の振動の運動方程式は

$$E_c I_z \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \rho_c S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5.23}$$

で与えられる。ここで、S は断面積 wt である。解として、

$$u(x,t) = (a_1 e^{ky} + a_2 e^{-ky} + a_3 e^{iky} + a_4 e^{-iky}) e^{-i\omega t} \tag{5.24}$$

を代入すると、k とω について以下の関係を得る。

$$E_c I_z k^4 - \rho_c S \omega^2 = 0 \tag{5.25}$$

境界条件

$$u|_{y=0} = 0 \tag{5.26}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \tag{5.27}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=l} = 0 \tag{5.28}$$

$$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{y=l} = 0 \tag{5.29}$$

を考慮すると、a_1、...、a_4が 0 以外の解を持つためには k は以下の式を満たすように定まる。

$$\cos kl \cosh kl + 1 = 0 \tag{5.30}$$

ここで、$k_i(i = 1, 2, ...)$ を上式を満たすような k の小さい方から i 番目とする。このような k_iに対応して式 (5.25) から共振周波数が決まる。

$$\omega_i = \frac{(k_i l)^2}{l^2}\sqrt{\frac{E_c I_z}{\rho_c S}} \tag{5.31}$$

$$= (k_i l)^2 \frac{t}{l^2}\sqrt{\frac{E_c}{12\rho_c}} \tag{5.32}$$

式 (5.30) を満たす $k_i l$ の値と共振周波数 ω_i の組み合わせを小さい方から順に表 (5.1) に記す。

表 5.1　長方形カンチレバーの共振周波数

i	$k_i l$	ω_i/ω_1
1	1.875	1.000
2	4.694	6.267
3	7.855	17.54
4	10.996	34.39
5	14.137	56.84

5.3　長さ方向の歪み

この節では板バネが変形したときの長さ方向の歪みを考える。板バネを横から見たとき曲げがあるときでも長さ方向の歪みが発生しない面が板バネ内に存在し、その面を **中立面** という。板バネの厚さ方向の対称性からその面は厚さが半分になるところである。

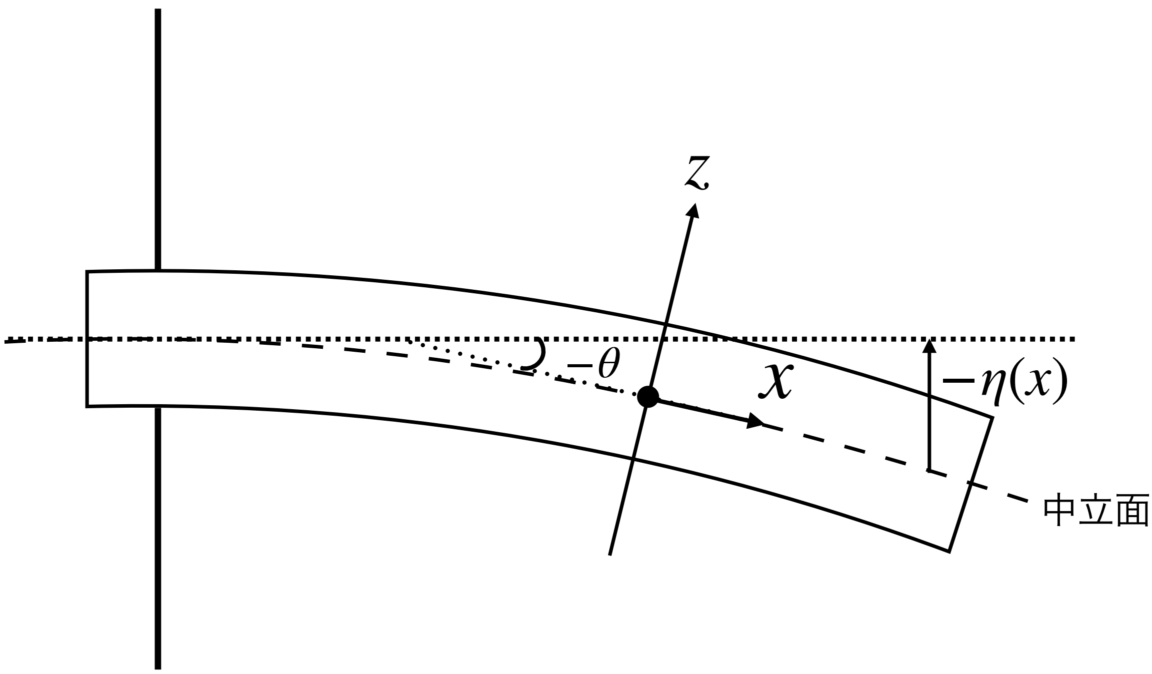

図 5.2　中立面内に沿って x 軸を設定した座標系

図 (5.2) のように座標を設定する。板バネが下に曲がった場合、中立面の下側は長さ方向に縮み、上側は長さ方向に伸びる（板バネが上側に曲がった場合は、上側下側の伸び縮みは反転する)。また、中立面の長さ方向を x、中立面を 0 ととったときの厚さ方向を z ととる。曲げがないときの中立面からの垂直方向の変位の大きさを$\eta(x)$ とする。板バネの 1 次元変位$\eta(x)$ の 4 階微分方程式は、

$$\frac{d^4\eta}{dx^4} = -\frac{W}{D} \tag{5.33}$$

となる。[3] ここで、W は板バネの単位長さ当たりにかかる力、D は板バネの曲げ剛性で、

$$D = \frac{Ewh^3}{12} \tag{5.34}$$

で表される。
この方程式の解を以下のようにおく。

$$\eta(x) = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x^1 + A_0 \tag{5.35}$$

微分方程式を解くにあたって 4 つの定数は以下の境界条件によって決定する。

$$\begin{cases} \eta(0) = 0 & (\text{固定端}) \\ \eta'(0) = 0 & (\text{固定端}) \\ \eta''(l) = 0 & (\text{曲げモーメントが自由端で } 0) \\ \eta'''(l) = 0 & (\text{剪断力が自由端で } 0) \end{cases} \tag{5.36}$$

剪断力は曲げモーメントの微分であることに注意。
微分方程式と境界条件から各定数は以下のように求まる。

$$\begin{cases} \eta(0) = 0 \rightarrow A_0 = 0 \\ \eta'(0) = 0 \rightarrow A_1 = 0 \\ \eta''(l) = 0 \rightarrow 12l^2A_4 + 6lA_3 + 2A_2 \rightarrow A_2 = -\frac{W}{4D}l^2 \\ \eta'''(l) = 0 \rightarrow 24lA_4 + 6A_3 = 0 \rightarrow A_3 = \frac{W}{6D}l \\ \eta''''(l) = -\frac{W}{D} \rightarrow A_4 = -\frac{W}{24D} \end{cases} \tag{5.37}$$

よって解は

$$\eta(x) = -\frac{W}{24D}x^4 + \frac{Wl}{6D}x^3 - \frac{Wl^2}{4D}x^2 \tag{5.38}$$

板バネを下に曲げた時の長さ方向の歪み $\xi_{x,x}$ は

$$\xi_{x,x} = \frac{z}{R} = -z\frac{d\theta}{dx} \sim -z\frac{d^2\eta}{dx^2} \tag{5.39}$$

