修士論文

高硬度光ばねを用いた
重力波信号増幅システムの開発

東京工業大学　理学院　物理学系　物理学コース
宗宮研究室

小田部　荘達

2020 年 2 月 6 日

概要

重力波の初検出から 4 年が経った今、重力波の観測は天文学としての地位を既に確立しつつある。重力波は時空の歪みが光速で伝搬する現象であり、この観測からは電磁波では分からないような数多くの情報を得ることができる。これまでに連星ブラックホールや連星中性子星の合体に伴う重力波が観測されており、これらの信号解析から得られた知見は原子核物理・重力理論・宇宙論などといった分野に大きな衝撃を与えた。しかし、超新星爆発に伴う重力波など、検出器の性能不足のために未だに観測されていない天体現象がまだ数多くあることも事実であり、より一層の感度向上のための研究開発が求められている。

アメリカの LIGO、ヨーロッパの VIRGO、そして日本の KAGRA といった第 2 世代重力波検出器は km スケールの基線長を持った光複合共振器であり、この原理的な感度は光の量子的な揺らぎによって制限される。光子数の揺らぎは検出時に雑音となるだけでなく、鏡が光から受ける力が光子数変化に伴って揺らぐことによる雑音も引き起こす。このような効果は、光共振器と機械振動子の相互作用を扱う分野であるオプトメカニクスによって理解される。オプトメカニクスを用いると、量子雑音に影響を与える光共振器の様々な効果を記述することが可能となる。特に、光ばねと呼ばれるオプトメカニカルな現象を利用して重力波信号を増幅すると、量子雑音を効果的に低減できることが知られている。

通常の光共振器が持つ信号増幅の特性は、鏡の光学的なロスと共振状態からのずれのみによって定まり、光ばねによる信号増幅にも限界がある。この解決策として、非線形光学効果により共振器の実効的な光学ロスを補う手法が有効であることが本研究室で提唱された。この手法は internal squeezing と呼ばれ、これを用いることで光共振器自体の性質、ひいてはオプトメカニカルな現象である光ばねの性質を変化させることができ、重力波検出器の大幅な感度向上を行うことができる。重力波検出器の分野に限らず、オプトメカニカルな現象を internal squeezing で変化させる理論提唱はごく最近になって非常に盛んになってきており、これらに対する実験的な検証が待たれている。

本研究では、重力波検出器の感度向上という観点から、internal squeezing で強化した

光ばねの生成と観測を試み、internal squeezing とオプトメカニクスの相互作用を探った。先行研究では、より本質的な信号増幅過程を行うことができる signal recycling Michelson 干渉計を用いた実験が行われていたが、本研究ではより高硬度な光ばねを生成することができる Fabry-Perot 共振器を用いて実験を行った。また、Fabry-Perot 共振器と signal recycling Michelson 干渉計の対応関係に対する理論的な考察も詳細に行った。

本論文の構成を述べる。第 1 章では重力波の基本的な性質を導出し、第 2 章では重力波検出器の原理を述べる。第 3 章では重力波検出器の量子雑音について詳細に議論し、重力波検出器における internal squeezing の意義について考える。第 4 章では Fabry-Perot 共振器を用いた実験について議論し、signal recycling Michelson 干渉計との対応や制御の可否について考える。第 5 章では行った実験について述べ、第 6 章ではまとめと今後の展望を述べる。

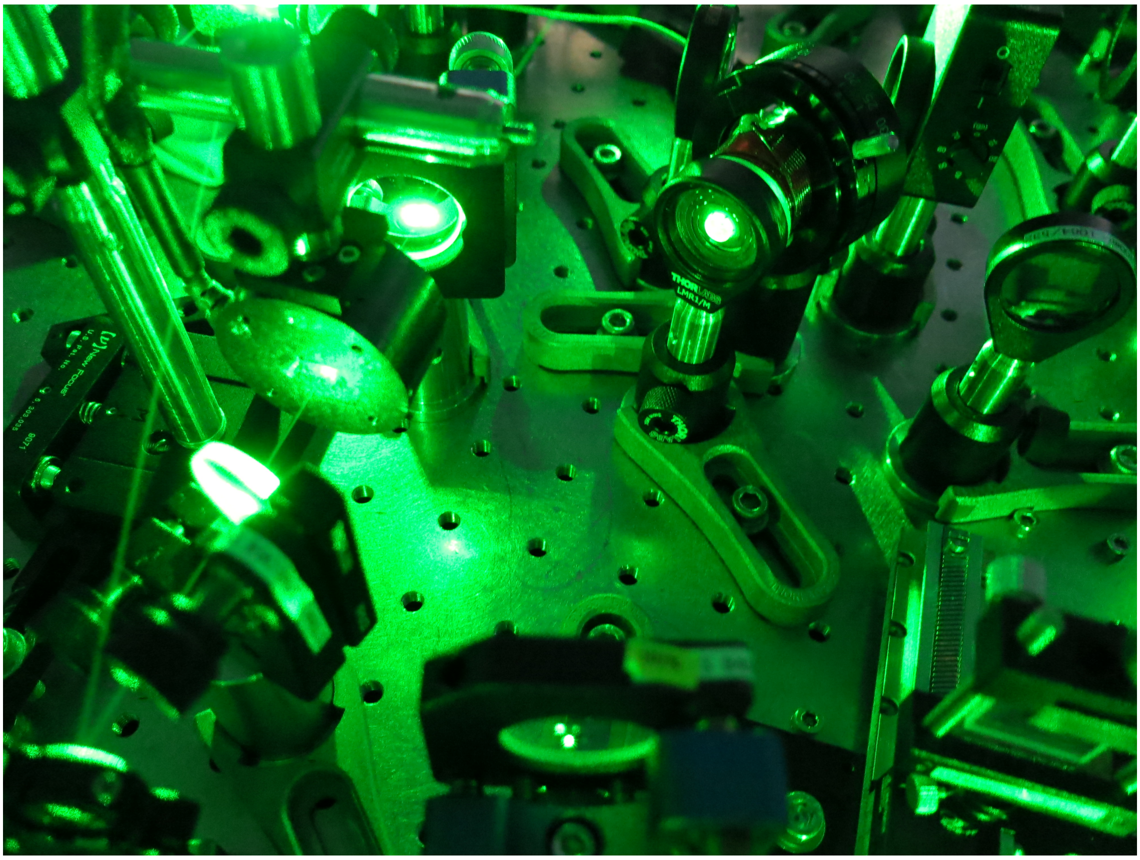


図 1: 本実験で用いた光共振器の写真

Abstract

Four years after the first detection of gravitational waves, gravitational wave observations have already become a field of astronomy. Gravitational waves are a phenomenon in which space-time ripples propagate at the speed of light, and observation of it can provide a great deal of information that cannot be observed by electromagnetic waves. Gravitational waves associated with the merging of binary black holes and binary neutron stars have been observed until now, and these signal analyzes have had a major impact on fields such as nuclear physics, gravity theory, and cosmology. However, there are still many astronomical phenomena such as supernova that have not yet been observed gravitational wave due to insufficient detector performance, and research and development are needed to further improve sensitivity.

Second-generation gravitational wave detectors such as LIGO in the United States, VIRGO in Europe, and KAGRA in Japan are optical composite cavity with km scale arm, and its principle sensitivity is limited by the quantum fluctuation of light. The fluctuation of the number of photons not only cause noise at the detection but also cause radiation pressure force fluctuation noise at the mirror. Such effects are understood by optomechanics, a field of physics that deals with the interaction between the optical cavity and the mechanical oscillators. By using cavity optomechanics, it is possible to describe various effects of a cavity that affect quantum noise. In particular, the optical spring can be used for gravitational wave signal amplification.

The signal amplification rate of an ordinary cavity is determined only by the cavity decay rate and the detune from the resonant, and there is a limit to the signal amplification by the optical spring. As a solution to this problem, it has been proposed in our laboratory that a method of compensating for the effective optical loss of the resonator using the nonlinear optical effect. This technique is called internal squeezing that can introduce a new parameter called squeezing decay rate into the cavity. By using this technique, it is possible to change the properties of the optical resonator itself and the properties of the optical spring, and significantly improve the sensitivity of the gravitational wave detector. Not only in the field of gravitational wave detectors, but there have also been many theoretical proposals to change optomechanical phenomena by internal squeezing in recent years, and experimental verification of these theories has been required.

In this study, from the aspect of improving the sensitivity of the gravitational wave detector, we attempted to generate and observe an optical spring enhanced by internal squeezing and investigated the interaction between internal squeezing and cavity optomechanics. In previous research, an experiment was performed using a signal recycling Michelson interferometer that can realize a fundamental signal amplification process. But in this research, we use a Fabry-Perot cavity that can generate a stiffer optical spring. Besides, we considered in detail the correspondence between the Fabry-Perot cavity and the signal recycling Michelson interferometer.

The structure of this paper is as follows. We derive the basic properties of gravitational waves in Chapter 1, and describe the principle of the gravitational wave detector in Chapter 2. In Chapter 3, we discuss the quantum noise of the gravitational wave detector in detail and considers the significance of internal squeezing for the gravitational wave detector. In Chapter 4, we discuss the experiment using the Fabry-Perot cavity and consider the compatibility with the signal recycling Michelson interferometer. We also discuss the possibility of control. We summarize about the experiments in Chapter 5, and describes the summary and future prospects in Chapter 6.

目次

記号一覧

記号	意味	本論文中での値・定義・単位
ϵ_0	真空の誘電率	$8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^4 \cdot \mathrm{A}^2$
μ_0	真空の透磁率	$1.26 \times 10^{-6}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-2}$
c	真空中における光速	$3.00\ \times 10^8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
$\hbar$	換算 Planck 定数	$1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
k_B	Boltzmann 定数	$1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
G	万有引力定数	$6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
λ_0	レーザーの波長	1064 nm
ω_0	レーザーの角周波数	$2\pi c/\lambda_0$ [Hz]
k_0	レーザーの波数	$2\pi/\lambda_0$ [m^{-1}]
m	鏡の質量	[kg]
L	腕の長さ、共振器の半周長	[m]
ϕ	自由空間中の位相変化	
α	自由空間中の位相遅れ	
κ	自由空間中のオプトメカニカル結合定数	
ξ	ホモダイン角	
S_h	信号雑音比のパワースペクトル密度	[Hz^{-1}]
h_SQL	標準量子限界	[$\mathrm{Hz}^{-1/2}$]
$\mathcal{F}$	共振器のフィネス	
β	共振器における位相遅れ	
$\mathcal{K}$	共振器におけるオプトメカニカル結合定数	
γ	cavity pole	[Hz]
Δ	detune	[Hz]
Σ	squeezing rate	[Hz]

第 1 章

重力波

重力波は時空と物質の状態を結びつける方程式である Einstein 方程式を線形近似することから導出される [1,2]。本章では、重力波の伝搬、放射、発生源などについて議論する。

1.1　重力波の伝搬

重力場の存在しない平坦な時空 (Minkowski 時空) においては、ある 2 つの時空点間の微小距離 ds を

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu := \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{1.1}$$

と表すことができる。ギリシャ文字は 0,1,2,3 の値を取るとし、以降は同じ添え字に対して縮約を取る。$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ は Minkowski 時空における計量テンソルである。重力場の存在する歪んだ時空においても ds^2 は不変なので、Lorentz 変換 $x^\mu \to x'^\mu$ を考えることで歪んだ時空における計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を定義することができる：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \\ &:= g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\end{aligned} \tag{1.2}$$

計量テンソルは元の座標系における時空点間の距離、あるいは時空の幾何学を決定する物理量であり、次のように表される Einstein 方程式に従う：

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.3}$$

ここで、$G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソル、$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルであり、それぞれ時空の状態と時空中に存在する物質の状態を表すテンソルである。Einstein テンソルは、

Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$、Ricci スカラー R、Riemann テンソル $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa}$、Christoffel 記号 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ を用いて次のように定義される：

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad R = R^{\mu}{}_{\mu}, \quad R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{1.4}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} := \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\kappa}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \tag{1.5}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} := \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}\right) \tag{1.6}$$

ここでは重力場が小さく、計量テンソルが $\eta_{\mu\nu}$ に摂動項 $h_{\mu\nu}$ を加えた形で表されるとする：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

Einstein テンソルは $h_{\mu\nu}$ を用いて

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}[h^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + h^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box h_{\nu\lambda} - h_{,\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}(h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \Box h)] \tag{1.8}$$

$$h = h^{\mu}{}_{\mu}, \quad \Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu} \tag{1.9}$$

と表せる。さらに $h_{\mu\nu}$ のトレースリバーステンソル $\tilde{h}_{\mu\nu}$ を用いることで

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + \tilde{h}^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box\tilde{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\tilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma}) \tag{1.10}$$

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad \tilde{h} = \tilde{h}^{\mu}{}_{\mu} = -h \tag{1.11}$$

と整理できる。ここで、以下のように表される Lorentz ゲージ：

$$\tilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta} = 0 \tag{1.12}$$

とトランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ)：

$$\begin{cases} \tilde{h}_{\mu 0} = 0 & (1.13) \\ \tilde{h}^{\mu}{}_{\mu} = 0 & (1.14) \end{cases}$$

をゲージ条件として同時に課すことができ [3]、線形化された Einstein 方程式

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

が求まる。真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ なので、摂動項は波動方程式に従うことが分かる。x^3 軸方向に伝搬する単色平面波解の具体形を行列表示で表すと、摂動項が対称テンソルであることから

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[-ik(ct - z)] \tag{1.16}$$

となる。ここで、k は重力波の波数であり、h_+ と $h_\times$ に対応するモードをそれぞれ + モードと × モードと呼ぶ。以上より、重力波は 2 つのモードを持つ光速で伝搬する横波であることが分かった。

1.2　自由質点に対する重力波の影響

重力場の存在する歪んだ時空における自由質点の軌跡は、次のように表される測地線方程式に従う：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{1.17}$$

ここで、τ は固有時間である。初期状態に 1 つの自由質点が静止している場合には

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \propto -\Gamma^\alpha_{00} = 0 \qquad (\because h_{\mu 0} = 0) \tag{1.18}$$

となり質点に加速度が働かないため、重力波の影響は表れない。

次に、原点 $x^\mu_{(1)} = (-ct, 0, 0, 0)$ と原点から Minkovski 時空上で距離 R だけ離れた点 $x^\mu_{(2)} = (-ct, R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ との距離に重力波が与える影響を調べる。z 軸方向から波長が R より十分大きい + モードの重力波 $h_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 0)h_+ \cos\Omega t$ が入射したとすると、

$$\begin{aligned} d_+ &= \int_{x^\mu_{(1)}}^{x^\mu_{(2)}} |g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu|^{1/2} \\ &\simeq \sqrt{(1 + h_+\cos\Omega t)(R\cos\theta)^2 + (1 - h_+\cos\Omega t)(R\sin\theta)^2} \\ &\simeq R\left(1 + \frac{1}{2}h_+\cos 2\theta\cos\Omega t\right) \end{aligned} \tag{1.19}$$

となり、重力波の影響により 2 点間の距離が変化することが分かる。× モードの重力波に対しても同様に、

$$d_\times = R\left(1 + \frac{1}{2}h_\times \sin 2\theta\cos\Omega t\right) \tag{1.20}$$

である。図 1.1 にそれぞれのモードに対する自由質点群の変位を示した。現在稼働しているレーザー干渉計型重力波検出器では、input test mass と end test mass と呼ばれる 2 つの自由質点間の距離をレーザー干渉計を用いて測定することで重力波を検出する。

1.3　重力波の発生と観測

ここでは、重力波源が存在する場合 $(T_{\mu\nu} \neq 0)$ について考える。

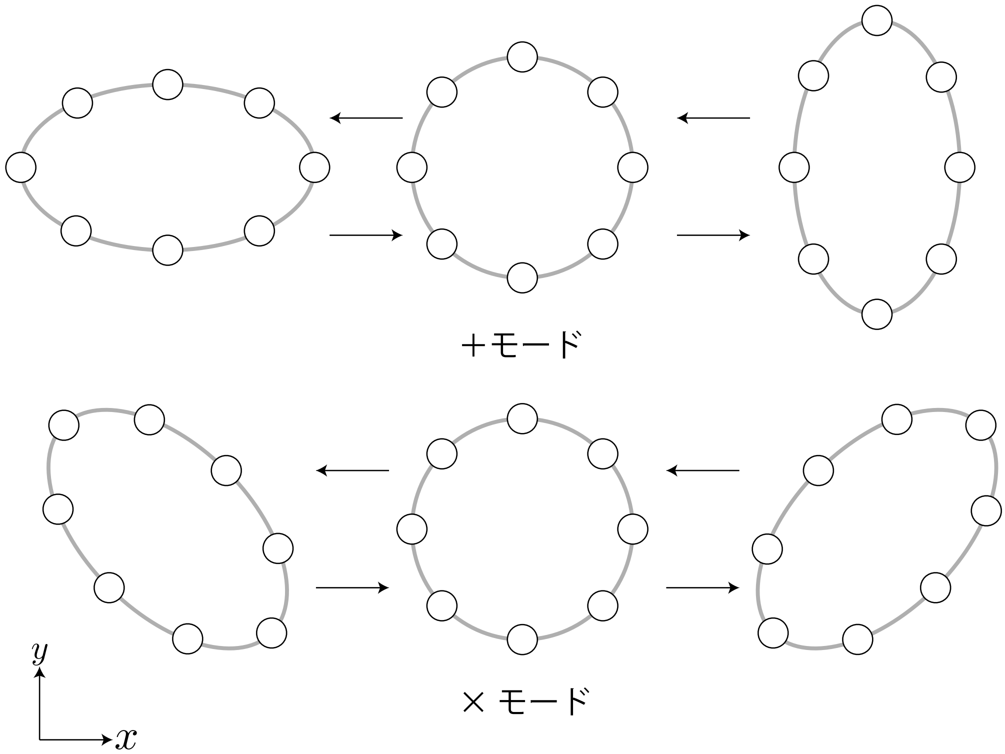


図 1.1: 重力波が入射したときの自由質点群の変位
紙面に垂直な方向から ＋ モードと × モードの重力波がそれぞれ入射したとした。

1.3.1　重力波の生成

TT ゲージにおける重力波が満たすべき条件は、波数ベクトル k^i を用いて[*1]

$$h_{ij}\delta^{ij} = 0 \tag{1.21}$$
$$h_{ij}k^j = 0 \tag{1.22}$$

であった。平面波の TT 成分は

$$h^{ij}_{\mathrm{TT}} = P^i_k h^{kl} P^j_l - \frac{1}{2} P^{ij} P_{kl} h^{kl} \tag{1.23}$$

と表すことができる。ここで、$P^i_j = \delta^i_j - n^i n_j$ は射影演算子、$n^i = x^i/|\boldsymbol{x}|$ は観測地点方向の単位ベクトルである。重力波源が存在する場合に h^{ij}_{TT} が満たすべき式を求める。まず、式 (1.15) を波動方程式の Green 関数を用いて解くと

$$h^{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|/c, |\boldsymbol{x}|')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{1.24}$$

*1 ラテン文字は 1,2,3 の値を取るとする。

と表せる。観測地点までの距離 $|\boldsymbol{x}|$ は、重力波の波長 ($\sim$ 積分に大きく寄与する地点までの距離 $|\boldsymbol{x}|'$) より十分大きいとする。また、波源の時間変動は光速に比べて十分ゆっくりであるとすると、式 (1.24) を以下のように遅延展開することができる [4]：

$$h^{ij}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{4G}{|\boldsymbol{x}|c^4}\int\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial^m}{\partial t^m}T^{ij}(t-|\boldsymbol{x}|/c,\boldsymbol{x}')\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')^m}{m!}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{1.25}$$

この最低次の項は、$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ より[*2]

$$\begin{aligned} h^{ij}(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{4G}{|\boldsymbol{x}|c^4}\int T^{ij}(t-|\boldsymbol{x}|/c,\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \\ &= \frac{2G}{|\boldsymbol{x}|c^2}\int T^{00}{}_{,00}(t-|\boldsymbol{x}|/c,\boldsymbol{x}')x^i x^j\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \end{aligned} \tag{1.26}$$

と計算できる。よって、波源が密度 $\rho\simeq T^{00}$ の完全流体であるとき、質量分布に対する四重極モーメント

$$\mathcal{I}_{\mathrm{ij}} = \int\rho\left(x_i'x_j'-\frac{1}{3}\delta_{ij}|\boldsymbol{x}'|^2\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{1.27}$$

を用いて

$$h_{\mathrm{ij}}^{TT}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{2G}{|\boldsymbol{x}|c^4}\left(\ddot{\mathcal{I}}_{lm}P_i^lP_j^m-\frac{1}{2}P_{ij}P^{jm}\ddot{\mathcal{I}}_{lm}\right) \tag{1.28}$$

と表すことができる。以上から、重力波は物体の非軸対称な加速度運動から発生し、最低次は四重極放射であることが分かった。

重力波の振幅を大まかに見積もる。波源の質量を M、速度を v とすれば $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}\sim Mv^2$ 程度なので、M が太陽質量 $\sim 1.99\times10^{30}$ kg、v が $0.3c$、距離が乙女座銀河団 ~ 20 Mpc 程度の波源からの重力波の振幅は $h_{\mathrm{ij}}^{TT}\sim 5\times10^{-22}$ 程度である。これは、地球と太陽間の距離に対して水素原子 1 個分ほどの変化が起きることと同程度の歪みである。また、発生源から少なくとも重力波の波長程度離れた地点でないと重力波は観測できないことを考えると、人工的に作成しうる物体から放射される重力波の歪みは、天文学的な現象と比べて極めて小さいことも分かる。

1.3.2　四重極公式

ここまでの計算は $h_{\mu\nu}$ に対する 1 次近似を行うことで進めてきた。この近似の範囲内では、エネルギーフラックス T^{i0} は 0 である。実効的なエネルギー運動量テンソルを 2 次のオーダーまで計算すると、エネルギー $\mathcal{E}$ の時間変化 W が

$$W = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{5c^5}\dddot{\mathcal{I}}_{ij}\dddot{\mathcal{I}}^{ij} \tag{1.29}$$

*2 Bianchi 恒等式から導かれるのは $T_\mu{}^\nu{}_{;\nu}=0$ であるため、より厳密には保存則に従う実効的なエネルギー運動量テンソルを定義し直す必要がある [5]。

となることを求められる [6]。この式は四重極公式と呼ばれる。

例として、質量 M の 2 つの星が軌道長半径 a の連星系を成している場合に、重力波がこの系に与える影響を見積もる。M は太陽質量 $\sim 1.99\times10^{30}$ kg、a は太陽半径 $\sim 6.96\times10^{8}$ m 程度であるとする。Kepler の法則を用いて公転の角速度を軌道長で表すことで、この連星系から放出される重力波の仕事率が $W\sim G^4M^5/(c^5a^5)\sim 2\times10^{24}$ W 程度であると見積もれる。これは太陽の放射束 $\sim 3\times10^{26}$ W に匹敵する。また、連成系の持つエネルギーが $\mathcal{E}\sim -GM^2/a$ 程度であることから、軌道長半径の時間変化は $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t\sim -G^3M^3/(c^5a^3)\sim 3\times10^{-9}$ m/s と見積もることができ、非常にゆっくりと軌道長半径が狭まり角速度が早くなることが分かる。この微分方程式を解けば、連星合体を起こす時間が $t_{\mathrm{M}}\sim c^5a^4/(G^3M^3)\sim 2\times10^{17}$ s 程度であることも分かる。宇宙年齢は 4.35×10^{17} s 程度なので、このパラメータに近い連星系が過去宇宙空間中に構成される可能性があったのならば、合体するものが現れても不自然ではないということである。

1.3.3　重力波の観測

1916 年、Einstein が一般相対論から重力波の存在を予言したが、重力波の発生源の理論的な予測と極めて高い感度を持った検出器の開発が双方ともに難しく、長年その存在は確認されなかった。1974 年になり、Hulse と Taylor により連星パルサー (中性子星)PSR B1913+16 が発見され [7]、この公転周期が減少していることが報告された。これは前小節で議論した連星系から重力波によりエネルギーが持ち去られる効果のためであると考えられており、実際に観測値は一般相対論による厳密な理論値と極めて高い精度で一致している [8]。この発見により、重力波の存在が間接的に確かめられた。

2015 年、アメリカの重力波検出器 Advanced LIGO [9] によって重力波の直接的な検出がなされた [10]。これはそれぞれ約 30 太陽質量を持ったブラックホール連星の合体から放射された重力波であった。このとき得られた波形を図 1.2 に示した。一般的な重力崩壊型超新星爆発から形成される恒星ブラックホールはこれまでの観測から約 15 太陽質量以下であることが分かっているので、LIGO によって観測されたブラックホールは恒星ブラックホールにしては異常に重いものである。LIGO では、これ以降も同種と考えられるブラックホール連星が数多く検出されている。これらのブラックホールの起源については現在でも議論されているが、Population III の大質量星が連星系を成し形成されたとする説 [11] や、原始ブラックホールが観測されたとする説 [12] などがある。

また、2017 年には LIGO とヨーロッパの重力波検出器 Advenced VIRGO [13] によって、連星中性子星合体による重力波が観測された [14]。この重力波信号の約 2 秒後には重力波対応天体からショートガンマ線バーストが観測されており、r process の起源が連星中性子星合体であることが示唆された。また、この後の多波長帯に渡る電磁波観測により

キロノヴァの残光が観測され、連星合体後の理論モデルとの整合性が確認された。このイベントは、重力波と電磁波による初のマルチメッセンジャー観測となった。

2017 年までの LIGO の観測期間中に、10 個の連星ブラックホール合体イベントと 1 つの連星中性子星合体イベントが検出されたと発表されている。また、2019 年度には検出器の感度を向上させた状態で観測が行われており、連星中性子星合体を含む数多くのイベントが検出されている [15]。日本の重力波検出器 KAGRA [16] も 2020 年 2 月から観測に加わる予定である。

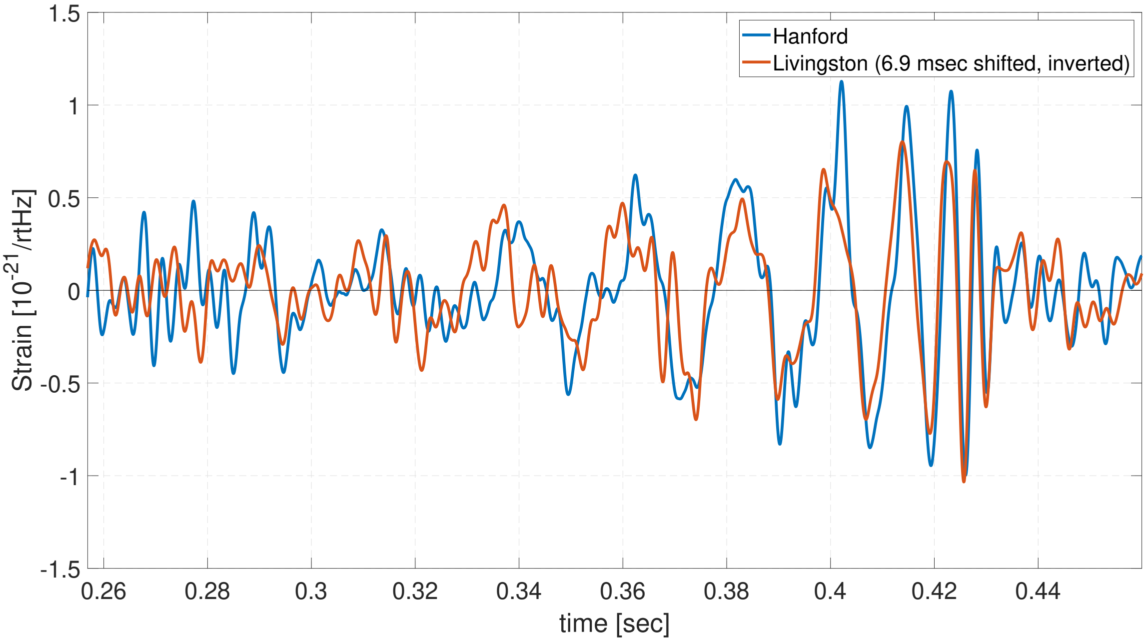


図 **1.2:** GW150914 の波形

1.3.4　重力波源の候補

これまでに重力波の観測が行われた天体現象以外で、地面設置型重力波検出器で検出できる可能性のある重力波源の候補はいくつかある。重力崩壊型超新星爆発は重力波源の有力な候補であり、1 kHz 程度の重力波が放出されると予測されている [17]。重力波は中心核崩壊の非対称性から放出されるため、電磁波では捉えることのできない超新星内部の爆発メカニズムを直接的に知ることができる。

また、これまでに観測された中性子星連星合体による重力波は、連星が軌道長を縮めながら互いの周りを回転するインスパイラル期のみしか捉えられておらず、合体中の潮汐変形や合体後の振動に伴う重力波を十分な信号雑音比で検出できた例はない。合体後には形成された天体が一時的に振動するか、あるいは直後にブラックホールが形成されると考え

られているが、いずれの場合も数 kHz 程度の重力波が放出されると予測されている [18]。この重力波には高密度物性に関する情報が多分に含まれており、中性子星の状態方程式の決定などに役立つ。

これまでに観測されたブラックホール連星合体と中性子星連星のインスパイラルに伴う重力波は、いずれも周波数が数 100 Hz 程度以下のものである。これは、現在稼働している重力波検出器の高周波数帯域感度が量子雑音[*3]によって制限されているためである。高周波数帯域における量子雑音の低減法は、重力波検出器の研究開発として現在最も盛んに行われているものの 1 つである。

[*3] 光の量子性に起因する雑音である。第 3 章参照。

第 2 章

重力波検出器

重力波は、その極めて小さい振幅のために、直接的な検出を行うことは非常に難しい。現在の重力波検出器は、特定の周波数帯域において世界最高感度を持つ力検出器であり、その歴史は人類の持つ相対変位に対する最高性能プローブの開発史であるとも言える。本章では、重力波検出器の歴史とレーザー干渉計型重力波検出器の原理について述べる。また、検出器の性能を決定することになる雑音源についても簡単に述べる。

2.1 重力波検出器の歴史

1969 年、Weber はアルミニウム製共振型重力波検出器 (Weber bar) により重力波が検出されたと発表した [19]。これは天の川銀河中心からの重力波だと解析されたが、その振幅から推定される天体現象のエネルギーがあまりにも大きいことから、現在では誤検出であったと考えられている。また、共振型重力波検出器を用いた追実験が世界各国で行われてきたが、現在でも検出には否定的な結果が得られている。

共振型重力波検出器は、金属塊の共振周波数付近の帯域にしか感度がないため、重力波の波形を捉えることはできない。また、重力波の歪みの影響は 2 つの自由質点間の距離に現れるため、検出器としての性能は作成しうる金属塊の大きさで制限されてしまう。1970 年代には、これらの欠点を持たないレーザー干渉計型重力波検出器が提案された [20]。この原理は次節で詳しく述べる。

共振型重力波検出器の感度は最終的に熱雑音によって制限されていたが、レーザー干渉計型重力波検出器の原理的な感度は光が持つ量子性で制限されることになる。これは検出される光子数が量子的に揺らぐ効果だけではなく、検出器を構成する鏡が光の運動量変化に起因する力 (輻射圧) によって揺らされる効果を含む。鏡の機械的な運動と光の輻射圧との相互作用を扱う分野はオプトメカニクスと呼ばれ、現在に至るまで様々な研究が行われている。特に 1980 年代には、オプトメカニカルな効果による鏡の運動の変化がレー

ザー干渉計型重力波検出器の最終的な感度を決定することが理解され [21]、大型レーザー干渉計による重力波検出の可能性が示された。

1990 年代には数 m∼ 数 10m の基線長を持ったプロトタイプが各国で建造された。また、これらから得られた知見をもとに大型のレーザー干渉計が設計され、2000 年代にはアメリカの LIGO [22]、ヨーロッパの VIRGO [23]、日本の TAMA300 [24]、ドイツの GEO600 [25] といった数 100∼ 数 km の基線長を持った重力波検出器が稼働した。これらは第 1 世代と呼ばれ、重力波検出器の原理検証を目的としていた。特に GEO600 は現在でも稼働しており、先進的な技術の実証器としても重要な役割を果たしている [26] ことから、1.5 世代と呼ばれることもある。

第 1 世代の成果を受け、2010 年代には各国で重力波の直接検出を目標とした第 2 世代重力波検出器が建造された。これらは理論的に検出頻度を予想することができる連星中性子星合体の重力波に対して設計されており、10^{-23} $\mathrm{Hz}^{-1/2}$ 程度の最も良い感度を ∼100 Hz の帯域で持っている。2020 年現在で稼働しているのは、アメリカの Advanced LIGO、ヨーロッパの Advanced VIRGO、そして日本の KAGRA である。特に KAGRA は地下に建造されたこと、鏡を極低温まで冷却すること、そしてオプトメカニカルな効果を最大限活かした DRSE を採用する [27] といった先進的な技術が多く用いられることから、2.5 世代と呼ばれることもある。

また、2015 年の重力波直接検出を受けて、将来的な第 3 世代重力波検出器の計画も具体化されつつある。これらは数 10km の基線長を持たせる計画であり、ヨーロッパの ET [28] やアメリカの CE [29] などがある。第 3 世代は宇宙初期における高赤方偏移の天体現象も観測可能であり、暗黒時代の探索を行えることが期待されている。

ここまでで紹介した検出器は全て地面設置型だが、レーザー干渉計を宇宙空間中に構成する計画も存在する。宇宙空間中であれば後述する地面振動雑音の影響を受けないため、1Hz 以下の低周波重力波を捉えることができる。宇宙望遠鏡の計画はアメリカの LISA [30] や日本の DECIGO [31] などがある。

2.2 重力波検出器の原理

現在重力波検出器として主流なものは、図 2.1 のような Michelson 干渉計を原理とするレーザー干渉計型重力波検出器である。Michelson 干渉計では入射したレーザー光がビームスプリッタで分離され、x 軸方向と y 軸方向の腕[*1]を往復する。x arm の長さを L_x、y arm の長さを L_y とする。式 (1.16) で表される + モードの重力波 ($h_\times = 0$) がこの Michelson 干渉計に入射したとする。光の速度は任意の慣性系に対して不変なので、光

*1 ビームスプリッタとエンドミラー間のこと。

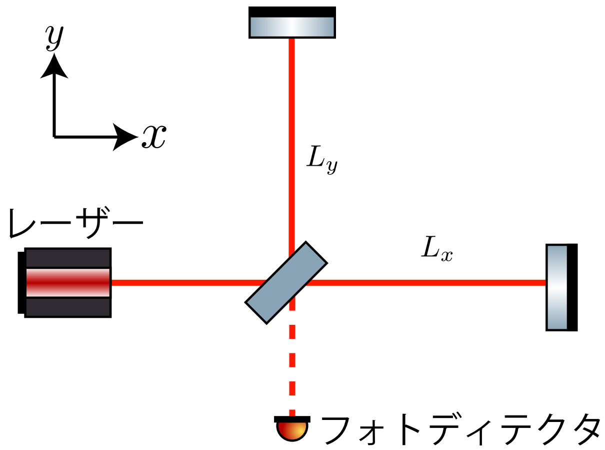


図 **2.1:** Michelson 干渉計

子が進む微小距離 ds は常に 0 である。x 方向に進む光について考えると、式 (1.2) より

$$\left(1-\frac{1}{2}h(t)\right)c\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

である。ここで、重力波の角周波数 Ω を用いて $h(t)=h_+\exp(-\Omega t)$ とした。

光子が x arm を往復する間に要する時間を δt_x とすると、式 (2.1) の両辺を積分して

$$\int_{t-\Delta t_x}^{t}\left\{1-\frac{1}{2}h(t')\right\}\mathrm{d}t'=\frac{2L_x}{c} \tag{2.2}$$

すなわち

$$\Delta t_x\simeq\frac{2L_x}{c}+\frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^{t}h(t')\mathrm{d}t' \tag{2.3}$$

である。y arm に対しても同様に

$$\Delta t_y\simeq\frac{2L_y}{c}-\frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L_y}{c}}^{t}h(t')\mathrm{d}t' \tag{2.4}$$

と計算できる。

Michelson 干渉計で測定できるのは、重力波により変動した x arm と y arm の位相差 $\phi'_-=\omega_0(\Delta t_x-\Delta t_y)$ である。$L\simeq L_x\simeq L_y$ とすれば、

$$\phi'_-\simeq\frac{2(L_x-L_y)\omega_0}{c}+\omega_0\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t}h(t')\mathrm{d}t'=\phi_-+\delta\phi_{\mathrm{GW}} \tag{2.5}$$

と求まる。$\phi_-=2(L_x-L_y)\omega_0/c$ は重力波が入射していない場合の位相差であり、$\delta\phi_{\mathrm{GW}}$ は重力波の影響による位相変化を表す。

$h(t)$ の逆 Fourier 変換を

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t}\mathrm{d}\Omega \tag{2.6}$$

とすると、$\delta\phi_{\mathrm{GW}}$ の周波数応答が

$$\delta\phi_{\mathrm{GW}} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\mathrm{MI}}(\Omega)h(\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t}\mathrm{d}\Omega \tag{2.7}$$

$$H_{\mathrm{MI}}(\Omega) = \frac{2\omega_0}{\Omega}\sin\left(\frac{L\Omega}{c}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{L\Omega}{c}} \tag{2.8}$$

であることが分かる。現実的に建造可能な基線長の範囲であれば、$\sim$100Hz 程度の重力波に対しては腕が長いほど応答が良くなる。

2.3　重力波検出器の雑音

前節では、レーザー干渉計に対する重力波信号の応答について考えた。ある周波数における重力波検出器の性能は、その周波数における信号の応答に対する雑音の大きさで決まる。ある物理量 $x(t)$ の測定を十分長い時間行ったとき、この平均値からのずれを積分した量は 0 である。そこで、平均値からのずれの 2 乗を積分した値である二乗平均平方根 (Root Mean Square : RMS) を用いることで、$x(t)$ の実効的な振幅の大きさを評価することができる。$x(t)$ に対する RMS を $\sqrt{\langle x^2\rangle}$ とすると、

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[x(t)]^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(\Omega)|^2}{T}\mathrm{d}\Omega \end{aligned}\tag{2.9}$$

と書き表せる。ここで、T は測定時間であり、$X(\Omega)$ は $x(t)$ を Fourier 変換した物理量である。式 (2.9) の係数を除いた被積分関数 $P(\Omega) = |X(\Omega)|^2/T$ はパワースペクトル密度と呼ばれ、$A(\Omega) = \sqrt{P(\Omega)}$ は振幅スペクトル密度と呼ばれる。振幅スペクトル密度はこの物理量に周波数 Ω の成分がどの程度含まれているかを表しているため、これを用いて雑音の議論を行うことができる。

図 2.2 に KAGRA の感度曲線を示した。以降の小節で、重力波検出器の設計感度を決めることになる雑音源を低周波数帯域から順に述べる。

2.3.1　地面振動雑音

重力波検出器を構成する鏡は重力波による力を受けて動くことになるので、観測帯域で自由質点である必要がある。これは共振周波数が十分低い懸架系を用いることで実現され

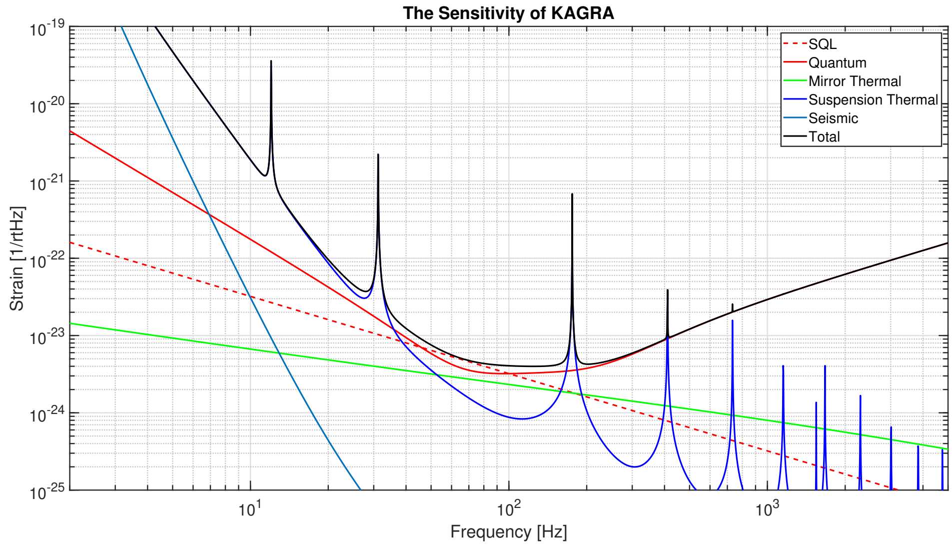


図 **2.2:** KAGRA の感度

るが、地面の振動が懸架系から伝わり鏡を揺らすことで、地面振動雑音が現れる。地面振動の振幅スペクトル密度は周波数の 2 乗に反比例して減少することが経験的に知られており、∼10Hz 以下の低周波数帯域で感度が制限されることになる。

地面振動雑音は、式 (4.30) で表される懸架系による防振効果で低減することができる。ただし、作成できる振り子の大きさには限界があり、共振周波数を ∼ 0.1 Hz 程度以下にすることは難しいため、KAGRA では 9 段の多段振り子を用いることで防振効果を高めている。また、KAGRA のように地下に建造することでさらに 2 桁ほど地面振動雑音を低減することができる。

2.3.2　Newtonian 雑音

Newtonian 雑音は、地殻や大気といった鏡周辺の物質が重力場を変動させ、これが鏡を揺らすことによる雑音である。この効果は非常に小さく、第 2 世代重力波検出器では無視できると考えられているが、感度が飛躍的に向上する第 3 世代重力波検出器では ∼10Hz 程度の感度を制限することになる。また、KAGRA では地下水による重力勾配の変動が設計感度を制限する可能性があることが指摘されている [32]。

2.3.3　熱雑音

熱雑音は、熱浴とのランダムなエネルギーのやりとりにより懸架系や鏡の振動が励起され、鏡が揺らされることによる雑音である。揺動散逸定理 [33] より、熱雑音のパワースペ

クトル密度は温度と機械損失に比例する。機械損失は材質の持つ一般的な Q 値*2の逆数であり、振動子のエネルギー損失が少ないほど熱雑音が小さくなることを意味している。

懸架系の熱雑音はワイヤーの機械損失を小さくすることで低減することができる。KAGRA では、極低温で熱伝導が大きく機械損失の小さいサファイアを最終段のワイヤーに用いている。

主な鏡の熱雑音は、thermoelastic 雑音と Brownian 雑音に大別できる。Thermoelastic 雑音は熱膨張係数の温度依存性に起因し、鏡に温度勾配が生じたときに鏡が非一様に歪んでしまうことによる熱雑音である。この元となる機械損失は thermoelastic damping と呼ばれる。Brownian 雑音は thermoelastic 雑音以外の熱雑音として経験的に知られているものである。この元となる機械損失は非粘性減衰に起因することが分かっており、structure damping と呼ばれる。また、鏡には高反射を実現するための誘電体多層膜によるコーティングが施されている。Thermoelastic 雑音は、基材の熱膨張係数の温度依存性に起因する substrate thermoelastic 雑音と、基材とコーティングの熱膨張係数・屈折率の違いに起因する thermo-optic 雑音 [34] に分けて考えられる。Brownian 雑音も、基材の structure damping に起因する substrate Brownian 雑音と、コーティングの structure damping に起因する coating Brownian 雑音に分けて考えられる。これらの他にも、鏡を透過するビームの位相が基材の屈折率に温度依存性があることによって揺らいでしまう thermo-refractive 雑音 [35] などが考えられている。KAGRA では、サファイア基材の鏡を 20 K まで冷却することで thermoelastic 雑音を低減するため、温度依存性の弱い coating Brownian 雑音が支配的な雑音となる [36]。また、CE では ∼ 123 K 程度でシリコンの熱膨張係数が非常に小さくなることを利用して、thermoelastic 雑音の低減を図る。

熱雑音は、10 ∼ 100 Hz 程度の帯域で感度を制限する。

2.3.4　輻射圧雑音

光が鏡で反射される際には、光子が鏡により運動量変化を受けており、鏡は光から力を受けることになる。この力は輻射圧と呼ばれる。光子数が一定であれば輻射圧の強さも一定だが、光子数が量子的に揺らぐと輻射圧も変動し、輻射圧揺らぎによって輻射圧雑音 (radiation preassure noise) が発生する。輻射圧雑音は ∼100Hz 以下の帯域における原理的な雑音だが、この帯域における輻射圧雑音の観測は熱雑音の低減が難しいために行われたことがない*3。熱雑音が極めて小さい KAGRA では、最も感度の良い 100 Hz 程度の帯域で設計感度を制限する。

*2 単振り子に対する定義は 4.2.2 小節を参照。

*3 巨視的なスケールの鏡に対しては、約 50 ng の鏡を用いて数 10kHz 程度で輻射圧雑音を観測した実験が 1 例だけある [37]。

2.3.5 散射雑音

散射雑音 (shot noise) は検出を行う際の光子数が量子的に揺らぐことによる雑音である。この揺らぎは統計的なので、散射雑音は周波数に依らないホワイトノイズである。$\sim$100 Hz 以上の高周波数帯域は散射雑音により感度が制限される。

光の量子性に起因する輻射圧雑音と散射雑音はまとめて量子雑音と呼ばれる。直感的に分かるように、光強度が強いほど検出の際の光子数の揺らぎは少なく、光強度が弱いほど輻射圧の揺らぎは小さい。輻射圧雑音と散射雑音は光強度に対してトレードオフの関係にあり、これから決まる感度の限界値を標準量子限界と呼ぶ。次章では量子雑音について詳しく議論する。

第 3 章

重力波検出器の量子雑音

現在の重力波検出器はレーザー干渉計を基本技術として用いているため、熱雑音や地面振動雑音といった技術的な雑音を低減していくと、最終的には光自体の揺らぎによって感度が制限されることになる。特に、真空状態が持つ量子的な揺らぎはレーザー干渉計型重力波検出器の原理的な感度限界を与えることになる。この光の量子性に起因する雑音は量子雑音と呼ばれる。本章では、様々な干渉計における量子雑音を具体的に導出する。

3.1 電場とその揺らぎの記法

量子雑音を導出するには、真空状態の揺らぎに対する干渉計の応答を考察する必要がある。これを計算するために、重力波検出器の分野では電場の揺らぎを振幅揺らぎと位相揺らぎに分けて考える手法 (two photon formalism) が用いられる [38]。本節では、古典的な電場とその揺らぎを同時に計算するための記法を定義する。

3.1.1 位相直交分解

電場に対する波動方程式

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{3.1}$$

の解として、z 軸正方向に伝搬する平面波

$$E(z,t) = E_0\cos(\omega_0 t - k_0 z) \tag{3.2}$$

を考える[*1]。ここで、$E_0^2/2$ は伝搬方向に垂直な面を単位時間あたりに通過する光子数であり、この電磁場の強度は $P_E = \hbar\omega_0 E_0^2/2$ である。これらは $\cos^2\omega_0 t$ の時間平均を取っ

[*1] 実際に空間を伝搬するのは 4.4.2 小節で考える Gaussian ビームだが、モードマッチが完全である場合には平面波と同様に議論できる。

て 1/2 倍しており、電場の振幅は適当に無次元化してある。さらに、距離 L を伝搬することによる位相変化は時間が $\tau = L/c$ だけ遅れることと同等であるので、この電場は t のみに依存する関数と見なすことができる。以下では、$E_1 = E_0 \cos k_0 z$ と $E_2 = E_0 \sin k_0 z$ を定数として

$$E(t) = E_1 \cos \omega_0 t + E_2 \sin \omega_0 t \tag{3.3}$$

と表す。この古典的な電場の振幅と位相がそれぞれ $\delta E_0(t)$ と $\delta\phi(t)$ だけ揺らぐと、

$$\begin{aligned} E'(t) &= (E_0 + \delta E_0) \cos(\omega_0 t - k_0 z - \delta\phi) \\ &= (E_1 + e_1) \cos \omega_0 t + (E_2 + e_2) \sin \omega_0 t \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。ここで、

$$e_1 = \frac{E_1}{E_0} \delta E_0 - E_2 \delta\phi_0 \tag{3.5}$$

$$e_2 = E_1 \delta\phi_0 + \frac{E_2}{E_0} \delta E_0 \tag{3.6}$$

はそれぞれ E_1 と E_2 の揺らぎである。E_1 と E_2 は自由空間を伝搬する間に $(E_1)^2 + (E_2)^2 = (E_0)^2$ を満たす様々な値を取るが、通常は入射電場が $E_1 = E_0, E_2 = 0$ となるように固定して考える。このとき、$e_1 = \delta E_0$ は振幅の揺らぎに、$e_2 = E_0 \delta\phi_0$ は位相の揺らぎに対応することが分かる。このことから、E_1 と e_1 を電場とその揺らぎに対する amplitude quadrature、E_2 と e_2 を電場とその揺らぎに対する phase quadrature と呼ぶ。

3.1.2 記法の定義と測定

ある地点での古典的な電場 $\boldsymbol{A}$ に対する揺らぎを対応する小文字 $\boldsymbol{a}$ で表す[*2]。3.3 節以降の議論では、$\boldsymbol{a}$ を周波数空間で考える必要がある。そこで、$a_1(t)$ と $a_2(t)$ に対する Fourier 変換を

$$a_j(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_j(t) \mathrm{e}^{-i\Omega t} \mathrm{d}t \quad (j = 1, 2) \tag{3.7}$$

と定義し、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{a}(\Omega)$ を amplitude quadrature と phase quadrature に分けて以下のようなベクトル形式で表す：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

[*2] 単一の角周波数 ω_0 を持った古典的な電場 (キャリア光) は電場の時間平均であり、その揺らぎは電場の時間的な変動である。すなわち、$\boldsymbol{A}$ は電場の DC 成分を、$\boldsymbol{a}$ はキャリアに対する電場の AC 成分を表している。より厳密な導出は補遺 A.1 で行う。

実際に測定できるのは強度 $P_A = \hbar\omega_0|\boldsymbol{A}|^2/2$ であり、揺らぎまでまとめて書くと

$$P_A^{\mathrm{tot}} \simeq \frac{\hbar\omega_0}{2}((A_1)^2 + (A_2)^2 + 2(A_1 a_1 + A_2 a_2)) = P_A + \delta P_A \tag{3.10}$$

と表せる[*3]。重力波信号や量子雑音などによる電場の揺らぎは $\delta P_{\mathrm{A}} = \hbar\omega_0(A_1 e_1 + A_2 e_2)$ としてキャリア光を介して測定されることが分かる。測定を行うためのキャリア光は参照光 (local oscillator) と呼ばれ、このときの入射電場に対する偏角 $\xi_{\mathrm{A}} = \arctan(A_2/A_1)$ はホモダイン角 (homodyne angle) と呼ばれる。

3.2　演算子の定義

光干渉計では、キャリア光とその揺らぎに対して様々な変換が行われる。直交位相分解を行った電場に対して干渉計を構成する各要素が与える変換を導出する[*4]。

3.2.1　鏡による透過・反射と重ね合わせ

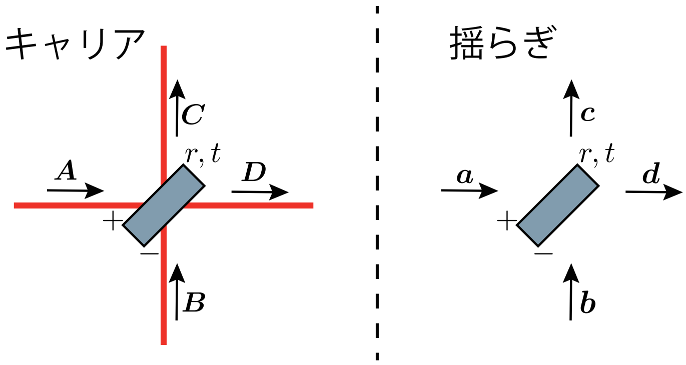


図 3.1: 鏡による重ね合わせ

図 3.1 のように、光学損失が無く、強度反射率・透過率がそれぞれ r^2、t^2 である対称的な鏡で電場を干渉させることを考える。エネルギー保存則より、透過光と反射光の位相差は $\pi/2$ であり、$r^2 + t^2 = 1$ を満たす。光干渉計においては、透過・反射の際に起きる絶対的な位相変化は干渉計内の伝搬と区別できないために重要ではなく、この鏡は両面に対する透過時と片面に対する反射時の位相変化を 0、もう片面に対する反射時の位相変化を π とした非対称な鏡と同等に扱ってよい。この鏡で電場の重ね合わせが行われると、

$$C(t) = rA(t) + tB(t) \tag{3.11}$$
$$D(t) = tA(t) - rB(t) \tag{3.12}$$

---

*3 $\boldsymbol{a}(\Omega)$ は複素ベクトルだが、$\hat{a}_j^\dagger(t) = \hat{a}_j(t)$ に対応して、揺らぎを含めた強度の定義が通常の内積とは異なった形式になることに注意する。

*4 この節で行う記号の定義などは後の議論で小節ごとに適宜変更されるので注意する。

となるので、

$$\boldsymbol{C} = r\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B} \tag{3.13}$$
$$\boldsymbol{D} = t\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{B} \tag{3.14}$$
$$\boldsymbol{c}(\Omega) = r\boldsymbol{a}(\Omega) + t\boldsymbol{b}(\Omega) \tag{3.15}$$
$$\boldsymbol{d}(\Omega) = t\boldsymbol{a}(\Omega) - r\boldsymbol{b}(\Omega) \tag{3.16}$$

と表せる。

3.2.2　伝搬

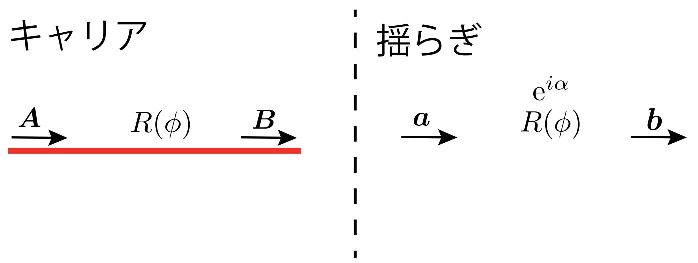


図 **3.2:** 自由空間中の伝搬

図 3.2 のように電場が距離 L の自由空間中を伝搬した場合を考える。これは時間が $\tau = L/c$ だけ遅れることと同等なので、

$$B(t) = (A_1 + a_1(t-\tau))\cos\omega_0(t-\tau) + (A_2 + a_2(t-\tau))\sin\omega_0(t-\tau) \tag{3.17}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{B} = R(\phi)\boldsymbol{A} \tag{3.18}$$
$$\boldsymbol{b}(t) = R(\phi)\boldsymbol{a}(t-\tau) \tag{3.19}$$

と表せる。$\phi \equiv \omega_0\tau \pmod{2\pi}$ は伝搬による位相変化であり、$R(\phi)$ は回転行列である：

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

電場の揺らぎを Fourier 変換すると

$$\boldsymbol{b}(\Omega) = e^{i\alpha}R(\phi)\boldsymbol{a}(\Omega) \tag{3.21}$$

となる。ここで、$\alpha = -\Omega\tau$ は角周波数 Ω の揺らぎの位相遅れである*5。

*5 この位相変化を単なる回転行列として表せないのは、アッパーサイドバンドとロウワーサイドバンド (3.2.4 小節参照) の伝搬に違いがあるためである。

3.2.3　光パラメトリック増幅

非線形光学効果の 1 つである光パラメトリック増幅 (Optical Parametric Amplification : OPA) はキャリア光の第二高調波 (ポンプ光) がシグナル光とアイドラ光と呼ばれる 2 つの光に下方変換される現象である。OPA は波長可変光源を実現する手段として研究が進められてきたが、キャリア光に対して縮退光パラメトリック増幅[*6]を起こすと、最小不確定状態を保ちながら量子的な揺らぎの amplitude quadrature と phase quadrature に相関を持たせることもできる。このような効果を与える要素は squeezer と呼ばれ、squeezer によって coherent 状態から変換された量子揺らぎのことを squeezed 状態と呼ぶ。OPA は広い周波数帯域で squeezed 状態を発生させるための手段として有用である。

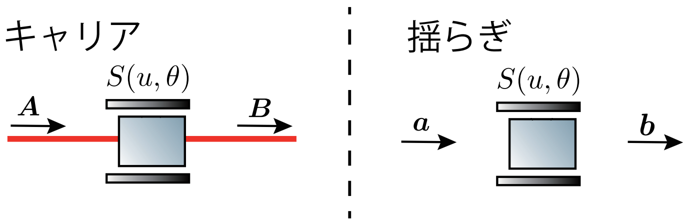


図 **3.3:** 光パラメトリック増幅

式 (B.30) より、図 5.9 のようにキャリア光に対して縮退 OPA を起こすと

$$\begin{aligned} B(t) &= [(A_1 + a_1(t))\cos\omega_0 t + (A_2 + a_2(t))\sin\omega_0 t]\cosh u \\ &\quad + [(A_1 + a_1(t))\cos(\omega_0 t - 2\theta) - (A_2 + a_2(t))\sin(\omega_0 t - 2\theta)]\sinh u \end{aligned} \tag{3.22}$$

となる。ここで、$2\theta = \phi_3 + \pi/2$ は squeezing angle であり、非線形結晶中での時間遅れは結晶長が短いとして無視した。よって

$$\boldsymbol{B} = S(u,\theta)\boldsymbol{A} \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{b}(\Omega) = S(u,\theta)\boldsymbol{a}(\Omega) \tag{3.24}$$

と表せる[*7]。$S(u,\theta)$ は一般的な squeezing 行列である：

$$\begin{aligned} S(u,\theta) &= \begin{pmatrix} \cosh u + \sinh u\cos 2\theta & \sinh u \sin 2\theta \\ \sinh u \sin 2\theta & \cosh u - \sinh u \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= R(\theta)\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} R(-\theta) \end{aligned} \tag{3.25}$$

[*6] シグナル光とアイドラ光の周波数がキャリア光に等しくなるような状態にした OPA のこと。
[*7] より厳密には、揺らぎに対する変換はアッパーサイドバンドとロウワーサイドバンドの非縮退 OPA を考えることから導出する必要がある。

ここで、$s = \mathrm{e}^u$ は squeezing factor である。OPA によるキャリア光強度の増幅率はキャリア光とポンプ光の位相差に依るが、例えば $A_1 = A_0$、$A_2 = 0$、$\theta = 0$ とすると s^2 倍に増幅される。この増幅が行われる過程は周波数に依らないので、OPA は広帯域で任意の squeezing factor と squeezing angle を実現することができる squeezer であることが分かる。また、$\det(S(u,\theta)) = 1$ なので、OPA などの squeezer を通しても量子揺らぎに対する最小不確定状態は変化しない [39]。

3.2.4　信号の発生と Ponderomotive Squeezing

考察する干渉計には、図 3.4 のような重力波に対して自由質点となっている鏡 (test mass) が含まれる。この鏡で電場が反射すると、鏡の微小変位に比例した信号が電場の揺らぎに加わる。さらに、電場揺らぎの各 quadrature は鏡が光から受ける力 (輻射圧) を介して互いに変換される。特に、量子的な揺らぎに対しては鏡が squeezer として働くようになるため、この変換のことを ponderomotive squeezing と呼ぶ。

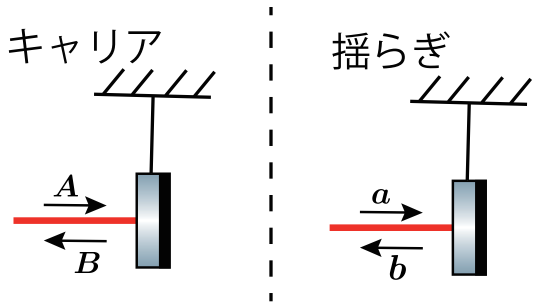


図 **3.4:** Test mass における反射

鏡が微小変位 $\delta x(t)$ だけ動いたとき、反射光が受ける位相変化を考えれば

$$B(t) \simeq (A_1 + a_1(t) - 2A_2 k_0 \delta x(t)) \cos\omega_0 t + (A_2 + a_2(t) + 2A_1 k_0 \delta x(t)) \sin\omega_0 t \quad (3.26)$$

となるので、

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{a}(t) + 2k_0 \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} \delta x(t) \quad (3.28)$$

と表せる。電場の揺らぎに対する周波数応答を考えるために、鏡の変位に対する運動方程式を立てる。鏡に力として働くのは、重力波による力、鏡を懸架していることによる機械的な復元力、そして電場が鏡で反射する際の運動量変化に起因する輻射圧 F_{rpf} である。光子数の揺らぎまで考えると、運動量と力積の関係から

$$F_{\mathrm{rpf}}^{\mathrm{tot}}(t) = 2\hbar k_0 \times \frac{1}{2}((A_1 + a_1(t))^2 + (A_2 + a_2(t))^2) \simeq F_{\mathrm{rpf}} + \delta F_{\mathrm{rpf}}(t) \quad (3.29)$$

である。定常的な輻射圧 $F_{\mathrm{rpf}} = \hbar k_0(A_1^2 + A_2^2)$ は機械的な復元力と力が釣り合うことになるので無視する。鏡の変位揺らぎに対する運動方程式は、輻射圧揺らぎ $\delta F_{\mathrm{rpf}}(t) = 2\hbar k_0(A_1 a_1(t) + A_2 a_2(t))$ を用いて

$$m\frac{\mathrm{d}^2(\delta x(t))}{\mathrm{d}t^2} = \delta F_{\mathrm{rpf}} + \frac{1}{2}mL\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.30}$$

と表せる。式 (3.30) の右辺第二項は重力波信号が鏡に与える力である。重力波の影響は 2 つの自由質点間の距離に現れるので、次節以降で定義する腕[*8]の長さを L とし、重力波による変位を L で規格化して $h(t)$ と表してある。Fourier 変換すると

$$\delta x(\Omega) = -\frac{2\hbar k_0}{m\Omega^2}(A_1 a_1(\Omega) + A_2 a_2(\Omega)) + \frac{1}{2}Lh(\Omega) \tag{3.31}$$

となるので、式 (3.28) の Fourier 変換は

$$\boldsymbol{b}(\Omega) = P(\kappa, \xi_A)\boldsymbol{a}(\Omega) + \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\boldsymbol{n}_{A_\perp} h(\Omega) \tag{3.32}$$

と求まる。ここで、

$$P(\kappa, \xi_A) = R(\xi_{\mathrm{A}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} R(-\xi_{\mathrm{A}}) \tag{3.33}$$

は ponderomotive squeezing 行列であり、

$$\boldsymbol{n}_{A_\perp} = \begin{pmatrix} -\sin\xi_{\mathrm{A}} \\ \cos\xi_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

はキャリア $\boldsymbol{A}$ に垂直な単位ベクトルである。$\xi_{\mathrm{A}} = \arctan(A_2/A_1)$ は入射光に対するキャリアの偏角を表す。また、

$$\kappa = \frac{8P_A\omega_0}{mc^2\Omega^2} \tag{3.35}$$

は自由空間におけるオプトメカニカル結合定数であり、

$$h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{8\hbar}{mL^2\Omega^2}} \tag{3.36}$$

は長さ L の腕を持つ自由質点系で構成されたレーザー干渉計型重力波検出器の標準量子限界 (Standard Quantum Limit : SQL) である [40]。

式 (3.32) の第一項は鏡の反射による入射した揺らぎの変形を表している。第一項の $P(\kappa, \xi_A)$ は squeezing 行列を用いて

$$P(\kappa, \xi_A) = R(\xi_A)S(-u_{\mathrm{P}}, \theta_{\mathrm{P}})R(-\phi_{\mathrm{P}})R(-\xi_A) \tag{3.37}$$

---

*8 Michelson 干渉計の場合にはビームスプリッタとエンドミラー間を指すが、3.3.3 小節で扱う Fabry-Perot Michelson 干渉計の場合は Input Test Mass (ITM) と End Test Mass (ETM) 間を指す。

と表すことができる。ここで、$u_{\mathrm{P}} = \mathrm{arcsinh}(\kappa/2)$、$2\theta_{\mathrm{P}} = \mathrm{arccot}(\kappa/2)$、$\phi_{\mathrm{P}} = \arctan(\kappa/2)$ である。これは鏡が周波数に依存した squeezer として働いていることを示している。

式 (3.32) の第二項はキャリアと直行した方向に重力波と同じ周波数を持った揺らぎが信号として発生することを表している。ある周波数 ω_{GW} を持った時間領域での信号 $\boldsymbol{b}'(t)$ は、簡単のために入射キャリア $\boldsymbol{A}$ が amplitude quadrature 方向を向いている ($A_1 = A_0$、$A_2 = 0$) とすれば、

$$\boldsymbol{b}'(t) = b'_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \omega_{\mathrm{GW}} t \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

と表せる。ここで、b'_0 は信号の振幅である。位相直交分解を行う前の表式に直すと、これは次のように表される揺らぎ $\boldsymbol{b}'_{\uparrow}(t)$ と $\boldsymbol{b}'_{\downarrow}(t)$ の和だと言うこともできる：

$$b'_{\uparrow}(t) = -\frac{b'_0}{2} \cos((\omega_0 + \omega_{\mathrm{GW}})t) \tag{3.39}$$

$$b'_{\downarrow}(t) = \frac{b'_0}{2} \cos((\omega_0 - \omega_{\mathrm{GW}})t) \tag{3.40}$$

$\boldsymbol{b}'_{\uparrow}(t)$ はキャリアより周波数が ω_{GW} だけ高い側波帯を、$\boldsymbol{b}'_{\downarrow}(t)$ はキャリアより周波数が ω_{GW} だけ低い側波帯を表しているので、これらをそれぞれアッパーサイドバンド (upper sideband) とロウワーサイドバンド (lower sideband) と呼ぶ。このイメージを図 3.5 に示した。重力波検出器は重力波によりキャリアから発生するサイドバンドを検出する装置だとも言える。

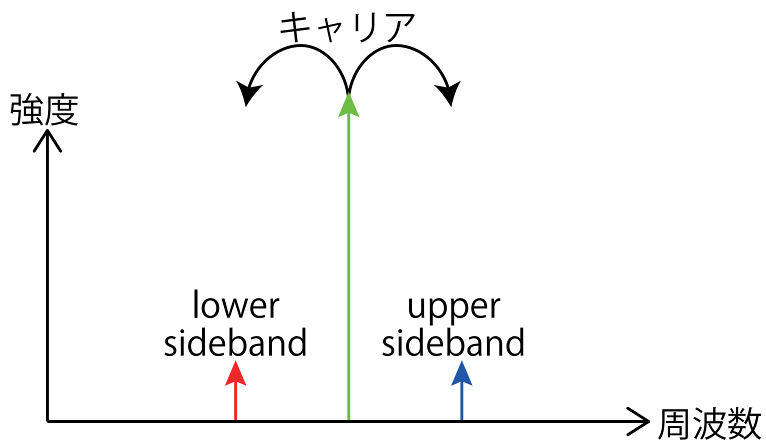


図 **3.5:** 重力波により発生するサイドバンド

3.3　重力波検出器における量子雑音の基礎

現在稼働している重力波検出器は、Michelson 干渉計を基本とした複合多重干渉計である。本節では、GEO600 の光学系構成である Dual Recycling Michelson 干渉計 (DR 干

渉計) や、Advanced LIGO の光学系構成である Resonant Sideband Extraction (RSE) 干渉計などの量子雑音を具体的に導出する。本章中のプロットは、特に断らない限り腕の長さを $L = 3$ km、鏡の質量を $m = 23$ kg として行う。

3.3.1 Michelson 干渉計

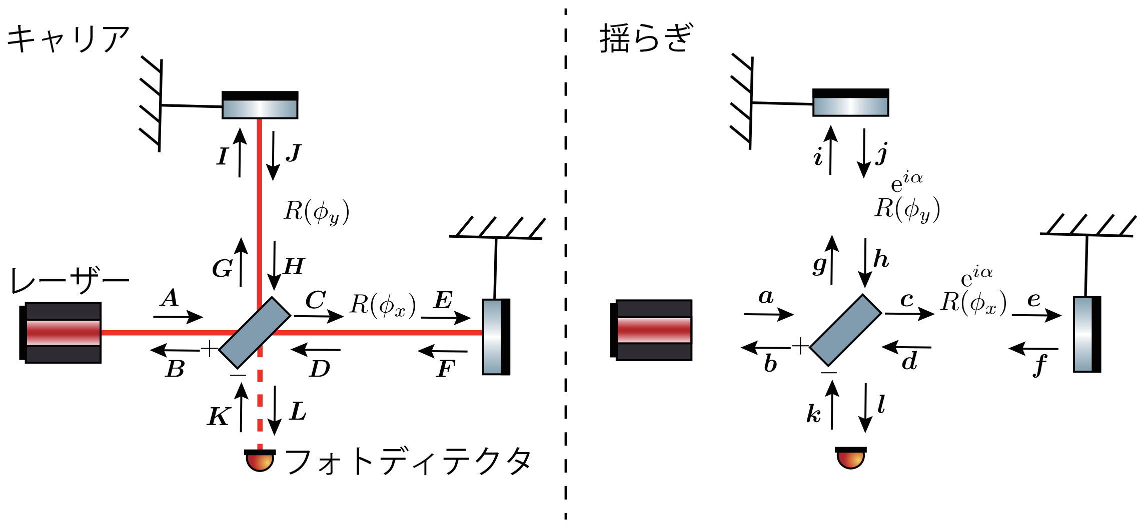


図 **3.6:** Michelson 干渉計

まずは、レーザー干渉計型重力波検出器として最も簡単な構成である Michelson 干渉計の量子雑音を導出する。電場とその揺らぎは図 3.6 のように定義する。Beam Splitter (BS) は等方的であり、強度透過率・反射率は等しく 1/2 である。また、x arm と y arm の長さをそれぞれ L_x、L_y とし、腕を伝搬する間の位相変化をそれぞれ $\phi_x \equiv L_x\omega_0/c \pmod{2\pi}$、$\phi_y \equiv L_y\omega_0/c \pmod{2\pi}$ とする。両腕の長さはおおよそ等しい ($L_x \simeq L_y \simeq L$) ため、電場の揺らぎの位相遅れは両腕で等しく $\alpha = -L\Omega/c$ であるとしている。古典的な電場に対する入出力関係 (input output relation) を全て書き下すと、

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{H}+\boldsymbol{D})/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K})/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K})/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{L} = (\boldsymbol{H}-\boldsymbol{D})/\sqrt{2} \\
\boldsymbol{D} = R(\phi_x)\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{E} = R(\phi_x)\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{H} = R(\phi_y)\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{I} = R(\phi_y)\boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} \qquad (3.41)
\end{gathered}$$

である。入射電場は $A_1 = A_0$、$A_2 = 0$、$K_1 = 0$、$K_2 = 0$ とする。これを $\boldsymbol{B}' =$

$R(-2\phi_x)\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{L}' = R(-2\phi_x)\boldsymbol{L}$ について解くと[*9]、

$$\boldsymbol{B}' = \frac{1}{2}\left[I + R(2\phi_-)\right]\boldsymbol{A} \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{L}' = \frac{1}{2}\left[-I + R(2\phi_-)\right]\boldsymbol{A} \tag{3.43}$$

と求まる。ここで、$\phi_- = \phi_y - \phi_x$ とした。出力電場は x arm と y arm の相対的な位相差のみに依ることが分かる。$\phi_- = 0$ としたとき、フォトディテクタのある Michelson 干渉計の出射ポート[*10]にキャリア光が現れなくなるため、この状態をダークフリンジと呼ぶ。逆に、$\phi_- = \pi/2$ としたとき、干渉計に入射した全てのキャリア光が出射ポートに現れるようになるため、この状態をブライトフリンジと呼ぶ。これ以外の状態 ($\phi_- = \pi/4$ など) は入射ポートと出射ポートの双方にキャリア光が現れるようになるため、ミッドフリンジと呼ぶ。

電場の揺らぎに対する入出力関係を全て書き下すと、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{h}+\boldsymbol{d})/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{k})/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{g} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k})/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{l} = (\boldsymbol{h}-\boldsymbol{d})/\sqrt{2} \\
&\boldsymbol{d} = \mathrm{e}^{i\alpha}R(\phi_x)\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{e} = \mathrm{e}^{i\alpha}R(\phi_x)\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{f} = P(\kappa,\xi_E)\boldsymbol{e} - \frac{\sqrt{\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\boldsymbol{n}_{E_\perp}h(\Omega) \\
&\boldsymbol{h} = \mathrm{e}^{i\alpha}R(\phi_y)\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{i} = \mathrm{e}^{i\alpha}R(\phi_y)\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{j} = P(\kappa,\xi_J)\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\boldsymbol{n}_{J_\perp}h(\Omega)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

である。ここでは $h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{4\hbar/(mL^2\Omega^2)}$ とし、$P_E = P_J = P_A/2$ であるため $\kappa = 4P_A\omega_0/(mc^2\Omega^2)$ とした。重力波は四重極分極を持つため、x 軸方向のエンドミラーと y 軸方向のエンドミラーに加わる信号の符号は異なる。また、$\boldsymbol{k}$ は古典的には $\boldsymbol{0}$ だが、量子雑音を考える際には真空状態の量子的な揺らぎ (真空場) に対応して $\boldsymbol{0}$ とは見なせなくなることに注意する。古典的な電場と同じく、$\boldsymbol{b}' = R(-2\phi_x)\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{l}' = R(-2\phi_x)\boldsymbol{l}$ について解くと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}' = &\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2i\alpha}\left[I + R(2\phi_-)\right]P(\kappa,0)\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2i\alpha}\left[-I + R(2\phi_-)\right]P(\kappa,0)\boldsymbol{k} \\
&+\mathrm{e}^{i\alpha}\frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(2\phi_-) \\ -1+\cos(2\phi_-)\end{pmatrix}h(\Omega)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{l}' = &\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2i\alpha}\left[-I + R(2\phi_-)\right]P(\kappa,0)\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2i\alpha}\left[I + R(2\phi_-)\right]P(\kappa,0)\boldsymbol{k} \\
&+\mathrm{e}^{i\alpha}\frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(2\phi_-) \\ 1+\cos(2\phi_-)\end{pmatrix}h(\Omega)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

[*9] 任意の位相変化に対して $P_{B'}^{\mathrm{tot}} = P_B^{\mathrm{tot}}$、$P_{L'}^{\mathrm{tot}} = P_L^{\mathrm{tot}}$ であり、測定を行う位置は強度測定に影響を及ぼさない。

[*10] 出射ポートは Anti-Symmetric (AS) port とも呼ばれる。入射ポートは symmetric port や REFL port などとも呼ばれる。

と求まる。重力波信号の項に注目すると、ダークフリンジのときには全ての信号が出力ポートに表れ、ブライトフリンジのときには全ての信号が入力ポートに表れることが分かる[*11]。このため、重力波検出器として用いる場合には Michelson 干渉計をダークフリンジで動作させる。

式 (3.46) において $\phi_- = 0$ とすれば

$$\boldsymbol{l}' = \mathrm{e}^{2i\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{k} + \mathrm{e}^{i\alpha}\frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.47}$$

となる。第一項は電場の揺らぎによる雑音を、第二項は重力波信号を表している。式 (3.6) から、重力波信号の周波数応答は式 (2.7) の結果を再現している。また、ダークフリンジで動作させることにより入射電場の揺らぎは完全に打ち消されるが、真空場 $\boldsymbol{k}$ が雑音として働くことが分かる。信号は全て phase quadrature に表れているので、ホモダイン角を $\pi/2$ として測定を行う[*12]。信号雑音比を表す演算子 $h_n(\Omega)$ を

$$h_n(\Omega) = \frac{h_{\mathrm{SQL}}}{\sqrt{2\kappa}}(-\kappa k_1 + k_2)\mathrm{e}^{i\alpha} \tag{3.48}$$

と定義すれば、式 (A.38) より、信号雑音比に対する片側パワースペクトル密度 $S_h(\Omega)$ が得られる：

$$S_h(\Omega) = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right) \tag{3.49}$$

振幅スペクトル密度 $\sqrt{S_h(\Omega)} \geq h_{\mathrm{SQL}}$ は Michelson 干渉計の感度を表す。図 3.7 に量子雑音によって定まる Michelson 干渉計の感度曲線を示した。Strain が低いほどノイズが少なく、重力波検出器としての性能が高いことを示している。図 3.7 の低周波成分は f^{-2} に比例しているため、式 (3.49) の第一項に対応する。式 (3.47) と式 (3.48) より、これは真空場の amplitude quadrature が輻射圧揺らぎとなり、鏡の揺らぎを介して phase quadrature の雑音に変換されたものなので、輻射圧雑音を表している。一方で、図 3.7 の高周波成分は f^0 に比例しているため、式 (3.49) の第二項に対応する。これは真空場の phase quadrature が直接雑音として現れているものなので、散射雑音を表している。輻射圧雑音と散射雑音はレーザー光強度についてトレードオフの関係にあり、これらが等しくなるとき ($\kappa = 1$) に振幅スペクトル密度は h_{SQL} に一致する。

*11 ダークフリンジで動作させるとき、重力波などの x arm と y arm が逆方向に変化する差動信号は出力ポートに全て現れるが、x arm と y arm が同じ方向に変化する同相信号は入力ポートに全て現れる。

*12 ダークフリンジの場合には $\boldsymbol{L}' = 0$ となり強度測定が行えなくなるが、式 (3.43) より、僅かに動作点をずらすことで phase quadrature 方向のキャリアを得ることができることが分かる。このキャリアは DC offset と呼ばれる。また、amplitude quadrature 方向のキャリアは ETM などの反射率・曲率誤差から得られ、このキャリアは contrast defect と呼ばれる。DC offset と contrast defect の比率からホモダイン角が決まる。

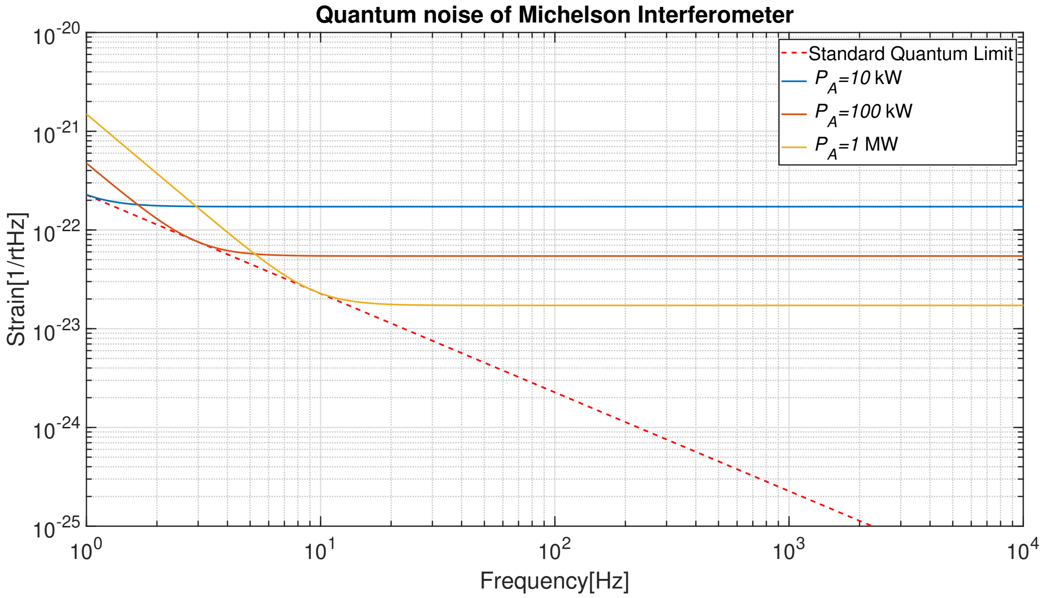


図 **3.7:** Michelson 干渉計の感度

Michelson 干渉計を用いた場合、ターゲットとしている重力波の帯域である $f \sim 100\text{Hz}$ においては散射雑音により感度が制限されることになる。散射雑音はセンシングノイズであるため、レーザー光強度を上げたり信号に対する応答を強化したりすることで低減できる。しかし、現在安定したレーザー光源として使用できるのは 100W 程度までであり、Michelson 干渉計では信号に対する応答を向上させることもできない。この問題を解決するために、実際の重力波検出器では主干渉計内に光共振器が多用される。

3.3.2　Fabry-Perot 共振器

共振器は同じ鏡の間を光を何度も往復させる多重干渉計である。ここでは、最も簡単な共振器である Fabry-Perot 共振器について考える。

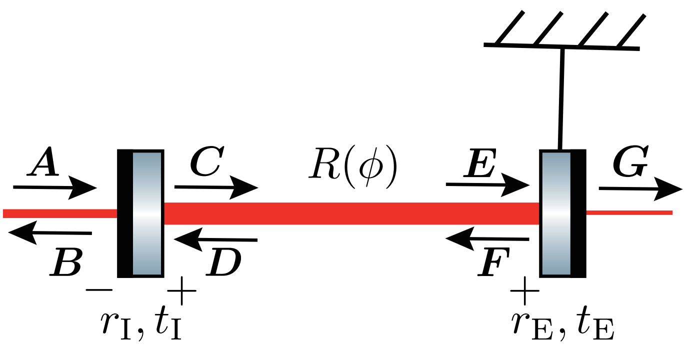


図 **3.8:** Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot 共振器は図 3.8 のような 2 つの鏡を向かい合わせて光を往復させる共振器である。入射鏡 (Input Test Mass：ITM) とエンド鏡 (End Test Mass：ETM) の強度反射率を $r_{\mathrm{I}}^2, r_{\mathrm{I}}^2$ とし、強度透過率をそれぞれ $t_{\mathrm{I}}^2 = 1 - r_{\mathrm{I}}^2, t_{\mathrm{E}}^2 = 1 - r_{\mathrm{E}}^2$ とする。また、ITM と ETM 間の距離を L とし、半周あたりの位相変化を $\phi \equiv L\omega_0/c \pmod{2\pi}$ とする。古典的な電場に対しては

$$\begin{gathered} \boldsymbol{B} = -r_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A} + t_{\mathrm{I}}\boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{C} = t_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A} + r_{\mathrm{I}}\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D} = R(\phi)\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{E} = R(\phi)\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{F} = r_{\mathrm{E}}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{G} = t_{\mathrm{E}}\boldsymbol{E} \end{gathered} \tag{3.50}$$

という関係が成り立つ。反射光 $\boldsymbol{B}$、透過光 $\boldsymbol{G}$ についてそれぞれ解けば、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \left[-r_{\mathrm{I}}I + t_{\mathrm{I}}^2 r_{\mathrm{E}}[I - r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}R(2\phi)]^{-1}R(2\phi)\right]\boldsymbol{A} \\ &= -r_{\mathrm{I}}A_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{t_{\mathrm{I}}^2 r_{\mathrm{E}} A_0}{1 + r_{\mathrm{I}}^2 r_{\mathrm{E}}^2 - 2r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}\cos 2\phi}\begin{pmatrix}\cos 2\phi - r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}\\ \sin 2\phi\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= t_{\mathrm{I}}t_{\mathrm{E}}[I - r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}R(2\phi)]^{-1}R(\phi)\boldsymbol{A} \\ &= \frac{t_{\mathrm{I}}t_{\mathrm{E}}A_0}{1 + r_{\mathrm{I}}^2 r_{\mathrm{E}}^2 - 2r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}\cos 2\phi}\begin{pmatrix}(1 - r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}})\cos 2\phi\\ (1 + r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}})\sin 2\phi\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.52}$$

となる。よって、古典的な反射光強度 P_B と透過光強度 P_G は

$$P_B = \frac{r_{\mathrm{I}}^2 + r_{\mathrm{E}}^2 - 2r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}\cos 2\phi}{1 + r_{\mathrm{I}}^2 r_{\mathrm{E}}^2 - 2r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}\cos 2\phi}P_A \tag{3.53}$$

$$P_G = \frac{t_{\mathrm{I}}^2 t_{\mathrm{E}}^2}{1 + r_{\mathrm{I}}^2 r_{\mathrm{E}}^2 - 2r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}\cos 2\phi}P_A \tag{3.54}$$

と求まる。エネルギー保存則に対応して、$P_B + P_G = P_A$ であることが分かる。

共振器内光強度 P_E は

$$P_E = \frac{t_{\mathrm{I}}^2}{1 + r_{\mathrm{I}}^2 r_{\mathrm{E}}^2 - 2r_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{E}}\cos 2\phi}P_A \tag{3.55}$$

であり、ϕ に対する周期関数であることが分かる。図 3.9 に共振器内強度を ϕ の関数としてプロットした。$2\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ であるとき共振器内光量が最大になるので、このとき共振器が共振状態にあるという。共振状態が現れる間隔は Free Spectrum Range (FSR) と呼ばれ、FSR に対応する共振器長間隔 L_{FSR} とレーザーの周波数間隔 f_{FSR} は、それぞれ

$$L_{\mathrm{FSR}} = \frac{\lambda_0}{2} \tag{3.56}$$

$$f_{\mathrm{FSR}} = \frac{c}{2L} \tag{3.57}$$

である。f_{FSR} を FSR と呼ぶことも多い。鏡の反射率が高く共振が十分鋭い場合、共振ピークの半値全幅 (Full Width at Half Maximum：FWHM) に対応するレーザーの周波

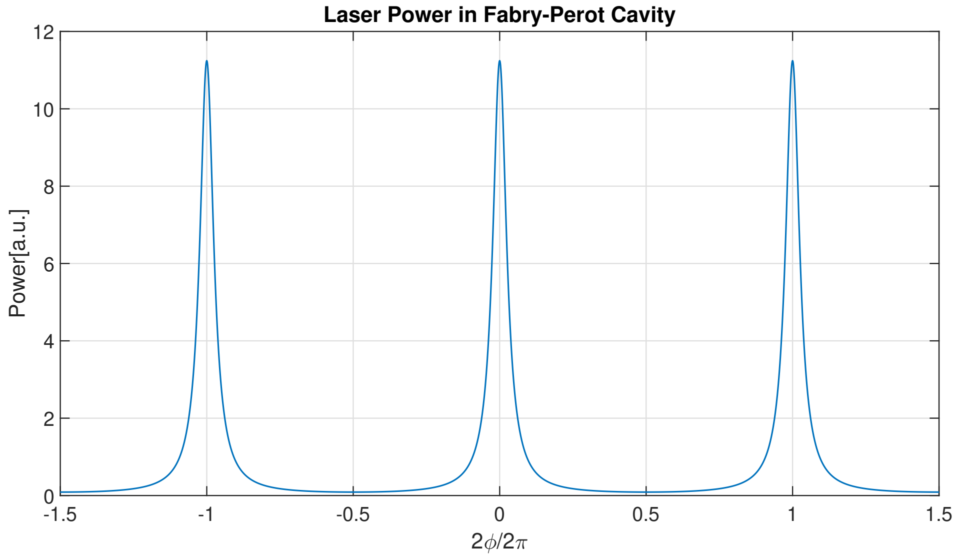


図 **3.9:** Fabry-Perot 共振器内部のレーザー光強度
$r_{\mathrm{I}} = \sqrt{0.7}$、$r_{\mathrm{E}} = 1$ とし、入射光強度 P_A で規格化して示してある。ここでは周期関数になるように ϕ を定義した。

数シフト f_{FWHM} は

$$f_{\mathrm{FWHM}} = \frac{1 - r_{\mathrm{I}} r_{\mathrm{E}}}{\pi \sqrt{r_{\mathrm{I}} r_{\mathrm{E}}}} f_{\mathrm{FSR}} \tag{3.58}$$

と求まる。FSR と FWHM の比は共振器のフィネス $\mathcal{F}$ と呼ばれる：

$$\mathcal{F} = \frac{f_{\mathrm{FSR}}}{f_{\mathrm{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_{\mathrm{I}} r_{\mathrm{E}}}}{1 - r_{\mathrm{I}} r_{\mathrm{E}}} \simeq \frac{2\pi}{T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{E}}} \tag{3.59}$$

ここで、$T_{\mathrm{I}} = t_{\mathrm{I}}^2, T_{\mathrm{E}} = t_{\mathrm{E}}^2$ である。

$T_{\mathrm{I}}, T_{\mathrm{E}}, \phi$ を微小量だとして式 (3.55) を近似すると、

$$P_E \simeq \frac{T_{\mathrm{I}}}{\frac{1}{4}(T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{E}})^2 + 4\phi^2} P_A \tag{3.60}$$

となり、共振器内強度は Lorentzian で表せることが分かる。ここで、反射率と透過率の関係として

$$\begin{aligned} r &\simeq 1 - \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T^2 \\ \frac{1}{r} &\simeq 1 + \frac{1}{2}T + \frac{3}{8}T^2 \end{aligned} \tag{3.61}$$

を用いた。Fabry-Perot 共振器は ITM とそれ以外 (ここでは ETM) の光学ロスの関係から 3 つの状態に分けて考えることができ、$T_{\mathrm{I}} > T_{\mathrm{E}}$ である場合をオーバーカップリング、$T_{\mathrm{I}} = T_{\mathrm{E}}$ である場合をクリティカルカップリング、$T_{\mathrm{I}} < T_{\mathrm{E}}$ である場合をアンダーカップ

リングと呼ぶ。共振状態にあるとき ($\phi = 0$) のそれぞれの場合の共振器内光量をフィネスで表すと、

$$P_E \simeq \frac{2\mathcal{F}}{\pi} P_A \quad (T_\mathrm{I} \gg T_\mathrm{E}) \tag{3.62}$$

$$P_E \simeq \frac{\mathcal{F}}{\pi} P_A \quad (T_\mathrm{I} = T_\mathrm{E}) \tag{3.63}$$

$$P_E \simeq 0 \quad (T_\mathrm{I} \ll T_\mathrm{E}) \tag{3.64}$$

である。特に、極端なオーバーカップリングである場合には共振器内に強い光量が蓄えられ、入射した電場は全て反射する ($P_B \simeq P_A$) ことが分かる。また、クリティカルカップリングの場合には入射した電場は全て透過する ($P_G \simeq P_A$) ことも分かる。アンダーカップリングの場合には共振器内に光を蓄えることができなくなるため、共振器はアンダーカップリングにならないよう注意して構成する必要がある。

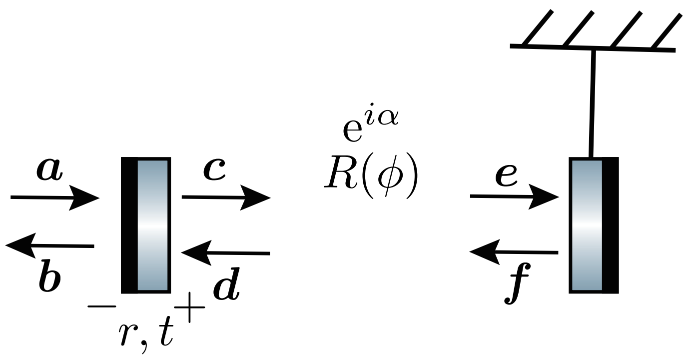


図 **3.10:** Fabry-Perot 共振器の揺らぎ

次に、電場の揺らぎについて、図 3.10 のように完全なオーバーカップリングである場合 ($r_\mathrm{I} = r, t_\mathrm{I} = t, r_\mathrm{E}^2 = 1$) を考える。ITM が固定されている場合、電場の揺らぎに対して

$$\boldsymbol{b} = -r\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{c} = t\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{d} = \mathrm{e}^{i\alpha} R(\phi)\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{e} = \mathrm{e}^{i\alpha} R(\phi)\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{f} = P(\kappa, \xi_E)\boldsymbol{e} + \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_\mathrm{SQL}} \boldsymbol{n}_{E_\perp} h(\Omega) \tag{3.65}$$

という関係が成り立つ。$\alpha = -L\Omega/c$ は半周あたりの位相遅れである。ここでは共振状態である場合 ($\phi = 0$) を考えると、$\kappa = 8P_E\omega_0/(mc^2\Omega^2) \simeq 16\mathcal{F}P_A\omega_0/(\pi mc^2\Omega^2)$、$h_\mathrm{SQL} = \sqrt{8\hbar/(mL^2\Omega^2)}$ である。$\boldsymbol{b}$ について解けば、

$$\boldsymbol{b} = \left[-rI + \frac{t^2\mathrm{e}^{2i\alpha}}{(1 - r\mathrm{e}^{2i\alpha})^2} \begin{pmatrix} 1 - r\mathrm{e}^{2i\alpha} & 0 \\ -\kappa & 1 - r\mathrm{e}^{2i\alpha} \end{pmatrix}\right] \boldsymbol{a} + \frac{t\mathrm{e}^{i\alpha}}{(1 - r\mathrm{e}^{2i\alpha})^2} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_\mathrm{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - r\mathrm{e}^{2i\alpha} \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.66}$$

となる。さらに $T = t^2, \alpha$ を微小量として近似すると、

$$\boldsymbol{b} \simeq \frac{\gamma - i\Omega}{\gamma + i\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\gamma\iota}{\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)} & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{a} + \frac{\gamma - i\Omega}{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}} \frac{\sqrt{\frac{2\gamma\iota}{\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)}}}{h_\mathrm{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.67}$$

と表せる。ここで、

$$\gamma = \frac{Tc}{4L} \tag{3.68}$$

$$\iota = \frac{8P_E\omega_0}{mLc} \tag{3.69}$$

と置いた。Michelson 干渉計の応答である式 (3.47) と対応させるために、さらに

$$\mathcal{K} = \frac{\gamma\iota}{\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)} \tag{3.70}$$

$$\beta = \arctan(-\Omega/\gamma) \tag{3.71}$$

と置けば、

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{e}^{2i\beta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{a} + \mathrm{e}^{i\beta}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}h(\Omega) \tag{3.72}$$

と表せる。

式 (3.67) において、入射電場の揺らぎ $\boldsymbol{a}$ を無視して信号の周波数応答を見ると、Fabry-Perot 共振器は 1 次のローパスフィルタ[*13]として振る舞っていることが分かる：

$$\frac{b_2(\Omega)}{h(\Omega)} \sim \frac{1}{1+i\Omega/\gamma} \tag{3.73}$$

このために、γ は cavity pole と呼ばれる[*14]。直感的には、図 3.11 のように共振幅より大きな周波数を持ったサイドバンドが共振しなくなることに対応している。Cavity pole に対応する周波数は半値半幅 (HWHM) に対応する周波数シフト $f_{\mathrm{HWHM}} = f_{\mathrm{FWHM}}/2$ と一致する：

$$\frac{\gamma}{2\pi} = f_{\mathrm{HWHM}} \tag{3.74}$$

周波数が cavity pole より十分低い ($\Omega \ll \gamma$) とき、Fabry-Perot 共振器におけるオプトメカニカル結合定数 $\mathcal{K}$ は

$$\mathcal{K} \simeq \frac{8P_A\omega_0}{mc^2\Omega^2}\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \tag{3.75}$$

であり、自由質点に対するカップリング定数と比較して $(2\mathcal{F}/\pi)^2$ 倍されていることが分かる。これは共振器内のレーザー光強度が $2\mathcal{F}/\pi$ 倍されていることに加え、信号の応答も

[*13] 4.2.3 節参照。

[*14] Cavity pole は入射した揺らぎに対する周波数応答も決める。Cavity pole より周波数が低い揺らぎは共振した後に反射され、cavity pole より周波数が高い揺らぎは共振せずに直接反射されるような振る舞いをする。特にクリティカルカップリングである場合には、入射した電場のうち DC 成分であるキャリアや cavity pole より周波数が低い揺らぎは透過し、cavity pole より周波数が高い揺らぎは反射されるようになる。このような共振器は強度安定化や周波数雑音除去のために用いられる。

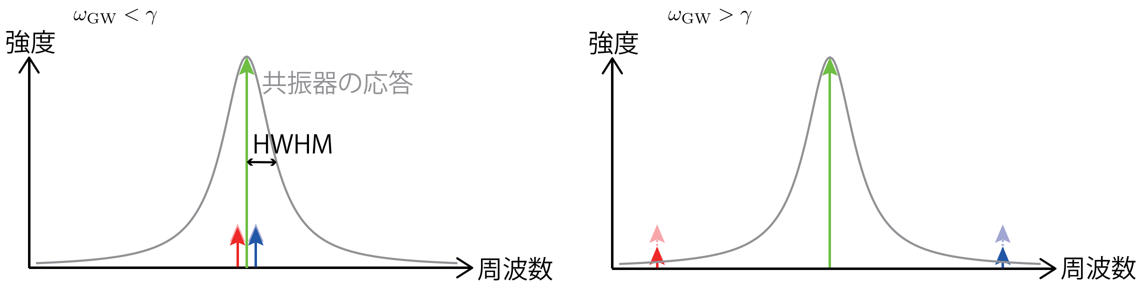


図 3.11: サイドバンドの Fabry-Perot 共振器に対する応答

$2\mathcal{F}/\pi$ 倍に強化されているためである。すなわち、Fabry-Perot 共振器はレーザー光強度と信号に対する応答の双方をそれぞれフィネス倍程度増幅させる共振器であると言える。ただし、入射した真空場も同程度に増幅されるため、信号雑音比における標準量子限界 $h_{\rm SQL}$ は変更されない。また、$\Omega \ll \gamma$ であるとき、Fabry-Perot 共振器で反射されることによる位相遅れ β は

$$\beta \simeq \frac{2\mathcal{F}}{\pi}\alpha \tag{3.76}$$

となり、自由空間を伝搬することによる時間遅れに比べて $2\mathcal{F}/\pi$ 倍される。すなわち、Fabry-Perot 共振器は実効的な伝搬距離をフィネス倍程度にすることができる。

最後に、ITM が ETM と質量の等しい自由質点である場合について考える。ITM と ETM の相対運動に対する運動方程式を考えるため、実効的な質量は換算質量として 1/2 倍される。また、ITM でも ponderomotive squeezing が起こり、$P_D = P_E \gg P_A, P_B$ であることから、実効的なカップリング定数が 2 倍される。これらをまとめると、

$$\iota \to \frac{16P_E\omega_0}{mLc} \tag{3.77}$$

$$\mathcal{K} \to \frac{2\gamma\iota}{\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)} \tag{3.78}$$

$$h_{\rm SQL} \to \sqrt{\frac{16\hbar}{mL^2\Omega^2}} \tag{3.79}$$

と変更すればよいことが分かる。

3.3.3　Fabry-Perot Michelson 干渉計

Mchelson 干渉計の腕に Fabry-Perot 共振器を組むことで構成される干渉計は Fabry-Perot Michelson 干渉計 (FPMI) と呼ばれる。図 3.12 のような、ITM の強度透過率が $T = t^2$ である長さ L の完全なオーバーカップリング共振器を両腕に持つ干渉計を考える。BS と ITM で構成される Michelson 干渉計部分はダークフリンジで動作しており、適当な位置で測定を行うとする。また、両腕の Fabry-Perot 共振器は共振状態であり、腕で反

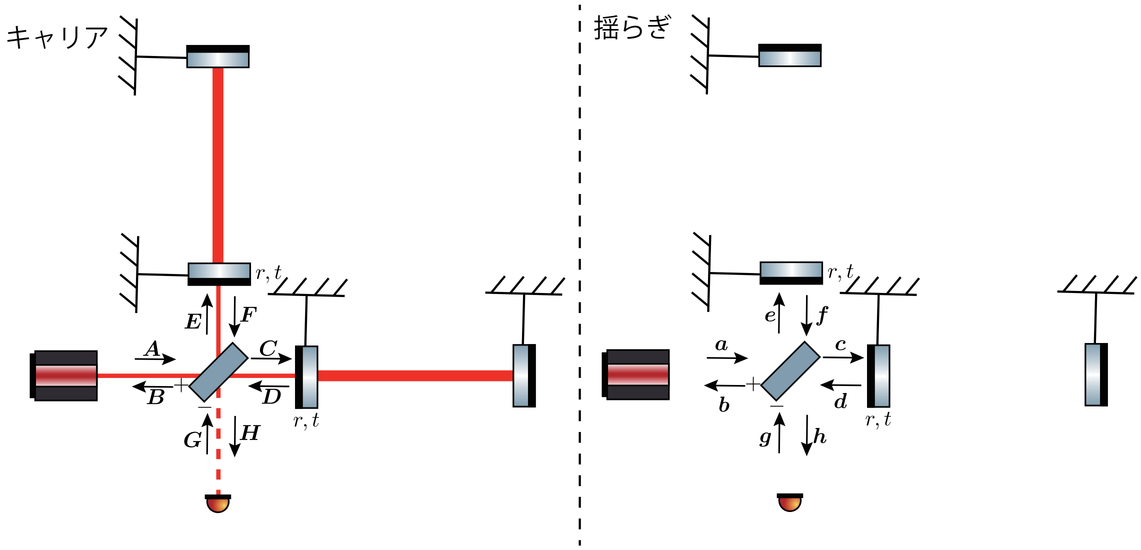


図 **3.12:** Fabry-Perot Michelson 干渉計

射される間の実効的な位相遅れは両腕で等しく $\beta = \arctan(-\Omega/\gamma)$ であるとする。ここで、$\gamma = Tc/(4L)$ は腕共振器の cavity pole である。式 (3.72) を用いれば、

$$\boldsymbol{h} = \mathrm{e}^{2i\beta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{g} + \mathrm{e}^{i\beta}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.80}$$

と解ける。ここで、$\mathcal{K} = 2\gamma\iota/(\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2))$、$h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{8\hbar/(mL^2\Omega^2)}$ であり、$\iota = 16\mathcal{F}_{\mathrm{arm}}P_A\omega_0/(\pi mLc)$、$\mathcal{F}_{\mathrm{arm}} = 2\pi/T$ である。式 (3.49) と同様に、FPMI に対する感度 $\sqrt{S_h(\Omega)}$ は

$$S_h(\Omega) = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(\mathcal{K} + \frac{1}{\mathcal{K}}\right) \tag{3.81}$$

で与えられる。

感度曲線を図 3.13 に示す。Michelson 干渉計と比較して、より弱い入射光強度で感度の良い帯域を高周波数帯域に移すことができていることが分かる。これは、Fabry-Perot 共振器により腕内光量と信号に対する応答の双方が強化され、散射雑音を低減できているためである。一方で、T がどの値であっても高周波数帯域では f^1 に比例して感度が悪化していることが分かる。これは、cavity pole より高い周波数の信号が Fabry-Perot 共振器のローパス特性によって減衰されているためである。例えば、$T = 0.05$ のとき $\gamma \sim 2\pi \times 2 \times 10^2$ Hz 程度であり、cavity pole に対応する周波数が感度の悪化が始まる周波数と一致していることが分かる。

Cavity pole と帯域幅の関係を見るために、図 3.14 に散射雑音 (式 (3.81) の第二項) のみをプロットした[*15]。T を小さくすれば Favry-Perot 共振器のフィネスが向上し散射雑

[*15] 高周波数帯域において感度が悪化するのは信号の減衰が起きているからであり、散射雑音自体は腕内の

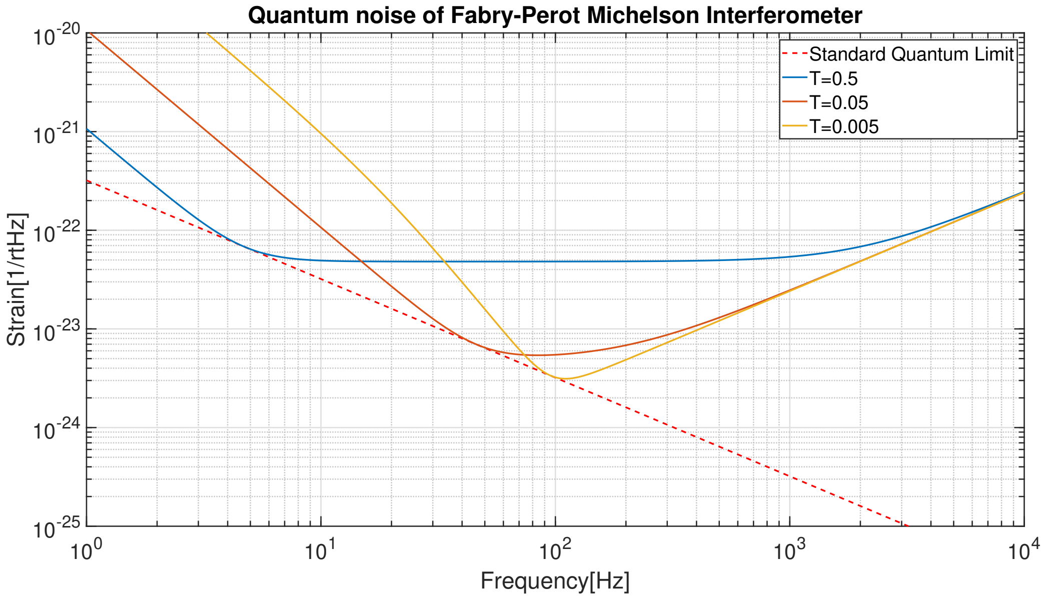


図 3.13: Fabry-Perot Michelson 干渉計の感度
$P_A = 1 \times 10^3$[W] とした。

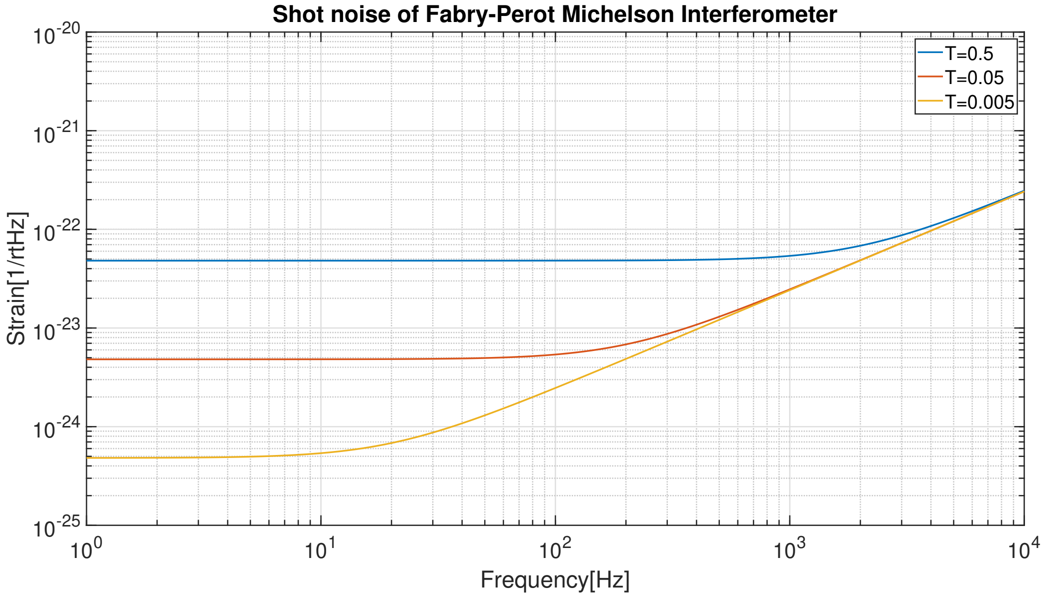


図 3.14: Fabry-Perot Michelson 干渉計の散射雑音
パラメータは図 3.13 と等しくした。

音を減少させることができるが、フィネスを上げると cavity pole も小さくなり干渉計の帯域が狭くなってしまっていることが分かる。このトレードオフの関係は Mizuno limit と呼ばれている [41]。Mizuno limit は様々な表し方があるが、図 3.14 においては十分周波数の高い帯域で T がどの場合であっても感度が一定になっていることに対応している。

3.3.4　Dual Recycling Michelson 干渉計

実際の重力波検出器では、散射雑音と帯域のトレードオフの問題を解決するために 2 つの Recycling 共振器が用いられる。Michelson 干渉計の入射ポートに鏡を置くことで構成される共振器は Power Recycling (PR) 共振器、出射ポートに鏡を置くことで構成される共振器は Signal Recycling (SR) 共振器と呼ばれ、この 2 つの recycling 共振器を備えた干渉計は Dual Recycling Michelson 干渉計 (DR 干渉計) と呼ばれる。

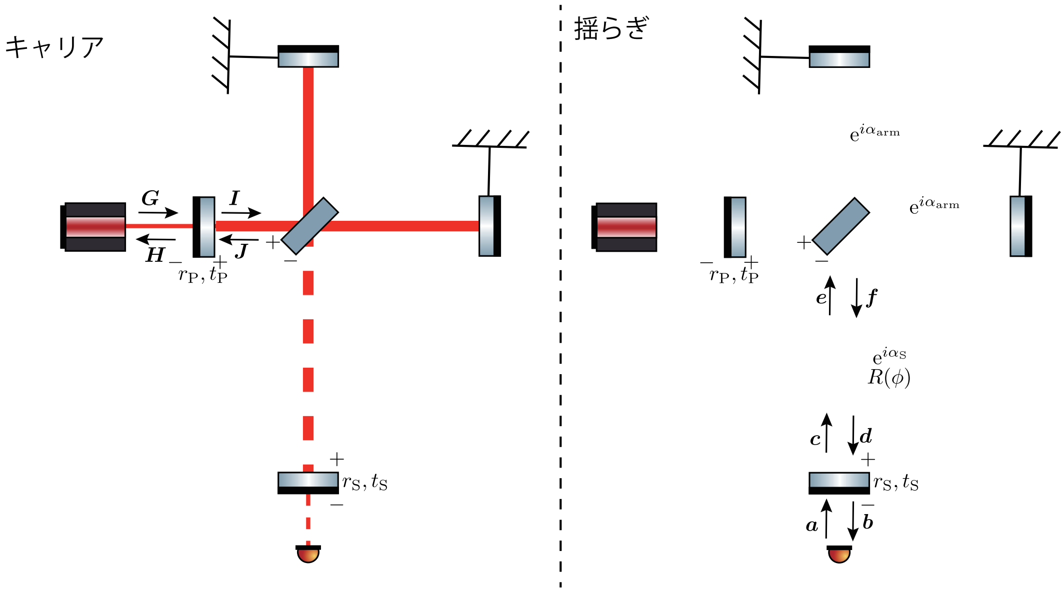


図 **3.15:** Dual Recycling Michelson 干渉計

図 3.15 のような DR 干渉計を考える。入射ポートに置かれた鏡 (Power Recycling Mirror： PRM) の強度反射率・透過率をそれぞれ $r_\mathrm{P}^2, t_\mathrm{P}^2$ とし、出射ポートに置かれた鏡 (Signal Recycling Mirror： SRM) の強度反射率・透過率をそれぞれ $r_\mathrm{S}^2, t_\mathrm{S}^2$ とする。Michelson 干渉計の腕の長さを L、BS から SRM までの距離を l とし、それぞれに対応する位相遅れを $\alpha_\mathrm{arm} = -L\Omega/c$、$\alpha_\mathrm{S} = -l\Omega/c$ としている。Michelson 干渉計部分がダークフリンジで動作している場合には、全てのキャリアが入射ポートに、全ての信号が出射ポートに現れるため、PR 共振器と SR 共振器の働きを完全に分離できるようになる。PR

レーザー光強度に反比例して周波数に依らず一定である。より正確には、図 3.14 は散射雑音によって定まる感度を表している。

共振器が共振しているとき[*16]、古典的な電場に対しては

$$\boldsymbol{H} = -r_{\mathrm{P}}\boldsymbol{G} + t_{\mathrm{P}}\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{I} = t_{\mathrm{P}}\boldsymbol{G} + r_{\mathrm{P}}\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} \tag{3.82}$$

と表せる。$\boldsymbol{I}$ について解けば

$$\boldsymbol{I} = \frac{t_{\mathrm{P}}}{1-r_{\mathrm{P}}}\boldsymbol{G} \simeq \frac{2}{t_{\mathrm{P}}}\boldsymbol{G} \tag{3.83}$$

となり、BS に入射する実効的なレーザー光強度が $4/t_{\mathrm{P}}^2 = 2\mathcal{F}_{\mathrm{P}}/\pi$ 倍に増幅されていることが分かる。ここで、$\mathcal{F}_{\mathrm{P}} = 2\pi/t_{\mathrm{P}}^2$ は PR 共振器のフィネスである。入射ポートから侵入するレーザー光の揺らぎは全て入射ポート側に反射され、出射ポートでの測定に影響を及ぼさないため、power recycling は入射するレーザー光強度を増加させることと同等の効果を干渉計に与える[*17]。

電場の揺らぎに対しては、BS と SRM 間の位相変化を $\phi \equiv l\omega_0/c \pmod{2\pi}$ として

$$\begin{gathered}\boldsymbol{b} = -r_{\mathrm{S}}\boldsymbol{a} + t_{\mathrm{S}}\boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{c} = t_{\mathrm{S}}\boldsymbol{a} + r_{\mathrm{S}}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d} = \mathrm{e}^{i\alpha_{\mathrm{S}}}R(\phi)\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{e} = \mathrm{e}^{i\alpha_{\mathrm{S}}}R(\phi)\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{f} = \mathrm{e}^{2i\alpha_{\mathrm{arm}}}P(\kappa,0)\boldsymbol{e} + \mathrm{e}^{i\alpha_{\mathrm{arm}}}\frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}h(\Omega)\end{gathered} \tag{3.84}$$