で与えられる [3]。カンチレバーを上に曲げている場合は右辺の負号が反転する。ここで、$R = -dx/d\theta > 0$ は板バネのまがりの曲率半径であり、我々は中立面で $z = 0$ となるように座標を選んでいる。これに式 (5.38) を代入すると、

$$\xi_{x,x} = -z\frac{W}{D}(-\frac{1}{2}x^2 + lx + \frac{l^2}{2}) \tag{5.40}$$

となる。これは x と z の関数と見なすことができて、板バネが曲がったときの温度変化 $\delta T(x,z)$ は、α を熱膨張率とすれば、

$$\delta T(x,z) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\xi_{x,x}(x,z)}{l} = \frac{1}{\alpha}\frac{W}{D}z(-\frac{1}{2l}x^2 + x + \frac{l}{2}) \tag{5.41}$$

となる。

5.4 揺動散逸定理によるカンチレバーの熱弾性散逸の導出

ここで、板バネの単位長さあたりににかかる力 W を

$$W = F_0 \sin(\omega t) \tag{5.42}$$

とおく。すると式 (5.38) よりカンチレバーの変位 η は

$$\eta(x) = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{D}\left(-\frac{x^4}{24} + \frac{l}{6}x^3 - \frac{l^2}{4}x^2\right) \tag{5.43}$$

となり、周期振動する。このとき板バネが曲がったときの温度変化 $\delta T(x,z)$ は、

$$\delta T(x,z) = \frac{1}{\alpha}\frac{W}{D}z(-\frac{1}{2l}x^2 + x + \frac{l}{2}) \tag{5.44}$$

となる。

文献 [21] より、温度変化 δT に起因する熱弾性散逸 W_{diss} は以下の式で与えられる。

$$W_{diss} = \left\langle \int \frac{\lambda}{T}(\nabla \delta T(\boldsymbol{r}))^2 d\boldsymbol{r} \right\rangle \tag{5.45}$$

ここで、λ は熱伝導率、T は平均温度、積分は板バネ全部にわたってとる。また、$\langle \cdots \rangle$ は今回の場合では、式 (5.42) のような周期的な力の一周期分にわたって平均をとることを表している。すなわち、$2\pi/\omega_0$ で除することに相当する。
さらに、式 (5.45) の散逸が原因となる雑音のパワースペクトルは

$$S(f) = \frac{8k_B T W_{diss}}{F_0^2 \omega^2} \tag{5.46}$$

と求めることができる。式 (5.45)、(5.46) は、系の平衡状態を仮定して揺動散逸定理より計算される。

図 (5.1) の設定のもと、式 (5.44) を式 (5.45) に代入して具体的に計算していく。

$$
\begin{aligned}
W_{diss} &= \left\langle \int \frac{\lambda}{T} (\nabla \delta T(\boldsymbol{r}))^2 d\boldsymbol{r} \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_0^l \frac{\lambda}{T} \left[(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}) \delta T(x,z) \right]^2 dxdydz \right\rangle \\
&= \left\langle w \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \frac{\lambda}{T} \left[(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}) \delta T(x,z) \right]^2 dxdz \right\rangle \\
&= \frac{w\lambda}{T\alpha^2 D^2} \left(\frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} F_0^2 \sin^2(\omega t) dt \right) \\
&\quad \times \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left[z^2 \left(-\frac{x}{l} + 1 \right)^2 + \left(-\frac{x^2}{2l} + x + \frac{l}{2} \right)^2 \right] dxdz \\
&= \frac{w\lambda}{T\alpha^2 D^2} \left(\frac{F_0^2}{2} \right) \\
&\quad \times \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left[z^2 \left(-\frac{x}{l} + 1 \right)^2 + \left(-\frac{x^2}{2l} + x + \frac{l}{2} \right)^2 \right] dxdz \\
&= \frac{w\lambda}{T\alpha^2 D^2} \left(\frac{F_0^2}{2} \right) \left(\frac{h^3 l}{36} + \frac{43hl^3}{60} \right)
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

となる。以上のようにして求まった W_{diss} を式 (5.46) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
S(f) &= \frac{8k_B T W_{diss}}{F_0^2 \omega^2} \\
&= \frac{4k_B}{\omega^2} \frac{w\lambda}{\alpha^2 D^2} \left(\frac{h^3 l}{36} + \frac{43hl^3}{60} \right)
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

となる。このようにして、板バネの伸縮によって形成される温度勾配の散逸に起因する熱弾性雑音のパワースペクトルを算出することができた。

ここで、非平衡系でのカンチレバーの熱弾性散逸を測定できたとする。そのときの平衡系との差を、式 (5.48) 中の熱伝導率 λ の変化分とすることで、非平衡系での実効的な熱伝導率の変化を見積もることができる。

第 6 章

実験

本章では温度差をつけたカンチレバーの Q 値測定についての説明を行う。

6.1　実験の目的

本実験の目的は両面を温度制御した板バネをカンチレバーとして用い Q 値測定をすることで、非平衡系と平衡系の間での Q 値の変化を観測することである。

6.2　Q 値測定

以下で実際の Q 値測定で取られる 2 つのアプローチを紹介する。

Q 値測定：減衰の速さの測定

調和振動子に外力を加えることを考える。式 (3.9) の外力項 $f(t)$ を以下のように設定する。

$$f(t) = \begin{cases} A\exp(i\omega_0 t) & (t < 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases} \tag{6.1}$$

この時の運動方程式をフーリエ変換を用いた方法で解くと、$t > 0$ において解が以下のように求まる。

$$x(t) = A\exp(-\frac{\omega_0 t}{2Q})\sin(\omega_0 t) \tag{6.2}$$

式 (6.1) のように外力を加え、調和振動子を共振状態で振動させ、外力を加えるのをやめると調和振動子は減衰していく。ここで、$1/2Q$ は減衰比 ξ、Q の逆数 Q^{-1} は内部摩擦、

散逸などと呼ばれる。減衰比 ξ と内部摩擦 Q^{-1} の間には以下のような関係がある。

$$Q^{-1} = 2\xi \tag{6.3}$$

式 (6.2) の包絡線の方程式は

$$\chi(t) = A\exp(-\xi\omega_0 t) \tag{6.4}$$

のように表される。本論文中の実験においては、この包絡線をフィッティング することによって Q 値を算出している。実際のフィッティングでは、式 (6.4) 中の t の係数が得られる。これを B とおくと、B は式 (6.4) の $\xi\omega_0$ に相当するので、

$$B = \xi\omega_0 \tag{6.5}$$

よって

$$Q^{-1} = 2\xi = 2\frac{B}{\omega_0} \tag{6.6}$$

この式を用いて、フィッティングの結果から Q 値あるいは内部摩擦を算出する。また、Q 値が高いほど減衰時間が長くフィッティングの精度が上がるので、高 Q 値測定に向いている方法である。

Q 値測定：伝達関数の測定

伝達関数を測定することによって Q 値を測定できる。調和振動子の伝達関数の絶対値の二乗は以下のようになる。

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi^2(\omega)]^2} \tag{6.7}$$

この式から、$|H(\omega)|^2$ は $\omega^2 = \omega_0^2$ のときにピークとなる。このピークの半値幅 $\Delta\omega_0$ を求める。ここで半値幅 $\Delta\omega_0$ を以下のように定義する。

$$\left|H(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_0}{2})\right|^2 = \frac{|H(\omega_0)|^2}{2} \tag{6.8}$$

ここで、$\phi \ll 1$ とするとピークの幅は小さくなり、$\phi(\omega)\ \phi(\omega_0) = 1/Q, \Delta\omega_0 \ll \omega_0$ という近似を使うことができる。この近似を用いて、式 (6.7)、式 (6.8) から半値幅は、