と表せる。ここで、$\kappa = 4P_I\omega_0/(mc^2\Omega^2) \simeq 8P_G\mathcal{F}_{\mathrm{P}}\omega_0/(\pi mc^2\Omega^2)$、$h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{4\hbar/mL^2\Omega^2}$ である。SR 共振器を共振させる ($\phi = 0$) 手法は Broadband Signal Recycling (BSR) と呼ばれる。このとき、式 (3.84) は半周あたりの位相遅れを $\alpha = \alpha_{\mathrm{arm}} + \alpha_{\mathrm{S}}$ としたときの Fabry-Perot 共振器と全く同様に解くことができ[*18]、

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{e}^{2i\beta}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\mathcal{K} & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{a} + \mathrm{e}^{i\beta}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}h(\Omega) \tag{3.85}$$

となる。ここで、$T_{\mathrm{S}} = t_{\mathrm{S}}^2$、$\gamma = T_{\mathrm{S}}c/(4(L+l))$、$\iota = 4P_I\omega_0/(m(L+l)c)$、$\mathcal{K} = \gamma\iota/(\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2))$、$\beta = \arctan(-\Omega/\gamma)$ である。片腕あたりの鏡が 1 つであるためパラメータが定数倍程度は異なっているが、PRM と SRM の反射率が等しい場合には FPMI の振る舞いと完全に一致していることが分かる。Fabry-Perot 共振器がレーザー光強度と信号の応答の双方を $2\mathcal{F}/\pi$ 倍にするのに対して、power recycling はレーザー光強度のみを $2\mathcal{F}_{\mathrm{P}}/\pi$ 倍し、signal recycling は信号の応答のみを $2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi$ 倍 ($\mathcal{F}_{\mathrm{S}} = 2\pi/t_{\mathrm{S}}^2$) するために、この双方を備えた dual recycling は Fabry-Perot 共振器と同等の効果を干渉計に与えるのである。

[*16] Power recycling の共振と反共振は PRM のどちら側を固定端反射と見なすかどうかで変わるため、PR 共振器は反共振状態として用いると書かれる場合もある。Signal recycling に対しても同様で、BSR を反共振状態、BRSE(次小節参照) を共振状態と表現することもある。

[*17] 実際の Michelson 干渉計には僅かなコントラスト誤差が存在し、入射ポートから侵入するレーザーの周波数揺らぎが出射ポートにも漏れ出て雑音となりうる。Power recycling を用いると、PR 共振器の持つローパス特性によりこの周波数雑音を減少させることができるというメリットもある。

[*18] SR 共振器は Michelson 干渉計全体と SRM で構成される共振器であると言える。

3.3.5 Resonant Sideband Extraction 干渉計

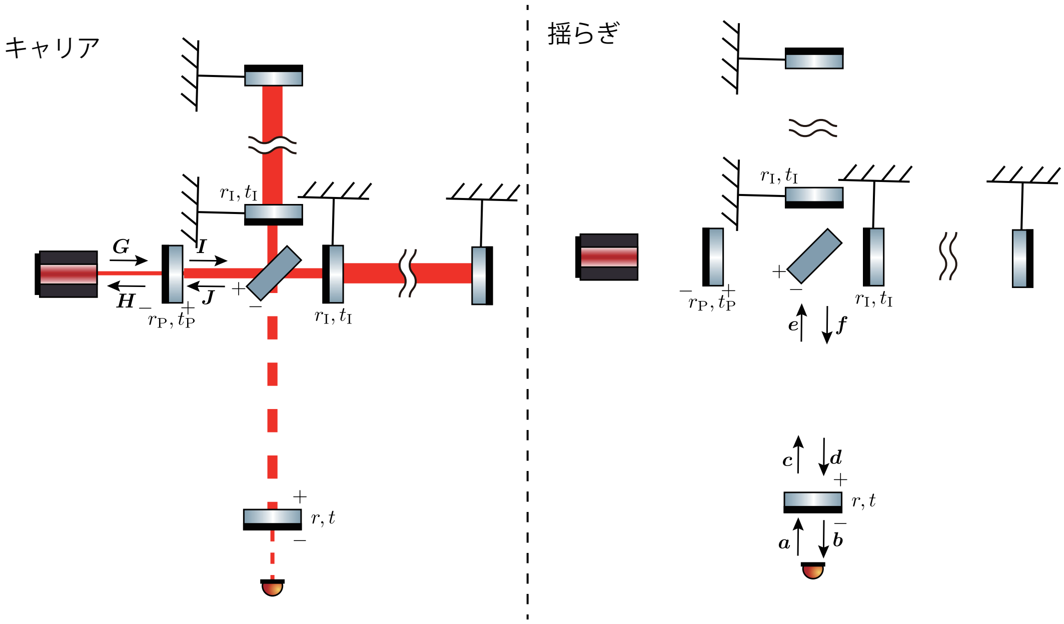


図 **3.16:** Dual Recycling Fabry-Perot Michelson 干渉計

本節の最後に、これまで考察した技術を全て組み合わせた干渉計として図 3.15 のような 2 つの recycling 共振器を備えた Fabry-Perot Michelson 干渉計を考える。この構成は Dual Recycling Fabry-Perot Michelson 干渉計 (DRFPMI) と呼ばれる[*19]。

ITM の強度反射率と透過率をそれぞれ $r_{\rm I}^2$、$t_{\rm I}^2(=T_{\rm I})$ とし、SRM の強度反射率と透過率をそれぞれ r^2、$t^2(=T)$ とする。式 (3.80) より

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{e}^{2i\beta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{e} + \mathrm{e}^{i\beta}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\rm SQL}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}h(\Omega) \tag{3.86}$$

である。ここで、$\gamma = T_{\rm I}c/(4L)$、$\beta = \arctan(-\Omega/\gamma)$、$\mathcal{K} = 2\gamma\iota/(\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2))$、$h_{\rm SQL} = \sqrt{8\hbar/(mL^2\Omega^2)}$ であり、$\iota = 16\mathcal{F}_{\rm arm}P_I\omega_0/(\pi mLc) = 32\mathcal{F}_{\rm arm}\mathcal{F}_{\rm P}P_G\omega_0/(\pi^2 mLc)$、$\mathcal{F}_{\rm arm} = 2\pi/T_{\rm I}$、$\mathcal{F}_{\rm P} = 2\pi/T_{\rm P}$($T_{\rm P}$ は PRM の強度透過率) である。まずは SR 共振器が共振しており (BSR)、BS と SRM 間の距離が腕の長さより十分短く、SR 共振器のフィネスが腕共振器のフィネスより十分低い場合を考える[*20]。このときは BS と SRM 間の位相遅れを無視することができるので、半周あたりの位相遅れを β としたときの Fabry-Perot 共振

[*19] 後述するように、通常は km スケールの FPMI に対して signal recycling を行うことはないため、この光学系構成は RSE 干渉計と呼ぶ場合が多い。

[*20] この近似が成り立たなくなると感度曲線が変化する。この議論は補遺 D.2 で行う。

器と全く同様に、

$$\boldsymbol{b} = \frac{\mathrm{e}^{2i\beta}}{(1-r\mathrm{e}^{2i\beta})^2}\left[\begin{pmatrix} 1+r^2-2r\cos 2\beta & 0 \\ -t^2\mathcal{K} & 1+r^2-2r\cos 2\beta \end{pmatrix}\boldsymbol{a} + t\mathrm{e}^{i\beta}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-r\mathrm{e}^{2i\beta} \end{pmatrix} h(\Omega)\right] \tag{3.87}$$

と表せる。信号雑音比を表す演算子 $h_n(\Omega)$ は

$$h_n(\Omega) = \frac{h_{\mathrm{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}}\frac{\mathrm{e}^{i\beta}}{t(1-r\mathrm{e}^{2i\beta})}\left(-t^2\mathcal{K}a_1 + \left[1+r^2-2r\cos 2\beta\right]a_2\right) \tag{3.88}$$

となるので、感度は

$$S_h(\Omega) = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(\mathcal{K}_{\mathrm{BSR}} + \frac{1}{\mathcal{K}_{\mathrm{BSR}}}\right) \tag{3.89}$$

と求まる。ここで、

$$\mathcal{K}_{\mathrm{BSR}} = \frac{t^2}{1+r^2-2r\cos 2\beta}\mathcal{K} \simeq \frac{2\gamma_{\mathrm{BSR}}\iota}{\Omega^2(\gamma_{\mathrm{BSR}}^2+\Omega^2)} \tag{3.90}$$

であり、$\gamma_{\mathrm{BSR}} = \gamma \times \pi/(2\mathcal{F}_{\mathrm{S}})$、$\mathcal{F}_{\mathrm{S}} = 2\pi/T$ である。よって、FPMI に対して BSR を行うと実効的な cavity pole が SR 共振器のフィネス分の 1 倍程度に引き下がることが分かる。

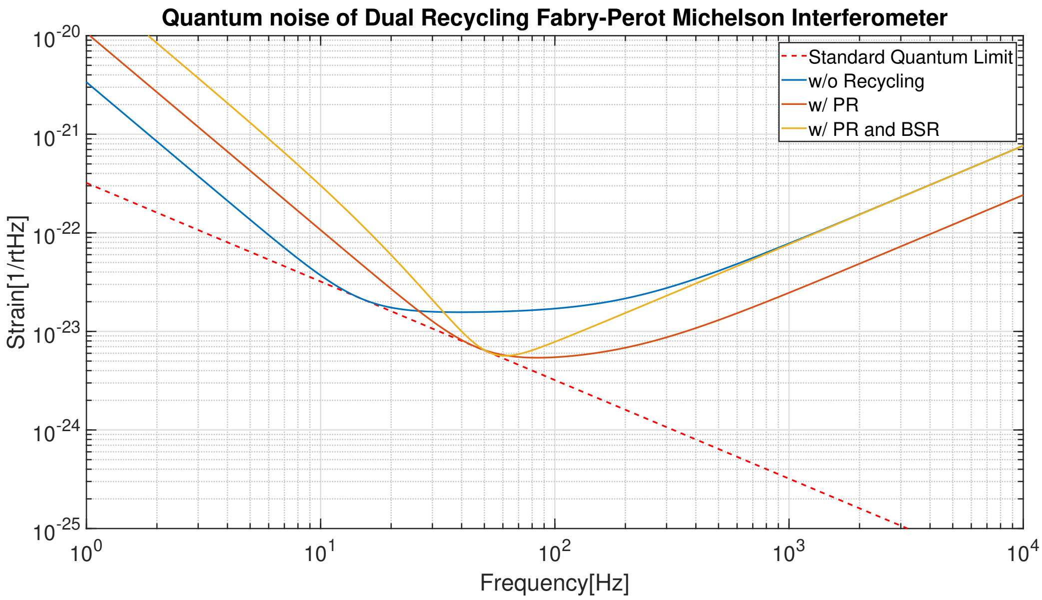


図 **3.17:** Broadband signal recycling を行った場合の感度
$P_G = 1 \times 10^2$[W]、$T_I = 0.05$ とした。

図 3.17 に感度曲線を示す。それぞれ、recycling を行わなかったとき ($2\mathcal{F}_{\mathrm{P}}/\pi \to 1$、$2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi \to 1$)、power recycling のみを行ったとき ($2\mathcal{F}_{\mathrm{P}}/\pi = 10$、$2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi \to 1$)、power recycling と broadband signal recycling を行ったとき ($2\mathcal{F}_{\mathrm{P}}/\pi = 10$、$2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi = 10$) を表している。Power recycling は入射レーザー光強度を上げることと同等の効果を与えるので、感度の良い帯域をより高周波に移すことができる。一方で、BSR を行うと腕内のレーザー光強度を変更しないままに実効的な cavity pole を引き下げることになるため、狭まった帯域幅に対応して高周波数帯域の感度が悪化することになる。また、信号に対する応答がさらに強化されるため、輻射圧雑音も増加することになる。このために、km スケールの腕を持つ FPMI に対して BSR を用いることはない。

Power recycling ゲイン $2\mathcal{F}_{\mathrm{P}}/\pi$ をさらに上げることで実効的なレーザー光強度を引き上げることができるが、BS におけるレーザー光強度が強くなると ITM の基材を透過する際の光学ロスが問題になり、さらに BS の熱レンズ効果などの技術的な問題も発生することになる。このため、腕内のレーザー光強度をさらに引き上げるには腕共振器のフィネスを引き上げる必要があるが、これは同時に cavity pole の低下を引き起こし、検出器の帯域を狭めてしまう。このトレードオフの問題を解決するために、実際の重力波検出器では SR 共振器を反共振状態付近にする Resonant Sideband Extraction (RSE) という手法が用いられる[*21] [42]。ここでは SR 共振器が反共振状態である場合 ($\phi \equiv l\Omega/c \pmod{2\pi} = \pi/2$、$l$ は BS から SRM までの距離) を考える。このときの状態は Broadband RSE (BRSE) と呼ばれる。BS と SRM 間で回転行列 $R(\pi/2)$ がかけられると考えることから求めることもできるが[*22]、BSR の結果において単に SRM の振幅反射率を -1 倍することからも求めることができる。すなわち、BRSE を行った場合の感度は

$$S'_h(\Omega) = \frac{h^2_{\mathrm{SQL}}}{2}\left(\mathcal{K}_{\mathrm{BRSE}} + \frac{1}{\mathcal{K}_{\mathrm{BRSE}}}\right) \tag{3.91}$$

である。ここで、

$$\mathcal{K}_{\mathrm{BRSE}} = \frac{t^2}{1+r^2+2r\cos 2\beta}\mathcal{K} = \frac{2\gamma_{\mathrm{BRSE}}\iota}{\Omega^2(\gamma^2_{\mathrm{BRSE}}+\Omega^2)} \tag{3.92}$$

であり、$\gamma_{\mathrm{BRSE}} = \gamma \times 2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi$ である。よって、BRSE は実効的な cavity pole を SR 共振器のフィネス倍程度に引き上げる効果があることが分かる。

図 3.18 に感度曲線を示す。それぞれ、低フィネスで BRSE を行わなかったとき ($T_{\mathrm{I}} = 0.05$、$2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi \to 1$)、低フィネスで BRSE を行ったとき ($T_{\mathrm{I}} = 0.05$、$2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi = 10$)、高フィネスで BRSE を行ったとき ($T_{\mathrm{I}} = 0.005$、$2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi = 10$) を表している。BRSE を行うと cavity pole が引き上げられ、検出器の帯域を広げることができるが、その分だ

[*21] RSE を行う場合には、SRM を signal extraction mirror、SR 共振器を signal extraction 共振器と呼ぶこともある。

[*22] この場合には見かけ上信号が amplitude quadrature に現れることになるので、ホモダイン角を 0 として測定を行う必要があることに注意する。

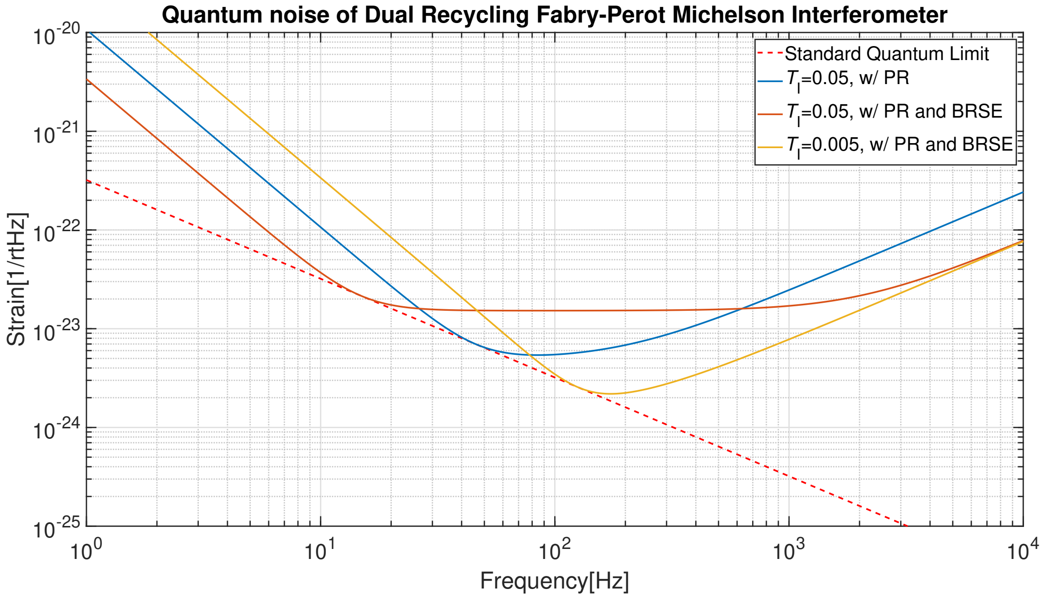


図 3.18: Broadband resonant sideband extraction を行った場合の感度 $P_G = 1 \times 10^2$[W]、$2\mathcal{F}_P/\pi = 10$ とした。

け散射雑音が増加することになってしまう。高フィネスな腕共振器と BRSE を組み合わせることで、低フィネスで RSE を行わずに PR ゲインを引き上げた場合 ($T_I = 0.05$、$2\mathcal{F}_S/\pi = 1$、$2\mathcal{F}_P/\pi = 100$) と同等の感度が得られる。BRSE を用いることで、BS におけるレーザー光強度を変化させないままに、高い腕内レーザー光強度と広い帯域幅を持った干渉計を実現することができる。

DRFPMI における散射雑音の比較を図 3.19 に示した。T_I が等しい、すなわち腕内レーザー光強度が等しい場合には、散射雑音と帯域幅の積が保たれていることが分かる：

$$\lim_{\Omega\to 0} \frac{2\mathcal{K}}{h_{\mathrm{SQL}}^2} \times \gamma = \lim_{\Omega\to 0} \frac{2\mathcal{K}_{\mathrm{BSR}}}{h_{\mathrm{SQL}}^2} \times \gamma_{\mathrm{BSR}} = \lim_{\Omega\to 0} \frac{2\mathcal{K}_{\mathrm{BRSE}}}{h_{\mathrm{SQL}}^2} \times \gamma_{\mathrm{BRSE}} = \frac{mL^2\iota}{2\hbar} \tag{3.93}$$

一般にはこのトレードオフの関係を Mizuno Limit と呼ぶことが多い。高いフィネスを持つ腕共振器と BRSE を併用することで、より強い入射レーザー光強度を用いることと同等の効果を得られることも分かる。

3.4　量子雑音低減のための先進技術

前節で考えていた重力波検出器の量子雑音は、SQL というスペクトル密度の限界値を持っていた。SQL は入射・干渉計内部・測定のいずれかの時点で真空場の amplitude quadrature と phase quadrature に相関を持たせることで突破することが可能である。本節では、SQL を突破することができるようになる技術の例として、ホモダイン検出と光

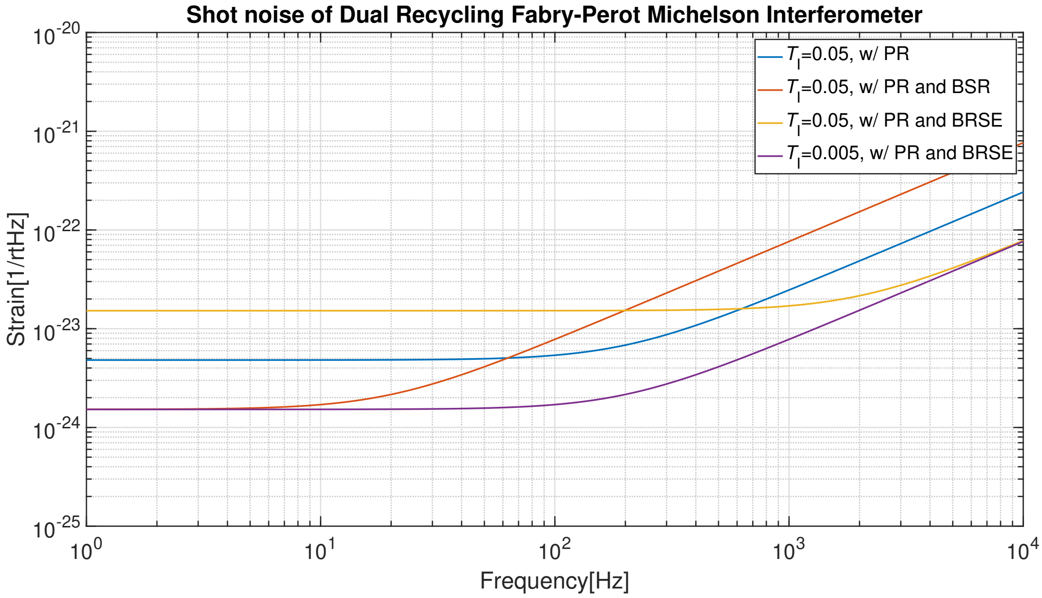


図 **3.19:** Dual Recycling Fabry-Perot Michelson 干渉計の散射雑音
パラメータは図 3.17、図 3.18 と等しくした。

ばね、そして squeezing について簡単に述べる。

各技術の比較を行うために、本節では 3.3.4 小節で考えた DR 干渉計を基本構成として議論する。本節中のプロットは、特に断らない限り $\gamma = 2\pi \times 100$ Hz、$\iota = 2\gamma^3$ とし[*23]、$r_{\mathrm{S}} = r$、$t_{\mathrm{S}} = t$ と表記する。

3.4.1 ホモダイン検出

前節の議論では、測定を行うホモダイン角を全て $\pi/2$ とし、信号の大きさが最大となるようにして計算をしていた。ここでは、参照光の amplitude quadrature が 0 でない場合に感度がどのように変化するのかを調べる。

干渉計に真空場 $\boldsymbol{a}$ が入射したとき、出射される電場の揺らぎ $\boldsymbol{b}$ が次のように表されるとする：

$$\boldsymbol{b} = \mathbb{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\mathcal{H}}h(\Omega) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{a} + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.94}$$

これをキャリア $\boldsymbol{B}$ で測定すると、強度の揺らぎ δP_B は

$$\begin{aligned} \delta P_B &= \hbar\omega_0 (b_1 B_1 + b_2 B_2) \\ &= \hbar\omega_0 \left[(A_{11}B_1 + A_{21}B_2)a_1 + (A_{21}B_1 + A_{22}B_2)a_2 + (\mathcal{H}_1 B_1 + \mathcal{H}_2 B_2) \right] \end{aligned} \tag{3.95}$$

[*23] これは、感度が SQL に到達する角周波数と cavity pole が一致するパラメータである：$\mathcal{K}|_{\Omega=\gamma} = 1$

となるので、感度は

$$S_h(\Omega) = \frac{|A_{11}\cos\xi_B + A_{21}\sin\xi_B|^2 + |A_{12}\cos\xi_B + A_{22}\sin\xi_B|^2}{|\mathcal{H}_1\cos\xi_B + \mathcal{H}_2\sin\xi_B|^2} = \frac{\boldsymbol{w}_B\mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger\boldsymbol{w}_B^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{w}_B\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{H}}^\dagger\boldsymbol{w}_B^{\mathrm{T}}} \tag{3.96}$$

と表せる。ここで、$\zeta_B = \arctan(B_2/B_1)$ はホモダイン角であり、$\boldsymbol{w}_B = (\cos\xi_B\ \sin\xi_B)$ はキャリア方向の単位ベクトルである。式 (3.95) から分かるように、$A_{11}\cos\xi_B + A_{21}\sin\xi_B$ の項は真空場の amplitude quadrature に由来する雑音であり、$A_{21}\cos\xi_B + A_{22}\sin\xi_B$ の項は真空場の phase quadrature に由来する雑音である。DR 干渉計の場合には、式 (3.85) より

$$S_h(\Omega) = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2\mathcal{K}}\left[(\cot\xi_B - \mathcal{K})^2 + 1\right] \tag{3.97}$$

と求まる。ここで、$\zeta_B = \mathrm{arccot}\mathcal{K}$ となる周波数では第一項が 0 となることが分かる。これは、強度の揺らぎに現れる真空場の amplitude quadrature a_1 由来の項のうち、直接反射されて amplitude quadrature に現れる項 $(\cos\xi_B a_1)$ と鏡の揺らぎを介して phase quadrature に現れる項 $(-\mathcal{K}\sin\xi_B a_1)$ が量子的な相関を持っており、これらが打ち消される周波数で輻射圧雑音を回避することができるからである。ホモダイン検出に代表される輻射圧雑音を完全に回避することができる手法は Back Action Evasion (BAE) と呼ばれる。

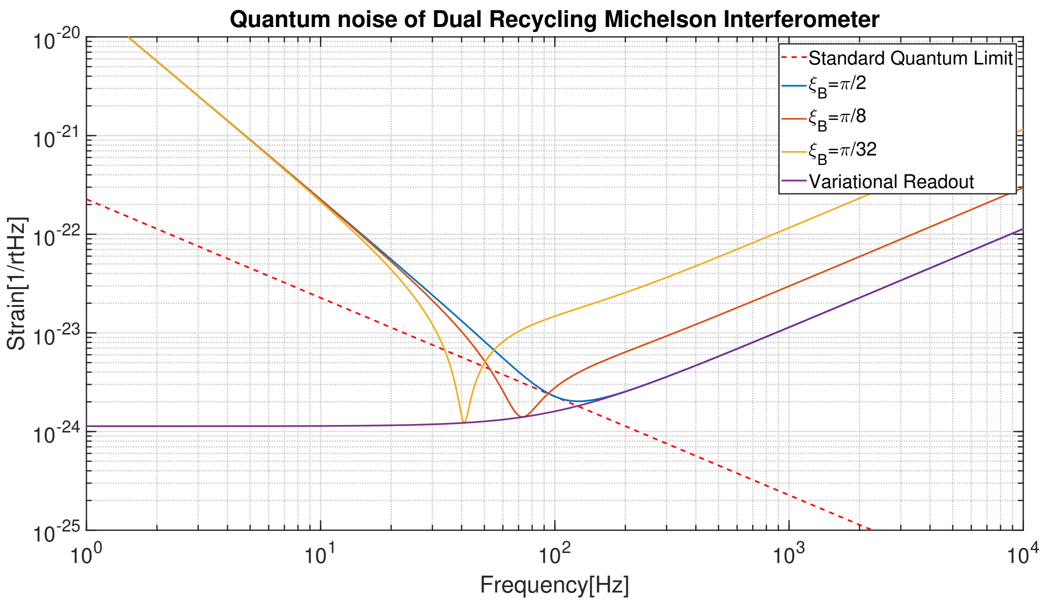


図 3.20: ホモダイン検出を行った場合の感度

DR 干渉計でホモダイン検出を行った場合の感度を図 3.20 に示した。ホモダイン角を 0 に近づけるにつれて大きく SQL を超えることができるようになるが、読み取れる信

号の大きさが減少することに従って高周波数帯域における散射雑音が悪化してしまうことが分かる。感度を最良にするような周波数に依存したホモダイン角を実現することを variational readout と呼ぶが、これを実験的に実現することは難しいため、通常は重力波イベントの観測レートを最良にするような固定ホモダイン角を選ぶ。

3.4.2　Detuned Signal Recycling Michelson 干渉計

前節では、考察する共振器を全て共振状態、あるいは反共振状態として考えていた。共振器を共振状態から離調 (detune) すると、共振器内に光ばねが形成され、その共振周波数で重力波信号を増幅することが可能になる [43]。式 (3.60) より、内部にキャリアが存在する共振器を離調すると共振器内光量が低下することにつながるため、重力波検出器における光ばねの基本となるのは SR 共振器を離調する系である。光ばねによる信号増幅は、KAGRA のような熱雑音の影響が少なく量子雑音が広帯域で支配的であるような検出器に対して大変有効である。

DR 干渉計において SR 共振器を離調することを考える[*24]。この手法は Detuned Signal Recycling (DSR) と呼ばれる。$\phi \neq 0$ として式 (3.84) を解くと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} &= \left[-rI + t^2 \mathrm{e}^{2i\alpha}\left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha}R(\phi)P(\kappa,0)R(\phi)\right]^{-1} R(\phi)P(\kappa,0)R(\phi)\right]\boldsymbol{a} \\ &\quad + t\mathrm{e}^{i\alpha}\frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha}R(\phi)P(\kappa,0)R(\phi)\right]^{-1} R(\phi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} h(\Omega) \\ &= \frac{1}{C}\left[\mathbb{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\mathcal{H}} h(\Omega)\right] \end{aligned} \tag{3.98}$$

となる。ここで、

$$C = r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - 2\left(\cos 2\phi + \frac{\kappa}{2}\sin 2\phi\right) \tag{3.99}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \left(r+\frac{1}{r}\right)\left(\cos 2\phi + \frac{1}{2}\kappa \sin 2\phi\right) - 2\cos 2\alpha & -\left(\frac{1}{r}-r\right)\left(\sin 2\phi + \frac{1}{2}\kappa(1-\cos 2\phi)\right) \\ \left(\frac{1}{r}-r\right)\left(\sin 2\phi - \frac{1}{2}\kappa(1+\cos 2\phi)\right) & \left(r+\frac{1}{r}\right)\left(\cos 2\phi + \frac{1}{2}\kappa \sin 2\phi\right) - 2\cos 2\alpha \end{pmatrix} \tag{3.100}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = t\frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{i\alpha}\right)\sin\phi \\ \left(\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\alpha} - \mathrm{e}^{i\alpha}\right)\cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

と置いた。さらに T, α, ϕ, κ を微小量として近似すると[*25]、

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\mathcal{C}}\left[\mathbb{M}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\mathcal{D}} h(\Omega)\right] \tag{3.102}$$

---

*24 実際の KAGRA の光学系構成である RSE 干渉計を detune した場合 (DRSE) の計算は [44] などにある。

*25 κ の大きさは周波数によって変わるが、考察している帯域 ($\Omega \sim \gamma$) では T の定数倍程度の大きさである。

と求まる。ここで、

$$\mathcal{C} = \Omega^2[(\gamma - i\Omega)^2 + \Delta^2] - \Delta\iota/2 \tag{3.103}$$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \Omega^2(\Omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) + \Delta\iota/2 & -2\gamma\Delta\Omega^2 \\ 2\gamma\Delta\Omega^2 - \gamma\iota & \Omega^2(\Omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) + \Delta\iota/2 \end{pmatrix} \tag{3.104}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \frac{\sqrt{2\gamma\iota}}{h_{\mathrm{SQL}}} \begin{pmatrix} -\Delta\Omega \\ (\gamma + i\Omega)\Omega \end{pmatrix} \tag{3.105}$$

であり、$\Delta = \phi c/L$ は detune である。感度は

$$S_h(\Omega) = \frac{|M_{11}\cos\xi_B + M_{21}\sin\xi_B|^2 + |M_{12}\cos\xi_B + M_{22}\sin\xi_B|^2}{|\mathcal{D}_1\cos\xi_B + \mathcal{D}_2\sin\xi_B|^2} \tag{3.106}$$

で与えられる。

Detuned SR 干渉計の感度はホモダイン角によって大きく変わるが、$\mathcal{C} = 0$ となる周波数ではホモダイン角に関係なく信号と雑音が同時に増幅されることが分かる。これは、この周波数の鏡の揺らぎに対して光学系の伝達関数が発散することに対応しているため、この周波数で光による共振が起きる、すなわち光ばね (Optical Spring : OS) の共振周波数になっていることを意味している。$\Omega \ll \gamma$ として近似すれば、4.1.2 小節で示すように、これは確かに光ばねの共振周波数と一致する[*26]：

$$\omega_{\mathrm{OS}} = \sqrt{\frac{\Delta\iota}{2(\gamma^2 + \Delta^2)}} \tag{3.107}$$

いくつかのホモダイン角に対する感度を考える。まず、$\xi_B = \pi/2$ のときには

$$S_h(\Omega) \to \frac{|M_{21}|^2 + |M_{22}|^2}{|\mathcal{D}_2|^2} \tag{3.108}$$

となり、感度曲線は図 3.21 のようになる。Detune を強めると 2 つのディップが離れていくような振る舞いをすることが分かる。低周波数側のディップについて、真空場の amplitude quadrature に由来する雑音 M_{21} と真空場の phase quadrature に由来する雑音 M_{22} がそれぞれ 0 になる周波数は

$$\omega_{21} = \sqrt{\frac{\iota}{2\Delta}} \tag{3.109}$$

$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{\Delta\iota}{2(\Delta^2 - \gamma^2)}} \tag{3.110}$$

である。この 2 つの周波数のずれからディップの深さが決定されるが、detune が十分大きい場合 ($\Delta \gg \gamma$) にはこれらの周波数は光ばねの周波数に一致し、狭帯域ながらも大き

[*26] 現在考えているパラメータでも $\Delta \gg \gamma$ であればこの近似式が成り立つ。

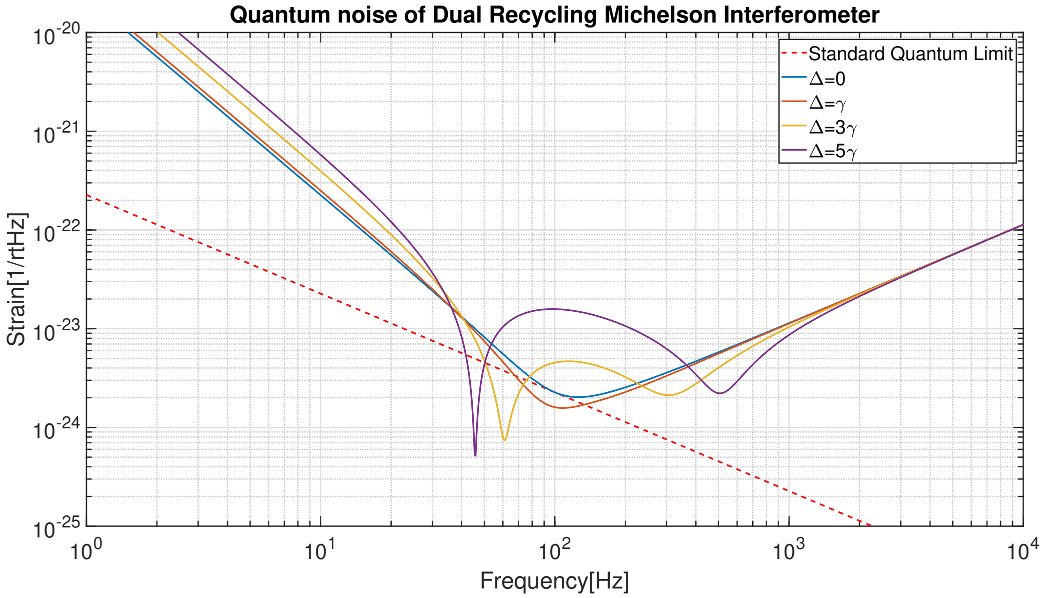


図 **3.21:** DSR で phase quadrature 方向の測定を行った場合の感度

く SQL を超えることが可能となる。この帯域の感度は、光ばねによって増幅された信号と、BAE により光ばねによる増幅が抑えられた雑音の比になるため、低周波数側のディップは光ばねによる信号増幅効果だと解釈することが多い。高周波数側のディップについては、$\Omega^2(\Omega^2+\gamma^2-\Delta^2) \gg \Delta\iota/2$ として M_{22} が小さくなる周波数を求めると

$$\omega_{22\mathrm{h}} = \sqrt{\Delta^2-\gamma^2} \tag{3.111}$$

である。Detune が十分大きい場合には $\omega_{22\mathrm{h}} \simeq \omega_{\mathrm{OR}} = \Delta$ であり、片方のサイドバンドが共振するような状態になっていることが分かる。すなわち、高周波数側のディップは信号の共振によって現れていると解釈でき、この効果のことを Optical Resonance (OR) と呼ぶ。図 3.22 に $\Delta = 5\gamma$ の場合の感度を amplitude 由来の項と phase 由来の項に分けて示した。

次に、Michelson 干渉計の DC offset で測定を行った場合を考える。ホモダイン角は信号の DC 成分の方向と一致し、$\xi_B = \arctan(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)|_{\Omega\to 0} = \arctan(-\gamma/\Delta)$ である。感度は図 3.23 のようになる。

このときの低周波数側と高周波数側のディップの周波数は、どちらも amplitude 由来の項が 0 となる周波数から求まり、それぞれ

$$\omega_{\text{DC-OS}} = \sqrt{\frac{(\Delta+2\gamma)\iota}{2(\Delta^2-\gamma^2+2\gamma\Delta)}} \tag{3.112}$$

$$\omega_{\text{DC-OR}} = \sqrt{\Delta^2-\gamma^2+2\gamma\Delta} \tag{3.113}$$

である。Detune が十分大きい場合にはそれぞれ optical spring と optical resonance の

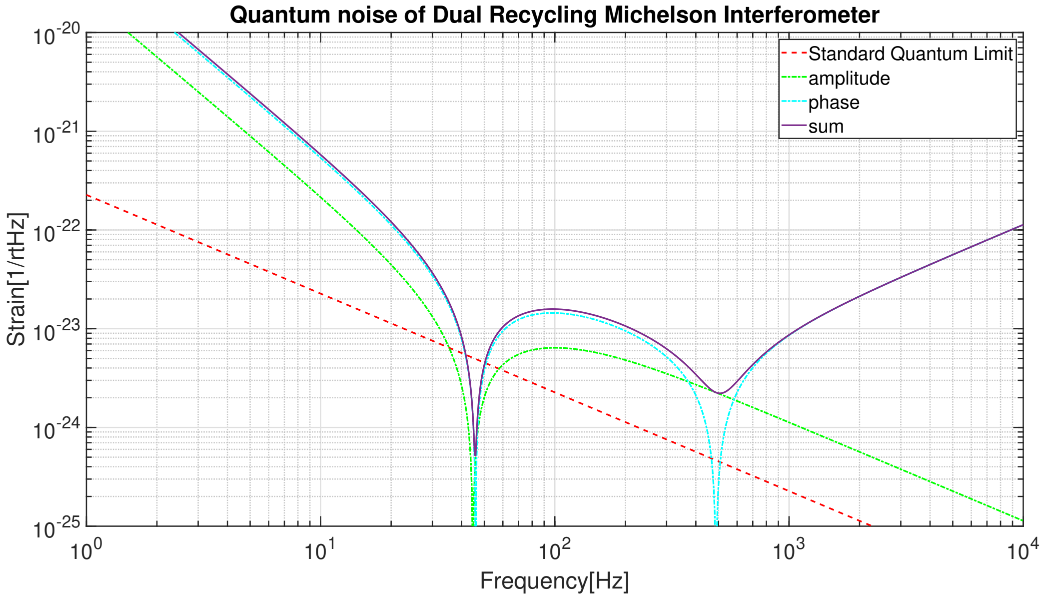


図 **3.22:** DSR で phase quadrature 方向の測定を行った場合の感度
$\Delta = 5\gamma$ とし、真空場の amplitude quadrature 由来と phase quadrature 由来に分けて示した。

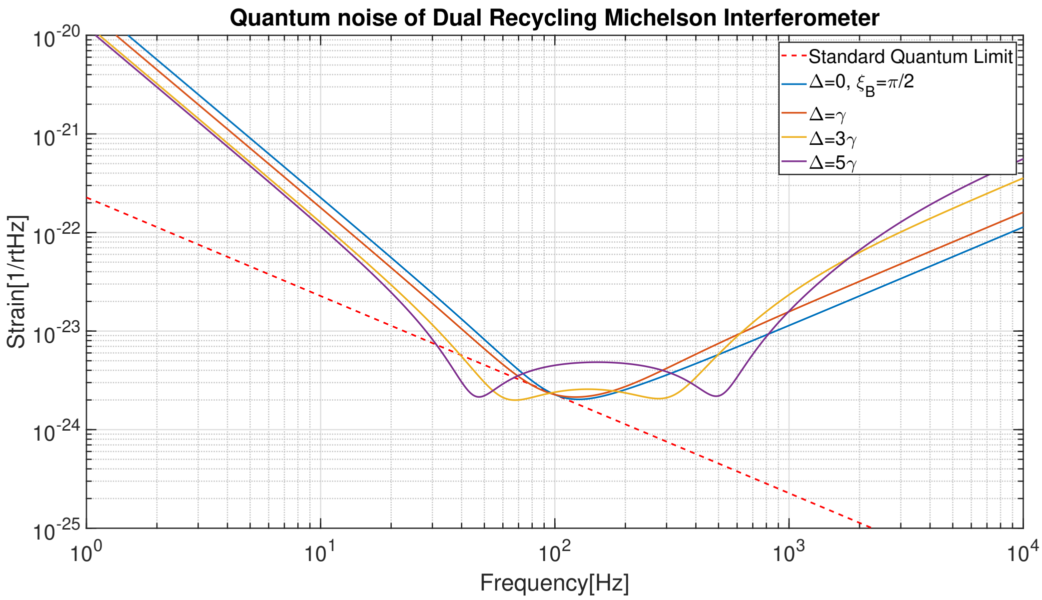


図 **3.23:** DSR で DC offset 方向の測定を行った場合の感度

周波数に一致する。このときのディップの深さは phase 由来の項から決まり、$\Delta \gg \gamma, \sqrt[3]{\iota}$ であれば 2 つのディップの深さは等しく

$$S_h'(\omega_{\text{DC-OS}}) \approx S_h'(\omega_{\text{DC-OR}}) \approx \frac{8\hbar\gamma}{mL^2\iota} \tag{3.114}$$

と表すことができる。図 3.24 に $\Delta = 5\gamma$ の場合の感度を amplitude 由来の項と phase 由

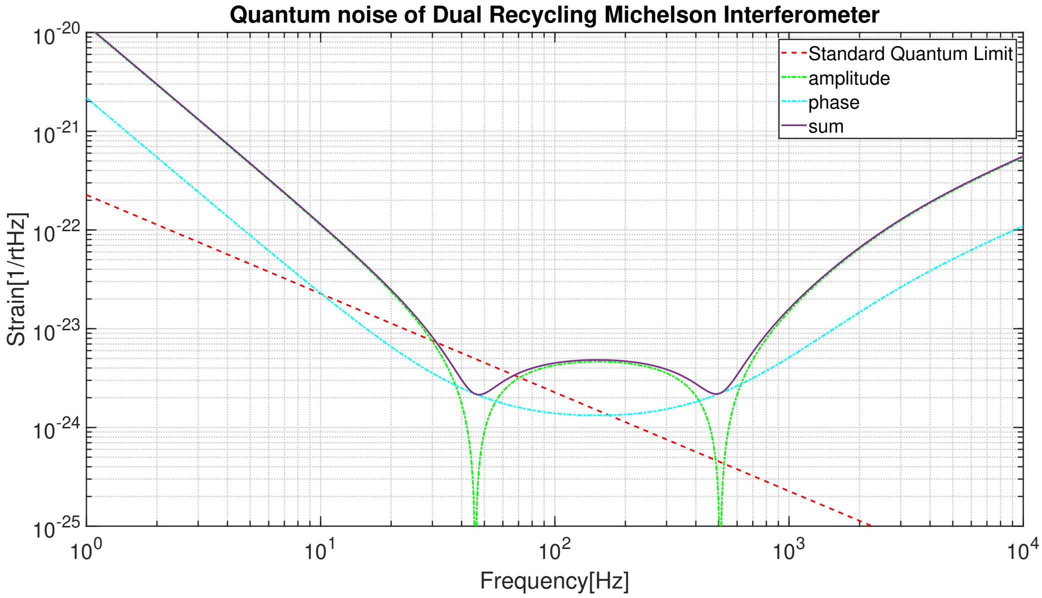


図 **3.24:** DSR で DC offset 方向の測定を行った場合の感度
$\Delta = 5\gamma$ とし、真空場の amplitude quadrature 由来と phase quadrature 由来に分けて示した。

来の項に分けて示した。

最後に、Michelson 干渉計の contrast defect で測定を行った場合を考える。ホモダイン角は信号の DC 成分に直交する方向であり、$\xi_B = \arctan(\Delta/\gamma)$ である。感度は図 3.25 のようになる。

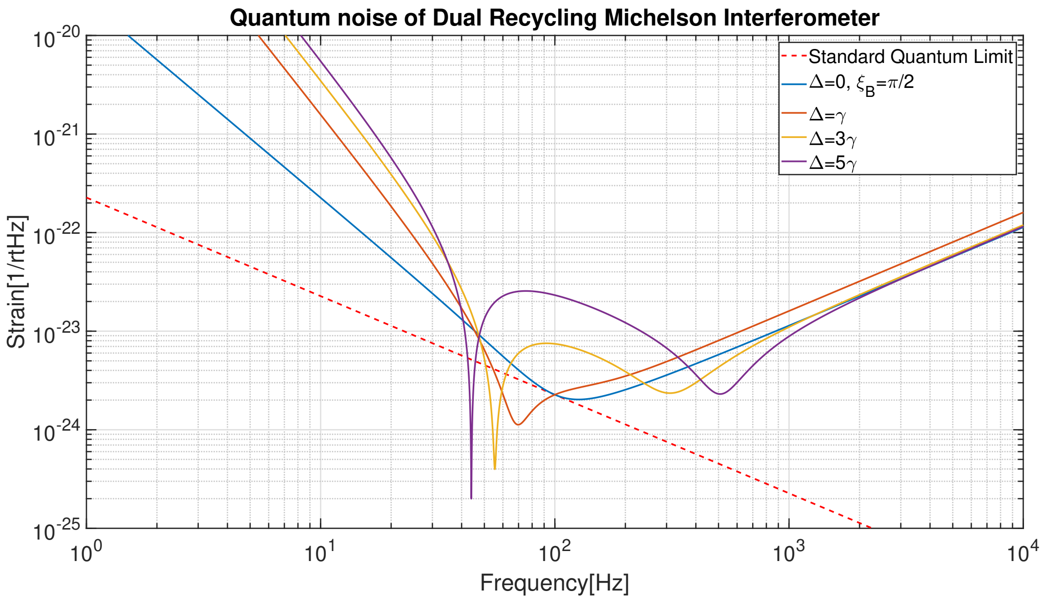


図 **3.25:** DSR で contrast defect 方向の測定を行った場合の感度

Detune が十分大きい場合、amplitude 由来の項と phase 由来の項が 0 となる周波数が

一致することから低周波数側のディップが現れる。この周波数は

$$\omega_{\text{CD-OS}} = \sqrt{\frac{\Delta\iota}{2(\gamma^2+\Delta^2)}} \tag{3.115}$$

であり、optical spring の周波数に一致する。高周波数側のディップは phase 由来の項が 0 となることから現れ、その周波数は

$$\omega_{\text{CD-OR}} = \sqrt{\Delta^2+\gamma^2} \tag{3.116}$$

である。$\Delta \gg \gamma$ であれば、これは optical resonanse の周波数に一致する。

Fabry-Perot 共振器との対応から、このホモダイン角の意味を考える。今考えている DR 干渉計は、PR 共振器が共振しており phase quadrature 方向に信号が発生するとしている。しかし、図 3.10 のような入射キャリア基準で考えた detuned Fabry-Perot 共振器は、鏡で反射されるキャリアが amplitude quadrature 方向を向かないために、DR 干渉計との対応が取れない。そこで、図 3.26 のように、共振器内キャリアが amplitude quadrature 方向を向くようあらかじめ $\varphi = -\arctan(\Delta/\gamma)$ だけ回転させたキャリアを入射させると考える。このとき、共振器内キャリア $\boldsymbol{E}'$ は amplitude quadrature 方向を向き、鏡で反射された揺らぎ $\boldsymbol{f}'$ の phase quadrature 方向に信号が現れるようになるので、この Fabry-Perot 共振器は DR 干渉計と同等だと見なすことができる。

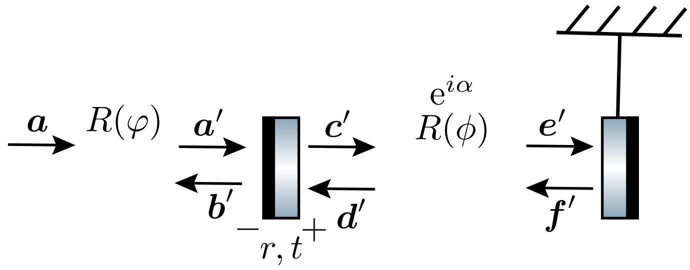


図 **3.26:** Fabry-Perot 共振器 (共振器内キャリア基準)

Michelson 干渉計の contrast defect は鏡で反射されるキャリアと同じ方向であることを考えると、このホモダイン角は detuned Fabry-Perot 共振器を反射光で測定した場合に対応していることが分かる。Fabry-Perot 共振器に入射する各 quadrature の揺らぎについて考える場合には、$\mathbb{M}' = R(\varphi)\mathbb{M}$ と変換し、$M'_{11}\cos\xi_B + M'_{21}\sin\xi_B$ の項を amplitude quadrature 由来、$M'_{21}\cos\xi_B + M'_{22}\sin\xi_B$ の項を phase quadrature 由来だと考えればよい[*27]。

*27 これは、DRMI に入射ポートから侵入する揺らぎと、出射ポートから侵入する揺らぎの quadrature を対応付ける変換だとも言える。

図 3.27 に $\Delta = 5\gamma$ の場合の感度を amplitude 由来の項と phase 由来の項に分けて示した。Detuned SR 共振器に入射する真空場の quadrature と detuned Fabry-Perot 共振器に入射する真空場の quadrature のそれぞれの場合について計算してある。変換 $\mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ は感度を変更せず、それぞれの場合に対する amplitude 由来の項と phase 由来の項を合計したスペクトル密度は一致する。Fabry-Perot 共振器の場合には、どちらのディップも amplitude 由来の項が 0 となる周波数で現れると見なせることが分かる。また、Fabry-Perot 共振器に入射するレーザーの周波数雑音などの位相揺らぎは周波数の 1 乗に比例した雑音であることが分かる [45]。

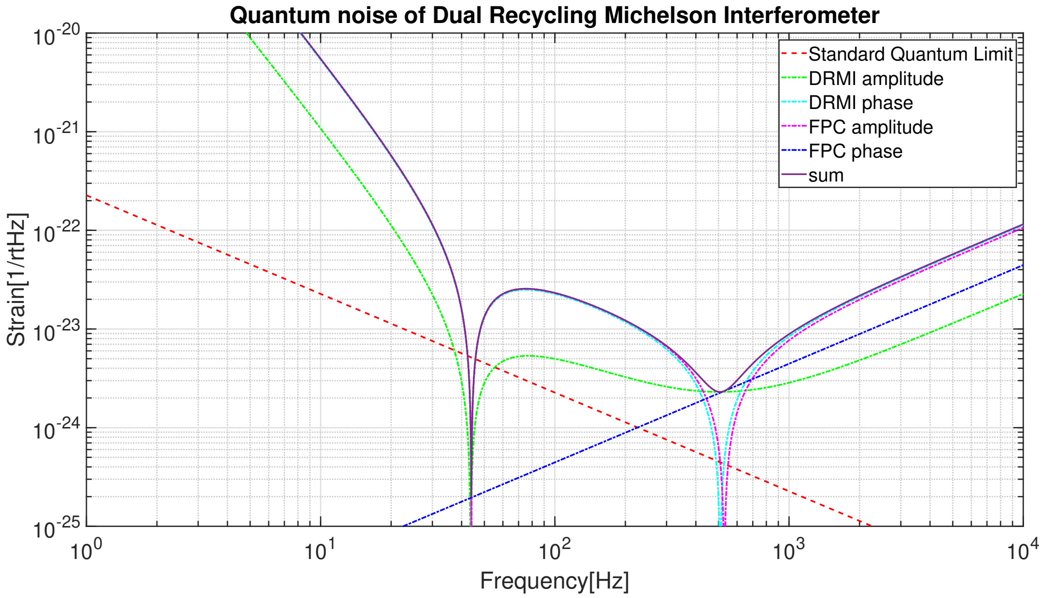


図 **3.27:** DSR で contrast defect 方向の測定を行った場合の感度
$\Delta = 5\gamma$ とし、真空場の amplitude quadrature 由来と phase quadrature 由来に分けて示した。

3.4.3　External Squeezing

前節では、干渉計に coherent な真空場 $(\frac{1}{2}\langle 0| (\hat{a}_j \hat{a}^\dagger_{k'} + \hat{a}^\dagger_{k'} \hat{a}_j) |0\rangle = \frac{1}{2} 2\pi\delta(\Omega - \Omega')\delta_{jk})$ が入射するとして計算を行っていたが、入射する真空場に対して OPA などを行えば、squeeze された真空場を干渉計に入射させることも可能である。この手法を external squeezing、あるいは input squeezing などと呼ぶ。図 3.28 のように、干渉計に squeeze された真空場を入射させることを考える。Faraday Isolator (FI) は順方向から入射した光を透過させ、逆方向から入射した光を反射させるような光学素子群であり、図では下方向に進む光が透過するようにしてある。この場合には、下側のビームスプリッタで反射した真空場が干渉計に侵入するようになる。$\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{a}' = S(u, \theta)\boldsymbol{a}$ と変更されるので、式

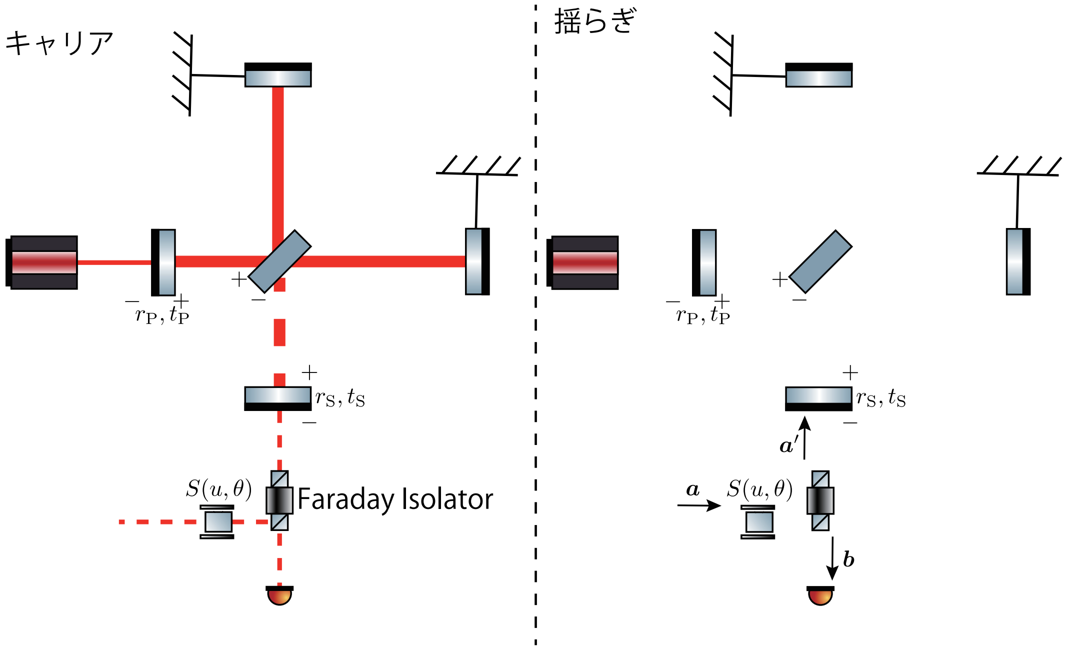


図 **3.28:** External squeezing

(3.85) は

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{e}^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} S(u,\theta)\boldsymbol{a} + \mathrm{e}^{i\beta} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_\mathrm{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.117}$$

と変更される。感度は

$$\begin{aligned} S_h(\Omega) = \frac{h_\mathrm{SQL}^2}{2\mathcal{K}} \big[& (\sinh u \sin 2\theta - \mathcal{K}(\cosh u + \sinh u \cos 2\theta))^2 \\ & + ((\cosh u - \sinh u \cos 2\theta) - \mathcal{K} \sinh u \sin 2\theta)^2 \big] \end{aligned} \tag{3.118}$$

と表せる。

感度曲線を図 3.29 に示す。coherent な真空場が入射したとき ($u = 0$) と比較して、$\theta = 0$ のときには散射雑音が、$\theta = \pi/2$ のときには輻射圧雑音が減少していることが分かる。すなわち、$\theta = 0$ のときには入射光強度を上げたときと同じ効果が、$\theta = \pi/2$ のときには入射光強度を下げたときと同じ効果が得られている：

$$S_h(\Omega)|_{\theta=0} = \frac{h_\mathrm{SQL}^2}{2} \left(s^2\mathcal{K} + \frac{1}{s^2\mathcal{K}} \right) \tag{3.119}$$

ここで、$s = \mathrm{e}^u$ は squeezing factor である。External squeezing は cavity pole や腕内光量といった共振器のパラメータを変更することなく散射雑音の低減を行うことができるため、Mizuno limit を突破する方法の 1 つでもある[*28]。

[*28] Squeezing factor まで含めた Mizuno limit を定義することもできる。

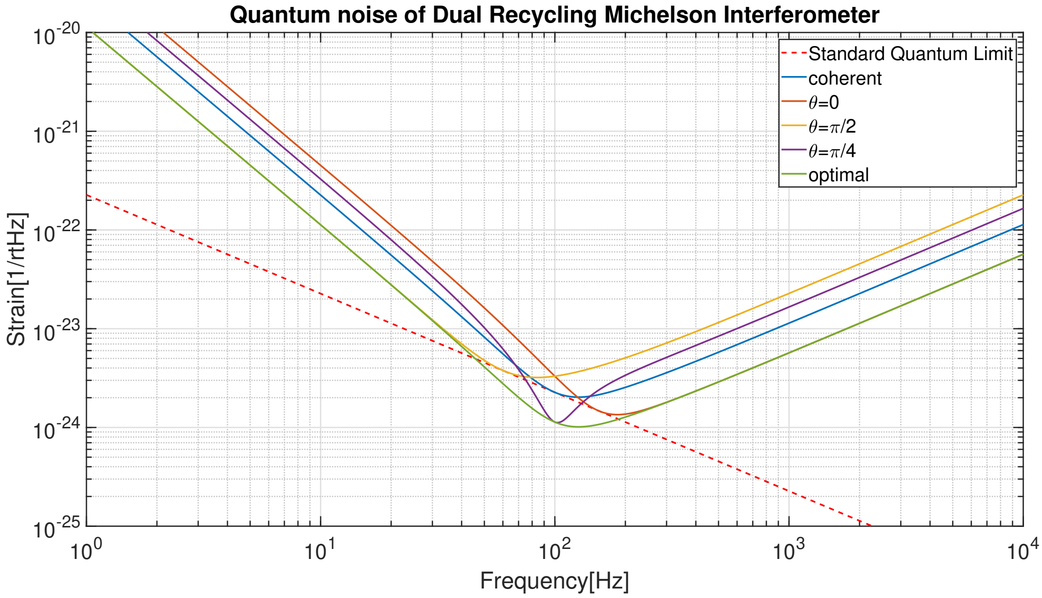


図 3.29: External squeezing を行った場合の感度
$u = \log(2)$ とし、squeeze angle θ を変化させてプロットした。

$\theta = \pi/4$ のときには amplitude quadrature と phase quadrature 間に相関のある真空場が入射されることになり、SQL を突破することができる。また、式 (3.118) を最小化するような周波数に依存した θ を求めると、$\theta = \arctan \mathcal{K}$ としたとき

$$S_h(\Omega) \to \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2s^2}\left(\mathcal{K} + \frac{1}{\mathcal{K}}\right) \tag{3.120}$$

とできることが分かる。このように、周波数に依存した理想的な squeezing angle が実現できれば、全ての周波数帯域で感度を改善することが可能である。周波数に依存した external squeezing については、3.5.1 小節や補遺 D.1 で議論する。

通常の重力波検出器における低周波数帯域の感度は熱雑音などに制限されるため、散射雑音の低減を行うような external squeezing ($s > 1$、$\theta = 0$) を行なえば周波数依存性を持たせなくても全体的な感度を向上させることができる。External squeezing に対する実験的検証は長い時間をかけて十分に為されており [46]、この技術は Advanced LIGO などに既に導入されている。

3.4.4 Internal Squeezing

External squeezing に対して、信号の発生・増幅・抽出などを行う共振器の内部で squeezing を行う手法を internal squeezing、あるいは intra-cavity squeezing などと呼ぶ。Internal squeezing を行うと、真空場の squeezing と信号の増減が同時に発生し、信号の減衰より真空場の squeezing が大きい場合には感度が改善されるようになる。

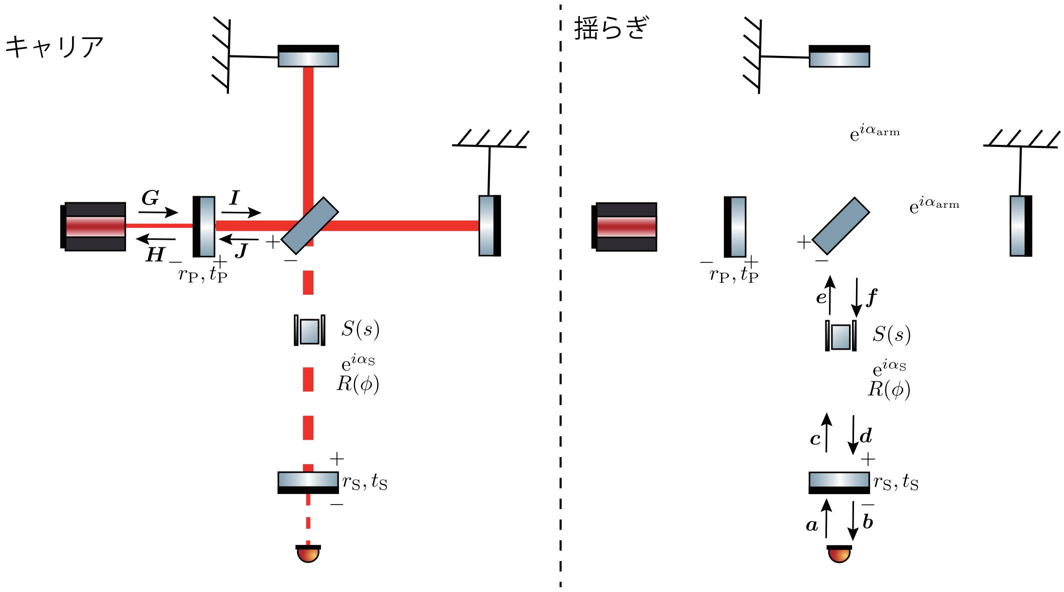


図 **3.30:** Internal Squeezing

内部にキャリアの存在する Fabry-Perot 共振器で OPA を起こすと、squeezing 効果に加えて共振器内強度の増減が起きる。さらに、detune を行っている場合には共振器内キャリアの quadrature が互いに変換されるようになる。このために、internal squeezing の基本となるのは図 3.30 のようなキャリアの存在しない SR 共振器に OPA を挿入した系である。Squeezing angle $\theta = 0$ のとき、式 (3.84) のうち $\boldsymbol{d}$ が $S(s) = \mathrm{diag}(s, 1/s)$ を用いて $\boldsymbol{d} = \mathrm{e}^{i\alpha_{\rm S}} R(\phi) S(s) \boldsymbol{f}$ と変更されるので[*29]、

$$\boldsymbol{b} = \left[-rI + t^2 \mathrm{e}^{2i\alpha} \left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi) \right]^{-1} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi) \right] \boldsymbol{a} + t\mathrm{e}^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\rm SQL}} \left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi) \right]^{-1} R(\phi) S(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.121}$$

と解くことができる。SR 共振器が共振している場合 ($\phi = 0$) には

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \left[-rI + \frac{t^2 \mathrm{e}^{2i\alpha}}{(1 - rs\mathrm{e}^{2i\alpha})(1 - rs^{-1}\mathrm{e}^{2i\alpha})} \begin{pmatrix} s - r\mathrm{e}^{2i\alpha} & 0 \\ -s^{-1}\kappa & s^{-1} - r\mathrm{e}^{2i\alpha} \end{pmatrix} \right] \boldsymbol{a} \\ &\quad + \frac{t\mathrm{e}^{i\alpha}}{(1 - rs\mathrm{e}^{2i\alpha})(1 - rs^{-1}\mathrm{e}^{2i\alpha})} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\rm SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ s^{-1} - r\mathrm{e}^{2i\alpha} \end{pmatrix} h(\Omega) \\ &\simeq \mathrm{e}^{2i\beta_{\rm IS}} \begin{pmatrix} \frac{\gamma+\Sigma+i\Omega}{\gamma-\Sigma+i\Omega} & 0 \\ -\frac{\gamma+\Sigma+i\Omega}{\gamma-\Sigma+i\Omega}\mathcal{K}_{\rm IS} & \frac{\gamma-\Sigma-i\Omega}{\gamma+\Sigma-i\Omega} \end{pmatrix} \boldsymbol{a} + \mathrm{e}^{i\beta_{\rm ICS}} \frac{\sqrt{2\mathcal{K}_{\rm IS}}}{h_{\rm SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \end{aligned} \tag{3.122}$$

となる。$T = t^2, \alpha, u = \log s$ を微小量として近似を行い、$\gamma = Tc/(4(L+l))$、$\beta_{\rm IS} = \arctan(-\Omega/(\gamma+\Sigma))$、$\mathcal{K}_{\rm IS} = \gamma\iota/(\Omega^2((\gamma+\Sigma)^2+\Omega^2))$ と置いた。$\Sigma = uc/(2(L+l))$ は

[*29] ここでは BS から SRM に向けてポンプ光を入射させ、SRM から BS に向かう経路で squeezing が起こらないとしている。

squeezing rate である。Internal squeezing により cavity pole が $\gamma+\Sigma$ に変更され、低周波数帯域における信号が $\gamma/(\gamma+\Sigma)$ 倍にされていることが分かる。一方で、真空場に対しては周波数に依存した squeezing が行われていることが分かる。この干渉計の感度を求めると、

$$S_h = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(s_{\mathrm{IS}}^2\mathcal{K}_{\mathrm{IS}} + \frac{1}{s_{\mathrm{IS}}^2\mathcal{K}_{\mathrm{IS}}}\right) \tag{3.123}$$

であり、実効的な squeezing factor $s_{\mathrm{IS}}^2 = ((\gamma+\Sigma)^2+\Omega^2)/((\gamma-\Sigma)^2+\Omega^2)$ を持つ squeezing が行われていることが分かる。

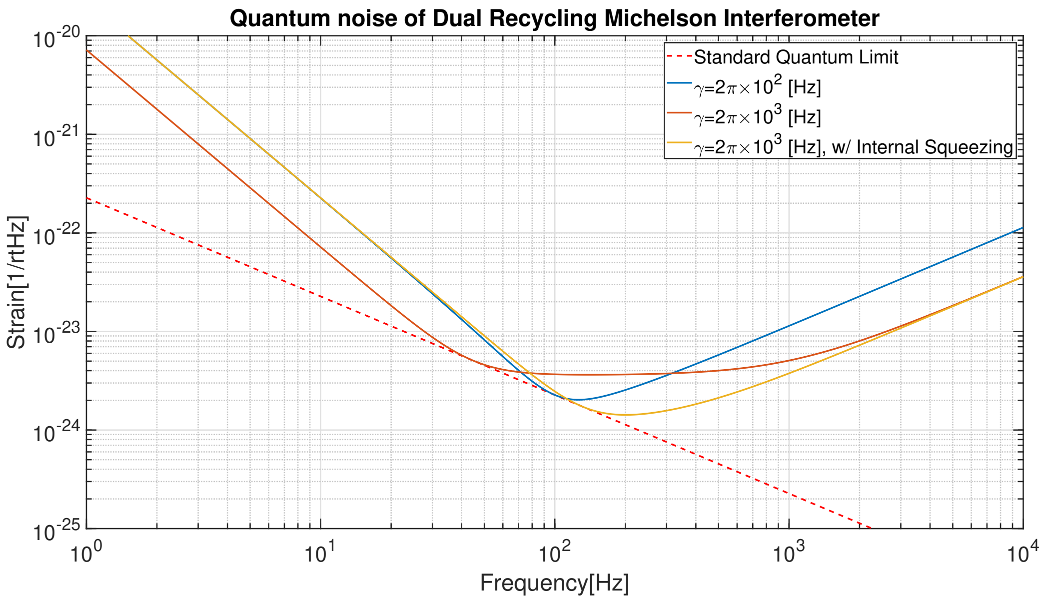


図 **3.31:** Internal squeezing を行った場合の感度
入射光強度や PR 共振器のフィネスは一定としている ($\iota = 2\times(2\pi\times10^2)^3$ Hz^3)。

Internal squeezing はフィネスの低い SR 共振器と組み合わせることで感度を向上させることができる。感度を図 3.31 に示す。それぞれ SR 共振器が高フィネスの場合、低フィネスの場合、低フィネスで internal squeezing を行った場合を示しており、Σ は低周波数帯域における感度が高フィネスの場合と一致するように調整した。輻射圧雑音の比較から分かるように、internal squeezing は実効的なフィネスを向上させる効果がある。ただし、高周波数帯域の感度が悪化していないことから、実効的な cavity pole は変化させていないことも分かる。

散射雑音の比較を図 3.32 に示す。散射雑音レベルと帯域幅は SR 共振器のフィネスに関してトレードオフの関係にあるが、internal squeezing を行うことで散射雑音レベルが低く帯域幅が広い感度を実現することができる。Internal squeezing も腕内光量を変更しないため、Mizuno limit を突破する方法の 1 つである。

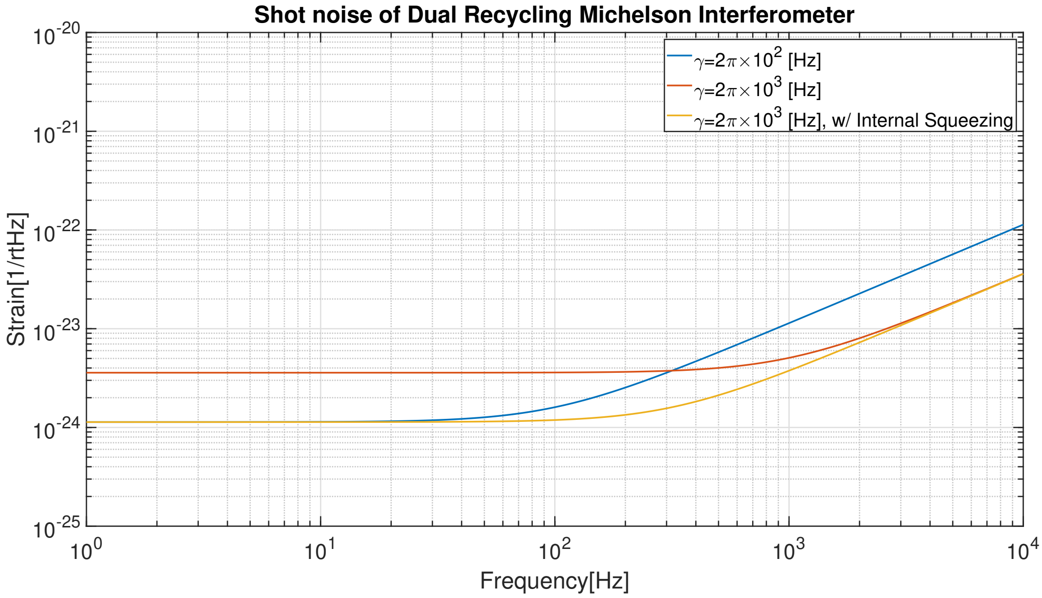


図 3.32: Internal Squeezing を行った場合の散射雑音
パラメータは図 3.31 と等しくした。

Internal squeezing を行うことにより、RSE とは異なった方法で帯域幅の拡張を行うことができるが、SQL を突破することはできない。より現実的には、非線形光学結晶を干渉計内に導入することによる光学ロスが生じ、主干渉計の光学設計が制限されてしまうことも考慮する必要がある。Internal squeezing は重力波検出器にとってメリットの少ない手法であるため、実験的検証も最も基本的な squeezing 効果の確認のみに留まっている [47]。

一方で、internal squeezing はオプトメカニカル結合定数を含めた共振器の性質自体を変化させるために、squeeze を行う共振器を detune して光ばねを発生させ、信号増幅を行った場合には大幅な感度向上を行うことが可能になる [48]。3.5.2 小節で detune した SR 共振器に squeezer を挿入した系について議論する。

3.5 次世代型重力波検出器

前節では、SQL を超えた感度を実現できる先進的な技術について議論した。Internal squeezing を除き、これらの技術は既に実際の重力波検出器に採用されており、実際に感度向上に貢献しているものもある。本節では、前節の squeeze 技術をより発展させた 2 つの次世代型重力波検出器について議論する。

3.5.1　Frequency Dependent External Squeezing

3.4.3 小節で議論したように、external squeezing により全ての帯域で感度を向上させるためには、周波数に依存した squeezing angle を実現する必要がある。これは filter cavity と呼ばれる detune した Fabry-Perot 共振器を用いることで実現できることが知られている [49]。ここでは、簡単のために filter cavity に光学ロスが存在しない場合について考える[*30]。

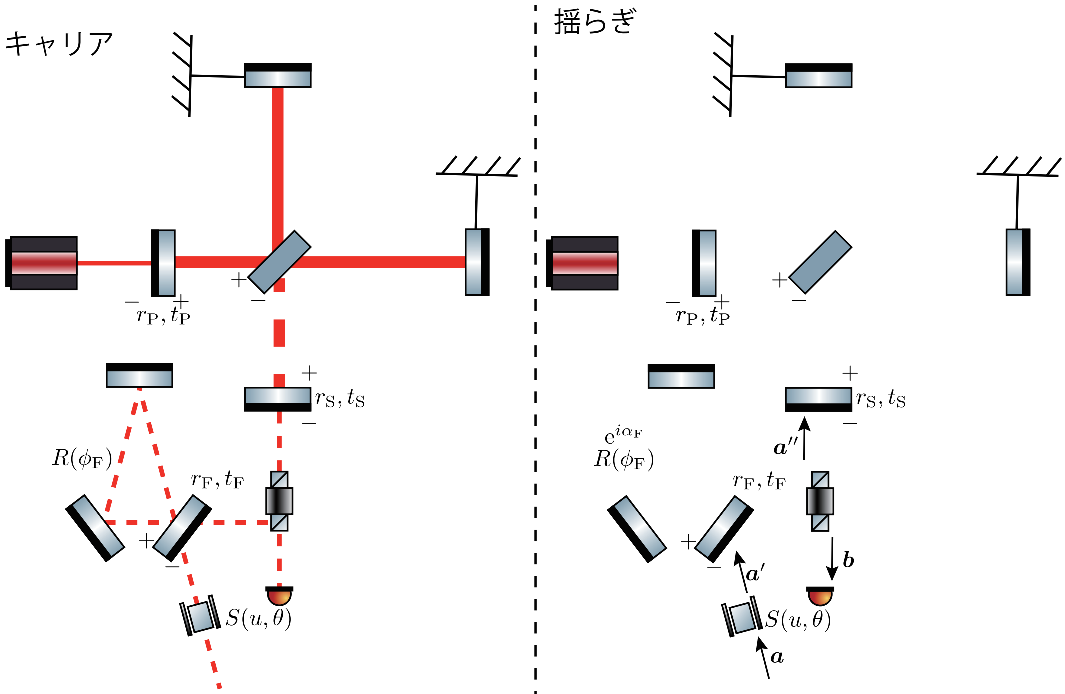


図 **3.33:** Filter cavity を用いた周波数依存 external squeezing

図 3.33 のように、squeeze した真空場を filter cavity で反射させたものをメイン干渉計に入射させるとする。Filter cavity は三角形のオーバーカップリングなリング共振器であるとしており、input mirror の強度反射率・透過率を r_{F}^2、t_{F}^2、半周あたりの位相変化を $\phi_{\mathrm{F}} \equiv L_{\mathrm{F}}\omega_0/c \pmod{2\pi}$、半周あたりの位相遅れを $\alpha_{\mathrm{F}} = -L_{\mathrm{F}}\Omega/c$ としてある。L_{F} は filter cavity の半周長である。Filter cavity 内にキャリアが存在しないとして式 (3.65) と

[*30] 建設費がかからない短い filter cavity で $2\pi \times 100$ Hz 程度の低い cavity pole を実現するためには、input mirror の透過率を極めて低くする必要がある。このような共振器においては僅かな光学ロスが実効的な squeezing factor を制限することになるので、光学ロスは filter cavity の性能を決める重要なパラメータである。光学ロスを含んだ計算は [50] などにある。

同様の式を解けば、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}'' &= \left[-r_{\mathrm{F}} I + t_{\mathrm{F}}^2 \mathrm{e}^{2i\alpha_{\mathrm{F}}} \left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha_{\mathrm{F}}} R(2\phi_{\mathrm{F}})\right]^{-1} R(2\phi_{\mathrm{F}})\right] \boldsymbol{a}' \\
&\simeq \frac{1}{(\gamma_{\mathrm{F}} - i\Omega)^2 + \Delta_{\mathrm{F}}^2} \begin{pmatrix} \gamma_{\mathrm{F}}^2 - \Delta_{\mathrm{F}}^2 + \Omega^2 & -2\gamma_{\mathrm{F}}\Delta_{\mathrm{F}} \\ 2\gamma_{\mathrm{F}}\Delta_{\mathrm{F}} & \gamma_{\mathrm{F}}^2 - \Delta_{\mathrm{F}}^2 + \Omega^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}'
\end{aligned} \tag{3.124}
$$

となる。ここで、$\gamma_{\mathrm{F}} = T_{\mathrm{F}} c/4L_{\mathrm{F}}$ と $\Delta_{\mathrm{F}} = \phi_{\mathrm{F}} c/L_{\mathrm{F}}$ はそれぞれ filter cavity の cavity pole と detune である。

OPA の squeezing angle が固定されていても、filter cavity が高周波数帯域 ($\Omega > \gamma$) で 0、低周波数帯域 ($\Omega < \gamma$) で $\pi/2$、$\Omega = \gamma$ で $\pi/4$ の位相変化を与える回転行列のような効果を持っていれば、理想的な感度を実現することができる。まず、$\Delta_{\mathrm{F}} = \gamma_{\mathrm{F}}$ とすれば、式 (3.124) の変換行列は高周波数帯域 ($\Omega \gg \gamma_{\mathrm{F}}$) では角度 0 の回転行列 $\times$(位相項) に、低周波数帯域 ($\Omega \ll \gamma_{\mathrm{F}}$) では角度 $\pi/2$ の回転行列に一致することが分かる。また、$\gamma_{\mathrm{F}} = \gamma/\sqrt{2}$ とすると、$\Omega = \gamma$ で角度 $\pi/4$ の回転行列 $\times$(位相項) に一致することが分かる。このときの感度は

$$
S_h(\Omega) = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2\mathcal{K}} \frac{1}{\gamma^4 + \Omega^4} \left[s^2(-\mathcal{K}\Omega^2 + \gamma^2)^2 + \tfrac{1}{s^2}(\mathcal{K}\gamma^2 + \Omega^2)^2\right] \tag{3.125}
$$

となる。

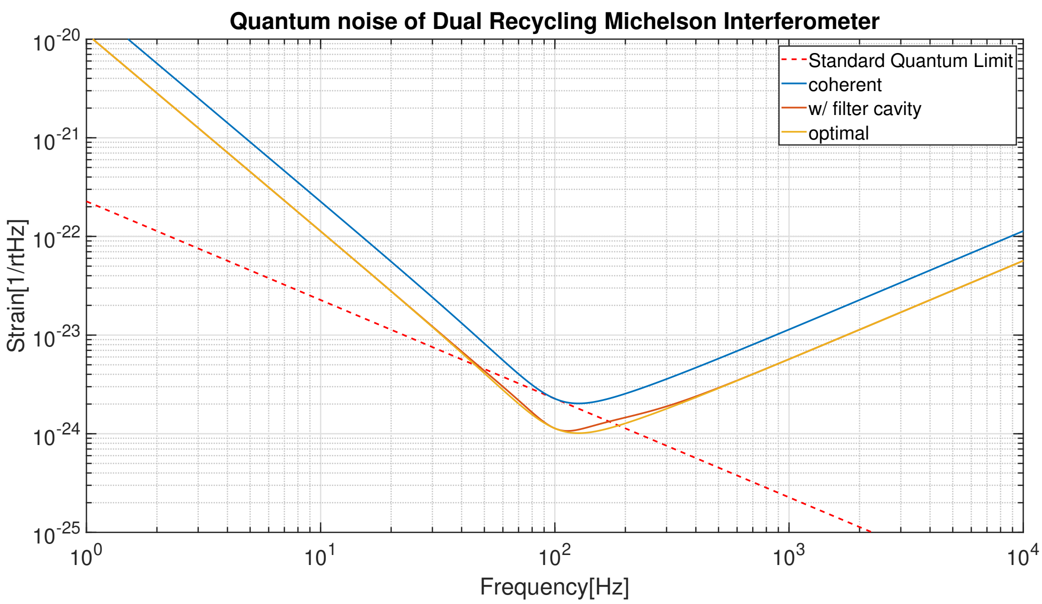


図 3.34: Filter cavity による周波数依存 external squeezing を行った場合の感度 $u = \log(2)$ とした。

感度曲線を図 3.34 に示した。Filter cavity を用いることで、ほぼ理想的な感度を実現できていることが分かる。Filter cavity を用いて squeezing angle を回転させる実験はい

くつか行われており [51,52]、将来的にはある程度の長さを持った filter cavity が重力波検出器のアップグレードのために建造される予定である。

3.5.2　Internal Squeezing による光ばねの強化

3.4.4 小節では、共振状態にある SR 共振器内で internal squeezing を行った場合の振る舞いについて議論した。このときには、RSE と同様に帯域幅を拡張することができるのだった。ここでは、detune した SR 共振器で internal squeezing を行った場合に、干渉計内に発生する光ばねが受ける効果について調べる。

式 (3.121) を $\phi \neq 0$ として解くと、入出力関係は以下のように変更される：

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{C'}[\mathbb{A}'\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\mathcal{H}}'h(\Omega)] \tag{3.126}$$

ここで

$$C' = r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \tfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - (s + \tfrac{1}{s})\cos 2\phi - \tfrac{1}{s}\kappa \sin 2\phi \tag{3.127}$$

$$A'_{11} = \frac{1}{2}(r + \tfrac{1}{r})[(s + \tfrac{1}{s})\cos 2\phi + \tfrac{1}{s}\kappa \sin 2\phi] - 2\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\tfrac{1}{r} - r)(s - \tfrac{1}{s}) \tag{3.128}$$

$$A'_{12} = -\frac{1}{2}(\tfrac{1}{r} - r)[(s + \tfrac{1}{s})\sin 2\phi + \tfrac{1}{s}\kappa(1 - \cos 2\phi)] \tag{3.129}$$

$$A'_{21} = \frac{1}{2}(\tfrac{1}{r} - r)[(s + \tfrac{1}{s})\sin 2\phi - \tfrac{1}{s}\kappa(1 + \cos 2\phi)] \tag{3.130}$$

$$A'_{22} = \frac{1}{2}(r + \tfrac{1}{r})[(s + \tfrac{1}{s})\cos 2\phi + \tfrac{1}{s}\kappa \sin 2\phi] - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\tfrac{1}{r} - r)(s - \tfrac{1}{s})$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}' = t\frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\mathrm{SQL}}}\begin{pmatrix} -(\tfrac{1}{rs}\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{i\alpha})\sin\phi \\ (\tfrac{1}{rs}\mathrm{e}^{-i\alpha} - \mathrm{e}^{i\alpha})\cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.131}$$

である[*31]。

感度曲線を図 3.35 に示す。強い squeezing を行うにつれ、深いディップが高周波数帯域にシフトしていっていることが分かる。ϕ は optical spring と optical resonance の周波数が一致するように調整しており、$s \to 0$ の極限では $\pi/4$ になる。また、この極限で信号の偏角が $\pi/4$ になることを考え、ホモダイン角は $\pi/4$ としてある。このディップは光ばねによる信号増幅効果の結果として現れており、internal squeezing が共振器のオプトメカニカルな性質を変化させた結果として、入射光強度を変えることなく光ばねの周波数をより高周波数帯域にシフトさせることができていることが分かる。Detune と squeezing factor を変えることでこのディップの周波数は移動させられるので、理論的に予測された

*31 式 (3.122) で行ったような近似で式を簡潔にすることもできるが、以降のプロットで採用するような強い squeezing factor と極端な detune を行うと近似が成り立たなくなることに注意する。

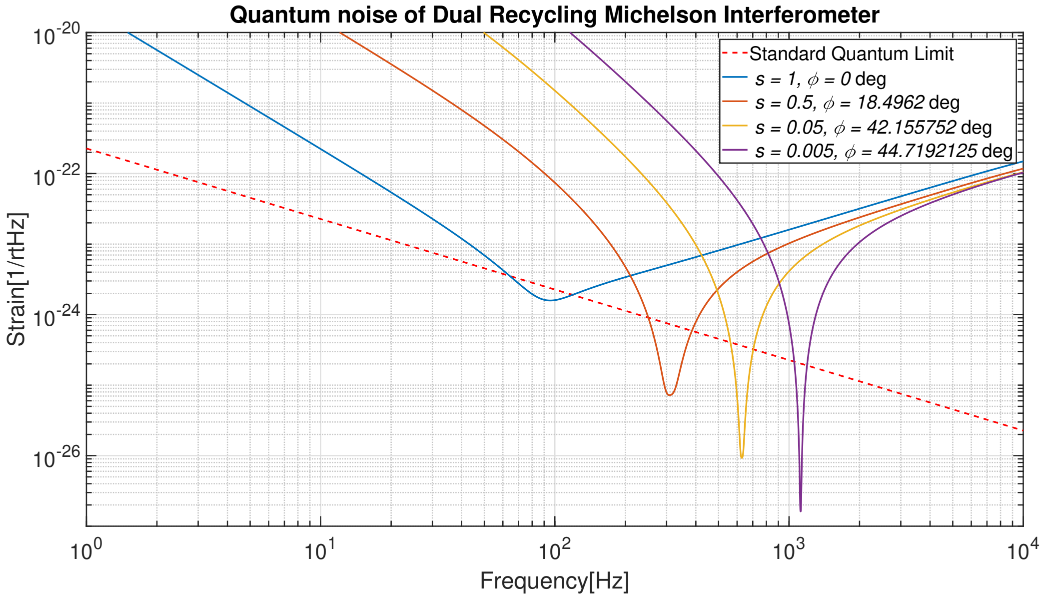


図 **3.35:** Detune した SR 共振器内で squeezing を行った場合の感度
$r = \sqrt{1 - 4L\gamma/c}$、$\xi_B = \pi/4$ とした。Strain の下限を 10^{-27} に変更している。

重力波の周波数とディップの周波数を一致させておけば、超新星爆発や中性子星連星合体後に発生する ∼kHz 程度の周波数を持った重力波を感度良く捉えることができる。また、現実的な光学ロスが存在していても、この手法は有効であることが先行研究で示されている [39]。

ディップの深さと帯域幅は squeezing angle θ を調整することで変更できる。BS から SRM への伝達行列と SRM から BS への伝達行列が等しく $U = R(\phi/2)S(r,\theta)R(\phi/2)$ であり、θ についての対称性が高い場合を考える。すなわち、入出力関係は

$$\boldsymbol{b} = \left[-rI + t^2 \mathrm{e}^{2i\alpha}\left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha}UPU\right]^{-1} UPU\right]\boldsymbol{a} + t\mathrm{e}^{i\alpha}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\mathrm{SQL}}}\left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha}UPU\right]^{-1} U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \tag{3.132}$$

と変更される。このときの感度の一例を図 3.36 に示した。θ を適当に選ぶことで、低周波数帯域の感度悪化を抑えつつ、高周波数帯域に広帯域なディップが現れていることが分かる。

また、ホモダイン角や detune に周波数依存性を持たせることは難しいが、前小節で行った考察から分かるように、追加の cavity を用いれば squeezing angle には周波数依存性を持たせることが可能である。Internal squeezing に対しても、周波数に依存した理想的な squeezing angle が実現できれば、更なる感度改善を行える可能性がある [53]。特に今考えている系は、squeezing angle を変化させると光ばねの共振周波数が変化するため、周波数ごとに適切な squeezing angle を選ぶことができるならば、感度を大幅に向上

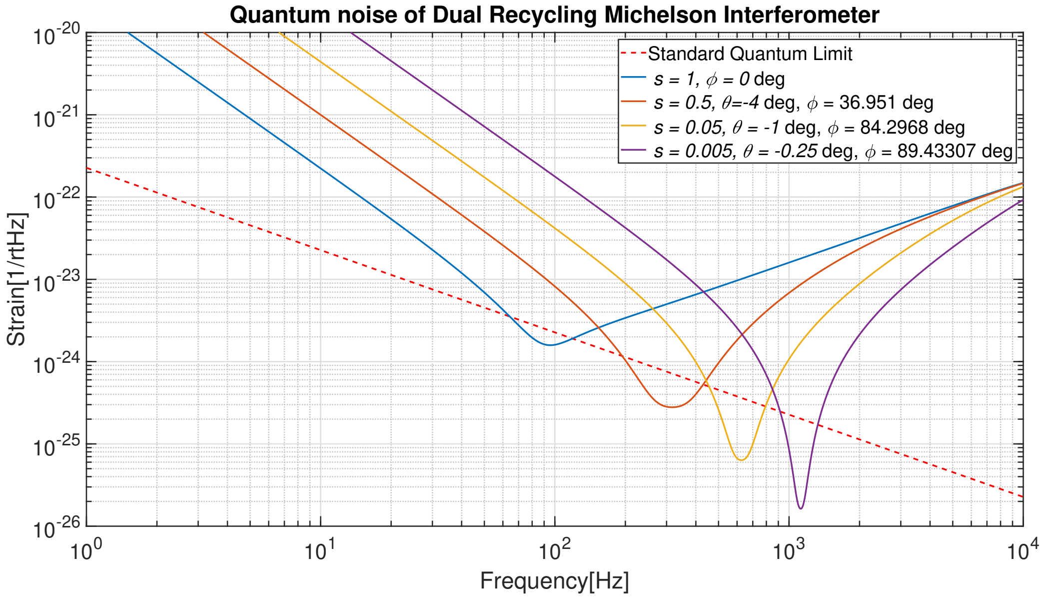


図 3.36: Detune した SRC 内で squeezing を行い θ を適当に選んだ場合の感度 $r = \sqrt{1 - 4L\gamma/c}$、$\xi_B = \pi/4$ とした。Strain の下限を 10^{-26} に変更している。

させることができる。理想的な Freaqency Dependent (FD) internal squeezing と FD external squeezing のそれぞれで $s = 0.05$ とした場合[*32]の比較を図 3.37 に示した。それぞれの場合について、その周波数で最も感度が良くなる squeezing angle を選んである。理想的な FD external squeezng と比較しても、光ばねの効果を有効に利用することによって、高周波数帯域においては 1 桁程度の感度向上が見込めることが分かる。

本小節では光ばねの性質を変化させることを考えたが、光ばね以外の様々なオプトメカニカルな現象に対して internal squeezing が与える影響についても同様に考えることができる。Internal squeezing の導入によって共振器のパラメータに squeezing rate が追加されることになり、本来は cavity pole や detune のみで決まっていた共振器の性質が変化し、オプトメカニカルな現象に新たな可能性を与えることができるようになるのである。このような internal squeezing がオプトメカニクスに与える影響に関する理論提唱はごく最近になって非常に盛んになってきており [55–58]、実験的な検証が待たれている。補遺 C では、代表的なオプトメカニカルな現象であるサイドバンド冷却に対し internal squeezing が与える影響について議論する。

[*32] 15 dB ($s \simeq 0.032$ 相当) の強い squeezing を実験的に観測した例がある [54]。

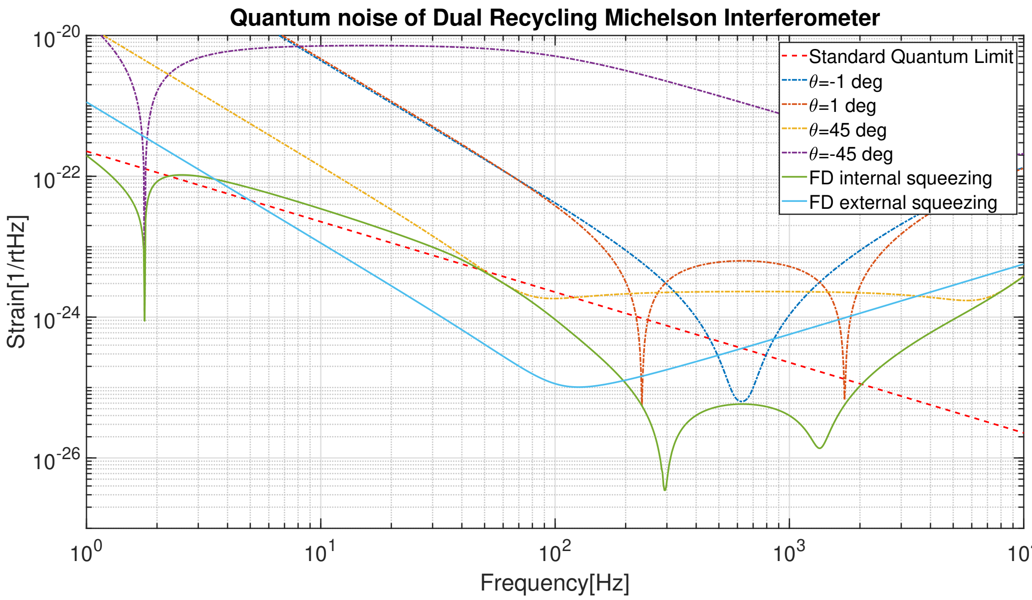


図 3.37: 理想的な周波数依存 internal squeezing を行った場合の感度

$s = 0.05$、$\phi = 84.2968$ deg、$r = \sqrt{1 - 4L\gamma/c}$、$\xi_B = \pi/4$ とした。Strain の下限を 10^{-27} に変更している。

第 4 章

実験の原理

現在稼働している第 2 世代重力波検出器は km スケールの基線長を持っているが、これらの検出器の原理検証は基線長数十 m 程度のプロトタイプや、テーブルトップ実験によって行われてきた。例えば、実際の重力波検出器で用いられるような数十 kg の鏡を光ばねで束縛するには数百 kW 程度の共振器内レーザー光強度が必要になるが、より軽い数 g の鏡を用いればテーブルトップ実験でも光ばねの効果を確認することが可能である [59]。本実験は 3.5.2 小節で述べた検出器に対する原理検証を目標としており、本章ではテーブルトップ実験で原理検証を完遂するための理論と実験手法について論じる。

4.1　光干渉計と光ばね

3.4.2 節で示したように、SR 共振器を detune して光ばねを発生させ、その共振によって重力波信号を増幅すれば、感度を大きく改善することが可能である。光ばねは、輻射圧が鏡の微小変位に比例する状態であれば発生する。鏡で電場とその揺らぎ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{a}(\Omega)$ が反射される場合に変位が $\delta x(\Omega)$ だけ揺らいだとすると、式 (3.29) より、輻射圧揺らぎは

$$\delta F_{\mathrm{rpf}}(\Omega)=2\hbar k_0(A_1a_1(\Omega)+A_2a_2(\Omega))=-K_{\mathrm{opt}}(\Omega)\delta x(\Omega)+\delta F_{\mathrm{qrp}}(\Omega) \tag{4.1}$$

と表される。ここで、$K_{\mathrm{opt}}(\Omega)$ は複素光ばね定数[*1]、$\delta F_{\mathrm{qrp}}(\Omega)$ は量子輻射圧揺らぎ[*2]である。ここでは鏡における反射により電場の揺らぎが受ける squeezing 効果ではなく、鏡の微小変位に対する輻射圧揺らぎの応答を調べたいので、鏡で電場の揺らぎが反射した際の応答は、式 (3.28) を Fourier 変換して

$$\boldsymbol{b}(\Omega)=\boldsymbol{a}(\Omega)+2k_0A_0\boldsymbol{n}_{A_\perp}\delta x(\Omega) \tag{4.2}$$

[*1] 輻射圧は共振器内強度に比例するので、共振器内強度が一定であると見なせる低周波数帯域における光ばね定数の実部は共振器内強度を位相で微分することからも求めることができる。

[*2] 補遺 C 参照。

であるとする。

4.1.1 Detuned Fabry-Perot 共振器における光ばね

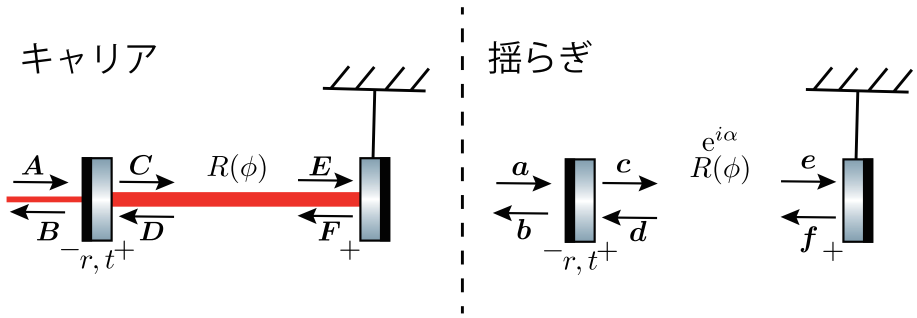


図 **4.1:** Fabry-Perot 共振器

まずは、図 4.1 のような detune した Fabry-Perot 共振器における光ばねについて考える。入射鏡は固定されており、強度透過率と反射率を r^2、t^2 とする。ϕ と α はそれぞれ半周あたりの位相変化と位相遅れである。光ばね定数を求めるためには鏡で反射される $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{e}$ について解けばよい。キャリアについては 3.3.2 小節と全く同様だが、電場の揺らぎに対しては

$$\boldsymbol{b} = -r\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{c} = t\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{d} = \mathrm{e}^{i\alpha}R(\phi)\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{e} = \mathrm{e}^{i\alpha}R(\phi)\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} + 2k_0E_0\boldsymbol{n}_{E_\perp}\delta x(\Omega) \tag{4.3}$$

となることに注意すれば、

$$\boldsymbol{E} = tR\left[I - rR^2\right]^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{tA_0}{1 + r^2 - 2r\cos 2\phi}\begin{pmatrix}(1-r)\cos\phi \\ (1+r)\sin\phi\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e} &= \left[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha}R^2\right]^{-1}\left[t\mathrm{e}^{i\alpha}R\boldsymbol{a} + 2k_0A_0r\mathrm{e}^{2i\alpha}R^2\boldsymbol{n}_{E_\perp}\delta x(\Omega)\right] \\ &= \mathbb{A}\boldsymbol{a} + \mathbb{X}\delta x(\Omega)\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\mathbb{A} = \frac{t\mathrm{e}^{-i\alpha}}{r\left(r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - 2\cos 2\phi\right)}\begin{pmatrix}(1-r\mathrm{e}^{2i\alpha})\cos\phi & -(1+r\mathrm{e}^{2i\alpha})\sin\phi \\ (1+r\mathrm{e}^{2i\alpha})\sin\phi & (1-r\mathrm{e}^{2i\alpha})\cos\phi\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$\mathbb{X} = \frac{2\omega_0E_0}{c}\frac{1}{r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - 2\cos 2\phi}\begin{pmatrix}\cos 2\phi - r\mathrm{e}^{2i\alpha} & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi - r\mathrm{e}^{2i\alpha}\end{pmatrix}\boldsymbol{n}_{E_\perp} \tag{4.7}$$

と解ける。式 (4.1) より、

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{opt}}(\Omega) &= \frac{8P_E\omega_0}{c^2}\frac{\sin 2\phi}{r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - 2\cos 2\phi} \\ &\simeq \frac{2P_E\omega_0}{Lc}\frac{2\Delta}{(\gamma + i\Omega)^2 + \Delta^2}\end{aligned} \tag{4.8}$$

と表せる。ϕ、α、$T = t^2$ を微小量として近似し、cavity pole を $\gamma = Tc/(4L)$、detune を $\Delta = \phi c/L$ と置いた。L は共振器長である。近似の際には式 (3.61) を用いるとよい。光ばねの共振角周波数 ω_{OS} が cavity pole より十分小さいときには、$\iota = 8P_E\omega_0/(mLc)$ を用いて

$$\omega_{\mathrm{OS}} := \sqrt{\frac{K_{\mathrm{opt}}(0)}{m}} = \sqrt{\frac{\Delta\iota}{2(\gamma^2+\Delta^2)}} \tag{4.9}$$

と表せる。また、$P_E = t^2P_A/(1+r^2-2r\cos 2\phi)$ に対しても同様の近似を行うと

$$K_{\mathrm{opt}}(\Omega) = \frac{16\mathcal{F}^2 P_A\omega_0}{\pi^2c^2}\frac{\delta}{(1+\delta^2)^2}\frac{1+\delta^2}{(1+i\Omega/\gamma)^2+\delta^2} \tag{4.10}$$

となり、特に考察する帯域が cavity pole より十分低い ($\Omega \ll \gamma$) 場合には

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{opt}}(\Omega) &= \frac{16\mathcal{F}^2 P_A\omega_0}{\pi^2c^2}\frac{\delta}{(1+\delta^2)^2}\left[1-\frac{2i\Omega}{\gamma(1+\delta^2)}\right] \\ &:= k_{\mathrm{opt}} + i\Gamma_{\mathrm{opt}}\Omega \end{aligned} \tag{4.11}$$

と表すこともできる。ここで、$\mathcal{F} = 2\pi/T$ は Fabry-Perot 共振器のフィネス、$\delta = \Delta/\gamma$ は nomalized detune である。$k_{\mathrm{opt}} = \Re(K_{\mathrm{opt}})$ は光による復元力を表す光ばね (optical spring) 定数であり、Γ_{opt} は光による摩擦力を表す光減衰 (optical damping) 定数である。$\delta > 0$ のときには $k_{\mathrm{opt}} > 0$ かつ $\Gamma_{\mathrm{opt}} < 0$ なので光ばねと光反減衰が起こり、$\delta < 0$ のときには $k_{\mathrm{opt}} < 0$ かつ $\Gamma_{\mathrm{opt}} > 0$ なので光反ばねと光減衰が起こることが分かる。このように、単一のキャリアで生成できる光ばねは機械的な復元力や摩擦力が存在しない限り不安定なばねになる[*3]。

これらの光ばねの性質は、図 4.2 のように考えると定性的に理解することができる。Optical spring は輻射圧の変位に対する変化率を表している。$\delta = 0$ のときには、変位の微小変化に対して輻射圧が変化しないため、$k_{\mathrm{opt}} = 0$ である。$\delta > 0$ のときには、変位の微小変化に対して輻射圧が減少し、光が復元力として働くために光正ばね ($k_{\mathrm{opt}} > 0$) となり、$\delta < 0$ のときには光反ばね ($k_{\mathrm{opt}} < 0$) となる。一方で、optical damping は輻射圧によるエネルギーの流出入を表している。角周波数 Ω で鏡が振動すると角周波数 $\omega_0 + \Omega$ のアッパーサイドバンドと $\omega_0 - \Omega$ のロウワーサイドバンドが発生することを考えると、$\delta = 0$ のときはこれらが釣り合った状態で増幅されるため、$\Gamma_{\mathrm{opt}} = 0$ である。$\delta > 0$ のときには、波長の長い光であるロウワーサイドバンドがより増幅される状態にあるため、鏡の振動により光のエネルギーが失われるようになる。このとき、鏡は光から正の仕事をされ、鏡の振動が増幅されるので、光反減衰 ($\Gamma_{\mathrm{opt}} < 0$) となる。$\delta < 0$ のときには、アッパーサイドバンドがより増幅されるために光減衰 ($\Gamma_{\mathrm{opt}} > 0$) となる。

[*3] 2 つのキャリアで $k_{\mathrm{opt}} > 0$ と $\Gamma_{\mathrm{opt}} > 0$ をそれぞれ実現すれば、安定な光ばねを作ることができる [60]。

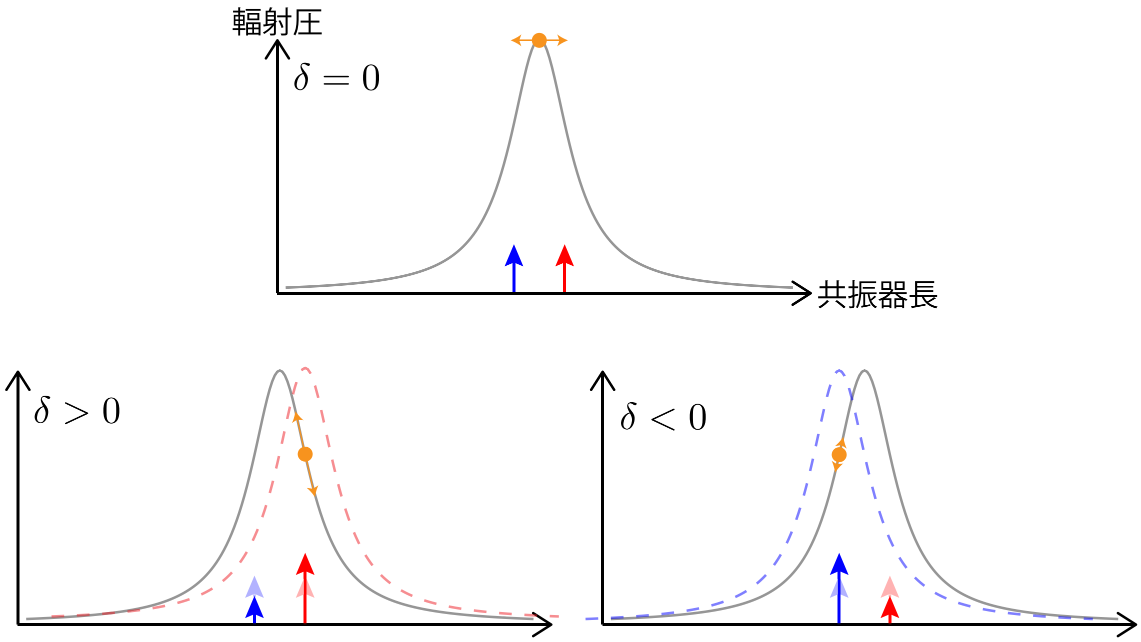


図 **4.2:** 光ばねの定性的な説明

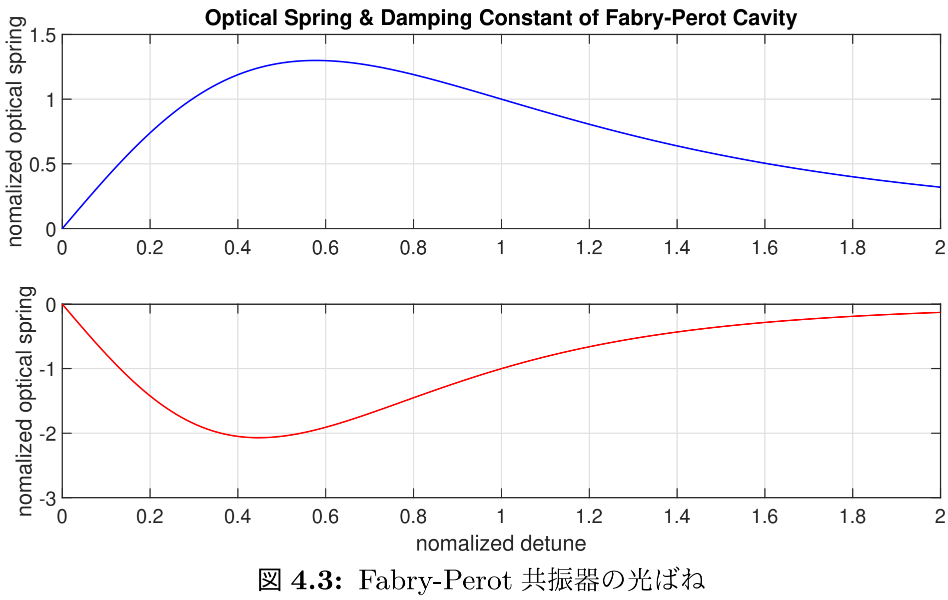


図 **4.3:** Fabry-Perot 共振器の光ばね
それぞれの定数は $\delta = 1$ で大きさが 1 となるように規格化した。

図 4.3 に光ばね定数と光減衰定数を示した。それぞれの大きさを $\delta = 1$ における値で規格化してある。光ばね定数は $\delta = 1/\sqrt{3}$ で最大値を取り、光減衰定数は $\delta = 1/\sqrt{5}$ で最小値を取る。式 (3.60) を用いれば、透過光強度が共振時の 3/4 倍のときに光ばね定数は最大になることが分かる。

4.1.2　Detuned Signal Recycling Michelson 干渉計における光ばね

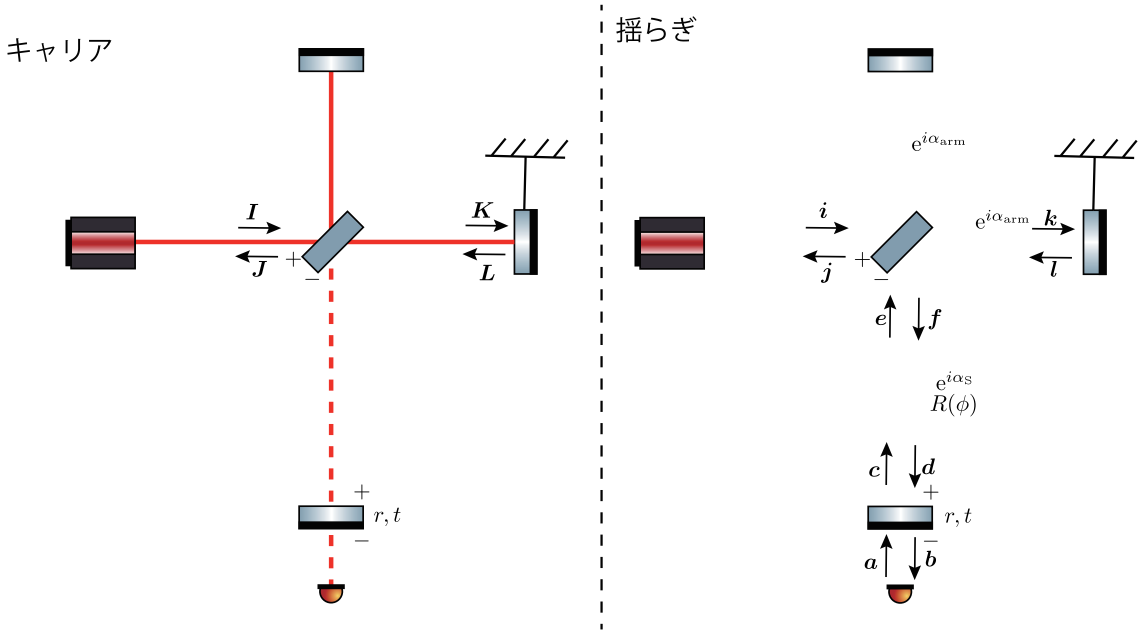


図 **4.4:** Signal Recycling 共振器

次に、図 4.4 のような detune した Signal Recycling Michelson 干渉計における光ばねについて考える。SRM の強度反射率と透過率を r^2、t^2 とし、BS と SRM 間の位相変化を ϕ とする。ここでは x 方向のエンド鏡のみが懸架されており、他の鏡は固定してあると考える。干渉計に入射する揺らぎ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{i}$ を無視すれば、4.1.1 小節と全く同様に

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{opt}} &= \frac{2P_I\omega_0}{c^2}\frac{\sin 2\phi}{r\mathrm{e}^{2i\alpha}+\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha}-2\cos 2\phi} \\ &\simeq \frac{P_I\omega_0}{2(L+l)c}\frac{2\Delta}{(\gamma+i\Omega)^2+\Delta^2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

と解くことができる。$\alpha=\alpha_{\mathrm{arm}}+\alpha_{\mathrm{S}}$ は SRM と ETM 間の位相遅れであり、$L+l$ は SRM と ETM 間の光路長である。$\gamma=Tc/(4(L+l))$ と $\Delta=\phi c/(L+l)$ はそれぞれ SR 共振器の cavity pole と detune である。$\iota=2P_I\omega_0/(m(L+l)c)$ を用いれば[*4]

$$\omega_{\mathrm{OS}} := \sqrt{\frac{K_{\mathrm{opt}}(0)}{m}} = \sqrt{\frac{\Delta\iota}{2(\gamma^2+\Delta^2)}} \tag{4.13}$$

[*4] ι の定義が 3.3.4 小節と異なっているのは懸架されている鏡が 1 つになっており、実効的な質量が 2 倍されているためである。

となり、式 (3.107) と確かに一致する。SR 共振器のフィネス $\mathcal{F}_\mathrm{S} = 2\pi/T$ を用いて表せば

$$
\begin{aligned}
K_\mathrm{opt}(\Omega) &= \frac{2\mathcal{F}_\mathrm{S}P_I\omega_0}{\pi c^2}\frac{\delta}{(1+i\Omega/\gamma)^2+\delta^2} \\
&\simeq \frac{2\mathcal{F}_\mathrm{S}P_I\omega_0}{\pi c^2}\frac{\delta}{1+\delta^2}\left[1-\frac{2i\Omega}{\gamma(1+\delta^2)}\right] \\
&:= k_\mathrm{opt} + i\Gamma_\mathrm{opt}\Omega
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

となる。近似は考察する帯域が cavity pole より十分低い ($\Omega \ll \gamma$) として行った。

図 4.5 に光ばね定数と光減衰定数を示した。光ばね定数は $\delta = 1$ で最大値を取り、光減衰定数は $\delta = 1/\sqrt{3}$ で最小値を取る。