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} \tag{6.9}$$

となる。つまり、伝達関数を測定して共振ピークの半値幅を求めることで Q 値を測定することができる。

6.3　実験の原理

実験の概念図 (6.1) を示す。板バネの根本の両面にペルチェ素子につなげ、厚さ方向に温度差をつける。この状態でカンチレバーが曲がったとき、中立面を挟んで凸側の表面は伸び、凹側の表面は縮む。その際、熱膨張率とカップリングして伸びた表面の温度は下がり、縮んだ表面の温度は上がる。平衡状態であればこの温度差は板バネの厚さ方向の経路の熱流で緩和されると考えられるが、本実験のように根本近くに温度差がつけられている非平衡状態では長さ方向の熱緩和の経路が生まれるのではないかと推測される。このような平衡状態にはない経路での散逸が存在したと仮定するならば、カンチレバーの Q 値は平衡状態のときと比べて変化しているはずである。この Q 値の変化から非平衡状態特有の散逸の大きさを計算し雑音の大きさに焼き直すことを目指す。

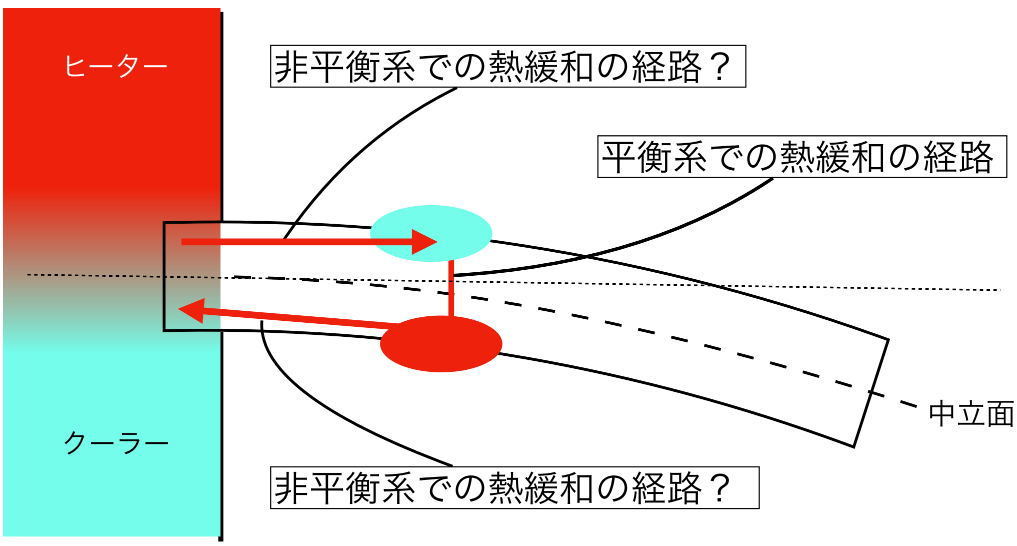

図 6.1　実験の概念図

6.4 実験装置

6.4.1 板バネ

本実験において板バネの材料は物性値に従って適切に決定しなければならない。以下で候補の材料の物性値を比較する。

式 (**??**) によれば平衡系の熱弾性雑音のパワースペクトル S は

$$S \propto \alpha^2 \frac{\lambda}{\rho C} k_B T^2 \tag{6.10}$$

といった物理量への依存性がある。ここで α は線熱膨張率、λ は熱伝導率、ρ は密度、C は比熱容量、k_B はボルツマン定数、T は温度である。

もし前節で述べたような非平衡であることに由来する熱散逸の経路があった場合、実験で計測される平衡系と非平衡系との間の散逸の大きさの変化（この実験では Q 値の変化として計測される）は 式 (6.10) で表される物理量に依存して決まる。測定のために Q 値の変化をなるべく大きくしたいので 式 (6.10) に従って $\alpha^2\lambda/\rho C$ がなるべく大きく、機械的損失の小さい材質を選ぶ。表 (6.1) に板バネの材料候補の物性値をまとめた。表中の $\alpha^2\lambda/\rho C$ を比較して板バネの材料を選ぶ。本研究では板バネの材料に SUS304 を選んだ。

	ρ[g/cm^3]	C[J/kg·K]	λ[W/m·K]	α[cm/K]($\times 10^{-6}$)	$\alpha^2 \frac{\lambda}{\rho C}$
石英ガラス	2.2	772	1.38	0.52	2.20×10^{-15}
アルミニウム	2.7	900	204	23.9	4.80×10^{-10}
銅	8.9	419	372	17.7	3.13×10^{-10}
金	19.32	130	295	14.2	2.39×10^{-10}
チタン	4.54	528	17	8.5	5.12×10^{-12}
SUS304	7.93	460	16.3	16.3	1.18×10^{-11}

表 6.1 常圧、20 ℃での材料候補の物性値の比較 [6]

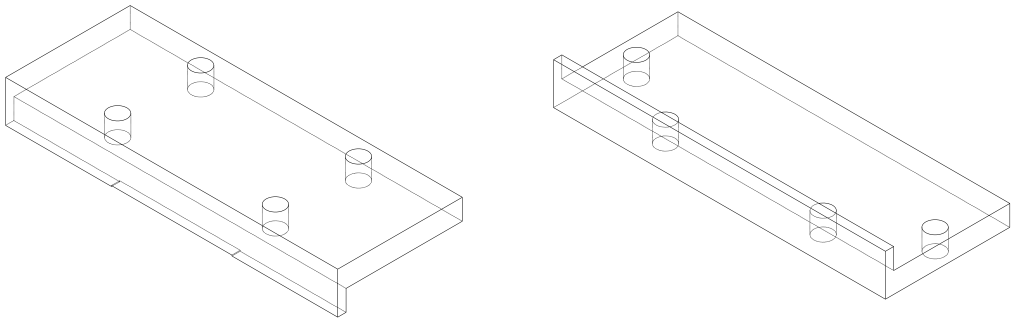

図 6.2　上下のクランプの図　左：上クランプ　右：下クランプ

6.4.2　クランプ

本実験では、板バネの根本にペルチェ素子を接続した状態でカンチレバーとして使用する。そのために、狭い範囲をバインドできるようなクランプを製作した。図 (6.2) はクランプの図である。クランプは SUS304 板を加工して作られており、上下２つのパーツで構成される。上下のパーツは、板バネとなるべく小さい面積で接触させるために横から見ると L 字になるように加工した。下段のパーツにはポスト接続用のねじ穴 2 つと上段パーツとの接続用のねじ穴 2 つが開いている。上段のパーツは下段パーツと接続するための通し穴 2 つと高さ調整用のねじ穴 2 つが開いている。

6.4.3　ペルチェモジュール

温度差をつけるためのヒーター及びクーラーとしてペルチェモジュールを採用した。ペルチェモジュールの動作には複雑な回路を必要とせず、直流電圧を加えるだけで動作するため、駆動回路もシンプルな回路構成にする事ができるメリットがある。本実験で使用し

たのはジーマックス社の型番 FPH1-12708AC である。このペルチェモジュールの最大温度差は 70 ℃であるが、最大電圧、最大電流での使用は効率が良くないため、最大電流の 70 %ほどの電流での使用が上限として推奨されている。

6.4.4 熱電対

温度測定では熱電対を使用した。用いた熱電対は National Semiconductor 社の LM60 型を使用した。出力は電圧になっており、6.25 mV/℃の線型関係がある。内部にオフセットが 424 mV 乗っている。室温で ±2 ℃ の精度である。

6.5 実験手法

実験は 2 つのパートに分かれる。まず、板バネの根本に厚さ方向の温度差ができていることを確認するために熱電対を用いた温度測定を行った。その後、板バネを実際に振動させてその減衰から Q 値を測定した。

温度測定

板バネに温度差がついていることを確認するために、熱電対を用いて温度測定を行った。まず、板バネの裏表に接着剤で熱電対を固定し温度の読み出しができるようにする。その後、図 (6.3) のようにペルチェ素子で挟み電流を流す。図では板バネがクランプによって固定されているが、実際の温度測定の際にはクランプは外して熱電対が接着されている。熱伝導を効率的に行うため、ペルチェの上におもしを置いた。このときペルチェは線接触している可能性があり、さらに熱伝導効率を上げるためには、熱伝導率の高い箔や接着剤を間に挟む必要があるが、今回は利便のために用いなかった。実験はクリーンブース内で行われているが、温度を安定させるためにブース近くの空調とヘパフィルターの電源を落とし、定常状態にするために電流を流し始めてから 10 分経ったのちに温度を読み出しをした。

セットアップ

Q 値測定実験のセットアップを図 (6.4) に示す。カンチレバーの状態は図 (6.3) のようになっている。板バネのバインドは上下のコの字型クランプによってなされている。

Q 値測定はシャドーセンサーの原理を用いる。レーザー光はミラーで上方に反射され、

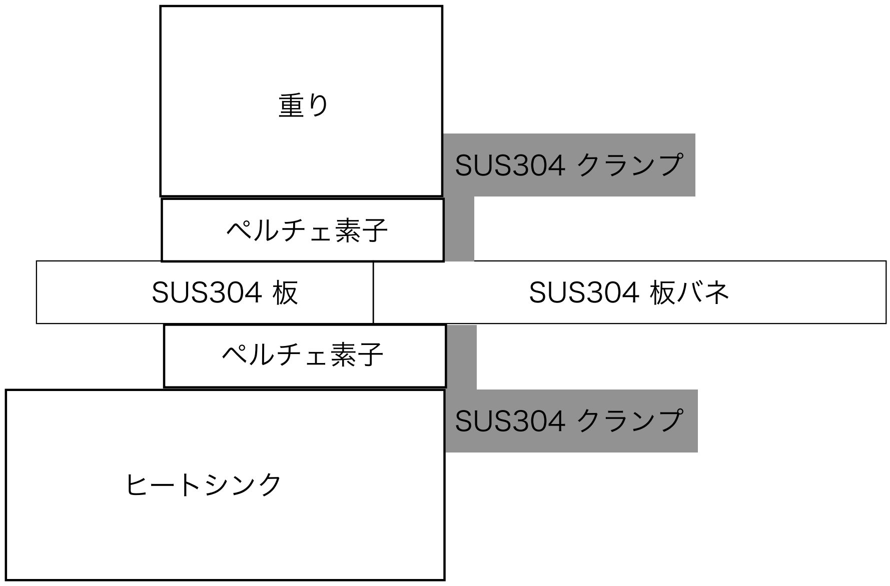

図 6.3　板バネのクランプ：横からの図

カンチレバーによって下方へ反射され、再びミラーによって反射されフォトディテクターによって光強度が検出される。ここで、ミラーからフォトディテクターへの光路の途中にしきりをおいてレーザー光の径を 1/4 ほど隠すようにする。これがシャドーセンサーの役割を果たしている。この状態でカンチレバーが振動するとその振動に合わせてフォトディテクターで検出される光強度も振動するので、検出された光強度からカンチレバーの振動の様子を観測できるのである。フォトディテクターの出力は、ADC を通して 1 秒あたり 1 万点の時系列データに変換される。

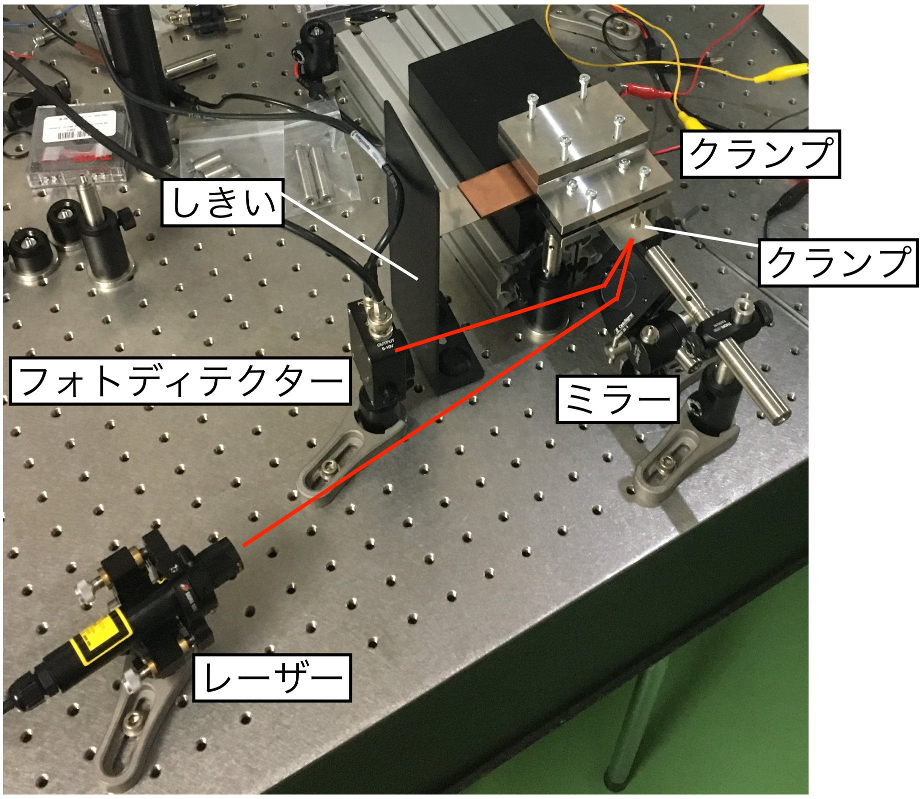

図 6.4　実験のセットアップの図

第 7 章

結果

7.1　温度測定

温度測定の結果を示す。板バネの上側を熱し、下側を冷却する、温度の読み取りはペルチェ素子へ電流を流し始めてから 10 分後におこなった。

電流 [A]	上側温度 [℃]([mV])	下側温度 [℃]([mV])
0.0	25.76(585)	25.76(585)
1.0	32.8(629)	31.68(622)
2.0	41.76(685)	40.0(674)
3.0	50.72(741)	48.32(726)

表 7.1　温度測定の結果

7.2　Q 値測定

厚さ 2 mm のステンレス製長方形カンチレバーの Q 値測定の結果を示す。

7.2.1　リングダウン波形からの読み取り

取得した時系列データのリングダウン波形の減衰の速さから Q 値を読み取った。取得した時系列データ (図 (7.1)) を見るとリングダウン波形に低周波信号が混ざってうねりになっているのがわかる。これを取り除くために、matlab 上で 200 Hz のハイパスフィルターをかけた。