式 (4.11) と式 (4.14) の比較から分かるように、Fabry-Perot 共振器における光ばねと SR 干渉計における光ばねは異なる振る舞いを示すことが分かる。特に、Fabry-Perot 共振器における光ばね定数の大きさがフィネスの 2 乗に比例するのに対し、SR 干渉計における光ばね定数の大きさはフィネスの 1 乗に比例している。これは、Fabry-Perot 共振器が共振器内のレーザー光強度 (∼ 輻射圧の強さ) と信号に対する応答の鋭さ (∼ 変位に対する輻射圧の傾き) の双方をフィネス倍程度するのに対し、Signal Recycling 共振器は信号に対する応答の鋭さのみをフィネス倍程度するためである[*5]。ただし、式 (4.9) と式 (4.13) の比較から分かるように、適当なパラメータ (共振器内強度、鏡の質量、共振器長) で規格化すれば、これらの光ばね定数は同一のものと見なせることも分かる。図 4.5 に光ばね定数と光減衰定数を示す。

4.1.3 Signal Recycling 共振器内で Internal Squeezing を行った場合

3.5.2 小節で考えた重力波検出器の原理は、internal squeezing によって光ばねの共振周波数を高周波数帯域に移動することができることにある。すなわち、図 4.6 ように SR 共振器内で internal squeezing を行い、光ばねの共振周波数が squeezing factor に伴って変化することを確認すれば、量子雑音を測定することなく 3.5.2 小節の重力波検出器に対する原理検証を行うことができる。

このときの光ばね定数は 4.1.2 小節と同様に計算でき、

$$
\begin{aligned}
K_\mathrm{opt} &= \frac{2P_I\omega_0}{c^2}\frac{\frac{1}{s}\sin 2\phi}{r\mathrm{e}^{2i\alpha}+\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha}-2(s+\frac{1}{s})\cos 2\phi} \\
&\simeq \frac{2\mathcal{F}_\mathrm{S}P_I\omega_0}{\pi c^2}\frac{\delta}{(1+i\Omega/\gamma)^2+\delta^2-\sigma^2} \\
&\simeq \frac{2\mathcal{F}_\mathrm{S}P_I\omega_0}{\pi c^2}\frac{\delta}{1+\delta^2-\sigma^2}\left[1-\frac{2i\Omega}{\gamma(1+\delta^2-\sigma^2)}\right]
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

*5 共振器によるばね定数の増幅がされない Sagnac-Michelson 干渉計の光ばねは、ばね定数が見かけ上フィネスの 0 乗に比例する [61]。

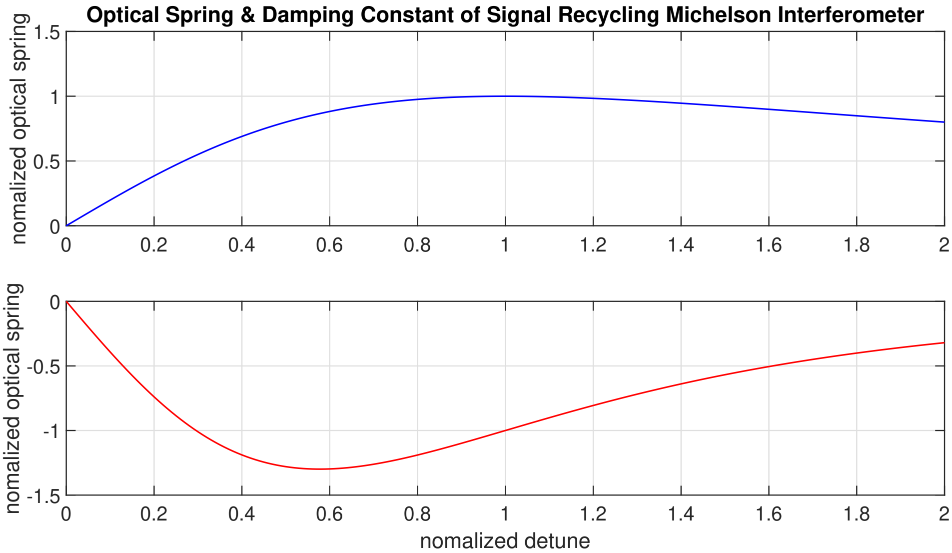


図 **4.5:** Signal Recycling 共振器の光ばね

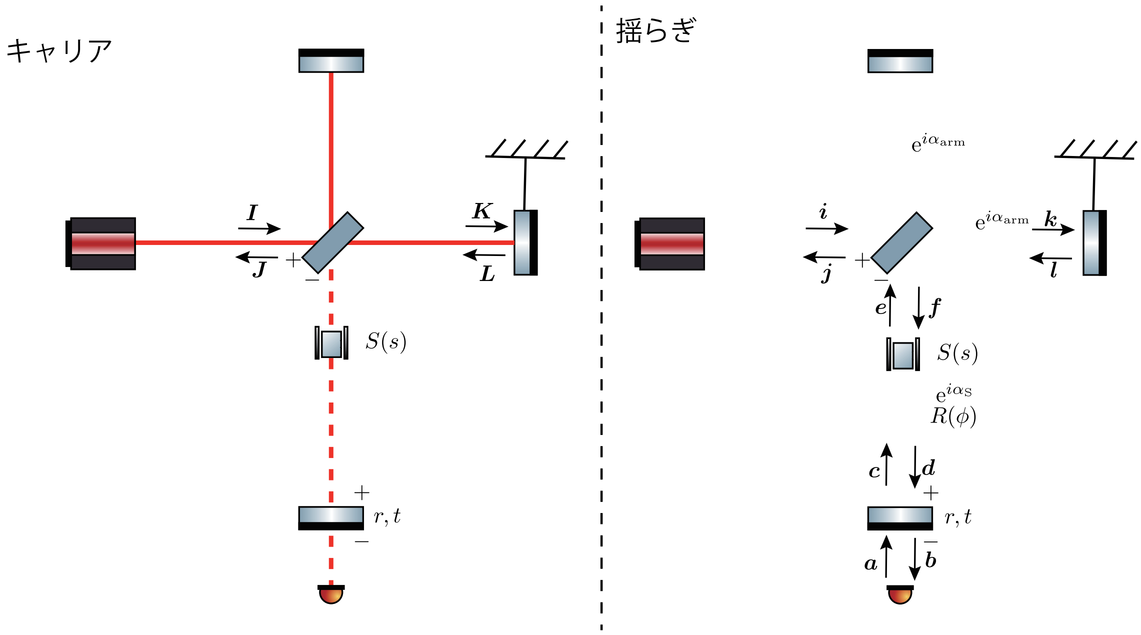


図 **4.6:** SR 共振器内で internal squeezing を行っている signal recycling Michelson 干渉計

となる。ここで、$\Sigma = uc/(2(L+l))$ は squeezing rate、$\sigma = \Sigma/\gamma$ は nomalized squeezing rate である。3.5.2 の結果と同じく、squeezing を強めるほど光ばねの共振周波数周波数も上がっていくことが分かる。ただし、式 (4.15) は detune と squeezing factor が十分小さいとして近似した場合の結果なので、図 3.36 などに現れている光ばねの共振周波数を表すことはできないことに注意する。この近似の範囲では、internal squeezing は光ばねによる信号増幅を強める働きをしていることが分かる。図 4.7 に光ばね定数と光減衰定数

を示す。

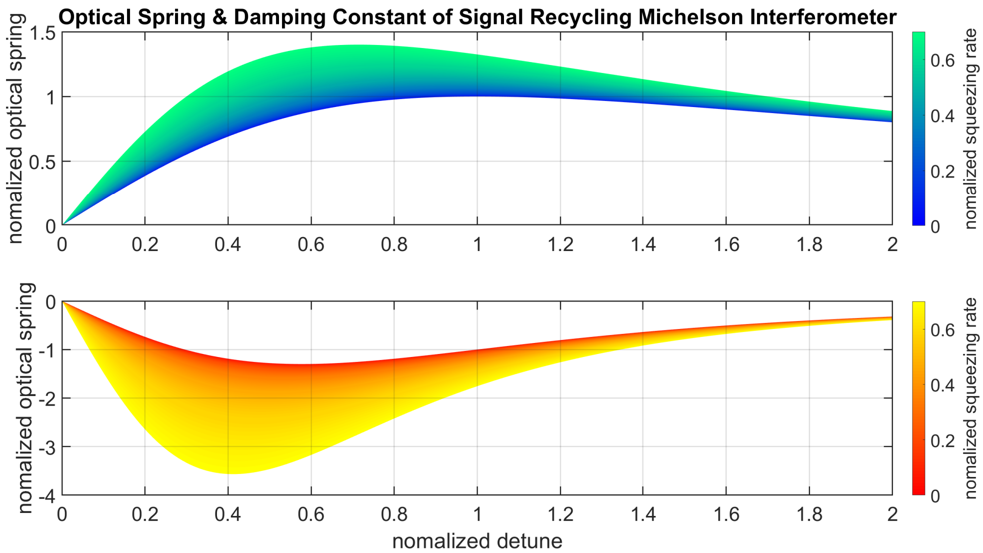


図 **4.7:** Signal recycling 共振器内で internal squeezing を行った場合の光ばね
それぞれの定数は $\sigma = 0$、$\delta = 1$ で大きさが 1 となるように規格化した。

4.1.4　Fabry-Perot 共振器内で Internal Squeezing を行った場合

前小節で考えた系では、internal squeezing により信号増幅効果が強められることを純粋に反映して光ばねの強化が起きているのだった。よって、3.5.2 小節の重力波検出器に対する原理検証実験は SR 干渉計を用いて行うことが望ましい。先行研究 [62–64] では、SR 共振器内に非線形光学結晶が設置されている SR 干渉計を用いた信号増幅実験が行われた。ただし、4.1.2 小節で述べたように、SR 干渉計で生成できる光ばねはフィネスの 1 乗に比例し、かつ実験的に作成できる SR 共振器は BS の非対称性に起因するコントラスト誤差が存在するためにフィネスを上げ辛いことから、SR 干渉計では共振周波数の低い柔らかい光ばねしか生成できないという問題がある。光ばねを観測するためには、少なくとも鏡を懸架している機械的な懸架系よりも共振周波数の高い光ばねを生成しなければならないので、前小節で考えた実験を実現することは難しい。

本小節では、光ばね定数がフィネスの 2 乗に比例し、かつフィネスも上げやすい Fabry-Perot 共振器を用いた場合について考える。まずは図 4.8 のように、これまでと同様に入射キャリアを基準とした場合を考える。このときの光ばね定数は

$$K_{\mathrm{opt}} = \frac{8P_E\omega_0}{c^2}\frac{(\frac{1}{s}\cos^2\xi_E + s\sin^2\xi_E)\sin 2\phi + (s-\frac{1}{s})\cos\xi_E\sin\xi_E\cos 2\phi}{r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - (s+\frac{1}{s})\cos 2\phi} \tag{4.16}$$

と計算できる。ここで、$\xi_E = \arctan(E_2/E_1) = \arctan(\delta/(1+\sigma))$ は共振器内キャリア

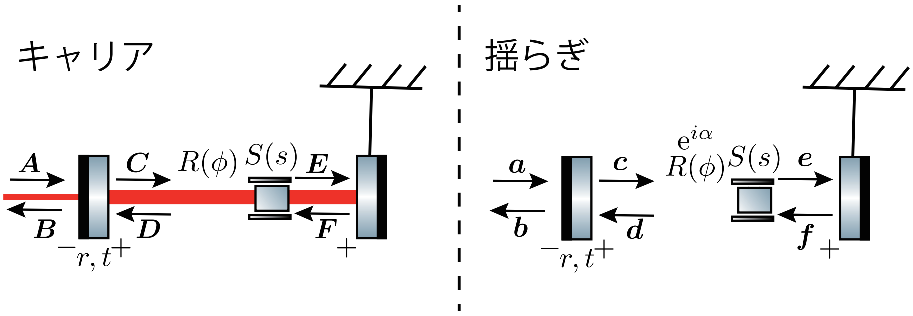


図 **4.8:** Internal squeezing を行っている Fabry-Perot 共振器 (入射キャリア基準)

の偏角である。共振器内強度 P_E は

$$P_E \simeq \frac{2\mathcal{F}P_A}{\pi}\frac{1+\delta^2+4\sigma+\sigma^2}{(1+\delta^2-\sigma^2)^2} \tag{4.17}$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} K_{\rm opt} &\simeq \frac{16\mathcal{F}^2 P_A\omega_0}{\pi^2c^2}\frac{1+\delta^2+4\sigma+\sigma^2}{(1+\delta^2-\sigma^2)^2}\frac{\delta+2\sigma\frac{(1+\sigma)\delta}{(1+\sigma)^2+\delta^2}}{(1+i\Omega/\gamma)^2+\delta^2-\sigma^2} \\ &\simeq \frac{16\mathcal{F}^2 P_A\omega_0}{\pi^2c^2}\frac{1+\delta^2+4\sigma+\sigma^2}{(1+\delta^2-\sigma^2)^2}\frac{\delta+2\sigma\frac{(1+\sigma)\delta}{(1+\sigma)^2+\delta^2}}{1+\delta^2-\sigma^2}\left[1-\frac{2i\Omega}{\gamma(1+\delta^2-\sigma^2)}\right] \end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。式 (4.15) と比較すると、共振器内強度が OPA により増幅されていることに加え、信号増幅の項にも余分な項が加わっていることが分かる。これは、実効的な squeezing angle を OPA により変更されたキャリアに対して取ってしまっているためである。図 4.9 に光ばね定数と光減衰定数を示す。

式 (4.16) から分かるように、$\xi_E=0$ とできれば、式 (4.15) において入射強度を $4P_E$ とした場合の光ばね定数と一致することが分かる。これは共振器内キャリアに対する squeezing angle を 0 とすることに対応する。そこで、図 4.10 のようなリング共振器を簡単のために考える。共振器内キャリアを基準として考える、すなわち共振器内キャリアの phase quadrature が 0 となるようにするために、φ だけ位相がずれたキャリア $\boldsymbol{A}'=R(\varphi)\boldsymbol{A}$ が共振器に入射するとしている。ここで、

$$\boldsymbol{B}'=-r\boldsymbol{A}'+t\boldsymbol{D}', \quad \boldsymbol{C}'=\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{F}'=t\boldsymbol{A}'+r\boldsymbol{D}', \quad \boldsymbol{D}'=R(2\phi)S(s)\boldsymbol{F}' \tag{4.19}$$

であり、

$$\boldsymbol{E}'=t\left[I-rR(2\phi)S(s)\right]^{-1}\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}E_0\\0\end{pmatrix} \tag{4.20}$$

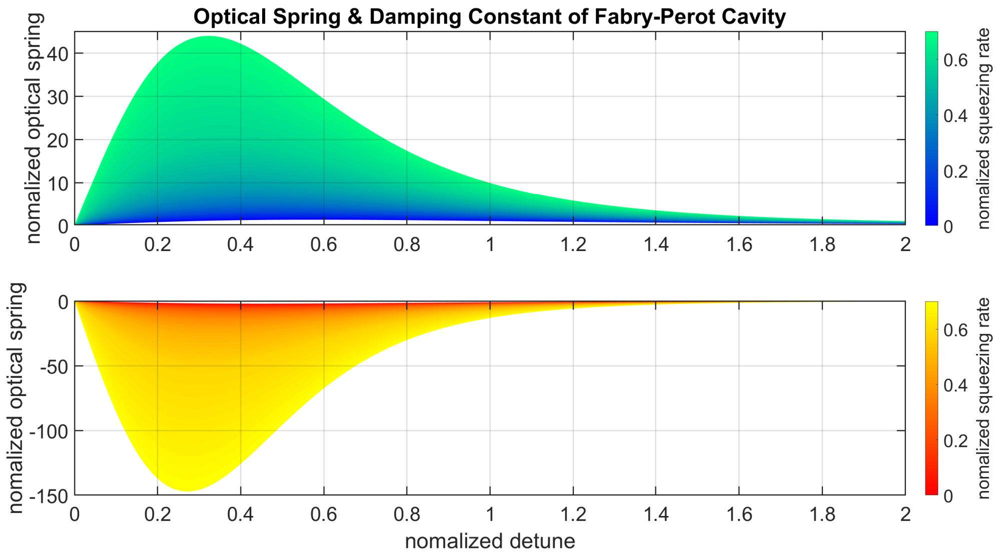


図 **4.9:** Fabry-Perot 共振器で Internal Squeezing を行った場合の光ばね
それぞれの定数は $\sigma = 0$、$\delta = 1$ で大きさが 1 となるように規格化した。

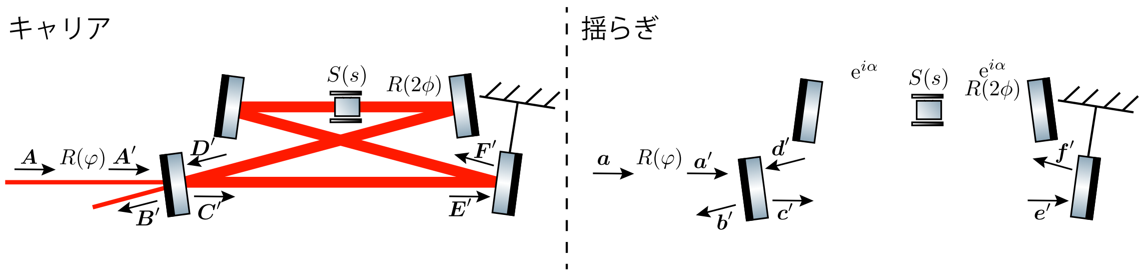


図 **4.10:** Internal squeezing を行っている Fabry-Perot 共振器 (共振器内キャリア基準)

である。揺らぎに対しては

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{b}' = -r\boldsymbol{a}' + t\boldsymbol{d}', \quad \boldsymbol{c}' = t\boldsymbol{a}' + r\boldsymbol{d}' \\
\boldsymbol{d}' = \mathrm{e}^{2i\alpha} R(2\phi) S(s) \boldsymbol{f}', \quad \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{c}', \quad \boldsymbol{f}' = \boldsymbol{e}' + 2k_0 E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta x
\end{gathered}
\tag{4.21}
$$

であるので、光ばね定数は

$$
K_{\mathrm{opt}} = \frac{8P_E\omega_0}{c^2} \frac{\frac{1}{s}\sin 2\phi}{r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - (s + \frac{1}{s})\cos 2\phi} \tag{4.22}
$$

となり、実効的な強度以外は式 (4.15) と一致する。すなわち、このような squeezing angle の取り方をし、光ばね定数を共振器内強度で規格化することで、実験的に扱いやすい Fabry-Perot 共振器でも 3.5.2 小節の重力波検出器に対する原理検証実験を行うことが可能である。

共振器内強度を求めておくと、$\varphi = \arctan(s \sin 2\phi/(-\frac{1}{r} + s\cos 2\phi))$ なので

$$P_E = \frac{t^2 P_A}{rs(rs + \frac{1}{rs} - 2\cos 2\phi)} \simeq \frac{\frac{2\mathcal{F}}{\pi} P_A}{(1-\sigma)^2 + \delta^2} \tag{4.23}$$

である。

4.2 負帰還制御

本実験では、detune と squeezing angle を非常に狭い範囲に留めた状態で系の応答を調べる必要がある。特に detune に対しては、共振幅程度の非常に狭い範囲に引き込まなければならず、cavity pole∼1 MHz より十分小さい揺らぎしか許されない。これを鏡の変位に換算すると ∼1 Å 程度の範囲に相当する。このような制御点への引き込みと安定動作を達成するために、本実験では負帰還制御を用いる。

4.2.1 負帰還制御の安定性

負帰還制御について議論するために、系の周波数応答を表す伝達関数を用いる。ある要素に対する伝達関数 $T(\Omega)$ は、周波数空間におけるその要素への入力信号 $U(\Omega)$ とその要素からの出力信号 $V(\Omega)$ の比である；

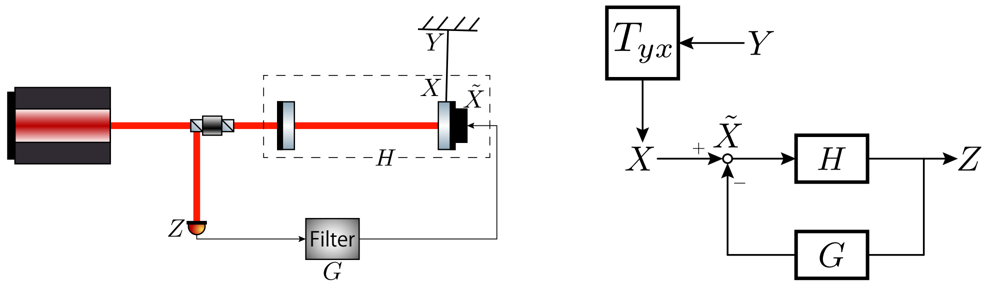
$$T(\Omega) := \frac{V(\Omega)}{U(\Omega)} \tag{4.24}$$

例として、図 4.11a のような Fabry-Perot 共振器に対して制御を行うことを考える。ここでは、反射光をフォトディテクタで測定した信号 $Y(\Omega)$ が、懸架鏡の変位 $\tilde{X}(\Omega)$ に比例する線形信号になっているとする。懸架鏡には地面振動などの外乱 $Y(\Omega)$ が伝達関数 T_{yx} を持つ懸架系を通じて侵入し、鏡の揺らぎ $X(\Omega)$ となる。サスペンションの伝達関数を含めた光学系の伝達関数を $H(\Omega)$ とする[*6]。伝達関数 $G(\Omega)$ を持つフィルタと呼ばれる要素に測定した信号を通した後に −1 倍し、鏡に取り付けたアクチュエータにフィードバックすることを考える。これらの関係を簡潔な図式 (ブロック線図) で表すと図 4.11b のようになる。

このとき、鏡の実効的な変位 $\tilde{X}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= X - HG\tilde{X} \\ &= \frac{1}{1+HG} X\end{aligned} \tag{4.25}$$

[*6] 懸架された鏡に加えた力から変位への伝達関数 T_{fx} は、実際には鏡にフィードバックされる直前にかかる。



(a) Fabry-Perot 共振器の制御系

(b) ブロック線図

となる。負帰還部を成す伝達関数の積 HG は Open Loop 伝達関数 (Open Loop Transfer Function : OLTF) と呼ばれ、その大きさ $|HG|$ は Open Loop Gain (OLG) と呼ばれる。また、負帰還部が成す実効的な伝達関数 $1/(1+HG)$ は Closed Loop 伝達関数 (CLTF) と呼ばれる。

$\tilde{X}(\Omega)$ をフィードバック制御を行わない場合の変位 $X(\Omega)$ と比較する。OLG が 1 より十分大きい場合、CLTF は $\sim 1/\mathrm{OLG}$ 程度になり、外乱を抑え込むことができることが分かる[*7]。一方で OLG が 1 より十分小さい場合、CLTF は ~ 1 程度なので、制御が行われていないことと同等になる。この制御の有無を分ける指標となる $|H(\Omega)G(\Omega)| = 1$ を満たす周波数を Unity Gain 周波数 (UGF) と呼ぶ。

CLTF の定義から分かるように、$H(\Omega)G(\Omega) = -1$ となる周波数が存在していれば、すなわち UGF で OLTF の位相が -180 deg となると、この系は UGF の雑音を増幅するようになってしまう。光学系の伝達関数 $H(\Omega)$ は物理的な特性から既に決まっており変化させることが難しいため、本実験ではオペアンプによるアナログ回路でフィルタを実装することでこの不安定性を回避する。UGF におけるゲインをゲイン余裕、UGF における位相に 180 deg 足したものを位相余裕と呼び、制御系がどれだけ安定であるのかを考える目安として用いられる。

4.2.2　懸架系の伝達関数

ここでは制御系に表れる不安定性の例として、懸架系の伝達関数について考える。サスペンションに懸架された変位 $x(t)$ の鏡に力 $f(t)$ を加えることを考える。外乱 $y(t)$ を無視すると、鏡の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_{\mathrm{m}}^2 x - 2m\gamma_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} + f \tag{4.26}$$

[*7] これは同じ経路から系に入力される重力波信号も $\sim 1/\mathrm{OLG}$ 程度に抑え込まれることを意味している。一般に、負帰還制御のパラメータは干渉計の感度を変化させない。

となる。ここで、$\omega_{\rm m}$ はサスペンションの共振周波数であり、$\Gamma_{\rm m} = 2m\gamma_{\rm m}$ はサスペンションの速度に比例する抵抗力 (damping) 係数である。Fourier 変換して整理すると、懸架された鏡に加えた力から変位への伝達関数が求まる：

$$T_{fx}(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{m}\frac{1}{\omega_{\rm m}^2 + 2i\gamma_{\rm m}\Omega - \Omega^2} \tag{4.27}$$

この伝達関数を magnitude ($= 20\log|X/F|$) と phase ($= \arg(X/F)$) に分けた図 (Bode 線図) として図 4.12 に示した。位相に注目すると、共振周波数より十分低い帯域 ($\Omega \ll \omega_{\rm m}$) では 0 deg、共振周波数共振周波数より十分高い帯域 ($\Omega \gg \omega_{\rm m}$) では -180 deg になり、共振周波数では -90 deg となることが分かる。

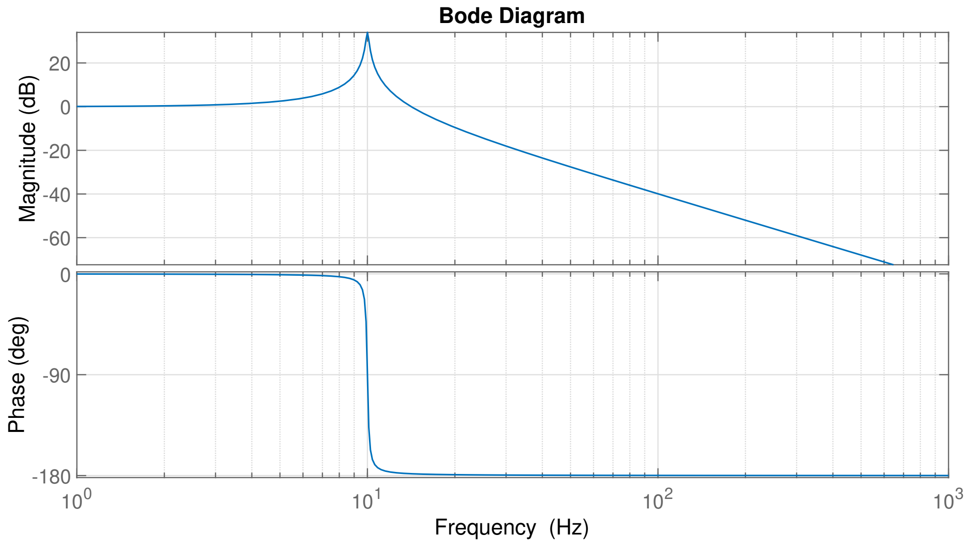


図 **4.12:** 振り子の伝達関数
$\omega_{\rm m} = 2\pi \times 10$ Hz、$Q = 100$ とし、$\Omega \ll \omega_{\rm m}$ でゲインが 1 となるよう無次元化した。

次に、懸架系に与えられた外乱から鏡の変位への伝達関数を求める。運動方程式は

$$\frac{{\rm d}^2 x}{{\rm d}t^2} = -\omega_{\rm m}^2(x-y) - 2\gamma_{\rm m}\frac{\rm d}{{\rm d}t}(x-y) \tag{4.28}$$

となるので、伝達関数は

$$T_{yx}(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{Y(\Omega)} = \frac{\omega_{\rm m}^2 + 2i\gamma_{\rm m}\Omega}{\Omega_{\rm m}^2 + 2i\gamma_{\rm m}\Omega - \Omega^2} \tag{4.29}$$

である。$Q := \omega_{\rm m}/2\gamma_{\rm m}$ で定義される無次元量は Q 値と呼ばれ、サスペンションの熱雑音・防振性能に深く関係するパラメータである。Q 値が十分大きい場合 ($Q \gg 1$)、帯域ご

とにこの伝達関数のゲインを近似すると

$$|T_{yx}(\Omega)| = \begin{cases} 1 & (\Omega \lesssim \omega_{\mathrm{m}}) \\ Q & (\Omega \approx \omega_{\mathrm{m}}) \\ \left(\frac{\omega_{\mathrm{m}}}{\Omega}\right)^2 & (\omega_{\mathrm{m}} \lesssim \Omega \ll Q\omega_{\mathrm{m}}) \\ \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{Q\Omega} & (\Omega \gg Q\omega_{\mathrm{m}}) \end{cases} \tag{4.30}$$

となり、共振周波数が低く Q 値の高い振動子は広い範囲で周波数の二乗に比例する防振効果を得られることが分かる。一方で、共振周波数付近の帯域では外乱の混入が深刻になることもわかる。このために、懸架された振動子に対する負帰還制御を行う際の UGF は ω_{m} より十分高くする必要があり、式 (4.27) より、フィルタなしで負帰還制御を行った場合には必ず不安定となる周波数が現れることが分かる。

4.2.3　位相補償

懸架した鏡に対するフィードバックを行う前に制御信号をフィルタに通すことで、前小節で述べた不安定性を回避することができる。本実験では、懸架系を含んだ制御系におけるフィルタとして位相進み補償フィルタを用いる。このフィルタの伝達関数は

$$G_{\mathrm{PLF}}(\Omega) = \frac{1 + i\Omega\tau_1}{1 + i\Omega\tau_2} \quad (\tau_1 > \tau_2) \tag{4.31}$$

であり、角周波数 $1/\tau_1$ から $1/\tau_2$ の範囲で位相を進めることができる。UGF がこの範囲に収まるようゲインを調整すれば、角周波数 $1/\tau_1$ 以下の帯域で強い制御を行いながら、制御系の安定性を確保することができる。位相を進ませることで位相余裕を確保する補償方法を位相進み補償と呼ぶ。

ピエゾ素子などの線形稼働レンジが広いアクチュエータを用いる場合には、ピエゾ素子の機械共振周波数より低い帯域に UGF を作るとよい。本実験では、ピエゾ素子を含んだ制御系におけるフィルタとして low pass フィルタを用いる。このフィルタの伝達関数は

$$G_{\mathrm{LPF}}(\Omega) = \frac{1}{1 + i\Omega\tau_0} \tag{4.32}$$

であり、角周波数 $1/\tau_0$ 以上の帯域でゲインを落とすことができる。位相を遅れさせることでゲイン余裕を確保する補償方法を位相遅れ補償と呼ぶ。

4.3　線形信号の取得法

光学系に対する制御を行うためには、制御を行いたい動作点の周りで光学系が線形応答する必要がある。しかし、Fabry-Perot 共振器の共振点の周りなど、光学系からの透過

光・反射光が変位に対して線形応答しないケースは数多く存在する。こういった場合には、光学系に対する周波数応答がキャリアとは異なる RF サイドバンドやサブキャリアなどをある種の参照光として用いることで解決が図られる。本節では、実験で使用する光学系に対するエラー信号 (制御用線形信号) の取得法について考える。

本節中ではレーザー光や真空場の揺らぎは無視し、参照光を電場の揺らぎだと見なして計算を行う。

4.3.1　PDH 法

共振器に対する線形信号取得法として、Pound-Drever-Hall (PDH) 法 [65] がよく知られている。これは、キャリアに対して発生させた Radio Frequency (RF) サイドバンドを参照光として用いることで、共振点周りの線形信号を取得する手法である。

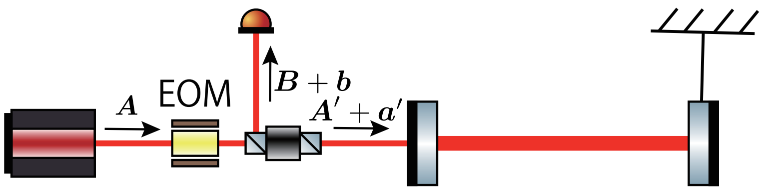


図 **4.13:** PDH 法

まずは RF サイドバンドの表式を求める。RF サイドバンドは図 4.13 のようにキャリア光を電気光学変調器 (Electro Optic Modulator : EOM) に通し、位相変調をかけることで発生させることができる。電場 $A(t) = A_0 \cos\omega_0 t$ を入射させたとき、EOM から透過する電場 $A'(t)$ は

$$A'(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \beta \sin\omega_\mathrm{M} t) \simeq A_0(\cos\omega_0 t - \beta \sin\omega_0 t \sin\omega_\mathrm{M} t) \tag{4.33}$$

となるので、

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{a}'(t) = -A_0\beta \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\omega_\mathrm{M} t \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

と表せる。ここで、$\beta \ll 1$ は変調指数であり、EOM 結晶にかける電圧と結晶の変換効率から決まる量である。変調角周波数 ω_M は結晶に印加する交流電圧の角周波数である。$\boldsymbol{a}'(t)$ が RF サイドバンドであり、角周波数 ω_M の信号と同等な振る舞いをしていることが分かる。

変調周波数が十分高い場合にはオプトメカニカルなカップリングを無視できるので、共

振器で反射される電場は式 (3.124) と同様に計算でき、

$$\boldsymbol{B} = \frac{A_0}{\gamma^2+\Delta^2}\begin{pmatrix}\gamma^2-\Delta^2\\ 2\gamma\Delta\end{pmatrix} \tag{4.36}$$

$$\boldsymbol{b}(\Omega) = \frac{-A_0\beta\mathcal{F}[\sin\omega_{\mathrm{M}}t]}{(\gamma+i\Omega)^2+\Delta^2}\begin{pmatrix}-2\gamma\Delta\\ \gamma^2-\Delta^2+\Omega^2\end{pmatrix} \tag{4.37}$$

となる。ここで、$\mathcal{F}[f(t)]$ は Fourier 変換であり、Dirac のデルタ関数 $\delta(\Omega)$ を用いて

$$\mathcal{F}[\sin\omega_{\mathrm{M}}t] = i\pi(\delta(\Omega+\omega_{\mathrm{M}})-\delta(\Omega-\omega_{\mathrm{M}})) \tag{4.38}$$

と表せる。特に変調周波数が cavity pole より十分高い場合には

$$\boldsymbol{b}(\Omega) \simeq A_0\beta\mathcal{F}[\sin\omega_{\mathrm{M}}t]\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \tag{4.39}$$

と近似できる。PDH 法では、測定した強度に変調周波数と同じ信号 ($\sim\sin\omega_{\mathrm{M}}t$) や位相を $\pi/2$ だけずらした信号 ($\sim\cos\omega_{\mathrm{M}}t$) を乗じることで復調を行う。ここでは、それぞれの復調位相を In phase (I-phase) と Quadrature phase (Q-phase) と呼ぶことにする。こうして得た PDH 信号を low pass フィルタにかけて高周波数信号を無視したものを最終的な線形信号として用いる。よって、測定する強度のうち $\sin\omega_{\mathrm{M}}t$ と $\cos\omega_{\mathrm{M}}t$ がかかった項のみを取り出して考えればよく、

$$\begin{aligned} P_B^{\omega_{\mathrm{M}}} &= \frac{\hbar\omega_0}{2}2B_2\mathcal{F}^{-1}[b_2(\Omega)] \\ &= 2P_A\beta\frac{2\gamma\Delta}{\gamma^2+\Delta^2}\sin\omega_{\mathrm{M}}t \end{aligned} \tag{4.40}$$

となる。ここで、$\mathcal{F}^{-1}[f(\Omega)]$ は逆 Fourier 変換である。I-phase で復調を行い、DC 成分を取り出したものが PDH 信号であり、確かに $\Delta=0$ の周りで線形信号となっていることが分かる：

$$P_B^{\text{demod-I}} = P_A\beta\frac{2\gamma\Delta}{\gamma^2+\Delta^2} \tag{4.41}$$

近似を行わずにエラー信号を導出すると図 4.14 のようになる。I-phase の場合には $\phi=0$ の周りで線形信号が得られていることが分かるが、$\phi\approx\pm0.6$ でも線形信号が現れている。これは、サイドバンドが共振するような detune になったときにキャリアが参照光となって線形信号が得られているためである。実際には、基本モード光以外にも Gouy 位相[*8]の分だけずれた高次モード光が存在するため、これ以外にも多数の線形信号が現れることになる。

[*8] 4.4.2 小節参照。

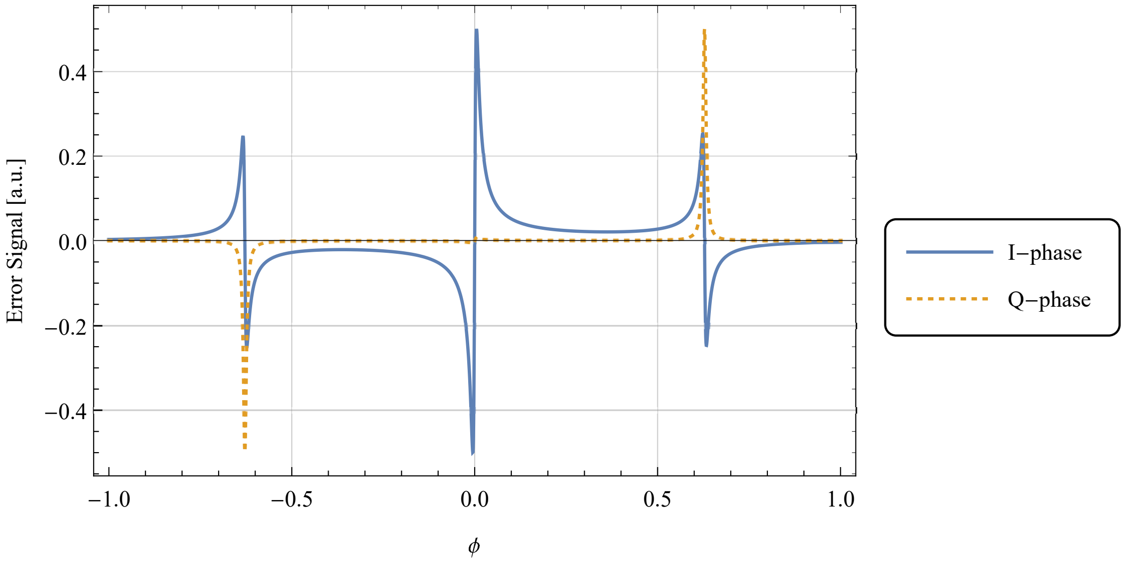


図 **4.14:** PDH 法によるエラー信号
$r=\sqrt{0.98}$、$\tau=L/c=10^{-8}$ s、$\omega_{\mathrm{M}}=2\pi\times10^{7}$ Hz とした。

4.3.2　Squeezing angle の線形信号

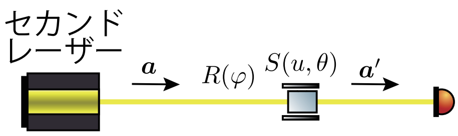


図 **4.15:** Single pass OPA での squeezing angle エラー信号取得

Squeezing angle に対しては、キャリア光の存在しない真空場の squeezing を行う場合にもエラー信号が取得できるよう研究が行われてきた。OPA とホモダイン検出に対する一連のエラー信号を取得する手法である Coherent Control (CC) 法 [66] では、キャリアから周波数をずらした光であるサブキャリアを参照光として用いる。本実験では、セカンドレーザーの周波数をメインレーザーの周波数から僅かにずらすことでサブキャリアを生成する。

サブキャリア $\boldsymbol{a}$ の表式は、振幅を a_0 として

$$a(t)=a_0\cos(\omega_0+\omega_{\mathrm{M}})t=a_0(\cos\omega_0 t\cos\omega_{\mathrm{M}}t-\sin\omega_0 t\sin\omega_{\mathrm{M}}t) \tag{4.42}$$

より

$$\boldsymbol{a}(t)=a_0\begin{pmatrix}\cos\omega_{\mathrm{M}}t\\ -\sin\omega_{\mathrm{M}}t\end{pmatrix} \tag{4.43}$$

である。ここでは図 4.15 のように共振器を用いない場合 (シングルパス) を考える。初期位相 φ が付いた状態で OPA を行うと、

$$\boldsymbol{a}'(t) = S(u,\theta)R(\varphi)\boldsymbol{a}(t) \tag{4.44}$$

と変換される。$\varphi = 0$、$\theta = 0$ のときに

$$\boldsymbol{a}'(t) \to a_0 \left(\cosh u \begin{pmatrix} \cos\omega_{\mathrm{M}}t \\ -\sin\omega_{\mathrm{M}}t \end{pmatrix} + \sinh u \begin{pmatrix} \cos\omega_{\mathrm{M}}t \\ \sin\omega_{\mathrm{M}}t \end{pmatrix} \right) \tag{4.45}$$

すなわち

$$a'(t) \to a_0 \left(\cosh u \cos(\omega_0 + \omega_{\mathrm{M}})t + \sinh u \cos(\omega_0 - \omega_{\mathrm{M}})t\right) \tag{4.46}$$

と変換されていることから分かるように、OPA はアッパーサイドバンドとロウワーサイドバンドを互いに変換するような効果を持っている。よってエラー信号を得るためにはこれらの周波数差である $2\omega_{\mathrm{M}}$ を持つ信号で復調することを考えればよい[*9]。式 (4.44) より

$$P_{a'}^{2\omega_{\mathrm{M}}} = \sinh(2u)P_a[\cos(2(\theta-\varphi))\cos(2\omega_{\mathrm{M}}t) - \sin(2(\theta-\varphi))\sin(2\omega_{\mathrm{M}}t)] \tag{4.47}$$

ここで、$P_a = \hbar\omega_0 a_0^2/2$ はサブキャリアの強度である。よって、I-phase と Q-phase で復調したときに得られるエラー信号はそれぞれ

$$P_{a'}^{\text{demod-I}} = -\frac{1}{2}\sinh(2u)P_a\sin(2(\theta-\varphi)) \tag{4.48}$$

$$P_{a'}^{\text{demod-Q}} = \frac{1}{2}\sinh(2u)P_a\cos(2(\theta-\varphi)) \tag{4.49}$$

となり、それぞれ $\theta - \varphi = 0, \pi/2$ と $\theta - \varphi = \pi/4, 3\pi/4$ で線形信号を得ることができることが分かる。

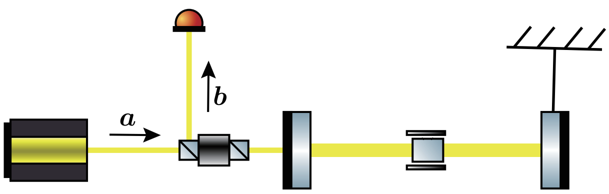


図 **4.16:** Coherent Control 法

4.3.3 Detune した共振器に対する Coherent Control 法

実際に用いられる squeezer は、より強い OPA ゲインを得るために図 4.16 のように OPA を共振器内に設置した光学系である。このような共振器の制御を行う先行研

[*9] キャリアとサブキャリアの周波数差は ω_{M} なので、$2\omega_{\mathrm{M}}$ で復調して得られるエラー信号はキャリアの有無に影響を受けない。

究 [67–69] では、共振器を共振状態にした状態で squeezing angle のエラー信号の取得を行っている。ここでは、共振器を detune している場合に取得される squeezing angle のエラー信号について考える。

初期位相 φ のサブキャリアが入射するとすれば、反射される電場 $\boldsymbol{b}(\Omega)$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}(\Omega) &= a_0(-rI + t^2 \mathrm{e}^{2i\alpha}[I - r\mathrm{e}^{2i\alpha} R(2\phi)S(u,\theta)]^{-1} R(2\phi)S(u,\theta))R(\varphi)\begin{pmatrix}\mathcal{F}[\cos\omega_{\mathrm{M}}t]\\ \mathcal{F}[-\sin\omega_{\mathrm{M}}t]\end{pmatrix}\\ &\simeq a_0\mathbb{B}R(\varphi)\begin{pmatrix}\mathcal{F}[\cos\omega_{\mathrm{M}}t]\\ \mathcal{F}[-\sin\omega_{\mathrm{M}}t]\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\mathbb{B} = \frac{1}{(\gamma+i\Omega)^2+\Delta^2-\Sigma^2}\begin{pmatrix}\gamma^2-\Delta^2+\Omega^2+\Sigma^2+2\gamma\Sigma\cos 2\theta & 2\gamma\Sigma\sin 2\theta\\ 2\gamma\Sigma\sin 2\theta & \gamma^2-\Delta^2+\Omega^2+\Sigma^2-2\gamma\Sigma\cos 2\theta\end{pmatrix} \tag{4.51}$$

となる。測定される強度 $P_b = \hbar\omega_0/2(b_1(t)^2 + b_2(t)^2)$ は複雑になるが、これをそれぞれの phase で復調すると

$$P_b^{\text{demod-I}} = \Lambda_0[\Lambda_1\cos(2(\theta-\varphi)) + \Lambda_2\sin(2(\theta-\varphi))]P_a \tag{4.52}$$

$$P_b^{\text{demod-Q}} = \Lambda_0[\Lambda_2\cos(2(\theta-\varphi)) + \Lambda_1\sin(2(\theta-\varphi))]P_a \tag{4.53}$$

$$\Lambda_0 = \frac{2\gamma\Sigma(\gamma^2-\Delta^2+\Sigma^2+\omega_{\mathrm{M}}^2)}{[(\gamma^2+\Delta^2-\Sigma^2-\omega_{\mathrm{M}})^2+(2\gamma\omega_{\mathrm{M}})^2]^2} \tag{4.54}$$

$$\Lambda_1 = 4\gamma\omega_{\mathrm{M}}(\gamma^2+\Delta^2-\Sigma^2-\omega_{\mathrm{M}}^2) \tag{4.55}$$

$$\Lambda_2 = 2\gamma^2(-\Delta^2+\Sigma^2+3\omega_{\mathrm{M}}^2) - \gamma^4 - (-\Delta^2+\Sigma^2+\omega_{\mathrm{M}}^2)^2 \tag{4.56}$$

と求まる。I-phase で復調した強度から $\theta-\varphi=0$ の周りで線形信号を得るためには、サブキャリアの周波数を $\omega_{\mathrm{M}}^2 = \gamma^2+\Delta^2-\Sigma^2$ 程度ずらせばよい。共振している場合のエラー信号を図 4.17 に、detune を行った場合のエラー信号を図 4.18 に示す。

4.1.4 小節で考えたように、本実験では共振器内キャリアを基準として squeezing angle を制御する必要があるが、このような補正を入射光キャリアに対して行うと、もはや $\theta-\varphi$ に対する線形信号は取得できなくなる。例として、$\varphi=0$ のときのエラー信号を図 4.19 に示した。しかし、式 (4.52) と式 (4.53) から分かるように、I-phase と Q-phase の信号を適当に足し合わせれば任意の squeezing angle に対する線形信号を得ることができる。すなわち、OPA を行う共振器の各パラメータを正確に測定し、適切な squeezing angle に対する線形信号を生成して制御を行なえばよい。本実験では、この線形信号を第二次高調波の経路に取り付けた PZT にフィードバックすることでキャリアとポンプ光の位相差に対する制御を行う。

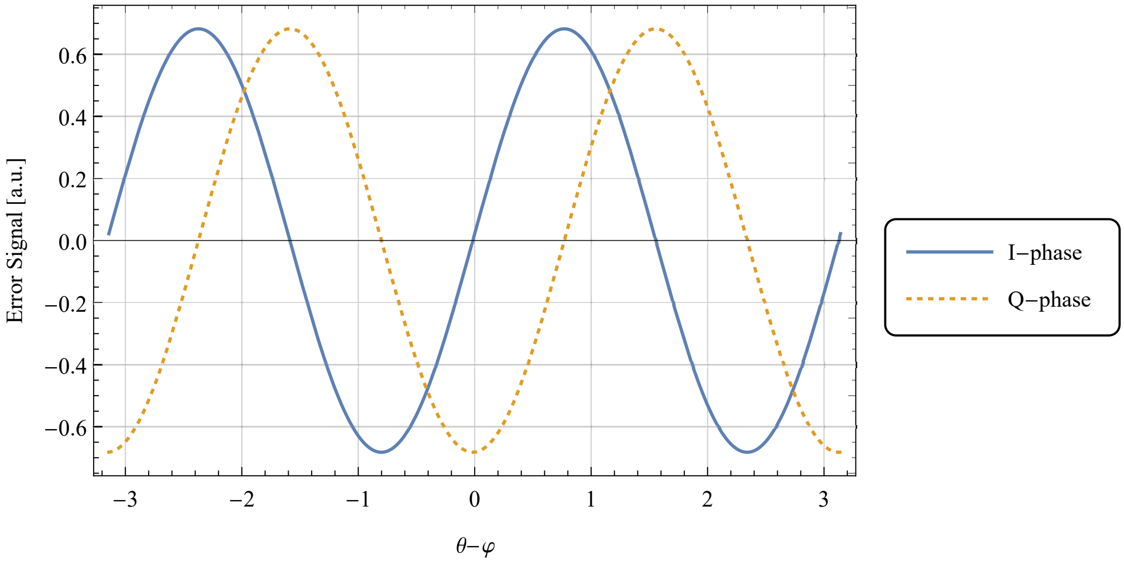


図 **4.17:** CC 法による共振器内 OPA のエラー信号
$\gamma = 2\pi \times 10^6$ Hz、$\Sigma = 2\pi \times 0.5 \times 10^6$ Hz、$\omega_{\mathrm{M}} = 2\pi \times 0.85 \times 10^6$ Hz とした。

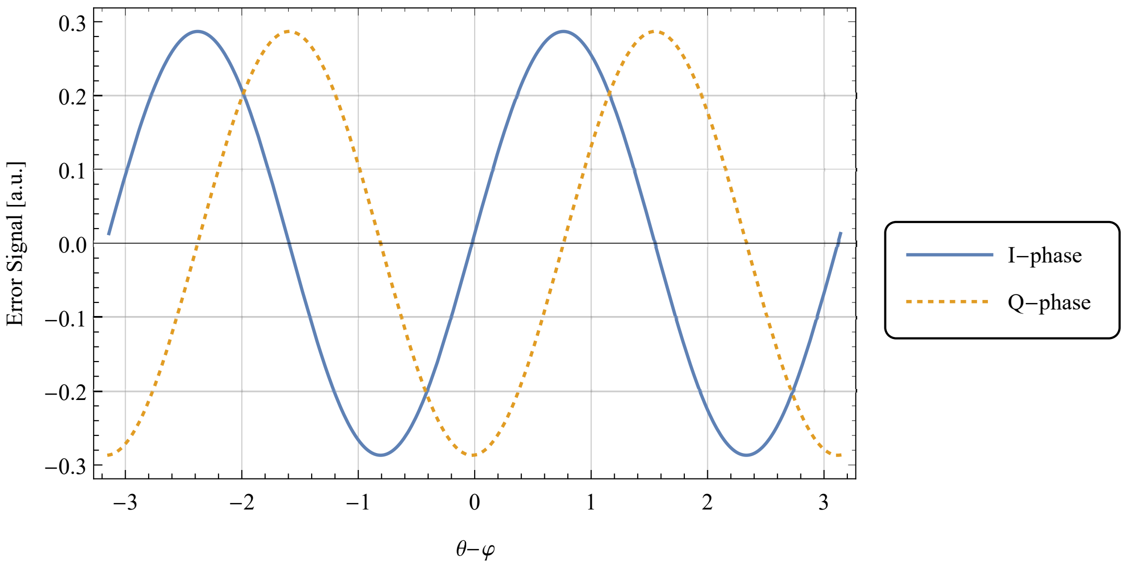


図 **4.18:** Detune した共振器内 OPA のエラー信号
$\gamma = 2\pi \times 10^6$ Hz、$\Sigma = 2\pi \times 0.5 \times 10^6$ Hz、$\omega_{\mathrm{M}} = 2\pi \times 1.3 \times 10^6$ Hz とした。

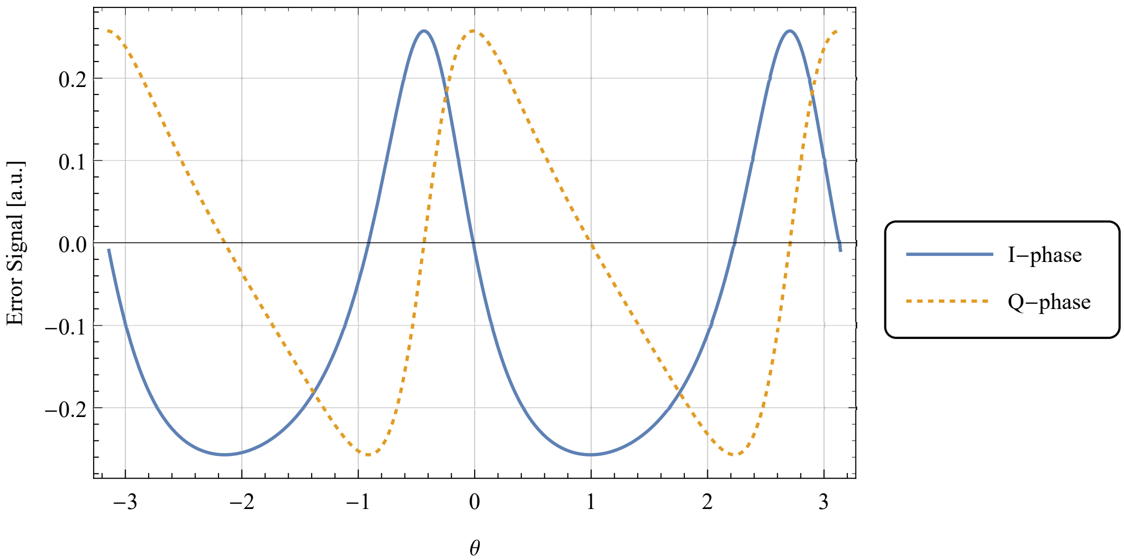


図 4.19: Detune した共振器内 OPA のエラー信号
$\gamma = 2\pi \times 10^6$ Hz、$\Sigma = 2\pi \times 0.5 \times 10^6$ Hz、$\omega_{\mathrm{M}} = 2\pi \times 0.9 \times 10^6$ Hz、$\varphi = 0$ とした。

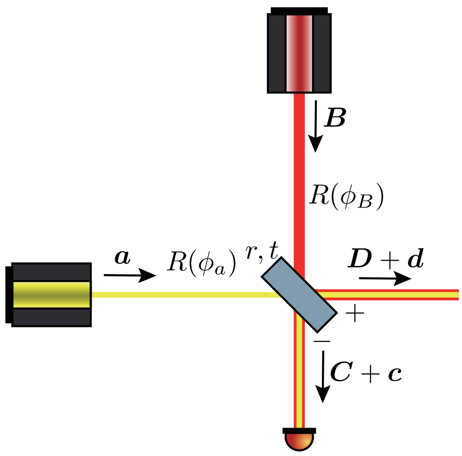


図 4.20: キャリアとサブキャリアの phase lock

4.3.4 Phase Locking Loop

キャリアの存在する OPO 共振器において squeezing angle のエラー信号を取得するためには、キャリアとサブキャリアの位相がそろっている光を生成し、共振器に入射させる必要がある。図 4.20 のように位相 ϕ_B を持つキャリアと位相 ϕ_a を持つサブキャリアを干渉させると、

$$P_C^{\omega_{\mathrm{M}}} = 2rt\sqrt{P_B P_a}\,[\sin(\phi_B - \phi_a)\sin\omega_{\mathrm{M}}t - \cos(\phi_B + \phi_a)\cos\omega_{\mathrm{M}}t] \tag{4.57}$$

となり、$\sin \omega_{\mathrm{M}} t$ で復調することで $\phi_B - \phi_a = 0$ の周りで線形信号を得ることができる。本実験では、この線形信号をセカンドレーザーの周波数調整チャンネルにフィードバックすることで、2 つのレーザーの位相の同期を行う。このような制御は Phase Locking Loop (PLL) と呼ばれる。

4.4　ABCD 行列と共振器の自己無撞着方程式

実験で用いるレーザー光源はあるビームサイズと強度分布を持った Gaussian ビームであり、単なる平面波と見なして共振させることはできない。本節では、ABCD 行列を用いて Gaussian ビームの軌跡を追跡することで、Gaussian モードに対する光共振器の設計方法を議論する。

4.4.1　ABCD 行列

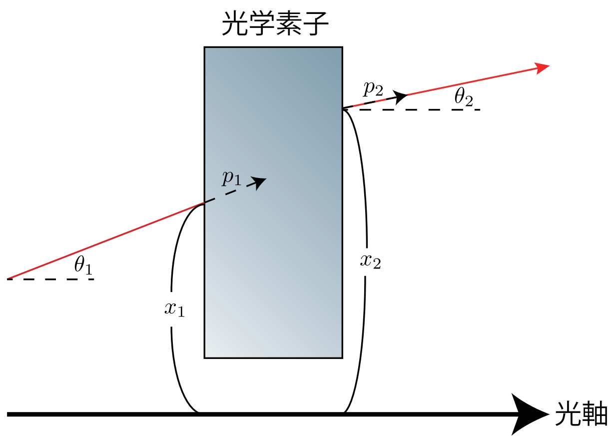


図 **4.21:** ABCD 行列による光線の軌跡の追跡

図 4.21 のように、ある光学素子で光線の軌跡が変更されたとき、光学素子に入射する前後の光線の光軸からの距離 x と光軸に対する傾き[*10] $p = \tan\theta$ が分かれば、この光学素子が光線に与える影響を定量的に表すことができる。この光学素子の特性は以下のような 2×2 行列で表せる：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

この行列のことを ray matrix、あるいは ABCD 行列と呼ぶ。

例として、図 4.22 のような場合の ABCD 行列を求める。

[*10] 近軸光の軌跡を考える場合には角度は十分小さいとみなせ、$p \approx \theta$ である。また、p は光学素子の屈折率 n をかけて定義することもある。

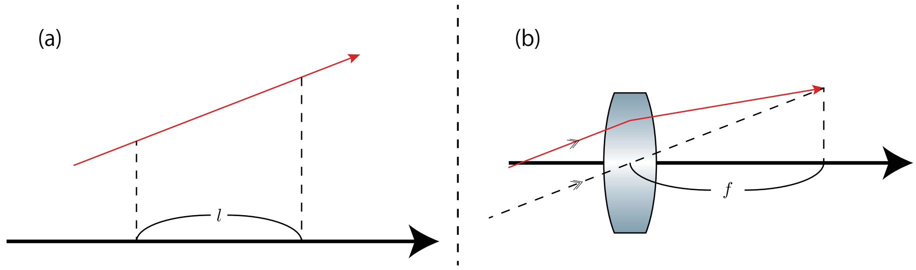


図 **4.22:** 伝搬、薄レンズによる軌跡の変更

(a)　自由空間中を距離 l 伝搬したとき

伝搬前後で光線の傾きは変化しない。光線の高さは $p_1 l$ だけ増加する。以上から、この場合の ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

である。

(b)　焦点距離 f の薄レンズ

レンズの透過前後で光軸からの距離は変化しない。透過後の光線は、透過前の光線と平行でレンズの中心を通り直進する光線とレンズから f だけ離れた地点で交差する。すなわち $x_1 + fp_2 = fp_1$ なので、この場合の ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

と表せ、凸レンズの場合 $f > 0$ である。

図 4.23 のような場合の ABCD 行列を以下にまとめた [70]。

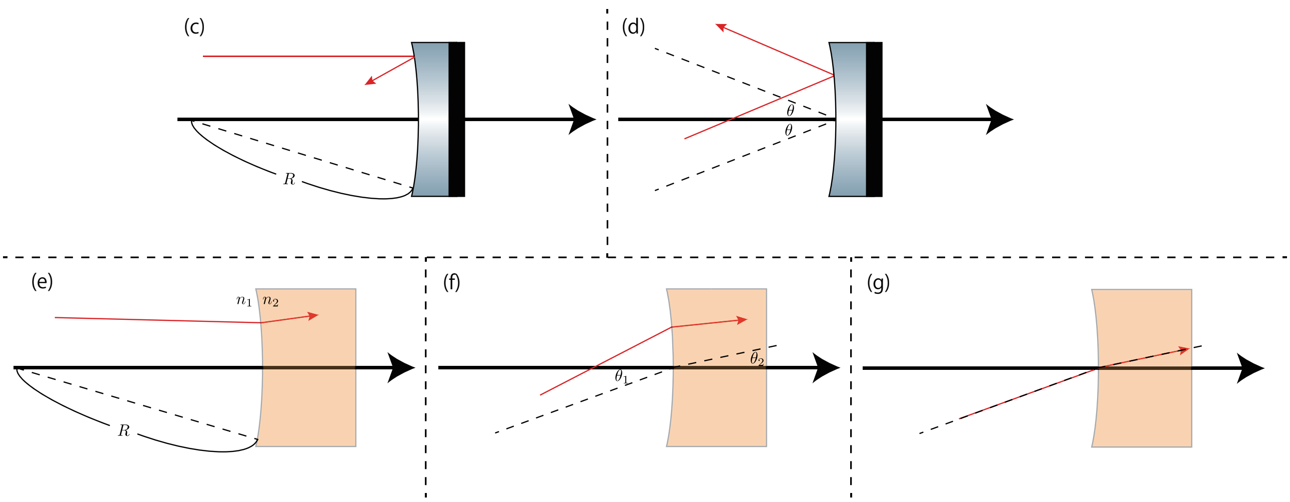


図 **4.23:** 凹面による軌跡の変更

(c)　曲率 R を持った鏡での反射

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

凹面の場合 $R > 0$ である。

(d)　曲率鏡で角度 θ で反射された場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_{\mathrm{e}} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

ただし、

$$R_{\mathrm{e}} = \begin{cases} R\cos\theta & \text{(入射面内 (tangential plane))} \\ R/\cos\theta & \text{(入射面に垂直な面内 (sagittal plane))} \end{cases} \tag{4.63}$$

(e)　曲率 R の誘電体界面 (屈折率 n_1 から n_2) への入射

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - n_1)/R & 1 \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

入射側が凹面の場合 $R > 0$ である。

(f)　角度 θ_1 で曲率誘電体界面へ入射し、屈折角が θ_2 であったとき (tangential plane)

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} & 0 \\ \Delta n_{\mathrm{e}}/R & \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

ただし、

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{4.66}$$

$$\Delta n_{\mathrm{e}} = (n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1)/\cos\theta_1 \cos\theta_2 \tag{4.67}$$

(g)　角度 θ_1 で曲率誘電体界面へ入射し、屈折角が θ_2 であったとき (sagittal plane)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta n_{\mathrm{e}}/R & 1 \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

ただし、

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{4.69}$$

$$\Delta n_{\mathrm{e}} = n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1 \tag{4.70}$$

4.4.2 Gaussian ビーム

近軸近似の元で電磁場の波動方程式 (3.1) を解くと、解の 1 つとして以下のように表される Hermite-Gaussian モード $U_{lm}(\boldsymbol{x}, t)$ が求まる [70]：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = U_{lm}(\boldsymbol{x}, t) E_0 \mathrm{e}^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned} U_{lm}(\boldsymbol{x}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{2^{l+m} l! m!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \\ \times \exp \left[\left(-\frac{1}{w^2(z)} - i \frac{k}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i(l + m + 1)\zeta(z) \right] \end{aligned} \tag{4.72}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_{\mathrm{R}}} \right)^2} \tag{4.73}$$

$$z_{\mathrm{R}} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_0} \tag{4.74}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_{\mathrm{R}}}{z} \right)^2 \right] \tag{4.75}$$

$$\zeta(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_{\mathrm{R}}} \right) \tag{4.76}$$

ここで、H_l は Hermite 多項式であり、$l = m = 0$ のモードを基本モード、あるいは 00 モードと呼び、それ以外のモードを高次モードと呼ぶ。$w(z)$ は Gaussian ビームの大きさ (スポットサイズ) を表しており、基本モードの半径 $w(z)$ の範囲内には全体の $1 - \mathrm{e}^{-2} \sim 86.5\%$ の強度が含まれている。w_0 は最もスポットサイズが小さくなる地点 (ビームウエスト) におけるスポットサイズであり、Rayleigh 範囲 z_{R} はビームが平面波の振る舞いをする範囲を表す。Rayleigh 範囲より十分離れた地点のビームは球面波と見なせる。$R(z)$ は位置 z における電場の等位相面の曲率半径を表す。$\zeta(z)$ は Gouy 位相であり、次数が 1 つ異なる高次モード間の位相差を表している[*11]。

4.4.3 自己無撞着方程式

前小節では、Gaussian ビームの全パラメータがウエストからの距離 z と Rayleigh 範囲 z_{R} のみで記述できることを示した。この特性を利用して、Gaussian ビームの q パラ

[*11] この位相差が存在するために、基本的には共振器内で同じモードが同時に共振することはない。クリティカルカップリングさせた共振器に対して、基本モードの共振幅とある程度の次数 (共振器を構成する鏡の大きさに依る) までの高次モードの共振幅がオーバーラップしないように共振器内の周回 Gouy 位相シフト [71] を設定すれば、その共振器をモードクリーナとして用いることができる。

メータを以下のように定める：

$$\frac{1}{q} := \frac{1}{z + iz_{\mathrm{R}}} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{2}{k_0 w^2(z)} \tag{4.77}$$

光学素子による Gaussian ビームの軌跡の変化は、この q パラメータのみで記述することが可能である。伝搬や薄レンズによる q パラメータの変換を考えれば分かるように、ある ABCD 行列を持った光学素子による q パラメータの変換 $q_1 \to q_2$ は以下の ABCD 測に従う：

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{4.78}$$

この関係を用いることで、共振器の安定性を議論することができる。共振器に入射させるレーザーは 00 モードを持った Gaussian ビームであると見なせるので、これを平面波と同等な波面の重ね合わせが行われるとして扱うためには、q パラメータが共振器を 1 周する間に変化しないという条件を満たせばよい。すなわち、共振器を一周する間の ABCD 行列を用いて

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \tag{4.79}$$

である。この方程式を自己無撞着方程式と呼ぶ。特に、q パラメータが純虚数となるビームウエストでのスポットサイズ w_0 は

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}\frac{|B|}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}} \tag{4.80}$$

と表すことができる。共振器を構成する光学素子が吸収・散乱を起こさないため、ABCD 行列の行列式が 1 であること $(AD = BC)$ を用いた。

簡単な例として、5.1 小節で用いる三角形のリング共振器について考える。この共振器は平面鏡 2 つと曲率 R_{T} を持つ鏡 1 つで構成されており、形状は曲率鏡を頂点とした二等辺三角形である。共振器の一周長を $2L$ とし、頂角は十分小さいとする。対称性から、ビームウエストは底辺の中点に 1 つだけ存在し、この地点における共振器一周あたりの ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

と表せる。よってウエストサイズは

$$w_0 = \frac{\lambda_0}{\pi} \left[L(R - L)\right]^{1/4} \tag{4.82}$$

と求まる。底辺の長さを d、等辺の長さを $l/2$ としたとき $(2L = l + d)$ のウエストサイズと共振器長の関係を図 4.24 に示した。この共振器で 00 モードを共振させるためには、ウエストサイズが式 (4.82) を満たし、ウエストが底辺の中点となるようなビームを共振器に入射させればよい。

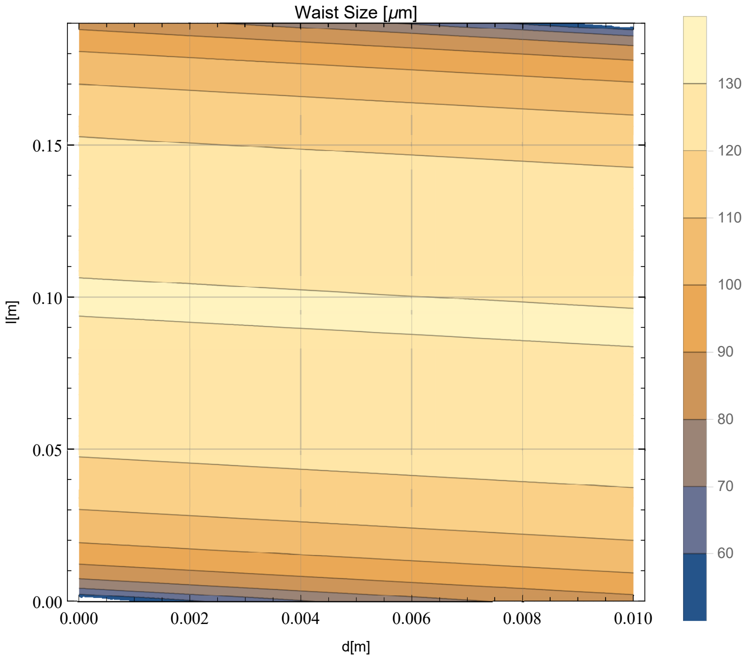


図 **4.24:** 三角共振器のウエストサイズ
$R_{\mathrm{T}} = 0.10$ m とした。

第 5 章

実験

本研究では、internal squeezing とオプトメカニカル効果の相互作用に対する検証実験を行った。主実験のセットアップを図 5.1 に示す。また、実験で用いた主な実験器具を表 5.1 に示す。これらには明示されていないが、ビーム径を調整するためのレンズ、検出器に入射する光量を調整するための Neutral Density (ND) フィルタ、不要な光をブロックするためのビームダンプ (BD) などを場所に応じて多用している。本実験で用いた非線形光学結晶 (Non Linear Crystal：NLC) は基本波 (1064nm) と第二次高調波 (532nm) の双方を縦偏光とした場合に位相整合条件が満たされるよう設計されているので、本実験の共振器は全て S 偏光で設計されている。それぞれの共振器で用いた鏡やその特性は各節で後記する。

最終的に光パラメトリック増幅 (OPA) により光ばねが強化されることを確認するために、いくつかのステップを設定して実験を行った。まず、5.1 節では専用のセットアップを使って光ばねの生成と観測を試みた。続く 5.2 節では OPA に必須となる高効率 SHG の制作を行った。5.3 節ではシングルパスでの OPA とそのエラー信号の取得を試み、5.4 節では共振器中に設置した NLC に第二次高調波を照射することにより光パラメトリック発振 (OPO) を確認した。5.5 節では懸架鏡入りの OPO cavity を用いることで、internal squeezing とオプトメカニカル効果の相互作用の実証を試みた。

光ばねの性質は、主にデジタルシステムで構成されたスペクトラムアナライザ [72] によりオープンループ伝達関数 (OLTF) を測定することで評価した。また、本節中で示すオシロスコープで測定したデータは、データ間の関係を確認しやすいよう適当に定数倍してある。

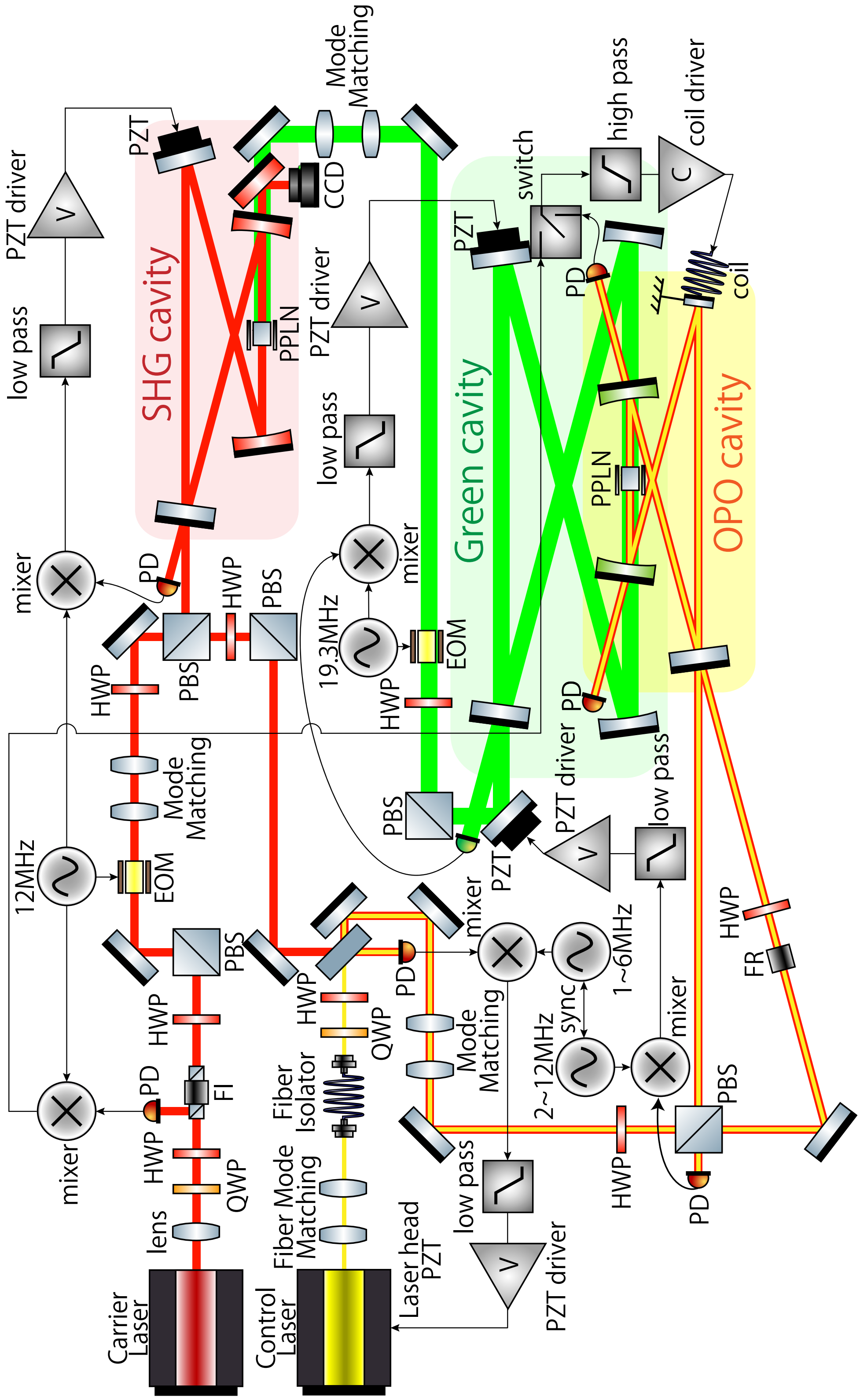

SHG cavity
Green cavity
OPO cavity
Carrier Laser
Control Laser
Laser head PZT
PZT driver
PZT
low pass
high pass
mixer
switch
coil driver
coil
CCD
Mode Matching
Fiber Mode Matching
Fiber Isolator
PPLN
PBS
HWP
QWP
FI
FR
EOM
PD
lens
12MHz
19.3MHz
1~6MHz
2~12MHz
sync

図 5.1: 主実験の概略図

実験器具名	メーカー	型番	備考
Carrier Laser	Coherent	Mephisto	出力 1W
Control Laser	Coherent	Mephisto S	出力 0.2W
電気光学変調器 (EOM)	Newport	4003	12MHz 共振型
ピエゾ素子 (PZT)	Thorlabs など	PA25LEW など	
PZT ドライバ	piezomechanik	SVR500/3	
1/2 波長板 (HWP)	Thorlabs など	WPHSM05-1064 など	
1/4 波長板 (QWP)	Thorlabs	WPQSM05-1064	
Faraday Isolator (FI)	Thorlabs	IO-3-1064-VHP	Carrier Laser 用
Faraday Isolator	Thorlabs	IO-H-1064B-APC	Control Laser 用
Faraday Rotator (FR)	Thorlabs	I1064R3	
偏光ビームスプリッタ (PBS)	Thorlabs など	PBSW-1064 など	
パワーメータ	Thorlabs	S121C	
パワーメーターコンソール	Thorlabs	PM100D	
プリアンプ	Stanford Research	SR560	
フォトディテクタ	Thorlabs など	PDA10CS-EC など	1064nm 用
フォトディテクタ	Thorlabs	PDA25K2	532nm 用
レーザーラインミラー	Thorlabs など	NB1-K14 など	1064nm 用
レーザーラインミラー	Thorlabs	NB1-K12	532nm 用
発振器	Tektronix など	AFG1062 など	
オシロスコープ	Agilent など	DSO-X2004A など	
復調器	Mini-Circuits	ZEM-2B+	
非線形光学結晶 (NLC)	Convesion	MSHG1064-1.0	PPLN 結晶
NLC 用オーブン	Convesion	PV10	
オーブン用コントローラー	Convesion	OC2	
CCD カメラ	Mintron	MK-0323E	
スペクトラムアナライザ	gwinstek	GSP-810	150kHz∼1GHz

表 5.1: 主な実験器具

5.1　光ばね生成実験

本実験の第一段階となるのは光ばねの生成とその観測である。ここでは補助実験として、主実験で control laser として用いている Mephisto S を使って光ばねの観測を試みた。

図 5.2 に光ばね観測実験のセットアップを示す。表 5.2 にこの共振器を構成する鏡の特性を示した。

二等辺三角形型のリング共振器内に光ばねを生成し、頂点に置かれた懸架鏡を光ばねで束縛する。これは厚さ 3 mm、直径 6.35 mm の鏡であり、図 5.3a のように共振周波数 11 Hz 程度の OHP シート製サスペンション [73] に懸架されてある。このサスペンションは

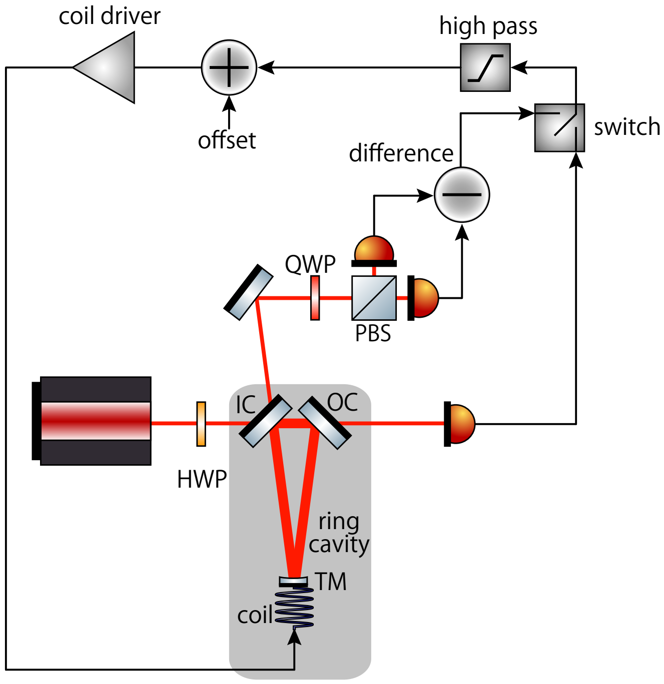


図 **5.2:** 光ばね生成実験のセットアップ

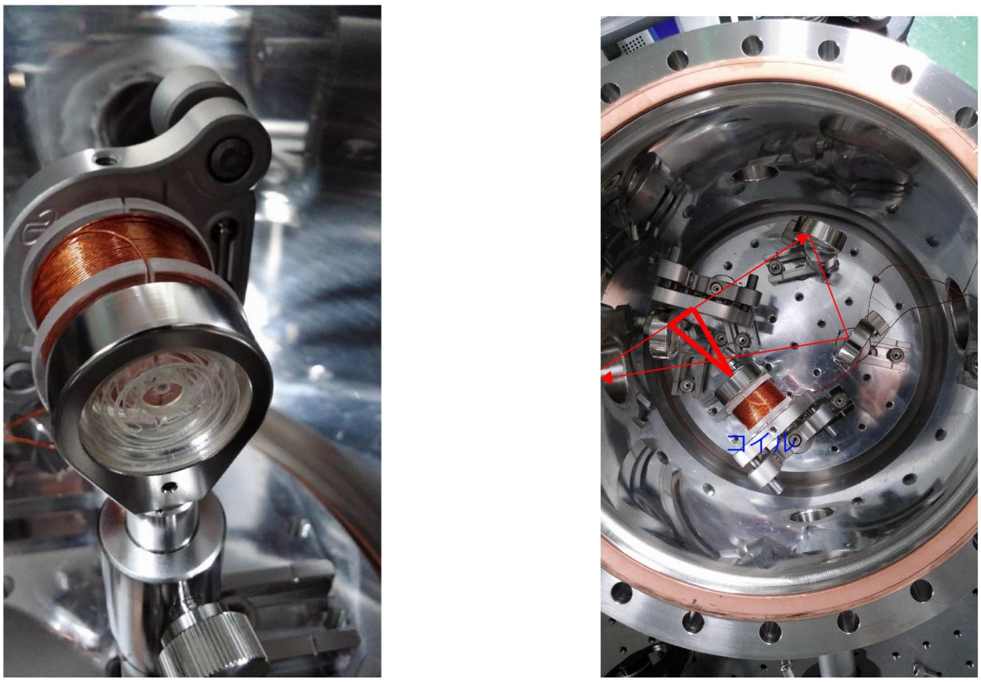
名前	メーカー	型番	反射率	入射角	曲率半径
Inpur Coupler (IC)	Layertec	120632	= 99.5%	45 deg	flat
Output Coupler (OC)	Layertec	141500	> 99.95%	45 deg	flat
Test mass (TM)	Layertec	104266	> 99.9%	0 deg	100 mm

表 **5.2:** Ring Cavity を構成する鏡

longitudinal には柔らかく、pitch と yaw には硬くなるよう設計されており、輻射圧による回転方向の不安定性 [74] に対する光学設計を考える必要がないようになっている。鏡の裏には磁石が張り付けてあり、後ろに置いたコイルに電流を流すことで駆動する。この鏡には 100 mm の曲率が付いており、4.4.3 小節で考えたようなモードマッチングを行ったビームを入射させる。鏡が受ける輻射圧を大きくし、astigmatism[*1] を無視できるように、頂角は可能な限り小さくしてある。

測定の際に音響雑音などの影響を受けないようにするため、この共振器は図 5.3b のように真空層内に構成した。真空層内で用いるコイルは脱ガスが少なくなるようカプトン被膜の導線とテフロンの空芯で制作した。1 Pa 程度の真空下で共振とエラー信号の取得に成功したが、真空ポンプの振動が深刻で共振器の制御が持続できなかったため、測定は常圧下で行った。

[*1] 5.2.1 小節参照。



(a) 懸架鏡　　**(b)** 真空槽内に構成した三角共振器

図 **5.3:** 光ばね生成実験の写真

懸架鏡に直接信号を加え、スペクトラムアナライザで伝達関数を測定した。この場合の伝達関数は、共振角周波数 ω_{OS} の光ばねにより機械的な共振角周波数 ω_{m} が実効的な共振周波数 $\omega_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\omega_{\mathrm{m}}^2 + \omega_{\mathrm{OS}}^2}$ に変更されるような応答となる[*2]。理論的な伝達関数は式 (4.27) と図 4.12 の通りである。

常圧下では音響雑音が大きく等速度で鏡を動かすことは難しかったが、共振器に衝撃を与えて透過光を測定することからフィネスは 1000 ± 100 程度であると見積もれた。共振器をロックした後に制御信号のオフセットを調整することで detune を変化させる。測定した制御系の OLTF を回路の伝達関数で割ることで、光学系の伝達関数を得た。140 mW 程度のキャリア光を入射し、光ばね定数の detune 依存性を測定した結果を図 5.4 に示す。この測定帯域には高次の機械的な共振周波数がいくつか存在しており、その周波数では雑音の混入が深刻で正確な測定を行えなくなるため、測定を 3 回行ってコヒーレンスが 0.9 を超えた測定点のみをプロットしている。透過光が共振時の 3/4 倍となる $\delta = 0.58$ のとき光ばね定数は最大となり、位相が -90 deg となる周波数を読み取ると共振周波数はおよそ 240 Hz であった。このときの光ばね定数は機械的なばね定数の 480 倍程度に相当する。しかし、理論的な伝達関数と比較すると Q 値があまりにも低いことが分かる。こ

[*2] 固定した鏡に取り付けた PZT で制御を行い、懸架鏡の運動の変化を遠隔で測定する場合には、光ばねによる伝達関数の変更はこのような応答にはならない。古典力学的な考察から、この場合の伝達関数は $\sim (\omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2)/(\omega_{\mathrm{OS}}^2 - \Omega^2)$ となる。

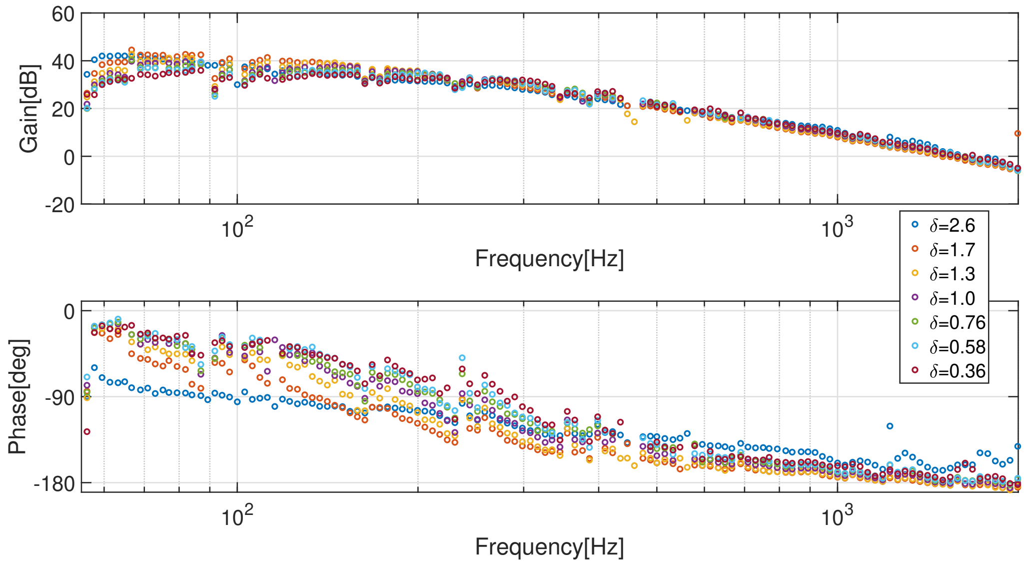


図 **5.4:** 伝達関数の測定結果

れは、強いフィードバックと輻射圧によって、OHP シートとの接触面で鏡が動いてしまい摩擦を受けているためだと考えられる。接触面を接着材で固定することで解決を図ろうとしたが、この摩擦により抑制されていた高次の機械的な共振が現れ制御することができなくなってしまった。

測定された光ばねの共振周波数の理論的な予想との比較を図 5.5 に示した。共振周波数

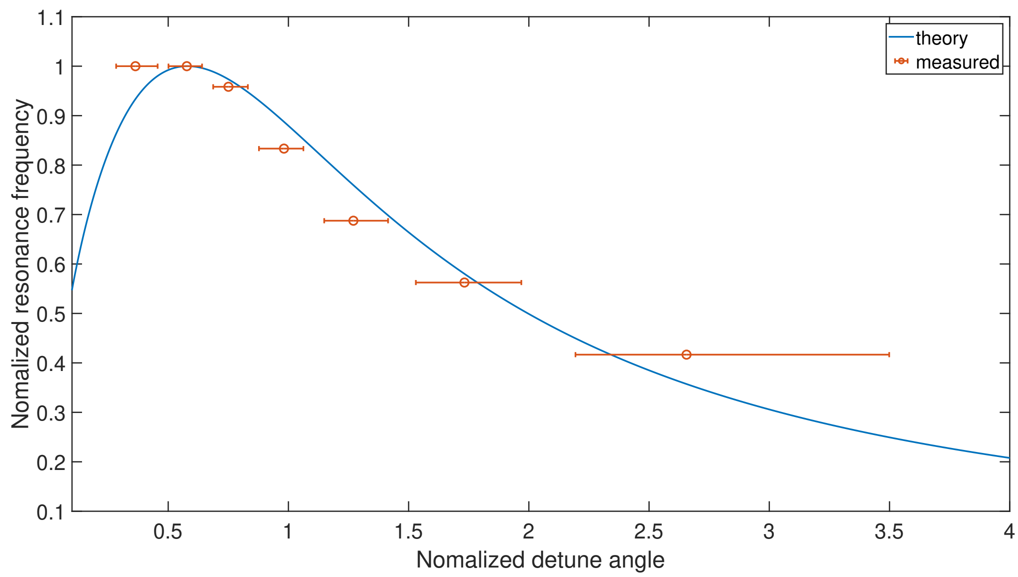
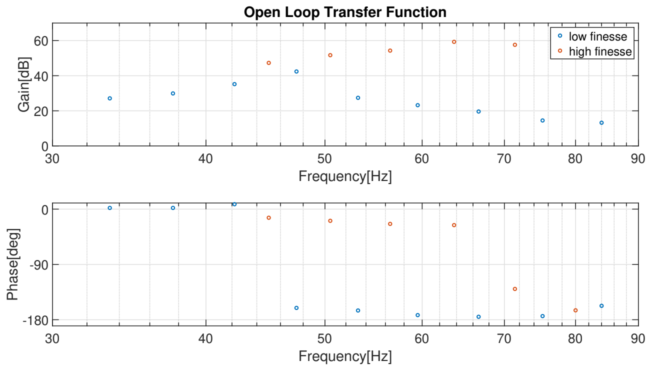


図 **5.5:** 光ばね共振周波数の理論予測と測定値

の理論値は鏡のスペックから求めてあり、$\delta = 0.58$ のときの測定値で規格化してある。また、伝達関数測定時に制御系に加えられる信号によって透過光強度が揺らされた範囲を detune に換算し、エラーバーとして示してある。測定値はおおよそ理論と一致しているが、共振周波数の読み取り誤差が大きいために一部では理論から大きく外れてしまっている。

この問題を解決するために、サスペンションを図 5.6a のようなベリリウム銅製に改良した。このときの測定結果を図 5.6b に示す。「low finesse」は output coupler を透過率

(a) サスペンションの写真



(b) 伝達関数

図 5.6: BeCu 製サスペンションと測定結果

50% 程度のものに変更し光ばねを十分弱くしたときの結果である。このときの共振周波数は機械的なサスペンションのみによるものであり、Young 率が高くなったことに伴ってサスペンションの共振周波数が 45 Hz 程度に上がってしまっていることが分かる。「high finesse」は光ばねが観測できる程度のフィネスにしたときの測定結果であり、共振周波数の読み取り誤差が大幅に減っていることが分かる。高次の機械共振を UGF 以上に上げることで制御の不安定性を回避しつつ、接触面で鏡が動かないようにできている。このときの読み取り誤差の範囲は測定時の透過光揺らぎから換算できる detune の揺らぎの範囲と矛盾しない。

5.2　第二次高調波生成実験

本研究では非線形光学効果である OPA を利用するが、このためにはさらに別の非線形光学効果を利用してポンプ光を生成する必要がある。これは、シード光[*3](基本波) より

[*3] OPA においてポンプ光と共に NLC に入射させる光のこと。シード光に含まれる光のうち、位相整合条件が満たされている光のみが増幅される。OPA で生成される 2 つの周波数を持つ光の片方をシグナル光、もう片方をアイドラ光と呼ぶ。縮退 OPA に対しては、シード光・シグナル光・アイドラ光のすべての周波数が等しいと考えてよい。

十分強度の高いポンプ光 (第二次高調波) を NLC に入射させなければ OPA を起こすことができないためである。第二次高調波は強い強度を持った基本波を NLC に入射させることで生成することができ、この波長変換過程を第二次高調波発生 (Second Harmonic Generation：SHG) と呼ぶ[*4]。一般的に用いられるレーザー光強度と NLC 長ではシングルパスの SHG による変換効率は非常に低いため、通常はキャリア光のみを共振させる共振器を用いて実効的なレーザー光強度を上げ、この共振器内に NLC を設置することで高い変換効率をもった SHG を実現する。本実験では、この共振器のことを SHG cavity と呼ぶ。図 5.7 に SHG 実験のセットアップを示す。反射光の測定には 12 MHz 共振型 Radio Frequency (RF) PD を用いる [63]。

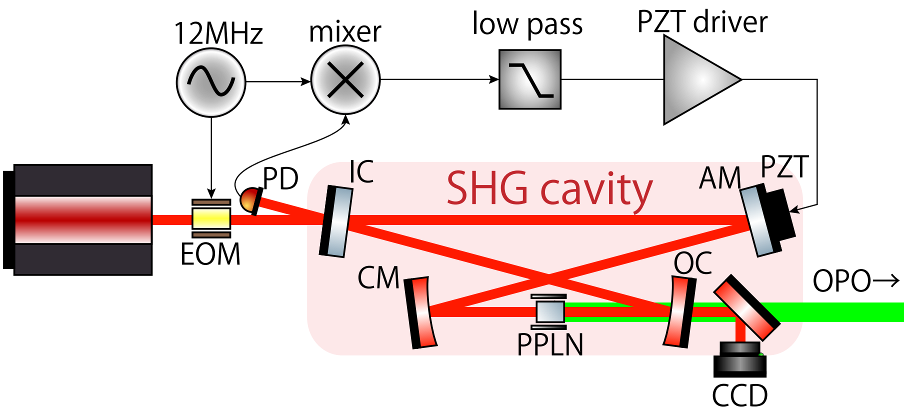


図 5.7: 第二次高調波生成実験のセットアップ

5.2.1　共振器の設計

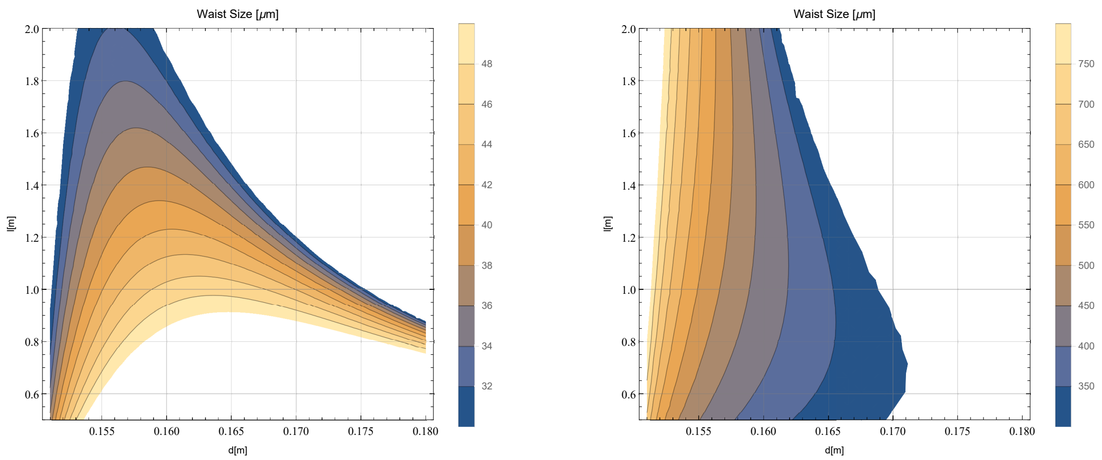
SHG cavity は、後述するように NLC を設置するためのある程度のスペースがある地点に数十 μm 程度のビームウエストを作らないといけないため、共振器の設計に課せられる制限は多い。通常は 2 枚鏡で構成される linear 型か、4 枚の鏡で構成される bow-tie 型が採用される。今回は透過光・反射光の取得やアクチュエータを取り付けた鏡の設置が容易であることなどを踏まえて、bow-tie 型の共振器を作成した。

SHG cavity などの非線形効果を起こす共振器を設計する際には、NLC を設置する地点でのビームサイズについて注意深く考えなければならない。NLC 中における単位面積当たりのキャリア光強度の平均が高いほど実質的な SHG 変換効率も高くなるので、結晶の中央にビームウエストがあるようにする必要がある。また、ウエストにおけるスポットサ

[*4] SHG は基本波の強度が変化しない場合、OPA は第二次高調波の強度が変化しない場合の三光波混合における波長変換過程であり、どちらも同一の結合波方程式で表すことができる。このため、これらは同一の非線形光学効果であると言うこともできる。

イズ w_0 を小さくすればするほどこの地点での単位面積当たりのキャリア光強度を高くできる一方で、このスポットサイズを維持できる距離は短くなってしまう。このトレードオフの関係に対する答えとして、Rayleigh 範囲が結晶の長さの半分程度になるようにすると最も良い変換効率が得られることが経験的に知られている [75]。今回用いる NLC の結晶長は 1 cm であるため、w_0 =40 μm 程度にすればよい。

今回用いる bow-tie cavity は 2 枚の平面鏡と 2 枚の曲率鏡で線対称に構成されている。このような bow-tie cavity は平面鏡-平面鏡間の中点と曲率鏡-曲率鏡間の中点にそれぞれウエストを持つ。特に、曲率半径が 150mm 程度の曲率鏡を用いれば、曲率鏡-曲率鏡間に 40μm 程度のビームウエストを作ることができる。4.4.3 小節の手法で曲率鏡-曲率鏡間のウエスト (small waist) サイズと平面鏡-平面鏡間のウエスト (large waist) サイズを計算し、図 5.8a と図 5.8b に示した。曲率鏡-曲率鏡間の距離を d、共振器の一周長を $2L$ としてて $l = 2L - d$ とした。計算結果を踏まえ、$d = 0.16$ m、$l = 1.2$ m と設定した。



(a) small waist　　**(b)** large waist

図 5.8: SHG cavity のウエストサイズ

また、式 (4.62) で示したように、曲率のある鏡で角度が付いて反射された場合には入射面内と入射面に垂直な面内の実効的な曲率半径に違いが現れる。このような非点収差のことを astigmatism と呼ぶ。この影響を減らすために、入射角はなるべく小さく設定する必要がある。SHG cavity の場合には NLC を入れる余裕を作らなければならないため、入射角は 8 deg と設定した。また、5.4 節で制作する OPO 共振器と同様に、astigmatism の影響を多少考慮したビームを入射させている。

SHG cavity の性能は入射鏡 (input coupler) の反射率で大きく変わる。Input coupler の透過率と実効的な一周あたりの第二次高調波変換率が等しくなり共振器がクリティカルカップリングになれば、入射したキャリア光が全てポンプ光に変換されるようになる。Input coupler の反射率が低すぎた場合には共振器はオーバーカップリングのままになり、

入射したキャリア光の一部しかポンプ光に変換されない。Input coupler の反射率が高すぎた場合には共振器が実質的にはアンダーカップリングになり共振器内強度が低下するため、実効的な一周あたりの第二次高調波変換効率も低くなってしまう。一周あたりの変換効率は実効的な入射光強度と NLC の性質 (非線形感受率と位相整合度) に依る。本実験では、最終的に Input coupler として強度反射率 94% のものを選択した。

5.2.2 共振器の制作と制御

表 5.3 に SHG cavity を構成する鏡を示した。Output coupler は 1064nm に対して高

名前	メーカー	型番	反射率	入射角	曲率半径
Input Coupler (IC)	Layertec	104373	$= 94\%$@1064&532	6 deg	flat
Output Coupler (OC)	Layertec	102247	$> 99.9\%$@1064, $< 5\%$@532	0 deg	150 mm
Curvature Mirror (CM)	Layertec	102247	$> 99.9\%$@1064, $< 5\%$@532	0 deg	150 mm
Actuate Mirror (AM)	Layertec	104265	$> 99.9\%$	0 deg	flat

表 **5.3:** SHG Cavity を構成する鏡

反射、532nm に対して高透過である鏡であり、生成された第二次高調波を効率よく取り出すことができる。共振器長制御のためのアクチュエータはピエゾ素子とし、スルーレートを高く保てる静電容量が小さいもの (Thorlabs/PA25FEW) に機械共振周波数が高くなるよう 6mm 径の小さな鏡を張り付けて用いた。測定した反射光強度から PDH 法により線形信号を得て、これをフィードバックした。生成された第二次高調波は 532 nm のみ反射し、1064 nm を透過させる dichroic mirror(シグマ光機/YHS-25.4C05-532) を用いて僅かに透過してくるキャリア光と分離する。NLC はシングルパス (非共振時) のときに出射される第二次高調波強度が最大になるよう設置しており、温度は 34.5 °C とした。

入射直前の光強度と分離後の出射光強度をそれぞれパワーメータで測定することで、第二次高調波変換効率を評価した。結果として、入射キャリア光強度 605 mW に対し、最大 621 mW のポンプ光強度を得た。測定された変換効率が 100 % を超えてしまっているのは、パワーメータの線形性が悪く、測定値に大きな系統誤差が存在するためである。精度の高い変換効率の測定は行えていないが、非常に高い変換効率を持つ SHG の構築に成功したと言える。実際の SHG 効率の上限は高次モードへの散乱と第二次高調波変換以外のキャリア光の光学ロスで決まり、95 % 程度と推察できた。変換効率をより正確に測定するには性能の高いパワーメータを導入する必要がある。

5.3　光パラメトリック増幅実験

共振器内で OPA を行うための準備として、まずはキャリア光とポンプ光を同時に NLC に 1 回だけ入射させるセットアップ (シングルパス) で OPA とその制御を試みた。OPA の制御のためにはさらにサブキャリアも NLC に入射させる必要があるので、キャリアとサブキャリアの PLL も行った。図 5.9 に OPA 実験のセットアップを示す。

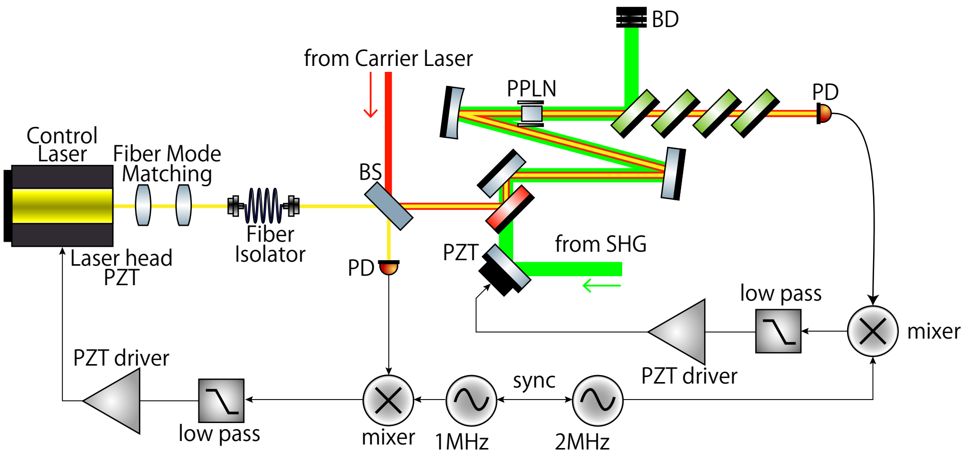


図 **5.9:** 光パラメトリック増幅実験のセットアップ

5.3.1　PLL の構築

OPA の制御のためにはキャリアから周波数をシフトさせた光であるサブキャリアが必要になる。サブキャリアは音響光学変調器 (Acousto-Optic Modulator ： AOM) を用いてキャリアに強度変調を与えた際の一次光としても得ることができるが、この際の偏向角はキャリアとの周波数差 ω_{M} に比例して変化してしまう。このため、本実験のように ω_{M} を細かく変化する必要のある場合にはサブキャリアに対するアライメントを逐一変更しなければならなくなってしまう。キャリアとサブキャリアの位相差が容易に合わせられることもあり、本実験ではメインレーザーから周波数差をつけたセカンドレーザーをサブキャリアとして使用する。

Control laser は光学常盤上のスペース節約とモードマッチングの容易さから、ファイバーを用いて導入した。ファイバーカップリングのロスにより実効的な出力強度が落ちてしまうが、セカンドレーザーの出力 200mW に対し制御のためには最高でも数 mW 程度あれば十分であった。

Carrier laser と control laser は 95 % 反射の非対称ビームスプリッタ (Lattice Electro Optics/BS-1064-R95-B-1025-45S) で干渉させた。レーザーの結晶温度を変化させると PD の帯域 (∼10MHz) 程度の範囲でうなりが変化していく様子が観測できた。シングルパス OPA の場合には ω_{M} を適当に選んで問題ない。$\omega_{\mathrm{M}} = 1$ MHz としてこのうなりを復調することで、PLL に対するエラー信号を得ることができた。レーザー結晶の温度は非常にゆっくりとしか変化させることができないため、control laser のレーザーヘッドに入っている PZT[*5]にエラー信号をフィードバックすることで PLL を構築した。PLL の制御を行っているときの PD の出力をスペクトラムアナライザで測定することで、中央値 1 MHz、半値全幅 ∼ 10 kHz 程度のスペクトルになっていることが確認できたので、2 つのレーザーの周波数差は 1 MHz で安定していると言える。

5.3.2　OPA とエラー信号

SHG で生成したポンプ光を combiner (Layertec/102730) でキャリア・サブキャリアと重ね合わせ、NLC に入射させた。SHG から combiner への経路を構成する鏡の 1 つにピエゾ素子が取り付けてあり、squeezing angle を変化させられるようになっている。キャリアとポンプが同時に共振する bow-tie cavity に対するモードマッチが行われており[*6]、green cavity(次章参照) で用いる曲率付き鏡 (Layertec/100380) でビームが絞られるようになっている。NLC から透過する光はハーモニック・セパレータ (シグマ光機/YHS-25.4CO5-532 など) でポンプ光を十分減光し、PD で測定した。

サブキャリアをブロックした状態で 1 mW 程度のキャリア光とポンプ光を NLC に入射し、ポンプ光経路の PZT に三角波を入力すると、それぞれ 5 % 程度の増幅と減衰が確認できた。また、PLL を構築した状態のサブキャリアも同時に入射させ、PD の出力を $2\omega_{\mathrm{M}} = 2$ MHz で復調し、ローパスフィルタに通すことで、OPA に対するエラー信号を取得した。このときの復調位相は 45 deg とした。この結果を図 5.10 に示す。エラー信号は PD の出力から位相ずれた波形になっていることが分かる。PZT への入力に伴って OPA のゲインが変化してしまっているのはポンプ光の経路にある PZT が真っすぐに動いておらず、PZT から遠く離れた NLC でのキャリアに対するアライメントが変化してしまっているためである。また、このエラー信号をポンプ光経路の PZT にフィードバックすることで OPA の制御にも成功した。このシングルパスあたりの OPA ゲインは後の実験の要求値を十分に満たしており、OPA のエラー信号取得と制御の一連の流れを確認することができた。

[*5] この PZT によりレーザーの周波数を最大 130MHz 程度の範囲で変化させることができる。

[*6] 将来的に作成し、squeeze 実験を行う予定である。

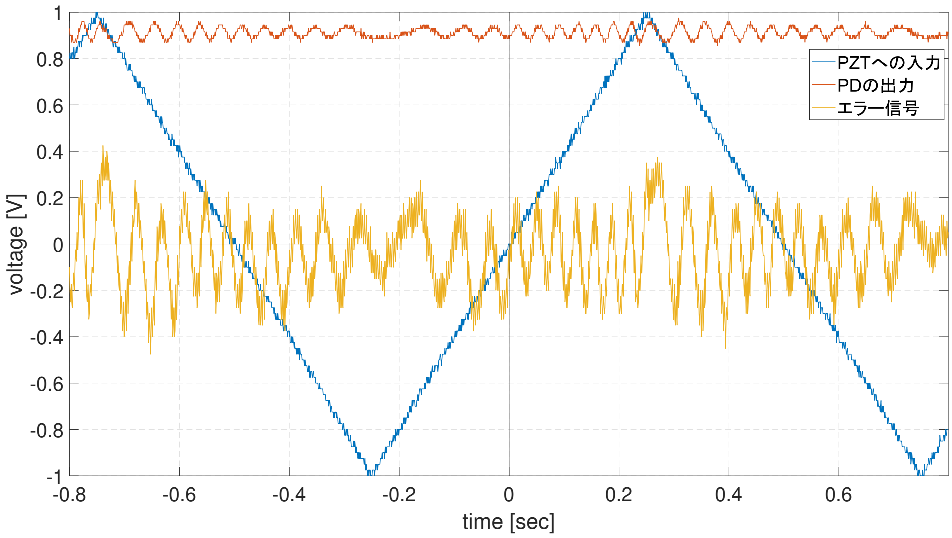


図 **5.10:** OPA されたキャリア光とエラー信号

5.4　光パラメトリック発振実験

共振器内で OPA を起こすと、1 周当たりの OPA ゲインが僅かであっても、OPA された光が共振器内で重ね合わされることによって、実効的に大きな OPA ゲインを得ることができる。特に、1 周あたりに OPA により発生する電場が 1 周あたりに input coupler などから失われる電場を上回った場合には、シード光を全く入射させない場合であっても位相整合条件に対応したシグナル光とアイドラ光が発生するようになる。この現象は Optical Parametric Oscillator (OPO) と呼ばれる。OPO は周波数可変レーザーなどに使われる技術であり、本実験に直接的に必要とはならないが、後の実験で必要となる大きなゲインを持った OPA を実現するためのステップの 1 つとして、OPA によって共振器を発振させることを目標として共振器内 OPA 実験を行った。実験のセットアップは図 5.1 の通りだが、532nm 用 EOM の準備が間に合わなかったために green cavity は作成していない。また、squeezing angle の制御は後述する順周りの透過光を利用して行った。

5.4.1　OPO cavity の設計

SHG cavity と同じく、OPO cavity も bow-tie 型として設計を行った。Green cavity を SHG cavity と同程度の大きさに抑えるために、OPO cavity は曲率 69 mm の鏡を用いたコンパクトな設計とした。表 5.4 に OPO cavity を構成する鏡を示した。Input coupler は SHG cavity と同じものを用いており、理論的なフィネスは 105 程度である。

名前	メーカー	型番	反射率	入射角	曲率半径
Input Coupler (IC)	Layertec	104373	$= 94\%$@1064&532	6 deg	flat
Green Coupler (GC)	シグマ光機	特注	$= 99.95\%$@1064, $< 1\%$@532	0 deg	69 mm
Curvature Mirror (CM)	シグマ光機	特注	$= 99.95\%$@1064, $< 1\%$@532	0 deg	69 mm
Actuate Mirror (AM)	Layertec	110858	$> 99.9\%$@1064&532	0 deg	flat

表 5.4: OPO Cavity を構成する鏡

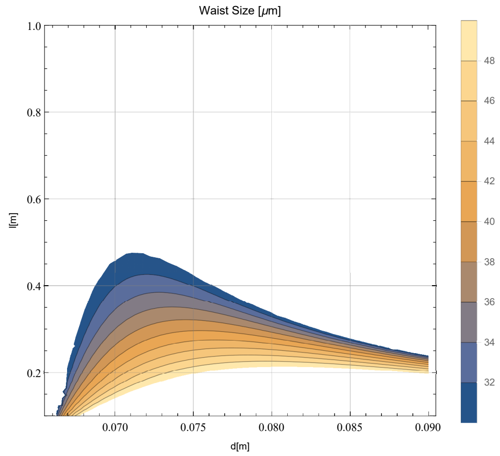
ポンプ光を導入するための鏡は green cavity がアンダーカップリングとならないように、532 nm における反射率が 1 % 以下のものを用いている。NLC のヒーターをコンパクトな共振器内に収めるために入射角は 17 deg と設定した。アクチュエータを取り付ける鏡は、SHG cavity と同様に 6 mm 径の Layertec/104265 を用いる予定だったが、この入射角では実効的な反射率が少なくとも 95 % 以下に低下してしまったため、入射角依存性の少ない 12.7 mm 径の鏡 (Layertec/110858) を用いている。また、無視できない大きさの入射角であるため、共振器の設計は式 (4.62) を用い tangential plane(鏡を yaw 方向に傾ける場合は水平方向に対応) と sagittal plane(鉛直方向に対応) に分けて行った。計算したウエストサイズを図 5.11 に示す。この結果を踏まえ、$d = 0.078$ mm、$l = 0.35$ mm と設定した。

5.4.2　OPO と共振器内 OPA

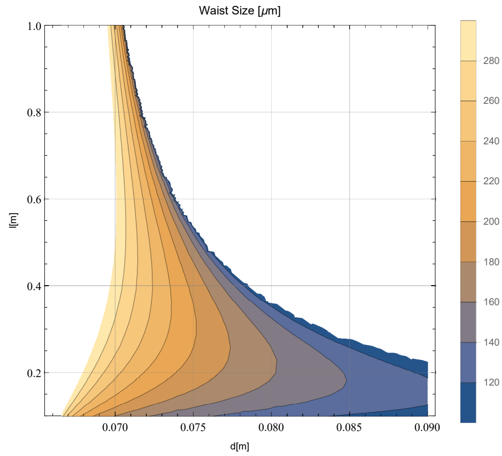
OPO cavity に SHG で生成したポンプ光を導入すると、キャリア光を共振器に入射させない場合でも共振器からキャリア光程度の波長をもった光が出射され、共振器が発振状態となった。発振の閾値は 420 mW 程度であり、最大 580 mW 程度のポンプ光を OPO cavity に導入することができた。共振器の透過光から、合計約 120 mW のシグナル光とアイドラ光が出射されていると見積もれた。このときの共振器内の PZT への入力信号と透過光を図 5.12 に示す。

共振器内 OPA は発振状態とならないよう注意して行った。OPA の影響を受けない信号で detune を制御するために、共振器に逆回りからもキャリア光を入射させ、その透過光を測定した。ポンプ光を入射してないときの順回り透過光と逆回り透過光の比較を図 5.13 に示す。非共振時の電圧が一致するように、逆回りの透過光強度にオフセットを加えてある。逆回りの光に対してはモードマッチングが不十分なため[*7]高次モードがある程度現れてしまっているが、基本モードに対しては非常によく一致していることが分かる。逆回りの光と比較することで、OPA に伴うフィネスの増減などを見積もることができる。