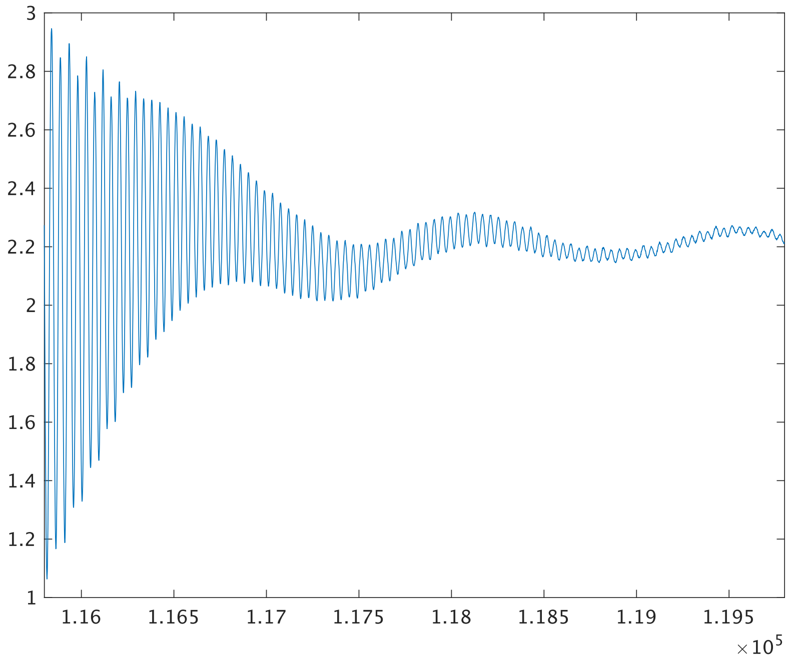

図 7.1　生のリングダウン波形の例

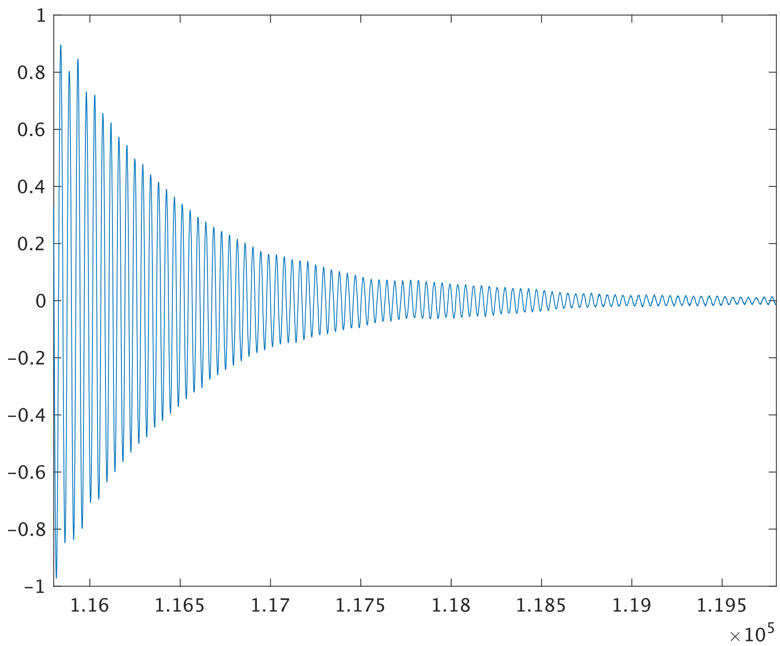

図 7.2　ハイパスフィルターを通したリングダウン波形の例

ハイパスフィルターを通した後のリングダウン波形の上下のピーク包絡線を matlab によってプロットした。(図 (7.3))
上側の包絡線を指数関数

$$f(t) = A\exp(-Bt) \tag{7.1}$$

によってフィッテイングした (図 (7.4〜7.7))。ここで式 (6.5)、(6.6) を再掲すると

$$B = \xi\omega_0 \tag{7.2}$$

$$Q^{-1} = 2\xi = 2\frac{B}{\omega_0} \tag{7.3}$$

である。式 (7.3) から内部摩擦 Q^{-1} を求めることができる。

以上より、フィッティングによってペルチェ素子へ流した電流ごとの A、B、内部摩擦 Q^{-1} は表 (7.2) のようになった。

電流 [A]	$A[V]$	$B[\times 10^4 \mathrm{sec}^{-1}]$	Q^{-1}
0.0	1.046	1.495×10^{-3}	2.38×10^{-2}
1.0	0.9865	1.585×10^{-3}	2.52×10^{-2}
2.0	0.932	1.639×10^{-3}	2.60×10^{-2}
3.0	0.7974	1.628×10^{-3}	2.59×10^{-2}

表 7.2　Q 値測定の結果

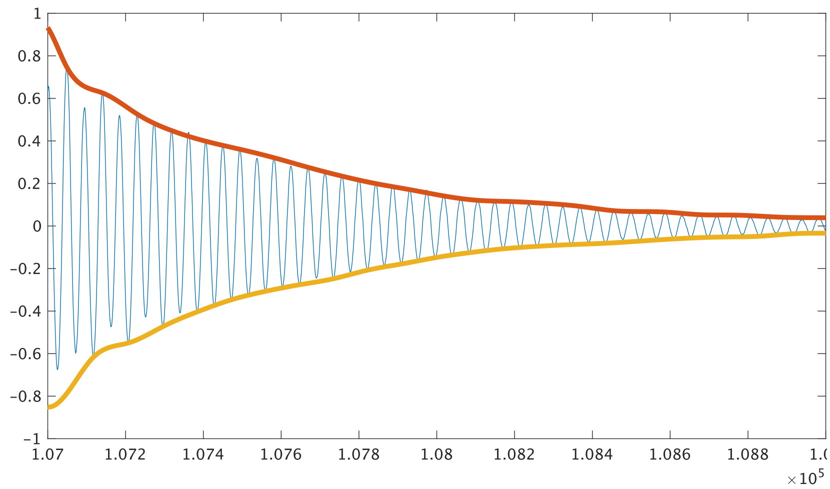

図 7.3　リングダウン波形の例 (青) と包絡線 (赤、黄)

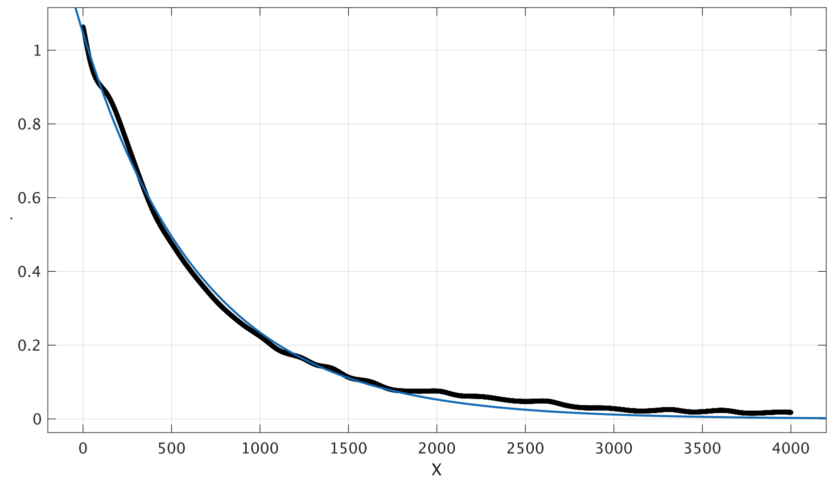

図 7.4　ペルチェに電流を流していないときの包絡線 (黒) のフィッティング (青)
横軸は ch 数で 1000ch が 1 sec に相当する。縦軸はフォトディテクターからの信号電圧である。本実験では板バネが最大振幅で振動しているときに 1.0 付近になるよう調整されている。

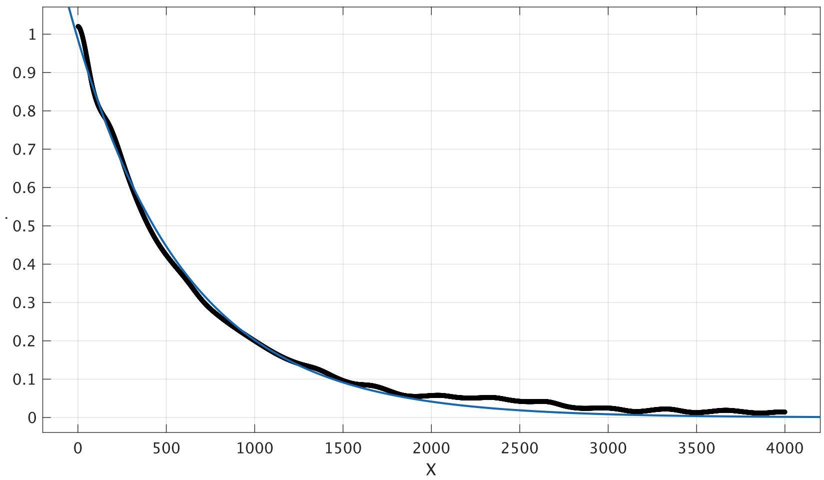

図 7.5　ペルチェに 1.0 A の電流を流したときの包絡線 (黒) のフィッティング (青)
横軸は ch 数で 1000ch が 1 sec に相当する。縦軸はフォトディテクターからの信号電圧である。本実験では板バネが最大振幅で振動しているときに 1.0 付近になるよう調整されている。

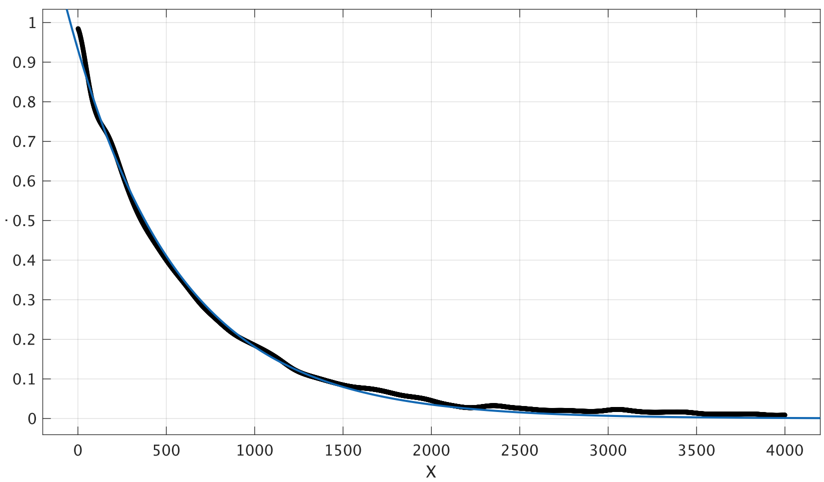

図 7.6　ペルチェに 2.0 A の電流を流したときの包絡線 (黒) のフィッティング (青)
横軸は ch 数で 1000ch が 1 sec に相当する。縦軸はフォトディテクターからの信号電圧である。本実験では板バネが最大振幅で振動しているときに 1.0 付近になるよう調整されている。

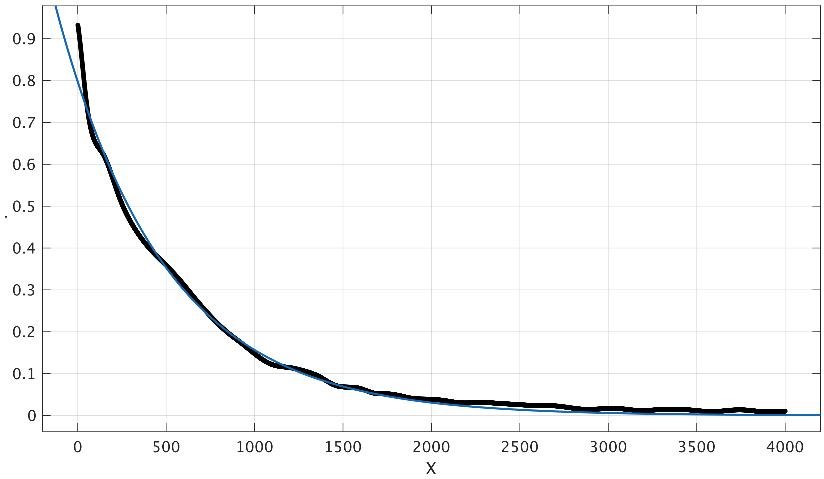

図 7.7　ペルチェに 3.0 A の電流を流したときの包絡線 (黒) のフィッティング (青)
横軸は ch 数で 1000ch が 1 sec に相当する。縦軸はフォトディテクターからの信号電圧である。本実験では板バネが最大振幅で振動しているときに 1.0 付近になるよう調整されている。

第 8 章

考察

8.1　熱弾性散逸

文献 [19] によれば、熱弾性散逸 Q_{TD}^{-1} の式は

$$
\begin{aligned}
Q_{TD}^{-1} &= \frac{\alpha_T^2 TE}{\rho C}\left(\frac{6}{\beta^2}-\frac{6}{\beta^3}\frac{\sinh\beta+\sin\beta}{\cosh\beta+\cos\beta}\right)\\
&= \Delta_E\left(\frac{6}{\beta^2}-\frac{6}{\beta^3}\frac{\sinh\beta+\sin\beta}{\cosh\beta+\cos\beta}\right) \qquad (8.1)\\
&\left(\Delta_E = \frac{\alpha_T^2 TE}{\rho C}\text{とおいた}\right)
\end{aligned}
$$

で表される。ここで、α_T は線熱膨張率、T は温度、E はヤング率、C は比熱である。また

$$\beta = t\sqrt{\omega_0\rho C/2\lambda} \qquad (8.2)$$

であり、t はカンチレバーの厚さ、ω_0 は共振角周波数、ρ は密度、λ は熱伝導率である。式 (8.1) 右辺の () 内の β に依存する項は $\beta \simeq 2.225$ のときに最大値のピークを持ち、そのときの値は $Q_{TD}^{-1}/\Delta_E \simeq 0.494$ となる。

8.2　温度差のないときの熱弾性散逸

温度差のない場合の熱弾性散逸 Q_{TD}^{-1} を式 (8.1) を用いて計算する。本実験において、カンチレバーの上面と下面の間に温度差がないとき、つまりペルチェ素子に電流を流さなかったときの温度は表 (7.1) より $T = 298$[K] だった。今回用いた SUS304 のカンチレバーでは、$\alpha_T = 17.3\times10^{-6}$[1/K]、$\mathrm{T} = 298$[K]、$\mathrm{E} = 1.93\times10^{5}$[MPa]、$\mathrm{C_p} \simeq \mathrm{C_v} \simeq$

460[J/kg · K]、t = 0.2[mm]、$\omega_0 = 2\pi \times 200$、$\rho = 7.93$[g/cm^3]、$\lambda = 16.3$[W/m · K] だった。

以上の数値を用いて式 (8.1) からペルチェ素子に電流を流さなかったときの熱弾性散逸 Q_{TD}^{-1} を計算すると

$$Q_{TD}^{-1} = 4.75 \times 10^{-5} \tag{8.3}$$

となった。また、式 (8.2) に以上の数値を用いると

$$\beta = 23.7 \tag{8.4}$$

$$\Delta_E = 1.03 \times 10^{-2} \tag{8.5}$$

であった。

8.3 内部摩擦から計算された Q_{TD}^{-1}

ここで、実験によって測定された内部摩擦の内訳を考える。内部摩擦 Q^{-1} を熱弾性散逸 Q_{TD}^{-1} と熱弾性散逸以外の散逸 Q_{other}^{-1} の 2 つに分けることにする。

$$Q^{-1} = Q_{other}^{-1} + Q_{TD}^{-1} \tag{8.6}$$

熱弾性散逸以外の散逸の内容として、ブラウニアン運動による散逸、クランプの振動や空気抵抗などが考えられる。ペルチェ素子へ流した電流が 0A の場合、実験結果の表 7.2 より $Q^{-1} = 2.38 \times 10^{-2}$、理論式からの計算結果である式 (8.3) より $Q_{TD}^{-1} = 4.75 \times 10^{-5}$ なので、式 (8.6) にこれらの値を用いると

$$Q^{-1} = 2.38 \times 10^{-2} = 0.0237525 + 0.0000475 \tag{8.7}$$

となり、本実験では $Q_{other}^{-1} = 0.0237525$ とすることができる。以降では、この Q_{other}^{-1} の値を実験で得た Q^{-1} から引くことによって、ペルチェ素子へ電流を流したときの Q_{TD}^{-1} を求めた。ペルチェ素子へ流した電流と Q^{-1} と Q_{TD}^{-1} の対応関係は表 (8.1) のようになった。