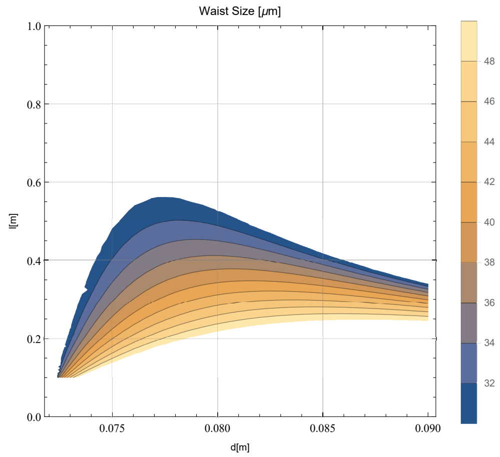
[*7] 同じモードマッチングをした光を順回り・逆回り用に分離して用いており、順回りより平面鏡-平面鏡間の距離分だけ多く伝搬させた光を逆回り光として入射させている。この距離を調整すると、モードマッチング不整合に伴う高次モード光の増減が見られた。



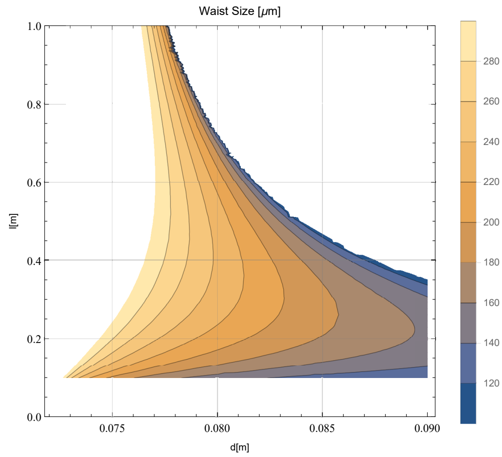
(a) small waist (tangential plane)



(b) large waist (tangential plane)



(c) small waist (sagittal plane)



(d) large waist (sagittal plane)

図 **5.11:** OPO cavity のウエストサイズ

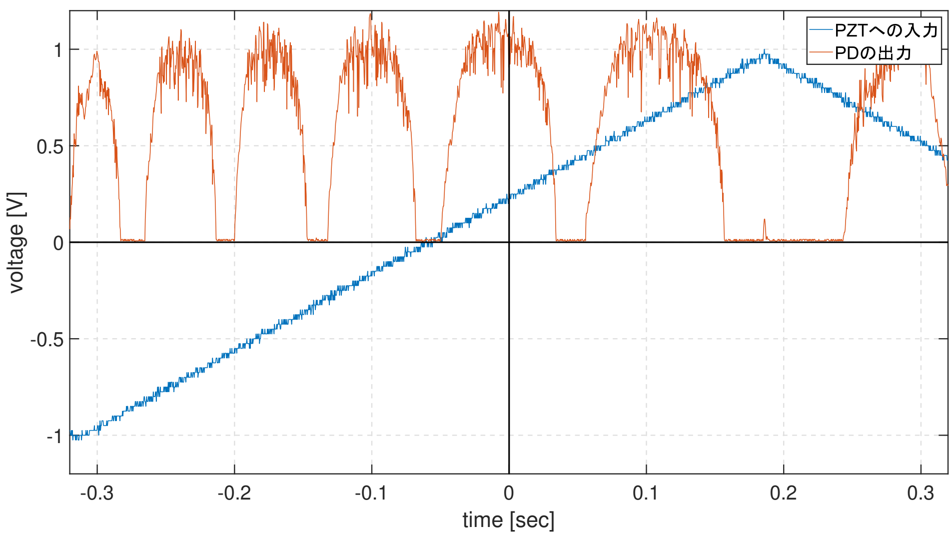


図 **5.12:** 発振時の OPO cavity からの透過光

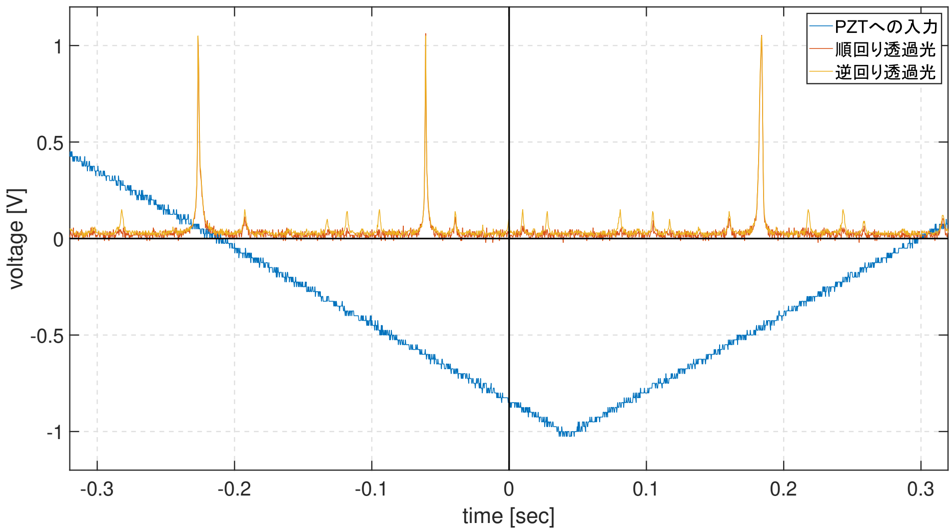


図 **5.13:** 順周り透過光と逆回り透過光

共振器長の制御を行わなければ squeezing angle も制御することはできない。まずはどちらも制御を行わずに、ポンプ光経路 PZT を共振器内 PZT に比べ十分ゆっくり振ることで、増幅が最大となるときの共振の様子を観察した。ポンプ光を入射させずに順回りのキャリア光 50 mW を入射したときの結果を図 5.14 に、閾値程度のポンプ光を入射させ順回りのキャリア光 1 mW を入射したときの結果を図 5.15 に、閾値程度のポンプ光を入射させ順回りのキャリア光 50 mW を入射したときの結果を図 5.16 にそれぞれ示す。図 5.14-図 5.16 は OPA のゲインを確認するため順回り透過光の PD 出力は定数倍せずに示してある。 図 5.14 から、オーバーカップリングである OPO 共振器から共振時に 50

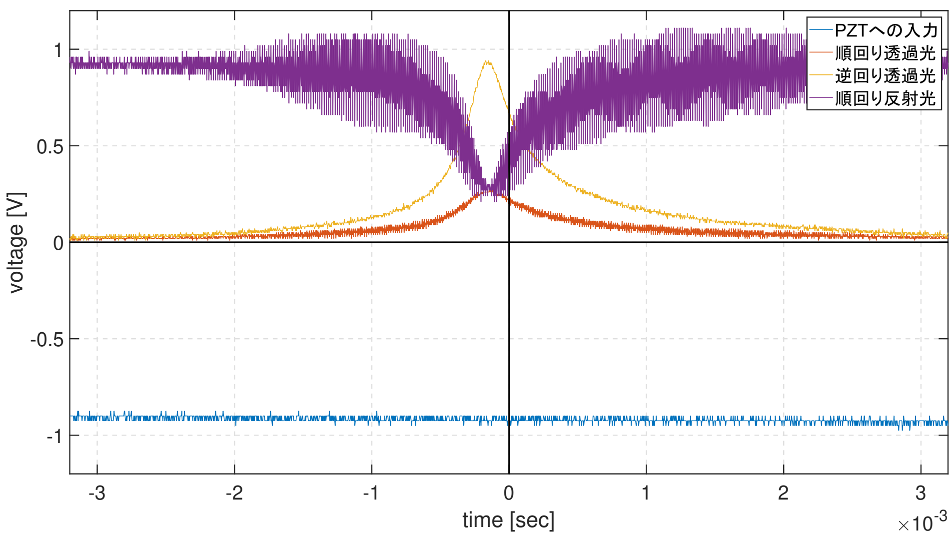


図 **5.14:** 入射キャリア 50mW ポンプ光なしの場合のスペクトル

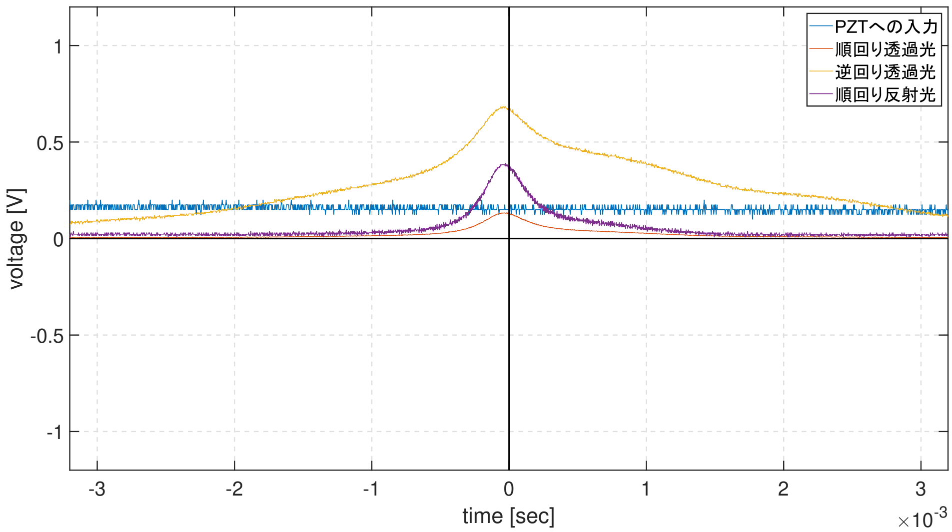


図 **5.15:** 入射キャリア 1mW で共振器内 OPA を行った場合のスペクトル

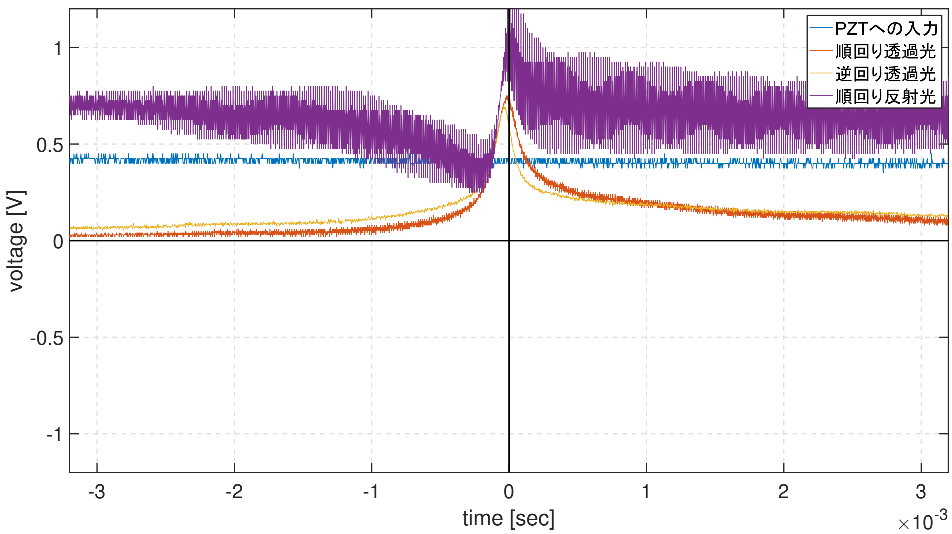


図 **5.16:** 入射キャリア 50mW で共振器内 OPA を行った場合のスペクトル

mW 程度が出力されるときの順回りの透過光は 240 mV 程度である[*8]。反射光の揺らぎは 12 MHz の変調が光を揺らしているためである。1 mW のキャリア光で OPA を行ったとき、27 mW 程度が共振器から出力されているので、このときの OPA ゲインは 27 程度である。増幅が最大になるときは共振器内キャリア基準で見た squeezing angle が 0 と

*8 共振器がクリティカルカップリングに近くなっているため、この見積もりは 2 倍程度誤差がある。ポンプ光を入射させない場合には OPO cavity は SHG となるため、ポンプ光の発生に伴って共振器がクリティカルカップリングに近づいていく。より正しく見積もるためには NLC の温度を変化させ位相不整合にすればよい。

なる状態に近いので、式 (4.23) より $\sigma = 0.8$ 程度であることが分かる。一方で、50 mW のキャリア光で OPA を行ったときには 150 mW 程度しか出力されておらず、実効的な OPA ゲインが 3 程度に低下している。それぞれのの反射光強度の比較から、キャリア光が 1 mW のときには十分なゲインの OPA が行われているが、キャリア光が 50 mW のときにはポンプ光の減衰が無視できないために OPA と SHG の中間のような 3 波混合が起こってしまっていると考えられる。OPA なしで共振器内に光ばねを生成するためには最低でも 50 mW 程度の入射キャリア光が必要なため、OPA なしの光ばねと OPA ありの光ばねを比較するためには green cavity の作成が必須となる。また、図 5.15 の順回り透過光と逆回り透過光を比較すると、OPA により実効的なフィネスが上昇していることが分かる。式 (4.23) より、$\sigma = 0.8$ のときの半値半幅はおおよそ 1/5 倍程度になると計算でき、実際にこの程度にフィネスが向上することが確認できた。

最後に、detune と squeezing angle に対して制御を試みた。Detune に対しては逆回りの透過光をエラー信号とし、squeezing angle に対しては順回りの透過光をエラー信号とした。ある程度大きい detune に対しては squeezing angle との同時制御を行うことができたが、$|\delta| \lesssim 1$ では大きい鏡を用いていることによる PZT の共振が問題となって安定した制御はできなかった。

5.5　光パラメトリック増幅・光ばね複合実験

ここまでの結果をまとめた実験として、懸架鏡を含む OPO cavity を用いて光ばねの観測を試みた。実験系は前小節と殆ど同じだが、OPO cavity の PZT で駆動していた鏡を懸架鏡に交換している。実験系の写真を図 5.17 に、懸架鏡入り OPO cavity の写真を図 5.18 に示した。

前節で作成した OPO cavity と基本的な構成は同じだが、鏡を表 5.5 のように変更している。Actuate mirror はベリリウム銅製サスペンションに懸架した小さな鏡に交換した。これは厚さ 4 mm、直径 6.35 mm であり、17 deg の入射角でも用いることができる。また、曲率鏡は green cavity を作成することを見越して 532nm の透過率が極めて高いものに変更した。これはフランスの Laboratory of Mechanics and Acoustics (LMA) から提供していただいたものである。

名前	メーカー	型番	反射率	入射角	曲率半径
Input Coupler (IC)	Layertec	104373	$= 94\%$@1064&532	6 deg	flat
Green Coupler (GC)	Newport&LMA	SPC025	$= 99.95\%$@1064, $< 0.25\%$@532	15 deg	68.5 mm
Curvature Mirror (CM)	Newport&LMA	SPC025	$= 99.95\%$@1064, $< 0.25\%$@532	15 deg	68.5 mm
Test Mass (TM)	Edmund	#38-901	$> 99.8\%$@1064	0-45 deg	flat

表 5.5: 懸架鏡入り OPO Cavity を構成する鏡

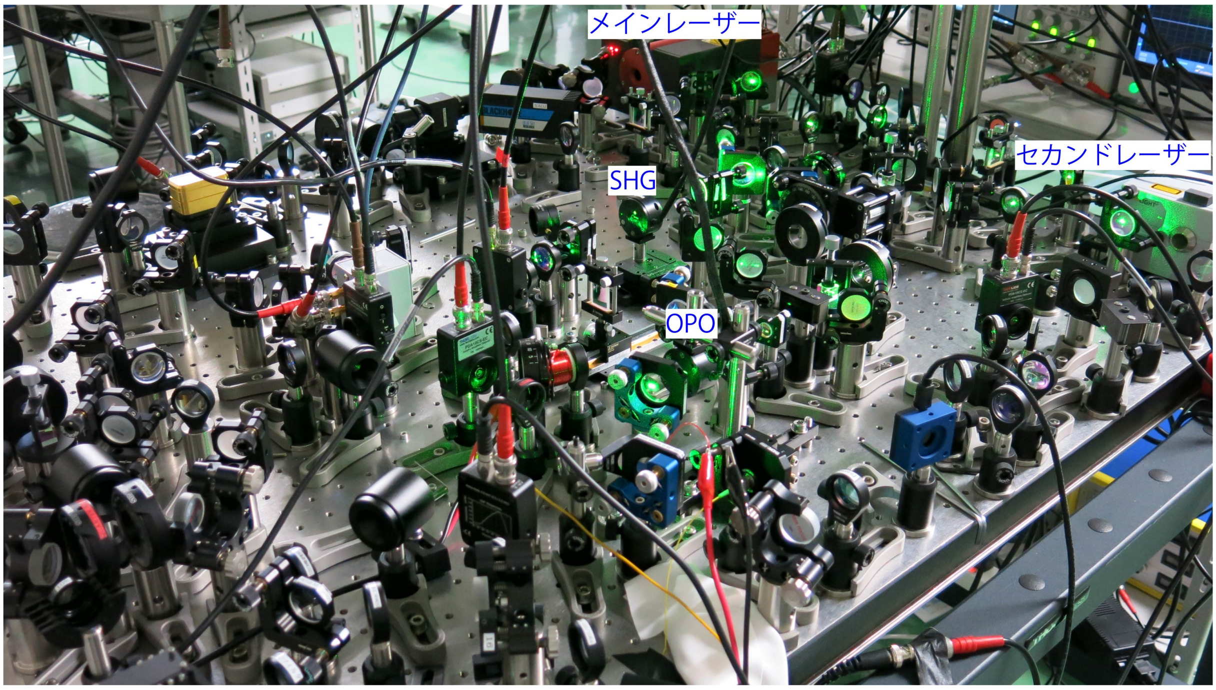


図 **5.17:** 実験系の写真

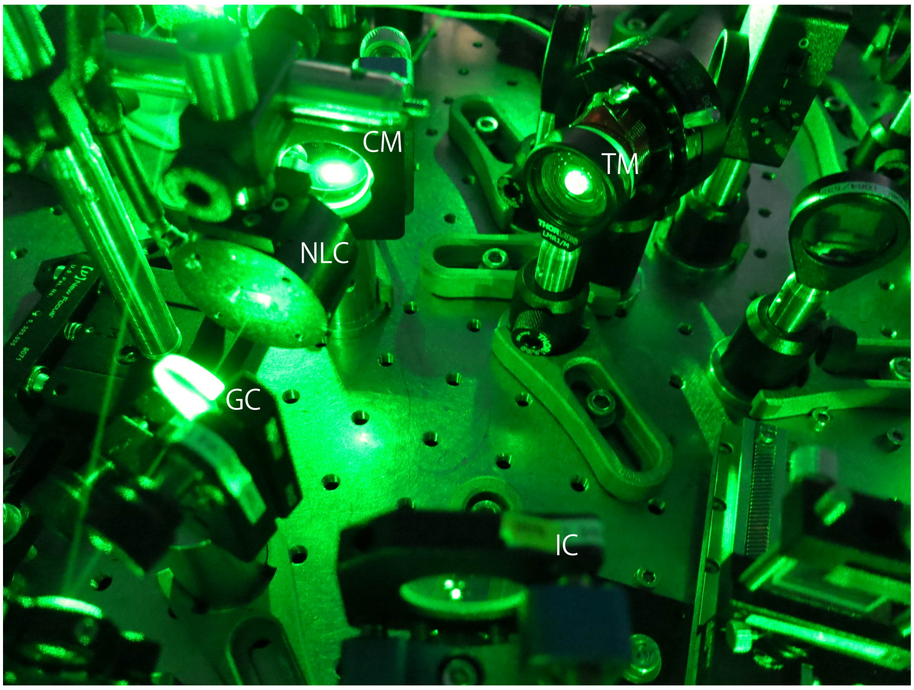


図 **5.18:** 懸架鏡入り OPO cavity の写真

5.5.1　懸架系の評価

まずは、ベリリウム銅製サスペンションの共振周波数を測定した。Input coupler を透過率の高いものに変更し、OPO cavity をフィネス 30 程度の共振器としてオープンループ伝達関数の測定を行うことで、光ばねの影響を受けない状態の伝達関数を測定する。さらにこれから回路の伝達関数を差し引くことで、懸架系の伝達関数を推定した。この結果を図 5.19 に示す。位相に対するフィッティングの結果から、共振周波数は 35.74 ± 0.03

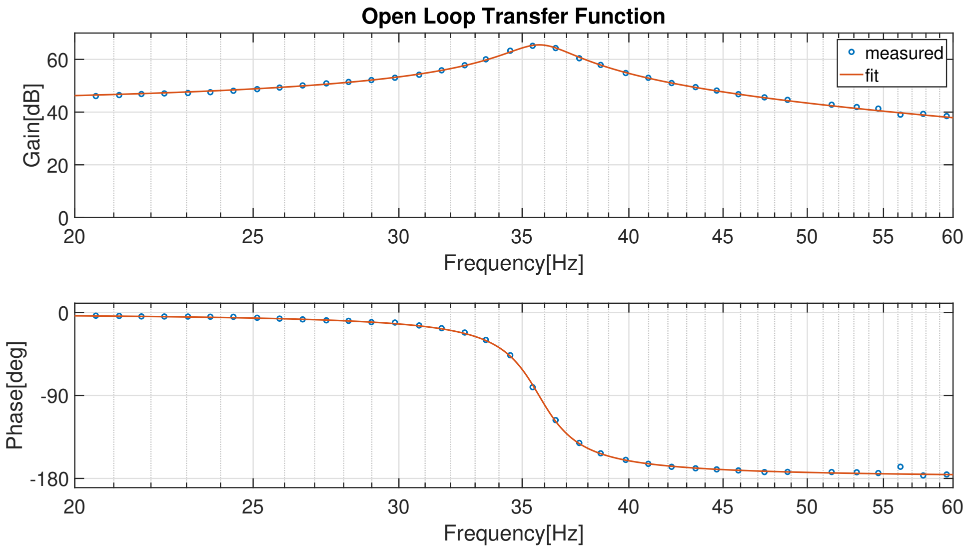


図 5.19: ベリリウム銅製サスペンションの伝達関数

Hz で、Q 値は 25.5 ± 0.5 程度であることが分かった。

また、最終的には光ばねの共振周波数をベリリウム銅製サスペンションの共振周波数以上にすることが困難であったため、OHP シート製サスペンションを用いた測定も行った。こちらも input coupler を透過率の高いものに変更し、フィネス 15 程度にした状態で測定を行った。結果を図 5.20 に示す。共振周波数付近では雑音の混入が深刻であり、正確な測定を行うことができないが、共振周波数は $8 \sim 10$ Hz 程度の範囲にあることが分かる。

5.5.2　光ばねの測定

まずはベリリウム銅製サスペンションを用いた測定を行った。順周りと逆回りの透過光をエラー信号とすることで、detune と squeezing angle の同時制御に成功した。また、フィネス 100 のままでは光ばねの硬度が不足しているため、input coupler を 98% のものに交換し、フィネスを高めた。結晶を取り外した状態だとフィネスは 300 程度であったが、結晶を挿入した状態だと位相不整合状態にしてもフィネス ~200 程度にしかならな

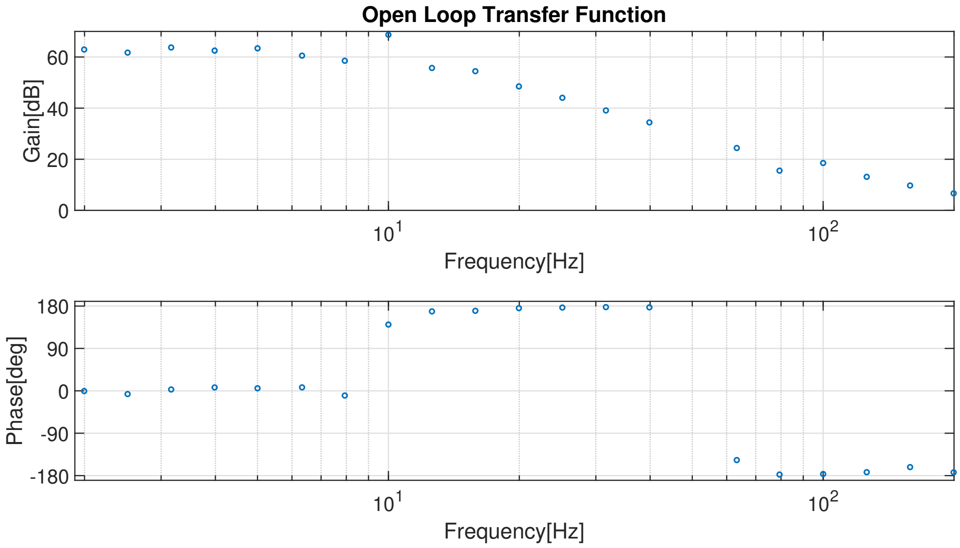


図 **5.20:** OHP シート製サスペンションの伝達関数

かった。このときのフィネスは結晶の縦方向の位置に強く依存していたので、結晶端でのクリップによるロスでフィネスが制限されていると考えられる。また、フィネス 200 の状態で OPA を行うと、僅か 80 mW のポンプ光を入射させただけで発振状態になってしまい、共振器内強度の増幅も制限されてしまった。これはシングルパスあたりの OPA ゲインが高すぎることに起因しているので、キャリア光のビームサイズを大きくすることで解決できる。実際に、$l = 0.20$ m、$d = 0.076$ m に変更してウエストサイズを大きくすると、発振の閾値は 130 mW に上昇し、OPA ゲインが 1.25 倍程度改善した。これ以上共振器長を小さくすると共振器のモードが不安定になってしまうので、更なる改善のためには曲率鏡を変更することが必要である。これらの状態では光ばねの存在は確認できなかった。

また、式 (4.23) から、$\delta > 0$ であればその領域では発振しないことが分かる。実際に、増幅が最大になる squeezing angle になったときのスペクトルを確認してもそのような傾向が見られた。10 mW のキャリア光を入射し、発振させたときのスペクトルを図 5.21 に、detune を $\delta \sim 1$ にロックした後 squeezing angle を変化させたときの様子を図 5.22 に示す。 このときは実効的な OPA ゲインが更に増加し、信号増幅度も上昇していることが分かる。この程度の squeezing rate で、共振器内強度がある程度高くなるような squeezing angle の範囲ならば、共振器は発振せず線形な応答を示すことも分かる。極値付近に現れている揺らぎは、detune の揺れが増幅されて現れたものである[*9]。しかし、これらの状態に変更して伝達関数の測定を行っても、光ばねの存在は確認できなかった。

過去の測定と今回達成できた共振器内強度から、光ばねの共振周波数は少なくとも 20

[*9] これらスペクトル自体は OHP シート製サスペンションで測定しており、制御を強めても消すことができない高次の機械共振 (400 Hz 程度) で detune が揺らいでいる。

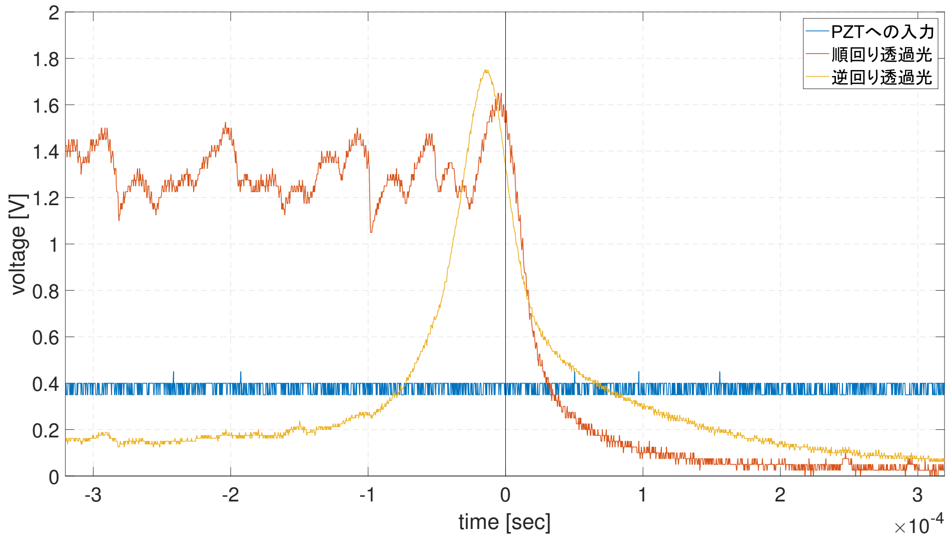


図 **5.21:** 入射キャリア 10mW で閾値を超えた共振器内 OPA を行った場合のスペクトル

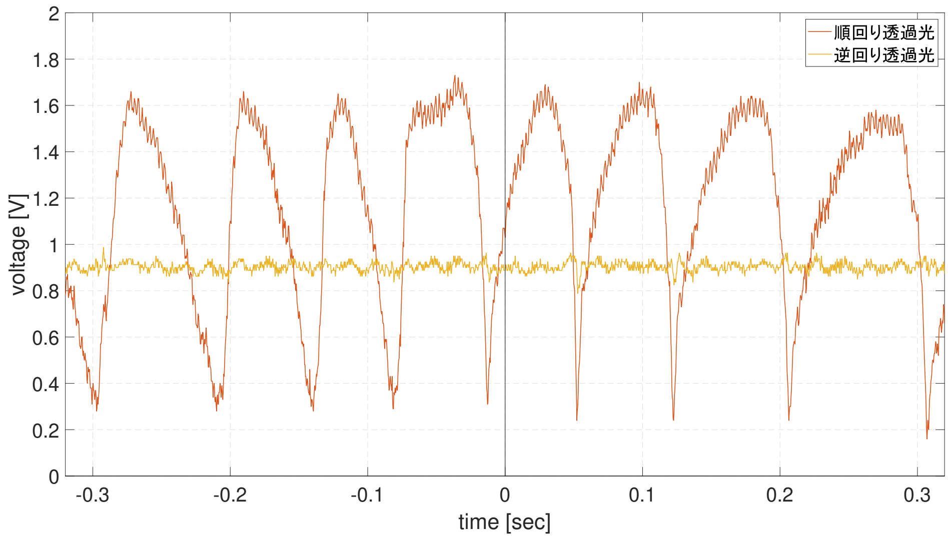


図 **5.22:** squeezing angle を変化させたときの様子

Hz 程度にはできていると見積もれたので、最終的に共振周波数の低い OHP シート製サスペンションを用いて光ばねの観測を試みた。400 Hz 程度の高次の機械共振で detune が揺らいでしまい、これが squeezing angle を大きく揺らすことでロックが安定せずに長時間の測定を行うことが困難であったが、フィネス 100 の共振器に 10 mW 入射させたときにロックが持続し周波数分解能の高い測定を行えた。この結果を図 5.23 に示す。このときの共振周波数は 12.6 Hz 以上であることが分かる。このときのパラメータは $\delta = 0.6^{+0.4}_{-0.2}$、

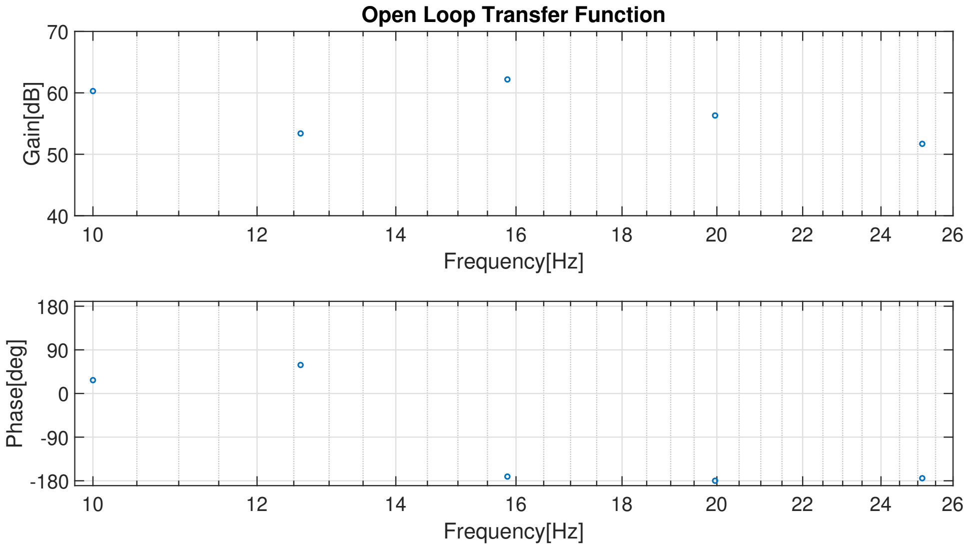


図 5.23: OHP シート製サスペンションで internal squeezing により強化された光ばねを生成したときの伝達関数

$\sigma = 0.68$、$\theta = 0.5^{+0.3}_{-0.1}$ 程度[*10]であった。5.1 節での結果から、OPA を行わない場合の光ばねの共振周波数は 5.8 Hz 程度であり、懸架系と合計した共振周波数はどんなに高くとも $\sqrt{(10)^2 + (5.8)^2}$ ∼11.6 Hz 程度にしかならないので、これは internal squeezinng により強化された光ばねであると言える。しかし、フィネスを 200 程度に向上させ再度測定を行ったときには光ばねを観測することができなかった。これはフィネスの向上に伴いノイズが増加し、伝達関数の測定が行えていないためだとも考えられるが、OHP シート製サスペンションを用いた測定の不確かさの現れでもある。また、detune をロックした状態で OPA ゲインが高い squeezing angle に変更すると、detune の制御が UGF の周波数で発振してしまう問題も起きた。これは順周りの光と逆回りの光がカップリングし、何らかの不安定性を引き起こしていると考えることもできるが、光ばねが生成され detune 制御の伝達関数における共振周波数以下のゲインが上昇した場合には自然に起きることでもある。

本実験の結果をまとめると、OHP 製サスペンションのノイズの多さから正確な測定は行えていないが、internal squeezing により光ばねが強化される兆候は掴めたと言える。

[*10] $0 < \theta < \pi/2$ ではない可能性もある。

第 6 章

結論

本章では、本研究で得られた理論的な考察と実験の結果を議論する。

6.1 理論的な考察のまとめ

第 3 章では、重力波検出器における量子雑音について考えた。特に、3.5.2 小節では internal squeezing で強化した光ばねを用いると、external squeezing と比較しても特定の帯域で 1 桁程度感度の高い重力波検出器を実現できることを示した。ただし、internal squeezing の squeezing angle に周波数依存性を持たせる方法は考案されていないため、より一層の議論が必要である。

第 4 章では、Fabry-Perot 共振器を用いた次世代型重力波検出器の原理検証方法について考えた。特に、4.1.4 小節では、特定の squeezing angle を選択すれば、Fabry-Perot 共振器における光ばねを signal recycling Michelson 干渉計における光ばねと同等と見なせることを示した。今後は squeezing angle を含めた議論を行うことが重要である。共振器内キャリア基準で取った squeezing angle を含む結果を示しておくと、式 (4.22) で示した光ばね定数は

$$K_{\mathrm{opt}} = \frac{2\mathcal{F}P_E\omega_0}{\pi c^2}\frac{\delta - \sigma\sin 2\theta}{1+\delta^2-\sigma^2}\left[1 - \frac{2i\Omega}{\gamma(1+\delta^2-\sigma^2)}\right] \tag{6.1}$$

と表せる。また、このとき共振器に入射するキャリアの偏角は $\varphi = \arctan((\delta + \sigma\sin 2\theta)/(-1+\sigma\cos 2\theta))$ であり、式 (4.23) で示した共振器内強度は

$$P_E = \frac{\frac{2\mathcal{F}}{\pi}P_A}{(1-\sigma\cos 2\theta)^2 + (\delta + \sigma\sin 2\theta)^2} \tag{6.2}$$

と表せる。また、4.3.3 小節では、特定の周波数だけシフトさせたサブキャリアを用いることで、detune のある共振器においても coherent control 法による制御を行えることを

示した。この手法を用いれば、共振器内強度が極大となる squeezing angle にも制御をすることが可能である。

6.2　実験のまとめ

5.1 節では、Fabry-Perot 共振器を用いて最大 250 Hz 程度の光ばねを生成し、detune 依存性があることを確認した。この共振器のフィネスは 1000 程度であった。

5.2 節では、100% に近い変換効率を持った SHG を制作した。この共振器は出力強度・制御の持続性が共に安定しており、OPA 実験の進行を妨げることはなかった。

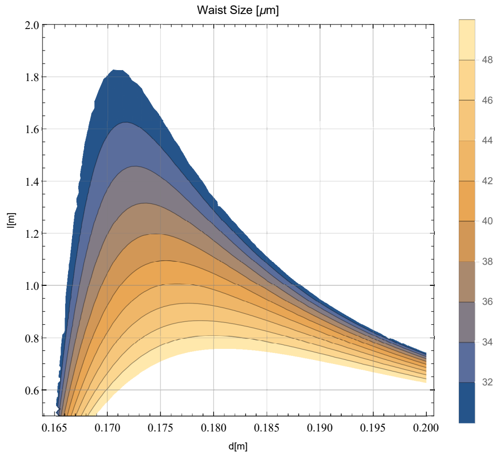
5.3 節では、シングルパス OPA でサブキャリアを用いたエラー信号の取得と制御を行った。共振器内 OPA における coherent control 法によるエラー信号取得は今後の課題である。

5.4 節では、生成できたポンプ光強度の範囲でも、共振器が発振状態になることを確認した。また、入射キャリア光強度が弱ければ共振器内 OPA により実効的なフィネスが上昇することを確認できた。このときのスペクトルの半値半幅の変化は理論で説明できる程度であった。一方で、入射キャリア光強度が強いとポンプ光の減衰を無視することができず、OPA ゲインが抑圧されることも分かった。これはポンプ光に対する共振器を制作してポンプ光を飽和させ、シングルパスあたりのポンプ光の減衰を無視できるような状態にすれば解決できる[*1]。この green cavity は途中に凹レンズが含まれた bow-tie 型の構成となる。この共振器のウエストサイズを式 (4.65)-(4.70) などを用いて計算した結果を図 6.1 に示す。曲率は 0.15 m、入射角は 10 deg としている。

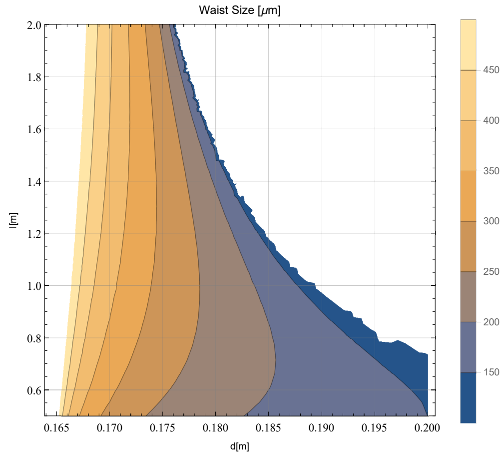
5.5 節では、internal squeezing により光ばねが強化される兆候をとらえたが、測定の精度が低いために正確な測定は行えなかった。OHP シート製サスペンションは柔らかいために音響雑音の影響を受けやすく、真空にしない限り正確な測定を行うことはできない。今後は green cavity も制作するため、真空槽にこれらの光学系を収めることは難しい。共振器のフィネスを高めた状態で高効率な共振器内 OPA を行うことができれば、光ばねの共進周波数をベリリウム銅製サスペンションでも観測できる程度に高めることができる。5.1 節での結果から、フィネス 100 の共振器に 1 mW を入射した場合の光ばねの共振周波数は 1.8 Hz 程度である。本実験では OPA により 10 倍程度共振周波数を上げることができたと推測できているので、green cavity の構成や OPO cavity の曲率の見直しなどを行い、さらに 2 倍程度共振周波数を高める予定である。

制御の安定性に関する課題は数多く残った。本実験では、コイルマグネットアクチュ

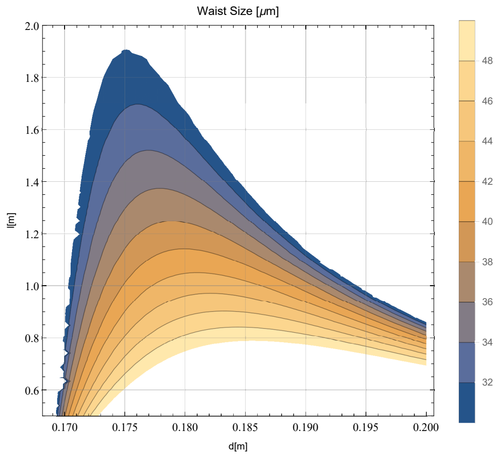
[*1] 合計した減衰が大きい場合にも、共振器による飽和を利用すれば特定の非線形光学効果を維持することが可能である。例えば、補遺 B.3.2 で示すように、OPO は共振器内でキャリア光が飽和していることにより起こる現象である。



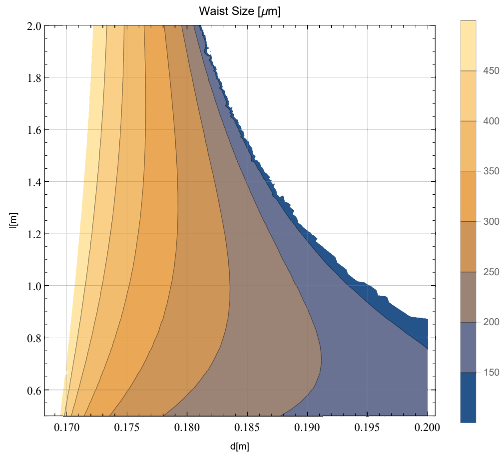
(a) small waist (tangential plane)



(b) large waist (tangential plane)



(c) small waist (sagittal plane)



(d) large waist (sagittal plane)

図 **6.1:** GREEN cavity のウエストサイズ

エータを用いていることによって、高次の機械共振が detune を揺らし、これが最終的な squeezing angle の制御範囲を制限した。また、コイルの方向が悪い場合には pitch・yaw の共振周波数で不安定性があり、制御が安定しなかった。この問題はどちらのサスペンションでも発生し、OHP シート製では 80 Hz、ベリリウム銅製では 300 Hz 程度であった。コイルマグネットアクチュエータは UGF を高くし、共振周波数以下の制御を強くすることができるというメリットがある。本実験ではコイルのローパス特性で制限される 10 kHz 程度まで高くすることができていた。しかし、今後は PZT やレーザーの周波数を用いた制御に変更することで、detune の揺らぎを抑制する必要がある。また、coherent control 法を用いたエラー信号を取得し、squeezing angle を共振器内強度の極値でロックできるようにすることでも、squeezing angle の制御の安定性を高める予定である。SHG は出力が安定していたが、squeezing angle の揺らぎが大きい場合には出力に揺らぎが現れていた。これは電気的な揺らぎが電源を伝わって RFPD の出力を揺らしているためだ

と推測できた。Squeezing rate の揺らぎが問題となるようであれば、RFPD を電源的に独立させる必要がある。

ベリリウム銅製サスペンションで精度の高い測定を行えるようになれば、OPA によるキャリア光の増幅と信号増幅の効果を分離して光ばねの特性を評価することができる。本実験では $\sigma = 0.8$ 程度を達成できたので、式 (4.22) より、信号増幅により光ばね定数は 1.7 倍程度硬くなっていると推察できる。OPA を行わずに同じ共振器内強度にした場合と比較して、光ばねの共振周波数は 1.3 倍程度変化するので、ベリリウム銅製サスペンションであればこの変化は十分測定可能である。

最後に、3.5.2 小節で考えた光学系は特定の detune 以外では発振する系である。本実験では実際に $\delta > 0$ では発振しないことを確認できたが、OPA ゲインが高すぎる場合には FSR だけ周波数がずれた光の発振が問題になると考えられる。この次世代型重力波検出器を実現するために、今後はより一層の squeezing angle を含めた理論的考察と、高ゲイン OPA の実験的検証が必要となる。

補遺 A

電磁場の量子論

量子的な電磁波は波と粒子の二重性を持っており、この性質がレーザー干渉計型重力波検出器の原理的な感度を決定することになる。ここでは電磁場の量子化を行い、本論で用いる電磁場の性質を導出する。

A.1 電磁場の量子化

電流や自由電荷が存在しない場合の真空中の Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{A.4}$$

と表される。ここで、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ は電場、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ は磁束密度である。これらは、スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{A.6}$$

と表せる。ゲージ条件として Coulomb ゲージ $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を課せば、$\phi = 0$ であり、ベクトルポテンシャルは波動方程式

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{A.7}$$

に従う。長さ l の立方体中の電磁場を考える。波数ベクトルを $\boldsymbol{k} = 2\pi(n_x, n_y, n_z)/l$ (n_x, n_y, n_z は整数) とすると、各波数に対するベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ と波数は直交

する。電磁場の偏光を表す単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{k})$ $(\mu = 1, 2)$ を電磁場の進行方向を表す単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{k}}$ と直交するように $(\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{k}))$ 定めると、ベクトルポテンシャルは電磁場の角周波数 $\omega_{\boldsymbol{k}}$ を用いて

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\mu, \boldsymbol{k}} \left(A^\mu_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* \mathrm{e}^{i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \right) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{k}) \tag{A.8}$$

と表すことができる。よって、電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\mu, \boldsymbol{k}} i\omega_{\boldsymbol{k}} \left(A^\mu_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} - (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* \mathrm{e}^{i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \right) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{k}) \tag{A.9}$$

となり、磁束密度は $k = |\boldsymbol{k}|$ を用いて

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\mu, \boldsymbol{k}} ik \left(A^\mu_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} - (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* \mathrm{e}^{i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \right) \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{k}) \tag{A.10}$$

となる。

電磁場のエネルギーを計算する。$V = l^3$ として

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{E}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = V \sum_{\mu,\nu,\boldsymbol{k}} \Big[& -\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{-\boldsymbol{k}} \left(A^\mu_{\boldsymbol{k}} A^\nu_{-\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_{-\boldsymbol{k}})t} + (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* (A^\nu_{-\boldsymbol{k}})^* \mathrm{e}^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_{-\boldsymbol{k}})t} \right) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{e}_\nu(-\boldsymbol{k}) \\ & +2\omega^2_{\boldsymbol{k}} (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* A^\mu_{\boldsymbol{k}} \Big]\end{aligned} \tag{A.11}$$

と

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{B}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = V \sum_{\mu,\nu,\boldsymbol{k}} k^2 \Big[& \left(A^\mu_{\boldsymbol{k}} A^\nu_{-\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_{-\boldsymbol{k}})t} + (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* (A^\nu_{-\boldsymbol{k}})^* \mathrm{e}^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_{-\boldsymbol{k}})t} \right) \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{e}_\nu(-\boldsymbol{k}) \\ & +2 (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* A^\mu_{\boldsymbol{k}} \Big]\end{aligned} \tag{A.12}$$

より、分散関係 $\omega(\boldsymbol{k}) = ck$ を用いれば

$$H = \int \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \right) = \sum_{\mu, \boldsymbol{k}} 2\varepsilon_0 \omega(\boldsymbol{k})^2 V (A^\mu_{\boldsymbol{k}})^* A^\mu_{\boldsymbol{k}} \tag{A.13}$$

と求まる。一般化座標 $Q^\mu_{\boldsymbol{k}}$ と一般化運動量 $P^\mu_{\boldsymbol{k}}$ を

$$Q^\mu_{\boldsymbol{k}} = 2\sqrt{\varepsilon_0 V}\,\Re(A^\mu_{\boldsymbol{k}}) \tag{A.14}$$

$$P^\mu_{\boldsymbol{k}} = 2\omega_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\varepsilon_0 V}\,\Im(A^\mu_{\boldsymbol{k}}) \tag{A.15}$$

で定義すれば、

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \boldsymbol{k}} \left[(P^\mu_{\boldsymbol{k}})^2 + \omega^2_{\boldsymbol{k}} (Q^\mu_{\boldsymbol{k}})^2 \right] \tag{A.16}$$

となり調和振動子のハミルトニアンと一致する。よって、以下の交換関係

$$\left[\hat{Q}^{\mu}_{\boldsymbol{k}}, \hat{P}^{\nu}_{\boldsymbol{k'}}\right] = i\hbar\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}}\delta_{\mu\nu} \tag{A.17}$$

(A.18)

を課し、量子化した電磁場を考えることができる：

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\boldsymbol{k}}\left[(\hat{P}^{\mu}_{\boldsymbol{k}})^2 + \omega^2_{\boldsymbol{k}}(\hat{Q}^{\mu}_{\boldsymbol{k}})^2\right] \tag{A.19}$$

消滅演算子を

$$\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\hbar}}\hat{Q}^{\mu}_{\boldsymbol{k}} + i\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}}\hat{P}^{\mu}_{\boldsymbol{k}} \tag{A.20}$$

で定義すれば、

$$\hat{A}^{\mu}_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\boldsymbol{k}}V}}\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}} \tag{A.21}$$

と表せるので、量子化された電場と磁束密度の表式は、生成演算子 $(\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}})^{\dagger}$ を用いて

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\mu,\boldsymbol{k}} i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\varepsilon_0 V}}\left(\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} - (\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}})^{\dagger}\mathrm{e}^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right)\boldsymbol{e}_{\mu}(\boldsymbol{k}) \tag{A.22}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\mu,\boldsymbol{k}} i\sqrt{\frac{\mu_0\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2V}}\left(\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} - (\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}})^{\dagger}\mathrm{e}^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right)\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{e}_{\mu}(\boldsymbol{k}) \tag{A.23}$$

である。生成・消滅演算子に対する交換関係は

$$\left[\hat{a}^{\mu}_{\boldsymbol{k}}, (\hat{a}^{\nu}_{\boldsymbol{k'}})^{\dagger}\right] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k'}}\delta_{\mu\nu} \tag{A.24}$$

が非ゼロであり、他は 0 である。

A.2　位相直交分解

まず、量子化された強度の期待値と古典的な強度の関係を考える。特定の直線偏光を持った角周波数 ω_0 の電磁場のみが $n(\neq 0)$ 光子状態 $|n\rangle$ を取っているとする[*1]。すなわち、量子化された電場は

$$\hat{E}(\boldsymbol{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 V}}\left(\hat{a}\mathrm{e}^{-i(\omega_0 t-\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r})} - \hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{i(\omega_0 t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right) \tag{A.25}$$

であり、強度の期待値 P_E は

$$P_E = 2\int\frac{\epsilon_0}{2}\langle n|\,\hat{E}^{\dagger}\hat{E}\,|n\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = n\hbar\omega_0 \tag{A.26}$$

[*1] 実際のレーザーの量子状態は、補遺 A.4 で述べる Coherent 状態だと考えることができる。

と求まる。3 章で用いている強度の定義 $P_E = |\boldsymbol{E}|^2\hbar\omega_0/2$ と比較すれば、古典的な電場の大きさの 2 乗 $|\boldsymbol{E}|^2$ が量子的な光子数の 2 倍に対応していることが分かる。

量子化した電磁場に対する位相直交分解を行う。z 軸方向に伝搬する自由空間中 $(l \to \infty)$ の電場を考える。量子化された電場 (A.22) の波数に対する足し合わせを周波数に対する積分に書き換えると、

$$\hat{E}(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0 c\mathcal{A}}} \left(\hat{a}_\omega \mathrm{e}^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger_\omega \mathrm{e}^{i\omega t}\right) \mathrm{d}\omega \tag{A.27}$$

となる。ここで、$\sum_k \to 1/(2\pi c/l)\int \mathrm{d}\omega$、$i\sqrt{2\pi c/l}\hat{a}_k \exp(i\omega z/c) \to \hat{a}_\omega$ と変換した。$V/l \to \mathcal{A}$ は実効的なビームの断面積を表す。交換関係は、$\delta_{kk'} \to 2\pi c/l \times 2\pi\delta(\omega - \omega')$ と変換されることに伴って

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}^\dagger_{\omega'}] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \tag{A.28}$$

が非ゼロであり、他は 0 である。

角周波数 Ω の重力波により、角周波数 ω_0 のキャリア光から角周波数 $\omega_0 + \Omega$ と $\omega_0 - \Omega$ のサイドバンドが発生することを考えると、信号雑音比に寄与する量子揺らぎはこの 2 つのサイドバンド周波数の生成・消滅演算子で構成される電場揺らぎを考えれば良い。よって、真空状態に対する量子化された電場は、角周波数 Ω に対する積分で表すことができる：

$$\hat{E}(t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c\mathcal{A}}} \int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}(\hat{a}_+ \mathrm{e}^{-i\Omega t} + \hat{a}_- \mathrm{e}^{i\Omega t}) + \mathrm{e}^{i\omega_0 t}(\hat{a}^\dagger_+ \mathrm{e}^{i\Omega t} + \hat{a}^\dagger_- \mathrm{e}^{-i\Omega t})\right] \mathrm{d}\Omega \tag{A.29}$$

ここで、$\Omega \ll \omega_0$ であることを用いた。$\hat{a}_+ = \hat{a}_{\omega_0+\Omega}$ はアッパーサイドバンドに対する消滅演算子であり、$\hat{a}_- = \hat{a}_{\omega_0-\Omega}$ はロウワーサイドバンドに対する消滅演算子である。交換関係は

$$\left[\hat{a}_+, \hat{a}^\dagger_{+'}\right] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega'), \qquad \left[\hat{a}_-, \hat{a}^\dagger_{-'}\right] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \tag{A.30}$$

が非ゼロであり、他は 0 である。さらに、

$$\hat{a}_1(\Omega) = \frac{\hat{a}_+ + \hat{a}^\dagger_-}{\sqrt{2}} \tag{A.31}$$

$$\hat{a}_2(\Omega) = \frac{\hat{a}_+ - \hat{a}^\dagger_-}{\sqrt{2}i} \tag{A.32}$$

を定義すると、これらが量子化された amplitude quadrature と phase quadrature であることが分かる：

$$\hat{E}(t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 c\mathcal{A}}} \left[\hat{a}_1(t)\cos(\omega_0 t) + \hat{a}_2(t)\sin(\omega_0 t)\right] \tag{A.33}$$

ここで、

$$\hat{a}_j(t) = \int_0^\infty \left(\hat{a}_j(\Omega)\mathrm{e}^{-i\Omega t} + \hat{a}_j(\Omega)^\dagger \mathrm{e}^{i\Omega t}\right)\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \quad (j=1,2) \tag{A.34}$$

としており、$\hat{a}_j(-\Omega) = \hat{a}_j^\dagger(\Omega)$ であることから、これは各 quadrature に対する Fourier 変換 (3.7) と対応していることが分かる。交換関係は

$$\left[\hat{a}_1(\Omega), \hat{a}_2^\dagger(\Omega')\right] = -\left[\hat{a}_2(\Omega), \hat{a}_1^\dagger(\Omega')\right] = i2\pi\delta(\Omega-\Omega') \tag{A.35}$$

が非ゼロであり、他は 0 である。

A.3　パワースペクトル密度

重力波信号と量子雑音の信号雑音比に対するパワースペクトル密度の求め方を考える。状態 $|\mathrm{in}\rangle$ の揺らぎが干渉計に入射し、出力として信号と入射揺らぎに起因する雑音の和が得られ、信号雑音比を表す演算子が $\hat{h}_n(\Omega)$ と求まったとする。パワースペクトル密度の定義 (2.9) から、感度の片側スペクトル密度 $S_h(f)$ は

$$\frac{1}{2}\langle\mathrm{in}|\left(h_n(\Omega)h_n^\dagger(\Omega') + h_n^\dagger(\Omega')h_n(\Omega)\right)|\mathrm{in}\rangle = \frac{1}{2}2\pi\delta(\Omega-\Omega')S_h(f) \tag{A.36}$$

と表すことができる[*2]。干渉計に入射する状態が、任意の周波数に対する消滅演算子と作用させると 0 となる coherent 状態であったとする。これを真空状態 $|0\rangle$ と表すと、交換関係 (A.30)、(A.35) より

$$\frac{1}{2}\langle 0|\left(\hat{a}_j\hat{a}_{k'}^\dagger + \hat{a}_{k'}^\dagger\hat{a}_j\right)|0\rangle = \frac{1}{2}2\pi\delta(\Omega-\Omega')\delta_{jk} \tag{A.37}$$

となる。よって、$h_n(\Omega) = \eta_1\hat{a}_1 + \eta_2\hat{a}_2$ と表せるときの量子雑音による感度は

$$S_h(f) = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 \tag{A.38}$$

と求められる。

A.4　Coherent 状態

レーザー光の量子状態として、完全なコヒーレンスを持ち、最小不確定性状態を取るような状態である coherent 状態を考えることができる。単一の周波数を持った電場が z 軸方向に伝番しているとする：

$$\hat{E}_\mathrm{s}(z,t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 V}}\left(\hat{a}\mathrm{e}^{-i(\omega_0 t - kz)} - \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{i(\omega_0 t - kz)}\right) \tag{A.39}$$

[*2] パワースペクトル密度は様々な定義をすることができるが、アンサンブル平均を用いた定義 (A.36) の方が一般的である。

シングルモードに対する coherent 状態 $|\alpha\rangle$ は、変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を用いて

$$|\alpha\rangle := \hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})|0\rangle \tag{A.40}$$

で定義される。定義より、$|\alpha\rangle$ は消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態である：

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{A.41}$$

また、$|n\rangle$ で展開すると

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{A.42}$$

と表せる。

$\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{i\theta_\alpha}$ とすると、coherent 状態における電場 (A.39) の期待値は

$$\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 V}}|\alpha|\sin(\omega t - kz - \theta_\alpha) \tag{A.43}$$

となり、古典的な電場と対応する。また、電場の揺らぎは

$$\Delta E = \sqrt{\langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \tag{A.44}$$