8.4 理論式 (8.1) から計算された Q_{TD}^{-1}

本実験で測定された Δ_E と β を用いて式 (8.1) より Q_{TD}^{-1} を求める。β の値は式 (8.4) より $\beta = 23.7$。Δ_E に関しては式 (8.1) より T に依存しているので、温度差をつけた場

電流 [A]	Q^{-1}	Q_{TD}^{-1}
0.0	2.38×10^{-2}	4.75×10^{-5}
1.0	2.52×10^{-2}	144.75×10^{-5}
2.0	2.60×10^{-2}	224.75×10^{-5}
3.0	2.59×10^{-2}	214.75×10^{-5}

表 8.1　Q_{other}^{-1} を固定したときの Q_{TD}^{-1}

合の計算では、温度測定の結果である表 (7.1) の値から板バネの上側と下側の温度の平均を T として計算した。計算した結果を表 (8.2) にまとめた。

電流 [A]	Δ_E	Q_{TD}^{-1}
0.0	4.72×10^{-3}	4.75×10^{-5}
1.0	4.83×10^{-3}	4.96×10^{-5}
2.0	4.97×10^{-3}	5.10×10^{-5}
3.0	5.11×10^{-3}	5.25×10^{-5}

表 8.2　数値計算による Q_{TD}^{-1}

8.5　文献値との比較

式 (8.1) より、

$$\frac{Q_{TD}^{-1}}{\Delta_E}=\left(\frac{6}{\beta^2}-\frac{6}{\beta^3}\frac{\sinh\beta+\sin\beta}{\cosh\beta+\cos\beta}\right) \tag{8.8}$$

として、Q_{TD}^{-1}/Δ_E の β 依存性について議論する。ここでは文献 [19] より結果を引用する。図 (8.1) は、文献 [19] 中の Q_{TD}^{-1}/Δ_E の β 依存性をプロットしたものである。縦軸が Q_{TD}^{-1}/Δ_E、横軸が β の両対数グラフであり、実線が解析解を表している。Q_{TD}^{-1}/Δ_E は $\beta\simeq2.225$ のときに最大値のピークを持ち、そのときの値は $Q_{TD}^{-1}/\Delta_E\simeq0.494$ となる。

図 (8.1) のプロットと本実験のデータを比較する。本実験では、式 (8.4) より $\beta=23.7$ であった。図 (8.1) を見ると、プロットされている β の最大が 20 を少し過ぎたあたりであり、そのとき $Q_{TD}^{-1}/\Delta_E\simeq0.012$〜$0.014$ 程と読み取れる。
表 (8.1)(8.2) より、温度差をつけた場合の Q_{TD}^{-1}/Δ_E は 0.30〜0.45 程の値をとる。これ

は 0.012〜0.014 より一桁オーダー分大きい。さらに、前述したように Q_{TD}^{-1}/Δ_E の最大値ピークは 0.494 であり、ペルチェへの電流が 2〜3 A 周辺で最大値ピーク付近の値をとることになる。図 (8.1) 上に緑線で、温度差をつけた場合の Q_{TD}^{-1}/Δ_E の値を示した。0A の時と比べると、β は 10^{-1} 程のオーダーでシフトしていることになる。この効果は、板バネの実効的な厚さが 1/10 になっている、あるいは実効的な熱伝導率が 100 倍になっていることに等しい（β の式 (8.2) 参照)。

以上の効果は、温度差をかけたカンチレバーにおける散逸のうち、式 (8.6) において決定した Q_{other}^{-1} と平衡定常状態の熱弾性散逸、この 2 つ以外の散逸によるものである。この中には温度差がある、つまり非平衡定常状態であることが原因の散逸が含まれている可能性がある。しかし、式 (8.6) で平衡定常状態における、熱弾性散逸以外の散逸を Q_{other}^{-1} として、後の計算では一定として扱っている。Q_{other}^{-1} の内訳の詳細については不明であり、温度差がつくに従い Q_{other}^{-1} が変化している可能性がある。よって本実験における、測定によって得た非平衡定常状態の Q_{TD}^{-1} と平衡定常状態の Q_{TD}^{-1} の差分を全て非平衡であることを原因とする散逸と断じることはできない。

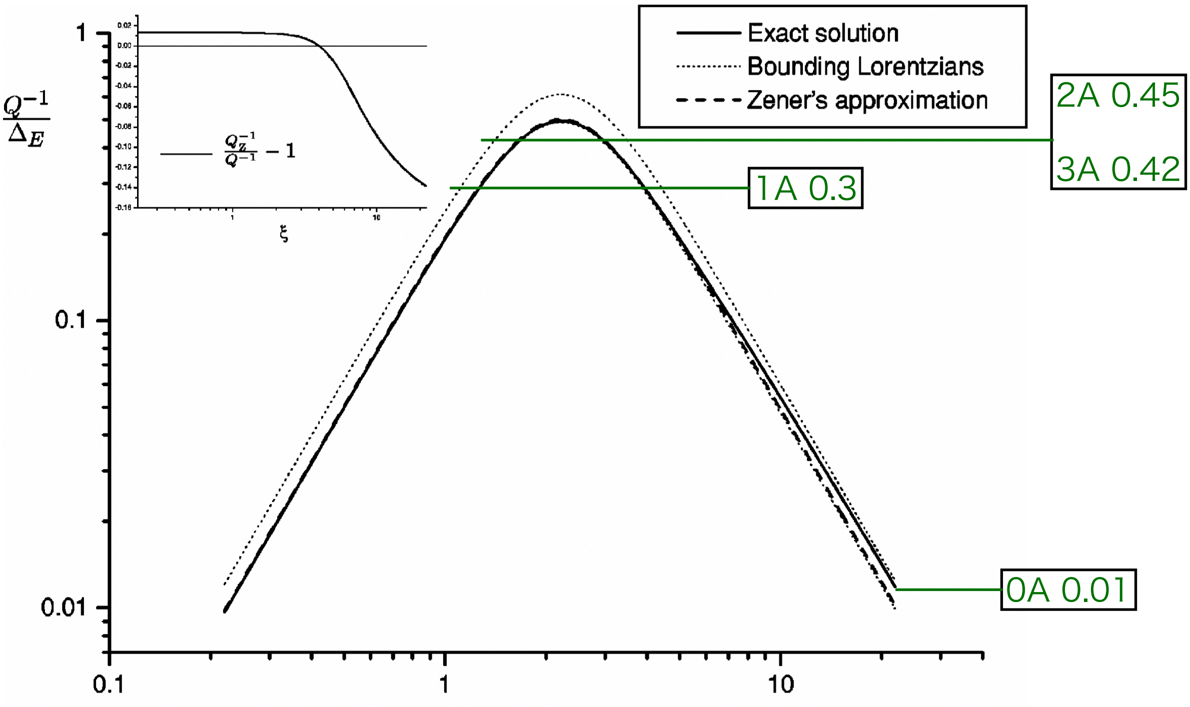

図 8.1　Q_{TD}^{-1}のβ 依存性　縦軸が Q_{TD}^{-1}/Δ_E、横軸が β の両対数グラフであり、実線が解析解を表している。Q_{TD}^{-1}/Δ_E は $\beta \simeq 2.225$ のときに最大値のピークを持ち、そのときの値は $Q_{TD}^{-1}/\Delta_E \simeq 0.494$ となる。今回の実験によって得られた Q_{TD}^{-1} の値を緑線で示している。
文献 [19]FIG. 2. より

第 9 章

結論

本研究では、重力波望遠鏡の懸架系の縦方向の非平衡熱弾性雑音の計算方法の提案と実験による非平衡熱雑音の直接的な検出を試みた。

懸架系の縦方向の非平衡熱弾性雑音の計算方法は本研究室において議論・提案されたものである。入熱と吸熱があることによる効果を境界条件に組み込んで、ランジュバンアプローチからパワースペクトルの表式の導出するに至った。また、クーラーとヒーターを上下に取り付けた板バネの Q 値変化の測定実験をすることにより、非平衡熱雑音の直接的な検出を実験によって試みた。測定の結果、平衡状態 (温度差がない) と非平衡状態 (温度差がある) において熱弾性散逸 Q_{TD}^{-1} に差がみられたが、ブラウン運動や実験装置などの他の散逸が含まれている可能性がある。この他の散逸の影響を見積もることができなかったため、非平衡状態に由来する散逸を十分な精度で解析できなかったと考える。

今後の課題

温度制御装置間の距離

本実験では、Q 値測定用の試料として板バネを選択し厚さ方向に温度差をつけた。そのため温度制御に用いたペルチェ素子間の距離が板バネの厚さ程度になった。この部分の断熱が不十分である場合、周りのクランプや重りなどの熱流の経路ができてしまう。これを防ぐために温度制御装置間の距離が断熱するのに十分な距離が保たれるようなセットアップにする必要があると考える。

温度のモニタリング

本実験では、リアルタイムでの温度のモニタリングをしなかった。Q 値測定前に板バネに接着させた温度計から温度を読み取り、それをペルチェに流した電流の大きさと対応付けて、Q 値測定した際にも同じ温度状況であったと仮定したに過ぎない。より精度の高い温度制御のために、リアルタイムでの温度のモニタリングができる実験系を構築する必要がある。

温度制御装置の改良

本実験で、温度制御にはペルチェ素子のみを用いた。ペルチェ素子の駆動には安定化電源を用いて電流の大きさによって温度の制御を試みた。しかし、リアルタイムでの温度のモニタリングができないので実際に温度制御できているかわからない。そのため、この方法は精度が低いと言える。これを解決するために、[16] で用いられているようなフィードバック制御系を導入することを提案する。

真空槽内での実験

本実験は大気中で行われた。そのため、空気を介しての熱の拡散経路が存在する。上述したようにペルチェ素子間の距離が近いセットアップだったため、空気を介した熱拡散は温度制御上で大きな問題になりうる。

参考文献

[1] 山元 一広, TAMA300 の Suspension System 及び鏡の熱雑音の推定 (修士論文 1997)

[2] 山元 一広, TEION KOGAKU(J. Cryo. Super. Soc. Jpn.)Vol. 46 No.7(2011)

[3] Kip Thorne, 130-33 Caltech, Pasadena CA 91125

[4] V.B. Braginsky, Phys. Lett. A 264 (1996) 1-10

[5] Yu. Levin,Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach,Phys. Rev. D 57, 659 (1997)

[6] HAKKO 八光電機 HP, https://www.hakko.co.jp/qa/qakit/html/h01020.htm

[7] Kentaro Komori, Yutaro Enomoto, Hiroki Takeda, Yuta Michimura, Kentaro Somiya, Masaki Ando, and Stefan W. Ballmer PHYSICAL REVIEW D 97, 102001 (2018)

[8] 草柳 浩平, 次世代重力波検出器のための非線形光学効果を用いた信号増幅 (修士論文).

[9] 小田部 荘達, 偏光解析法を用いたリング共振器の制御 (学士論文).

[10] 片岡 優 , 非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発 (修士論文).

[11] 榎本 雄太郎, 干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用と 光の空間モードの揺らぎについて (修士論文).

[12] 川浪 徹, カンチレバーの熱ゆらぎを用いた 表面計測システムの研究 (修士論文).

[13] B. シュッツ,「相対論入門」丸善出版 (2010).

[14] エリ ランダウ, イェ リフシッツ, 「弾性理論 (ランダウ=リフシッツ理論物理学教程) 」東京図書株式会社 (1989).

[15] 安東 正樹,「重力波とはなにか」講談社 (2016).

[16] Conti L, De Gregorio P, Bonaldi M, et al. Elasticity of mechanical oscillators in nonequilibrium steady states: experimental, numerical, and theoretical results.

Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys. 2012;85(6 Pt 2):066605.

[17] 高温弾性率測定装置について 住友金属 Vol.50 No.3(1998)/P85

[18] 高強度制振材料 日立金属

[19] Lifshitz, R., Roukes, M.L., 2000. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems. Phys. Rev. B 61, 5600-5609.

[20] Y. Sun et al. International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 3213-3229

[21] Yuk Tung Liu and Kip S. Thorne, Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 62, 122002

謝辞

本修士論文を完成させるにあたって、多くの方々にお力添えをいただきました。改めて、この場で感謝を申し上げたいと思います。

指導教員の宗宮健太郎先生には、修士課程における研究生活について様々なことでお世話になりました。本研究のテーマを与えていただき、また、たくさんのアドバイスやディスカッションの機会を設けていただきました。ついには修士論文を完成させるまでに至りました。ひとえに先生の指導のおかげです。また、特任講師の原田健一先生には実験室で顔を合わせたときにいつも様子を気にかけていただきました。宗宮研アドバイザーの藤本眞克先生には研究室のゼミに参加頂き、そこでの議論で多くのことを学ばせていただきました。ありがとうございました。

研究室の方々にも大変お世話になりました。D1 の小田部くんは非常に優秀で、何かわからないことがあったときはいつも小田部くんに相談して、その度に手助けしていただきました。3 月に卒業した中島くんはすごいアイデアマンで、現在研究室でも継続している磁石浮上実験の初期段階の様子を見ていましたが、このようにしてアイデアを形にするのだと感嘆しました。M2 の Liu くんの高いプログラム技術や日々上達する日本語力には感服していました。異国の地で高いパフォーマンスを発揮し続けるその姿勢に刺激を受けていました。M2 の小川くんとは研究室での席も近く、とりとめもない雑談にも付き合ってくれました。良い気晴らしになり研究への活力をもらっていた気持ちです。M1 の栗林くん、立原くん、阿部くん、B4 の鈴木海堂くん、鈴木孝典にはゼミやミーティングで積極的な質問、意見をいただきました。技術支援員の前川さん、深山さんには事務手続きを含め様々なことでお世話になりました。ときおり差し入れてくださったお菓子はどれも美味しかったです。ありがとうございました。

最後に、私の大学院への進学への理解を示し、学費や生活費といった経済面でも不自由なく研究へ取り組める環境を用意してくれた両親に感謝の気持ちを伝えたいと思います。うまくいかない時期も家に帰ると暖かいご飯があり、心が助かっていました。本当にあり

がとうございました。