であり、真空場の揺らぎと対応する。

位相直交分解として、

$$\hat{x}_1 = \frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}, \quad \hat{x}_2 = \frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{2i} \tag{A.45}$$

を定義すると、各 quadrature の揺らぎは

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}, \quad \Delta x_2 = \frac{1}{2} \tag{A.46}$$

と計算できる。一方で、交換関係 $[x_1, x_2] = i/2$ から求まる不確定性関係は $\Delta x_1 \Delta x_2 \geq 1/4$ なので、α の値に関わらず、coherent 状態は直交位相振幅に対する最小不確定性状態であることが分かる。

連続モードに対する coherent 状態を考える場合には、変位演算子を

$$D'(\alpha) := \exp\left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\left(\alpha\hat{a}_\omega^\dagger - \alpha^*\hat{a}_\omega\right)\right] \tag{A.47}$$

と定義し直せばよい [76]。$\hat{a}_\omega$ を $D'(\alpha)$ で平行移動し、$\alpha = A_0/\sqrt{2} \times 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ として coherent 状態の電場を構成すると、古典的な電場とその揺らぎの和として表すことができる：

$$\hat{E}_\mathrm{c}(t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 c\mathcal{A}}}\left[(A_0 + a_1(t))\cos\omega_0 t + a_2(t)\sin\omega_0 t\right] \tag{A.48}$$

古典的な電場の強度 P_A は $P_A = |A_0|^2\hbar\omega_0/2$ と求まる。

A.5　Squeezed 状態

Squeezed 状態は、最小不確定性状態を保ったまま片方の quadrature の揺らぎをもう片方より小さくした状態である。シングルモードに対する squeezed 状態 $|\zeta,\alpha\rangle$ は

$$|\zeta,\alpha\rangle := \hat{S}(\zeta)\,|\alpha\rangle = \exp((\zeta^*\hat{a}^2 - \zeta(\hat{a}^\dagger)^2)/2)\,|\alpha\rangle \tag{A.49}$$

で定義される。Coherent 状態 $|\alpha\rangle$ から squeezed 状態 $|\zeta,\alpha\rangle$ への変換は、消滅演算子 $\hat{a}$ が $\hat{a}$ を $\hat{S}(\zeta)$ で平行移動した演算子 $\hat{b}$ へ変換されることと同等である：

$$\hat{a} \to \hat{b} := \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) \tag{A.50}$$

$$\tag{A.51}$$

位相直交分解として、

$$\hat{y}_1 = \frac{\hat{b}+\hat{b}^\dagger}{2}, \quad \hat{y}_2 = \frac{\hat{b}-\hat{b}^\dagger}{2i} \tag{A.52}$$

を定義する。$\zeta = -u\mathrm{e}^{2i\theta}$ と置くと、θ 方向の quadrature $\hat{a}_\theta = \hat{x}_1\cos\theta + \hat{x}_2\sin\theta$ は

$$\hat{b}_\theta = \mathrm{e}^u\hat{a}_\theta, \quad \hat{b}_{\theta+\pi/2} = \mathrm{e}^{-u}\hat{a}_{\theta+\pi/2} \tag{A.53}$$

と変換される。ここで、$\hat{b}_\theta = \hat{y}_1\cos\theta + \hat{y}_2\sin\theta$ である。すなわち、各 quadrature の揺らぎは

$$\Delta b_\theta = \frac{1}{2}\mathrm{e}^u, \quad \Delta b_{\theta+\pi/2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u} \tag{A.54}$$

であり、最小不確定性状態を保ったまま各 quadrature の不確定性が変更されていることが分かる。特に、$\theta = 0$ の場合を phase squeezed 状態、$\theta = \pi/2$ の場合を amplitude squeezed 状態と呼ぶ。

連続モードに対する squeezed 状態を考える場合には、squeeze 演算子を

$$\hat{S}'(\zeta) \equiv \exp\left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\left(\zeta^*\hat{a}_+\hat{a}_- - \zeta\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger\right)\right] \tag{A.55}$$

と定義し直せばよい [76]。Amplitude quadrature (A.31) と phase quadrature (A.32) は

$$\hat{b}_1 = (\cosh u + \sinh u\cos 2\theta)\hat{a}_1 + (\sinh u\sin 2\theta)\hat{a}_2 \tag{A.56}$$

$$\hat{b}_2 = (\sinh u\sin 2\theta)\hat{a}_1 + (\cosh u - \sinh u\cos 2\theta)\hat{a}_2 \tag{A.57}$$

すなわち

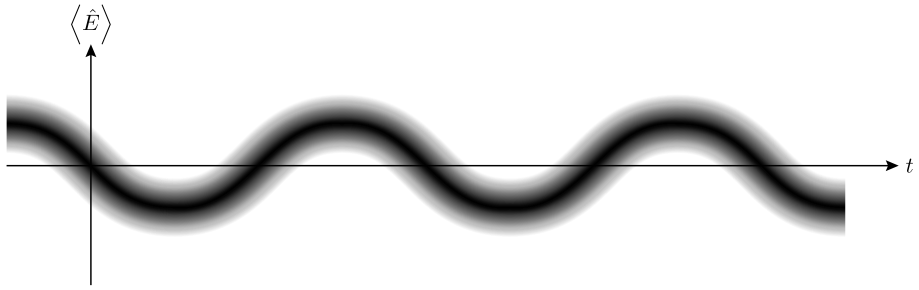
$$\boldsymbol{b} = S(u,\theta)\boldsymbol{a} \tag{A.58}$$

と変換される。ここで、

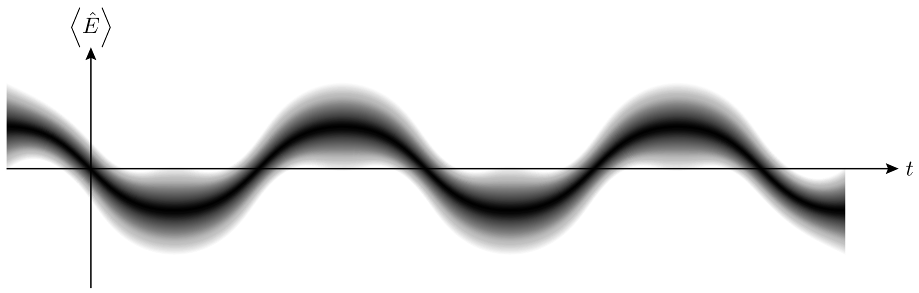
$$S(u,\theta) = \begin{pmatrix} \cosh u + \sinh u \cos 2\theta & \sinh u \sin 2\theta \\ \sinh u \sin 2\theta & \cosh u - \sinh u \cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{A.59}$$

は squeezing 行列である。$s = \exp(u)$ は squeezing factor、θ は squeezing angle と呼ばれる。

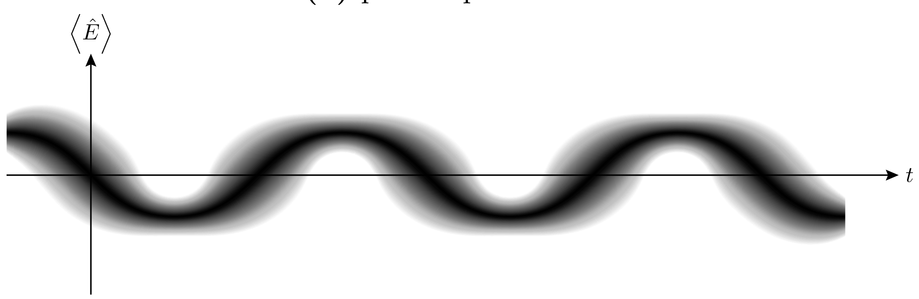
図 A.1 に coherent 状態と squeezed 状態の電場の時間変化と揺らぎの大きさのイメージを、図 A.2 に coherent 状態の真空場と squeezed 状態の真空場のイメージを示した [77]。



(a) coherent 状態

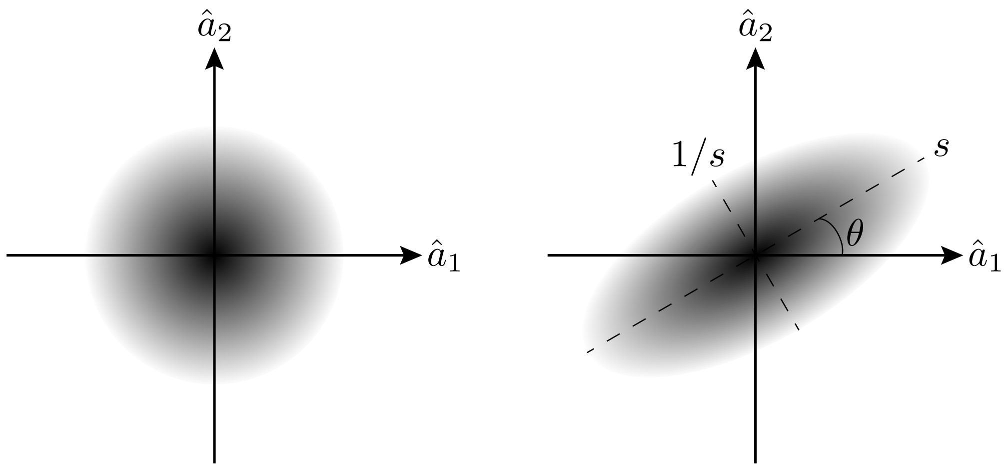


(b) phase squeezed 状態



(c) amplitude squeezed 状態

図 **A.1:** 電場の時間変化のイメージ図



(a) coherent 状態 **(b)** squeezed 状態

図 **A.2:** 真空場のイメージ図

補遺 B

非線形光学効果

通常の光学では、光電場に比例した分極が誘起されることで、光と物質の相互作用が起こると考える。しかし、光の強度が非常に強い場合には、結晶分極の非線形性が無視できなくなる。ここでは 2 次の非線形光学効果について考える。分極 $P(t)$ が、電気感受率 $\chi^{(1)}$ と 2 次の非線形感受率 $\chi^{(2)}$ を用いて

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E(t) + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \left[E(t)\right]^2 + \cdots \tag{B.1}$$

と表せるとき、角周波数 ω_0 の光 $E(t) = A\cos\omega_0 t$ が非線形光学媒質に入射すると、次のように表される 2 次の非線形分極が誘起される：

$$P^{(2)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} A^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \chi^{(2)} A^2 \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \chi^{(2)} A^2 \tag{B.2}$$

この分極成分からは角周波数 $\omega_3 = 2\omega_0$ を持った光が放出されることになる。この変換過程を第二次高調波発生 (Second Harmonic Generation : SHG) と呼ぶ。これは、エネルギー $\hbar\omega_0$ を持った 2 つの光子から、エネルギー $\hbar\omega_3$ を持った 1 つの光子が生成されることに相当する。また、角周波数 ω_3 の光の強度が非常に強い場合にはこの逆変換が起こり、エネルギー $\hbar\omega_3$ を持った 1 つの光子から、エネルギー $\hbar\omega_1$ と $\hbar\omega_2$ を持った 2 つの光子が生成される。これを光パラメトリック過程 (Optical Parametric Process) と呼ぶ。この過程では、エネルギー保存則に対応して、$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ が満たされる。本節では、実験で使用したこの 2 つの非線形光学効果の古典的な理論について述べる。

B.1　3 光波混合の基礎

B.1.1　結合波方程式

非線形光学結晶中の Maxwell 方程式は、通常の結晶の場合と同様に

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{B.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{B.4}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})}{\partial t} \tag{B.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{B.6}$$

と表される。ここで、非線形光学結晶中に電流や自由電荷が存在せず、結晶中で電磁場の吸収が起こらないとした。電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$ と電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ の関係は、2 次の非線形分極 $\boldsymbol{P}^{(2)}(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{P}^{(2)}(\boldsymbol{r}, t) \tag{B.7}$$

と表せる。ここで、ε は比誘電率であり、結晶の屈折率 n と $\varepsilon = n^2$ の関係がある。一方で、光の周波数領域では磁化の非線形性は無視することができるので、磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ と磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ の関係は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) \tag{B.8}$$

と表せる。式 (B.3)-(B.8) を用いると、定常状態における角周波数 ω の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cos \omega t$ に対する波動方程式が求まる：

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} \boldsymbol{P}^{(2)}(\boldsymbol{r}) \tag{B.9}$$

電場が z 軸方向に進行し、複素振幅 $F(z)$ が非線形結晶中で変化するとする：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u} F(z) \mathrm{e}^{ikz} \tag{B.10}$$

ここで、$k = \omega n / c$ は波数である。$\boldsymbol{u}$ は偏光方向の単位ベクトルを表し、簡単のために z 軸に直交するとする。すなわち、電場の発散は 0 である。また、複素振幅 $F(z)$ は z に対してゆっくりと変化する関数であり、z の 2 階微分 $\mathrm{d}^2 F / \mathrm{d}z^2$ は非常に小さいと見なす。これらを用いて式 (B.9) を整理すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F(z) = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c n} \boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{P}^{(2)}(z) \tag{B.11}$$

となる。

角周波数 ω_1、ω_2、$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ を持った 3 光波が非線形光学結晶中に存在する場合を考える。式 (B.2) と同様に、角周波数 ω_3 を持った電場に対する非線形分極 $\boldsymbol{P}_3^{(2)}(z)$ は角周波数 ω_1 と角周波数 ω_2 を持った電場によって励起され、この複素振幅 F_1、F_2 と波数 k_1、k_2 を用いて

$$\boldsymbol{P}_3^{(2)}(z) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}_3^{(2)} F_1 F_2 \mathrm{e}^{i(k_1+k_2)z} \tag{B.12}$$

と表せる。$\boldsymbol{\chi}_3^{(2)}$ はこのときの各電場の偏光に対応した非線形感受率ベクトルである。他の角周波数に対する非線形分極も全く同様に考えることができる。これらを式 (B.11) に代入すると、非線形感受率の全置換対称性 [78] から、同一の有効非線形感受率 $\chi^{(2)}$ を用いて

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}z} = \dfrac{i\omega_1\chi^{(2)}}{2cn_1} F_2^* F_3 \mathrm{e}^{i\Delta kz} \\ \dfrac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}z} = \dfrac{i\omega_2\chi^{(2)}}{2cn_2} F_1^* F_3 \mathrm{e}^{i\Delta kz} \\ \dfrac{\mathrm{d}F_3}{\mathrm{d}z} = \dfrac{i\omega_3\chi^{(2)}}{2cn_3} F_1 F_2 \mathrm{e}^{-i\Delta kz} \end{cases} \tag{B.13}$$

という関係が導かれる。この連立微分方程式は結合波方程式と呼ばれ、これを解くことで 3 光波混合に対する複素振幅の変化を求めることができる。ここでは $\chi^{(2)}$ は実数であるとしており、$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$ は位相不整合を表す。

B.1.2　疑似位相整合

位相 Δkl(l は非線形光学結晶の長さ) が π 程度になると、生成された電場が弱めあうようになり、非線形光学効果は抑圧されてしまう。このため、非線形光学効果を最大にするには位相整合条件 $\Delta k = 0$ を満たす必要がある。第二次高調波発生や縮退光パラメトリック増幅を行う場合には、この条件は基本波と 2 倍波の屈折率が等しくなるときに満たされるが、結晶の屈折率には必ず分散があるために一般にこの条件は満たされない。位相整合条件を満たすための手法として複屈折や導波路を用いる方法があるが、本実験では周期分極反転を利用した疑似位相整合を行った。

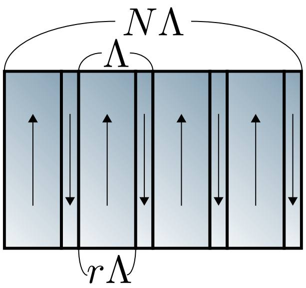


図 **B.1:** 周期分極反転

非線形光学効果が抑圧され始める長さ $l_\mathrm{c} = \pi/\Delta k$ はコヒーレンス長と呼ばれる。疑似位相整合は、図 B.1 のように $2l_\mathrm{c}$ の整数倍の周期 Λ で非線形感受率を変調する手法であ

る。非線形光学結晶中を l_c だけ伝搬すると、非線形光学効果によって生成された光波の位相が逆転するので、結晶軸の方向を反転させるなどして非線形感受率の符号をこの周期で逆転させると、位相整合条件を疑似的に満たすことができるのである。r はデューティー比である。疑似位相整合条件は

$$\Delta k = \pm mK \quad (m\ \text{は整数}) \tag{B.14}$$

で与えられる。ここで、$K = 2\pi/\Lambda$ は周期分極反転の波数である。

疑似位相整合を行うことで、通常の位相整合が行えない材質や偏光の組み合わせを用いることが可能である。例えば、$\mathrm{LiNbO_3}$ (Lithium Niobate : LN) の第二次高調波発生に対する非線形感受率は、基本波と高調波の偏光がどちらも c 軸に平行であるとき (異常光線) に最大となるが、この条件では複屈折を用いた角度位相整合を行うことができない。本実験では周期分極反転させた $\mathrm{LiNbO_3}$ (Periodically Poled Lithium Niobate : PPLN) に異常光線の基本波を入射することで、異常光線の高調波を得た。通常の位相整合条件を満たした場合と疑似位相整合条件を満たした場合の変換効率の比較は次節で行う。

B.2　第二次高調波発生

第二次高調波発生 (SHG) は角周波数 ω_0 の基本波から角周波数 $\omega_3 = 2\omega_0$ の高調波が生成される過程である。それぞれに対応する複素振幅を F_0、F_3 とする。

B.2.1　変換効率が低い場合

まずは通常の位相整合を行う場合を考える。非線形光学結晶で吸収が無い場合、結合波方程式は

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}z} = \frac{i\omega_0\chi^{(2)}}{2cn_0}F_0^*F_3\mathrm{e}^{i\Delta kz} \\ \frac{\mathrm{d}F_3}{\mathrm{d}z} = \frac{i\omega_0\chi^{(2)}}{cn_3}F_0^2\mathrm{e}^{-i\Delta kz} \end{cases} \tag{B.15}$$

となる。ここで、$\Delta k = k_3 - 2k_0$ である。変換効率が低く F_0 が定数と見なせる場合、結晶端での複素振幅は

$$F_3(l) = \frac{\omega_0\chi^{(2)}F_0^2}{cn_3\Delta k}\left(1 - \mathrm{e}^{-i\Delta kl}\right) \tag{B.16}$$

となる。2 倍波は入射させないため、$F_3(0) = 0$ とした。強度 I は複素振幅 F を用いて $I = n|F|^2/(2\mu_0 c)$ と表せるので、得られる 2 倍波の強度 I_3 は

$$I_3 = 8\pi^2\mu_0 c\left(\frac{(\chi^{(2)})^2l^2}{n_0^2n_3\lambda_0}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta kl}{2}\right)I_0^2 \tag{B.17}$$

である。ここで、$\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ である。図 B.2 に位相不整合度に対する規格化された SHG 効率を示す。SHG により得られる 2 倍波の強度は基本波の強度の 2 乗に比例し、位相不整合度に伴って周期的に変動することが分かる。

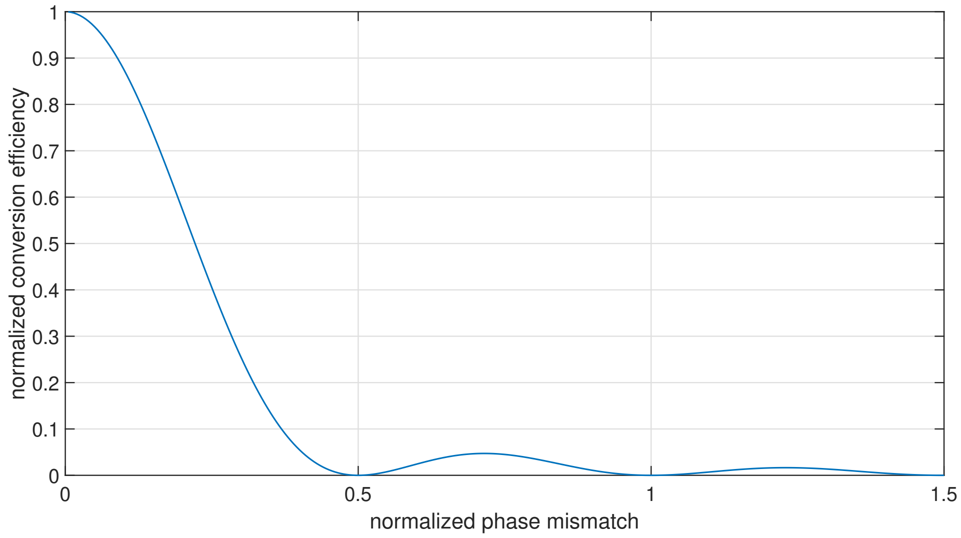


図 **B.2:** 通常の位相不整合度と SHG 効率

B.2.2　周期分極反転を用いた場合

周期 Λ、デューティー比 r の周期分極反転結晶を SHG に用いることを考える。結晶の長さは周期の N 倍であるとする。有効非線形感受率は $(n-1)\Lambda \leq z < (n+r-1)\Lambda$ $(n = 1, 2, ..., N)$ の範囲で $\chi^{(2)}$、$(n+r-1)\Lambda \leq zn\Lambda$ の範囲で $-\chi^{(2)}$ である。結合波方程式 (B.15) より、この場合の結晶端での複素振幅は

$$F_3'(l) = \frac{\omega_0 \chi^{(2)} F_0^2}{cn_3} \frac{(1 + \mathrm{e}^{-i\Delta k\Lambda} - 2\mathrm{e}^{-i\Delta kr\Lambda})(1 - \mathrm{e}^{-iN\Delta k\Lambda})}{\Delta k(1 - \mathrm{e}^{-i\Delta k\Lambda})} \tag{B.18}$$

と求まる。規格化された SHG 効率を図 B.3 に示す。このときの 2 倍波の強度を I_3' とすると、疑似位相整合条件 $\Delta k\Lambda = 2m\pi$ が満たされているとき、通常の位相整合条件が満たされたときの 2 倍波の強度 I_3 と比較して

$$\frac{I_3'}{I_3} = \frac{4N^2 \sin^2(mr\pi)}{m^2\pi^2} \tag{B.19}$$

である。

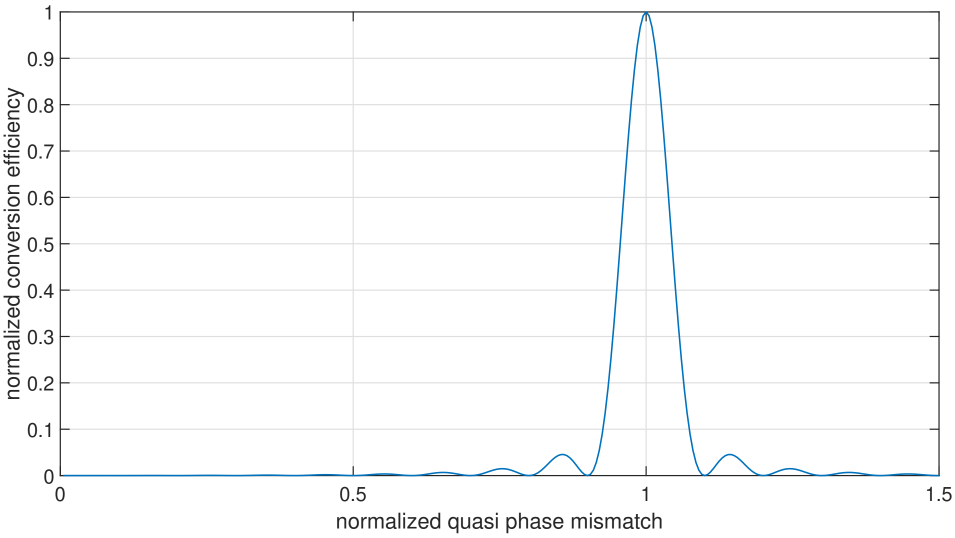


図 **B.3:** 疑似位相不整合度と SHG 効率
$r=0.5$、$N=10$ とした。

B.2.3　変換効率が高い場合

変換効率が高い場合には、エネルギー保存則

$$n_0|F_0(z)|^2+n_3|F_3(z)|^2=n_0|F_0(0)|^2 \tag{B.20}$$

を用いて結合波方程式を解けばよい。位相整合条件が満たされているとき、式 (B.15) の第二式を z で微分することから

$$\frac{\mathrm{d}^2F_3}{\mathrm{d}z^2}+\frac{2\omega_0(\chi^{(2)})^2}{c^2n_0^2n_3}(n_0|F_0(0)|^2-n_3|F_3|^2)F_3=0 \tag{B.21}$$

が導かれる。位相項は無視し、F_3 を実数として解く。変数

$$\eta^2=\frac{\omega_0^2(\chi^{(2)})^2|F_0(0)|^2}{c^2n_0n_3} \tag{B.22}$$

$$x=\eta z \tag{B.23}$$

$$y=\sqrt{\frac{n_3}{n_0}}\frac{F_3}{|F_0(0)|} \tag{B.24}$$

を用いて無次元化すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2(1-y^2)y=0 \tag{B.25}$$

となり、解は $y=\tanh x$ である。よって、2 倍波の強度 $I_3(z)$ は

$$I_3(z)=I_0(0)\tanh^2(\eta z) \tag{B.26}$$

と求まる。高効率 SHG で基本波が受ける影響は、振幅光学ロス $\tanh(\eta l)$ の光学素子でエネルギーが失われる過程と同等であると考えることができる。

B.3　光パラメトリック過程

光パラメトリック過程は、角周波数 ω_3 の光から $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ を満たす角周波数 ω_1 と ω_2 の光を発生させる過程である。特に、非線形光学結晶に角周波数 ω_3 のポンプ光と ω_1 のシード光を同時に入射し、ω_1 の光を増幅する過程を光パラメトリック増幅 (Optical Parametric Amplification：OPA) と呼ぶ。また、共振器内に設置した非線形光学結晶に角周波数 ω_3 のポンプ光を入射し、共振器を発振させることで角周波数 ω_1 のシグナル光と ω_2 のアイドラ光を発生させる装置を光パラメトリック発振器 (Optical Parametric Oscillator：OPO) と呼ぶ。

B.3.1　光パラメトリック増幅

結合波方程式は、$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$ として

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}z} = \frac{i\omega_1\chi^{(2)}}{2cn_1} F_2^* F_3 \mathrm{e}^{i\Delta kz} \\ \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}z} = \frac{i\omega_2\chi^{(2)}}{2cn_2} F_1^* F_3 \mathrm{e}^{i\Delta kz} \\ \frac{\mathrm{d}F_3}{\mathrm{d}z} = \frac{i\omega_3\chi^{(2)}}{2cn_3} F_1 F_2 \mathrm{e}^{-i\Delta kz} \end{cases} \tag{B.27}$$

である。ポンプ光より十分弱いシード光を入射させ、ポンプ光の減衰が無視できる程度に変換効率が低いとすると[*1]

$$\frac{\mathrm{d}^2F_1}{\mathrm{d}z^2} - i\Delta k\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}z} - g_0^2 F_1 = 0 \tag{B.28}$$

$$g_0^2 = \frac{\omega_1\omega_2(\chi^{(2)})^2}{4c^2 n_1 n_2}|F_3|^2 \tag{B.29}$$

が導ける。$|\Delta k| < 2g_0$ であれば、解は指数関数的に増大するようになる。位相整合条件 $\Delta k = 0$ が満たされているとき[*2]、長さ l の結晶の終端では

$$F_1(l) = F_1(0)\cosh u + i\mathrm{e}^{i\phi_3}\left(\frac{n_2\omega_1}{n_1\omega_2}\right)^{1/2} F_2^*(0)\sinh u \tag{B.30}$$

$$F_2^*(l) = -i\mathrm{e}^{-i\phi_3}\left(\frac{n_1\omega_2}{n_2\omega_1}\right)^{1/2} F_1(0)\sinh u + F_2^*(0)\cosh u \tag{B.31}$$

---

*1 ポンプ光とシード光が同程度の強度である場合には結合波方程式を容易に解くことはできない。3 光波混合の一般解は Jacobi の楕円関数で表される [79]。

*2 逆に言えばシグナル光に含まれている位相整合条件が満たされた周波数の光のみが増幅される。

となる。ここで、ϕ_3 はポンプ光の初期位相であり、$u = g_0 l$ と置いた。特に、シグナル光とアイドラ光の周波数が等しい場合 ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$)、OPA の増幅率は

$$\frac{I_0(l)}{I_0(0)} = \cosh 2u + \sinh 2u \cos 2\theta \tag{B.32}$$

となる。ここで、$2\theta = \phi_3 - 2\phi_1 + \pi/2$ と置いた。

OPA は真空場に対する squeezer としても用いることもできる。この場合には、$s = \exp(u)$ が squeezing factor、θ が squeezing angle に対応する。

B.3.2　光パラメトリック発振

共振器内で OPA を行うとき、1 周あたりに OPA により発生する電場が 1 周あたりに共振器から失われる電場を上回った場合には、共振器がレーザー発振を起こすようになる。このときには、シード光を全く入射させない場合でも、位相整合条件に対応したシグナル光とアイドラ光が共振器から出射する*3。

まずは発振の閾値を求める。完全なオーバーカップリング共振器を用い、入射鏡がシグナル光とアイドラ光のどちらに対しても同一の強度反射率 $R = \mathrm{e}^{-\mu l}$ を持つとする。u が発振の閾値 u_t になったとき、共振器を一周した電場が元の電場と一致するので

$$F_1(0) = \left[F_1(0) \cosh u_\mathrm{t} + i\mathrm{e}^{i\phi_3} \left(\frac{n_2\omega_1}{n_1\omega_2} \right)^{1/2} F_2^*(0) \sinh u_\mathrm{t} \right] \mathrm{e}^{-\mu l/2} \tag{B.33}$$

$$F_2^*(0) = \left[-i\mathrm{e}^{-i\phi_3} \left(\frac{n_1\omega_2}{n_2\omega_1} \right)^{1/2} F_1(0) \sinh u + F_2^*(0) \cosh u \right] \mathrm{e}^{-\mu l/2} \tag{B.34}$$

となる。複素振幅は有限であり、この連立斉次方程式の係数が作る行列の行列式は 0 になる。共振器のフィネスが十分高いとすると、閾値が満たすべき条件は $u_\mathrm{t} = \mu/2$ となる。

次に、定常状態での変換効率を考える。ポンプ光は共振器で共振せず、減衰分が全てシグナル光とアイドラ光に変換されるとする。共振器から出力されるシグナル光・アイドラ光の強度は共振器内強度より十分低いので、共振器内での電場の増幅は飽和しており、共振器内の複素振幅 F_1、F_2 は定数だと見なすことができる。結合波方程式 (B.27) より、ポンプ光の複素振幅の変化は

$$F_3(l) - F_3(0) = \frac{i\omega_3\chi^{(2)}}{2cn_3} F_1 F_2 l \tag{B.35}$$

と表せる。また、ポンプ光の光子数変化と共振器から取り出されるシグナル光・アイドラ

*3 共振器が OPO になっているとき、ポンプ光に無視できない減衰が存在するため、共振器一周当たりの OPA 過程を式 (B.30) と式 (B.31) で表すことはできない。

光の光子数は等しいので、

$$\frac{I_3(l) - I_3(0)}{\hbar\omega_3} = \mu l \frac{I_1}{\hbar\omega_1} = \mu l \frac{I_2}{\hbar\omega_2} \tag{B.36}$$

という関係が成り立つ。I_1 と I_2 はそれぞれ共振器内のシグナル光とアイドラ光の強度である。これらと閾値の条件から

$$\sqrt{I_3(0)} - \sqrt{I_3(l)} = \frac{I_3(0) - I_3(l)}{2\sqrt{I_{3\mathrm{t}}}} \tag{B.37}$$

である。ここで、$I_{3\mathrm{t}}$ は発振の閾値となるときのポンプ光強度である。よって、変換効率は

$$\frac{I_3(0) - I_3(l)}{I_3(0)} = 4\frac{\sqrt{\rho} - 1}{\rho} \tag{B.38}$$

となる。$\rho = I_3(0)/I_{3\mathrm{t}}$ とした。図 B.4 にポンプ光強度と変換効率の関係を示す。変換効率は $\rho = 4$ のときに 1 となる。

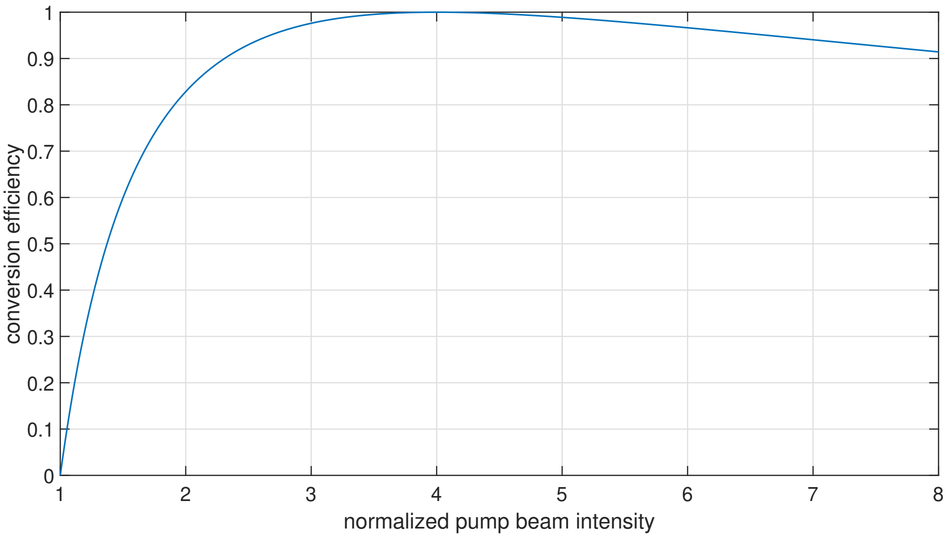


図 **B.4:** OPO の変換効率

補遺 C

サイドバンド冷却

サイドバンド冷却は、共振器オプトメカニクスとして最も利用されているものの 1 つである。巨視的な物体を量子基底状態まで冷却する際には、環境温度 T_{th} を持つ外界の熱浴との相互作用に起因する熱雑音が大きな問題となる。このような振動子で共振器を構成し、detune を負にしてアッパーサイドバンドを増幅させると、振動子のスペクトル密度を変化させることなく、すなわち揺動を加えることなく、大きな散逸を振動子に与えることができる。このときの熱的な振動によるフォノン数 n_{th} は

$$n_{\mathrm{th}} = \frac{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{eff}}}{\hbar \omega_{\mathrm{eff}}} \tag{C.1}$$

と表される [80]。ここで、ω_{eff} は光ばねによって変更された実効的な共振角周波数である。このとき、レーザー光は実質的に 0 K の熱浴として働き、系の実効的な温度 $T_{\mathrm{eff}} = (\gamma_{\mathrm{m}}/\gamma_{\mathrm{opt}}) T_{\mathrm{th}}$ を下げることができるようになる。

しかし、サイドバンド冷却を行うと輻射圧の量子的な揺らぎが振動子を揺らしてしまう効果が新たな問題として現れる。この手法による冷却限界は、量子輻射圧揺らぎから発生する輻射圧フォノンで決まることになる。ここでは、internal squeezing の応用例として、サイドバンド冷却系に組み込んだ場合に internal squeezing が輻射圧フォノン数に与える影響について調べる。

C.1　Fabry-Perot 共振器の場合

まずは、シンプルな Fabry-Perot 共振器に対する輻射圧フォノン数を求める。サイドバンド冷却に関する物理量は、共振器の Hamiltonian に対する Heisenberg 方程式を解くことから通常は求められるが [81]、ここでは two photon formalism による導出を行う。

Fabry-Perot 共振器に対する輻射圧揺らぎは 4.1.1 小節で考えた通りである。量子輻射

圧揺らぎ $\delta F_{\mathrm{qrp}}(\Omega)$ は、式 (4.1)、(4.4)、(4.5)、(4.6) より

$$\delta F_{\mathrm{qrp}} = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 \tag{C.2}$$

$$\eta_1 = \eta_0 \left[(\tfrac{1}{r} - \cos 2\phi) + \mathrm{e}^{2i\alpha}(r - \cos 2\phi) \right] \tag{C.3}$$

$$\eta_2 = \eta_0 (1 - \mathrm{e}^{2i\alpha}) \sin 2\phi \tag{C.4}$$

$$\eta_0 = \frac{4\hbar\omega_0}{rc} \frac{tA_0}{r + \frac{1}{r} - 2\cos 2\phi} \frac{t\mathrm{e}^{-i\alpha}}{r\mathrm{e}^{2i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-2i\alpha} - 2\cos 2\phi} \tag{C.5}$$

と表せる。量子輻射圧揺らぎの片側パワースペクトル密度 $S_{\mathrm{f,qrp}}(\Omega)$ を

$$\frac{1}{2} 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_{\mathrm{f,qrp}}(\Omega) = \frac{1}{2} \langle 0 | \left[\delta F_{\mathrm{qrp}}(\Omega) \delta F^{\dagger}_{\mathrm{qrp}}(\Omega') + \delta F^{\dagger}_{\mathrm{qrp}}(\Omega') \delta F_{\mathrm{qrp}}(\Omega) \right] | 0 \rangle \tag{C.6}$$

と定義すると、信号雑音比に対するパワースペクトル密度と同様に、

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{f,qrp}} &= |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 \\ &= \frac{8\hbar\omega_0 P_{\mathrm{in}} t^4}{r^2 c^2} \frac{1}{r + \frac{1}{r} - 2\cos 2\phi} \\ &\quad \times \frac{r + \frac{1}{r} - [\cos 2(\alpha - \phi) + \cos 2(\alpha + \phi)]}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 + 2(\cos 4\alpha + \cos 4\phi) - 2\left(r + \frac{1}{r}\right)[\cos 2(\alpha - \phi) + \cos 2(\alpha + \phi)]} \end{aligned} \tag{C.7}$$

と計算できる。近似すると、

$$S_{\mathrm{f,qrp}} = \frac{32\hbar\omega_0 \mathcal{F}^2 P_{\mathrm{in}}}{\pi^2 c^2} \frac{1}{1 + \delta^2} \frac{1 + \delta^2 + (\Omega/\gamma)^2}{(1 + \delta^2 - (\Omega/\gamma)^2)^2 + (2\Omega/\gamma)^2} \tag{C.8}$$

と求まる。

フォノン数は、零点振動を差し引いた規格化された振動子のエネルギーである。輻射圧フォノン数 n_{rp} は

$$n_{\mathrm{rp}} = \frac{m\omega_{\mathrm{eff}}}{\hbar} \langle x^2 \rangle_{\mathrm{rp}} - \frac{1}{2} \tag{C.9}$$

と表せる。平均二乗変位量 $\langle x^2 \rangle_{\mathrm{rp}}$ は、片側振幅スペクトル密度 $\sqrt{S_{\mathrm{f,qrp}}(\Omega)}$ を振動子の感受率 (4.27) にかけて二乗し積分すれば求まり、

$$\langle x^2 \rangle_{\mathrm{rp}} = \int_0^{\infty} \frac{S_{\mathrm{f,qrp}}(\Omega)}{|m(\omega_{\mathrm{eff}}^2 + 2i\gamma_{\mathrm{opt}}\Omega - \Omega^2)|^2} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \tag{C.10}$$

と表せる。γ_{opt} は光ばねの散逸である：

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathrm{opt}} &= \frac{1}{2m} \Im \left[\frac{K_{\mathrm{opt}}}{\Omega} \right]_{\Omega = \omega_{\mathrm{eff}}} \\ &= -\frac{8\omega_0 \mathcal{F}^2 P_{\mathrm{in}}}{m\pi^2 c^2} \frac{\delta}{1 + \delta^2} \frac{2/\gamma}{(1 + \delta^2 - (\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2)^2 + (2\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2} \end{aligned} \tag{C.11}$$

冷却が十分行われており、機械的な散逸は無視できるとしている。Q 値の高い振動子の感受率は共振周波数付近でのみ大きな値を持つので、式 (C.10) の積分が ω_{eff} 付近で支配的であるとすると、

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle_{\mathrm{rp}} &= S^{(2)}_{\mathrm{f,qrp}}(\omega_{\mathrm{eff}})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|m(\omega_{\mathrm{eff}}^2+2i\gamma_{\mathrm{opt}}\Omega-\Omega^2)|^2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\\ &= \frac{S^{(2)}_{\mathrm{f,qrp}}(\omega_{\mathrm{eff}})}{4m^2\omega_{\mathrm{eff}}^2\gamma_{\mathrm{opt}}}\end{aligned} \tag{C.12}$$

と計算できる。ここで、$S^{(2)}_{\mathrm{f,qrp}}(\Omega)=S_{\mathrm{f,qrp}}(\Omega)/2$ は両側パワースペクトル密度である[*1]。以上より、輻射圧フォノン数は

$$n_{\mathrm{rp}} = -\frac{1+(\delta+\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}{4\delta\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma} \tag{C.13}$$

と求まり、[81] の表式と一致する。これは $\delta=-\sqrt{1+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}$ のとき最小値を取り、

$$n_{\mathrm{rp}} \geq \left(\frac{\gamma}{2\omega_{\mathrm{eff}}}\right)^2\frac{2}{1+\sqrt{1+(\gamma/\omega_{\mathrm{eff}})^2}} \tag{C.14}$$

である。

オプトメカニカル共振器に対して、$\gamma \lesssim \omega_{\mathrm{m}}$ である場合を good cavity、$\gamma \gtrsim \omega_{\mathrm{m}}$ である場合を bad cavity と呼ぶ。機械的な共振周波数が十分高い場合 ($\omega_{\mathrm{eff}} \simeq \omega_{\mathrm{m}}$)、共振器が bad cavity だと $n_{\mathrm{rp}} \gg 1$ であり、輻射圧の量子的な揺らぎによって振動子が基底状態に到達できないことが分かる。サイドバンド冷却で振動子を基底状態まで冷却するためには、機械的な共振周波数の高い振動子をフィネスの高い共振器内で用いる必要がある。また、共振器が good cavity である場合にも量子輻射圧揺らぎによって定まる冷却の限界が存在することが分かる。この限界は Quantum Backaction Limit (QBL) などと呼ばれ、基底状態[*2]で QBL に到達することは巨視的な物体に量子的な性質を持たせるための条件の 1 つであると見なされている。実験的に基底状態に到達した例はいくつかある [83–85]。

C.2 Signal Recycling 共振器内で Internal Squeezing を行った場合

本論で考えたように、internal squeezing として最も基本的な構成と言える SR 共振器内で squeezing を行う場合について考える。振動子に十分な散逸を与えるために、構成は

[*1] 厳密には輻射圧揺らぎの両側パワースペクトル密度は $\Omega=0$ の周りで非対称であり、共振器の感受率から定義する必要がある [82]。

[*2] オプトメカニクスの分野では、n_{th} や n_{rp} を含めた実効的なフォノン占有数が 1 より小さい状態を基底状態と呼ぶ。

DR 干渉計とする。記号の定義は図 3.30 の通りであり、図 4.6 と同様に懸架鏡鏡に当たる電場を $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{k}$、懸架鏡鏡で反射される電場を $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{l}$ とする。また、PRM から BS までの位相遅れを α_{P} とする。

共振器内部で OPA を行う場合でも、前節と同様の計算から輻射圧フォノン数を求めることができる。腕内強度は

$$\boldsymbol{K}=\frac{t_{\mathrm{P}}}{\sqrt{2}(1-r_{\mathrm{P}})}\boldsymbol{A}\simeq\sqrt{\frac{\mathcal{F}_{\mathrm{P}}}{\pi}}\boldsymbol{A} \tag{C.15}$$

となり、電場の揺らぎは

$$\boldsymbol{k}=\mathbb{G}\boldsymbol{g}+\mathbb{A}\boldsymbol{a}+\mathbb{X}\delta x \tag{C.16}$$

$$\mathbb{G}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t_{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{i\alpha_{\mathrm{PRC}}}}{1-r_{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{2i\alpha_{\mathrm{PRC}}}} \tag{C.17}$$

$$\mathbb{A}=-\frac{1}{\sqrt{2}}t_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{i\alpha}R\left[I-r_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{2i\alpha}RSR\right]^{-1} \tag{C.18}$$

$$\mathbb{X}=\frac{\omega_0A_0}{c}\sqrt{\frac{\mathcal{F}_{\mathrm{P}}}{\pi}}\left[\frac{t_{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{i\alpha_{\mathrm{PRC}}}}{1-r_{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{2i\alpha_{\mathrm{PRC}}}}+r_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{2i\alpha}R\left[I-r_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{2i\alpha}RSR\right]^{-1}RS\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{C.19}$$

と求めることができる。ここで、$\mathcal{F}_{\mathrm{P}}=2\pi/t_{\mathrm{P}}^2$ は PR 共振器のフィネス、$\alpha_{\mathrm{PRC}}=\alpha_{\mathrm{P}}+\alpha_{\mathrm{arm}}$ は PR 共振器での位相遅れ、$\alpha=\alpha_{\mathrm{S}}+\alpha_{\mathrm{arm}}$ は SR 共振器での位相遅れである。ここでは、squeezing angle θ を 0 と $\pi/4$ にした場合についてそれぞれ考える。光ばね定数を求めると、$\theta=0$ のときには 4.1.3 小節で求めた結果と対応して

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{opt}}&=\frac{4\omega_0\mathcal{F}_{\mathrm{P}}P_G}{\pi c^2 s}\frac{\sin 2\phi}{r_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{2i\alpha}+\frac{1}{r_{\mathrm{S}}}\mathrm{e}^{-2i\alpha}-2\cosh u\cos 2\phi}\\&\simeq\frac{4\omega_0\mathcal{F}_{\mathrm{P}}\mathcal{F}_{\mathrm{S}}P_G}{\pi^2c^2}\frac{\delta}{(1+i\omega/\gamma)^2+\delta^2-\sigma^2}\end{aligned} \tag{C.20}$$

となり、$\theta=\pi/4$ のときには

$$\begin{aligned}K'_{\mathrm{opt}}&=\frac{4\omega_0\mathcal{F}_{\mathrm{P}}P_G}{\pi c^2}\frac{\cosh u\sin 2\phi+\sinh u\cos 2\phi}{r_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{2i\alpha}+\frac{1}{r_{\mathrm{S}}}\mathrm{e}^{-2i\alpha}-2\cosh u\cos 2\phi}\\&\simeq\frac{4\omega_0\mathcal{F}_{\mathrm{P}}\mathcal{F}_{\mathrm{S}}P_G}{\pi^2c^2}\frac{\delta+\sigma}{(1+i\omega/\gamma)^2+\delta^2-\sigma^2}\end{aligned} \tag{C.21}$$

となる。ここで、$\mathcal{F}_{\mathrm{S}}=2\pi/t_{\mathrm{S}}^2$ は SR 共振器のフィネス、$\gamma=t_{\mathrm{S}}^2c/4(L+l)$ は SR 共振器の cavity pole、$\Delta=c\phi/(L+l)$ は SR 共振器の detune、$\delta=\Delta/\gamma$ は normalized detune、$\Sigma=uc/2(L+l)$ は squeezing rate、$\sigma=\Sigma/\gamma$ は normalized squeezing rate であり、L は腕の長さ、l は SRM から BS までの距離である。真空場 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{g}$ の間に相関が無いとしてパワースペクトル密度を求めると、$\theta=0$ のとき

$$S_{\mathrm{f,qrp}}=\frac{8\hbar\omega_0\mathcal{F}_{\mathrm{P}}P_G}{\pi^2c^2}\left[\frac{1}{1+(\omega/\gamma_{\mathrm{PRC}})^2}\mathcal{F}_{\mathrm{P}}+\frac{(1+\sigma)^2+\delta^2+(\omega/\gamma)^2}{(1+\delta^2-\sigma^2-(\omega/\gamma)^2)^2+(2\omega/\gamma)^2}\mathcal{F}_{\mathrm{S}}\right] \tag{C.22}$$

であり、$\theta = \pi/4$ のとき

$$S'_{\mathrm{f,qrp}} = \frac{8\hbar\omega_0 \mathcal{F}_{\mathrm{P}} P_G}{\pi^2 c^2} \left[\frac{1}{1+(\omega/\gamma_{\mathrm{PRC}})^2} \mathcal{F}_{\mathrm{P}} + \frac{1+(\delta+\sigma)^2+(\omega/\gamma)^2}{(1+\delta^2-\sigma^2-(\omega/\gamma)^2)^2+(2\omega/\gamma)^2} \mathcal{F}_{\mathrm{S}} \right] \tag{C.23}$$

である。$\gamma_{\mathrm{PRC}} = t_{\mathrm{P}}^2 c/4(L+l_{\mathrm{P}})$ は PR 共振器の cavity pole であり、l_{P} は PRM から BS までの距離である。

以上の結果から、輻射圧フォノン数を求めることができる。$\theta = 0$ のとき、

$$\gamma_{\mathrm{opt}} = -\frac{4\omega_0 \mathcal{F}_{\mathrm{P}} \mathcal{F}_{\mathrm{S}} P_G}{m\pi^2 c^2} \frac{2\delta/\gamma}{(1+\delta^2-\sigma^2-(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2)^2+(2\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2} \tag{C.24}$$

なので

$$n_{\mathrm{rp}} = -\frac{(1+\delta^2-\sigma^2-(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2)^2+(2\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}{4\delta(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)(1+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma_{\mathrm{PRC}})^2)} \frac{\mathcal{F}_{\mathrm{P}}}{\mathcal{F}_{\mathrm{S}}} - \frac{(1+\sigma)^2+\delta^2+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}{4\delta\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma} - \frac{1}{2} \tag{C.25}$$

と求まる。第一項は入射ポートから侵入した真空場由来の量子輻射圧揺らぎに起因するフォノン数であり、第二項は出射ポートから侵入した真空場由来の量子輻射圧揺らぎに起因するフォノン数である。出射ポートにおける測定から鏡の運動を測定する場合には、入射ポートから侵入した揺らぎが 2 つの鏡を同相で揺らす効果は測定できないので、第一項の効果は無視することができる。よって、実効的な輻射圧フォノン数は $\delta = -\sqrt{(1+\sigma)^2+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}$ のとき最小値を取り、

$$n_{\mathrm{rp}} \geq \frac{\sqrt{(1+\sigma)^2+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}}{2\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma} - \frac{1}{2} \tag{C.26}$$

であることが分かる。

$\theta = \pi/4$ のときには

$$\gamma'_{\mathrm{opt}} = -\frac{4\omega_0 \mathcal{F}_{\mathrm{P}} \mathcal{F}_{\mathrm{S}} P_G}{m\pi^2 c^2} \frac{2(\delta+\sigma)/\gamma}{(1+\delta^2-\sigma^2-(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2)^2+(2\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2} \tag{C.27}$$

なので

$$n'_{\mathrm{rp}} = -\frac{(1+\delta^2-\sigma^2-(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2)^2+(2\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}{4(\delta+\sigma)(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)(1+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma_{\mathrm{PRC}})^2)} \frac{\mathcal{F}_{\mathrm{P}}}{\mathcal{F}_{\mathrm{S}}} - \frac{1+(\delta+\sigma)^2+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}{4(\delta+\sigma)\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma} - \frac{1}{2} \tag{C.28}$$

と求まる。第 1 項を無視すると、$\delta = -\sigma - \sqrt{1+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}$ のとき最小値を取り

$$n'_{\mathrm{rp}} \geq \frac{\sqrt{1+(\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma)^2}}{2\omega_{\mathrm{eff}}/\gamma} - \frac{1}{2} = \left(\frac{\gamma}{2\omega_{\mathrm{eff}}}\right)^2 \frac{2}{1+\sqrt{1+(\gamma/\omega_{\mathrm{eff}})^2}} \tag{C.29}$$

であることが分かる。

$\theta = \pi/4$ の場合には輻射圧フォノン数の最小値は squeezing rate によって変化せず、シンプルな Fabry-Perot 共振器の場合と対応した結果になる。一方で $\theta = 0$ の場合には、$\delta = -\omega_{\rm eff}/\gamma$、$\sigma \to -1$ としたとき $n_{\rm rp} \to 0$ とできることが分かる。すなわち、internal squeezing を行えば bad cavity であっても基底状態まで冷却することが可能となる。ただし、$\sigma = -1$ は $\delta = 0$ のときの発振条件なので、極端な bad cavity である場合には実効的な squeezing factor が無限大であるような squeezer を実現することと同等の条件となってしまうことに注意する。

最後に、式 (C.10) などの被積分関数である変位のパワースペクトル密度 $S_{\rm x,qrp}(\Omega)$ が $\Omega = \omega_{\rm eff}$ 以外で十分小さいという仮定が今考えている系で成り立つための条件を考える。$\theta = 0$、$\sigma = -1$、$\delta = -\omega_{\rm eff}/\gamma$ のとき $S_{\rm f,qrp}(\Omega)$ は $\Omega = 0$ で最大値を取るので、$S_{\rm x,qrp}(0) \ll S_{\rm x,qrp}(\omega_{\rm eff})$ が満たされていればよい。すなわち

$$(\gamma_{\rm opt})^2 \ll \frac{1}{2}(\omega_{\rm eff}/\gamma)^2\omega_{\rm eff}^2 \tag{C.30}$$

であり、極端な bad cavity だとこの条件も成り立たなくなってしまうことが分かる。Internal squeezing で bad cavity を基底状態まで冷却するためには、ある程度機械的な共振周波数が高い振動子を用いる必要がある。

補遺 D

量子雑音低減のための発展的技術

ここでは、3 章で扱えなかった量子雑音低減のために提唱されている理論をいくつか紹介する。

D.1 EPR Entanglement を用いた Frequency Dependent External Squeezing

3.5.1 小節では、filter cavity を用いた周波数依存 external squeezing を考えた。filter cavity の cavity pole は主干渉計と同程度である必要があったので、これはある程度の長さを持ったフィネスの高い共振器である必要がある。しかし、共振器のフィネスを上げると僅かな光学ロスにより実効的な squeezing factor を制限されてしまい、共振器長を長くすると建設コストが上がってしまう。Filter cavity を用いない周波数依存 external squeezing の方法として、Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) entanglement を用いて主干渉計を filter cavity のように振る舞わせる手法が提唱されている [86]。

縮退 OPA は、古典的にはキャリア光の増幅器であり、量子的には amplitude quadrature と phase quadrature のスペクトル比率を変更する squeezer であった。一方で、式 (4.46) より、古典的な非縮退 OPA はアッパーサイドバンドとロウワーサイドバンドの変換と見なせる。すなわち、量子的な非縮退 OPA は、周波数 $\omega_3 = 2\omega_0$ を持った 1 つの光子から $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ を満たす 2 つの量子もつれ状態にある光子を生成する過程であると言える。さらに周波数依存性を持った干渉計でこの光子対を分離すると、局所性を破った働きをさせることができる。すなわち、非縮退 OPA を効果的に用いた干渉計は EPR 相関を利用した光学系となる。

この干渉計のセットアップは 3.4.3 小節と同様だが、OPA は角周波数 $2\omega_0 + \Delta_{\mathrm{E}}$ を持ったポンプ光で行い、シグナル光 ω_0 とアイドラ光 $\omega_0 + \Delta_{\mathrm{E}}$ の変換を行うような位相整合を行う。Squeezing angle $\theta = 0$ のとき、シグナル光周りの揺らぎ $a(t)$ とアイドラ光周りの

揺らぎ $\mathfrak{a}(t)$ の OPA による変換は、式 (B.30)、(B.31) より

$$
\begin{aligned}
a'(t) &= [a_1(t)\cos\omega_0 t + a_2(t)\sin\omega_0 t]\cosh u \\
&\quad + [\mathfrak{a}_1(t)\cos(\omega_0+\Delta_{\mathrm{E}})t - \mathfrak{a}_2(t)\sin(\omega_0+\Delta_{\mathrm{E}})t]\sinh u \qquad \text{(D.1)}\\
\mathfrak{a}'(t) &= [a_1(t)\cos\omega_0 t - a_2(t)\sin\omega_0 t]\sinh u \\
&\quad + [\mathfrak{a}_1(t)\cos(\omega_0+\Delta_{\mathrm{E}})t + \mathfrak{a}_2(t)\sin(\omega_0+\Delta_{\mathrm{E}})t]\cosh u \qquad \text{(D.2)}
\end{aligned}
$$

である。周波数空間では

$$
\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \mathfrak{a}_1' \\ \mathfrak{a}_2' \end{pmatrix}(\Omega) = \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & \sinh u & 0 \\ 0 & \cosh u & 0 & -\sinh u \\ \sinh u & 0 & \cosh u & 0 \\ 0 & -\sinh u & 0 & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \end{pmatrix}(\Omega) \qquad \text{(D.3)}
$$

と表せる。

まずは、この EPR 相関を持った揺らぎを直接測定したときのパワースペクトル密度を求める。式 (D.3) より、量子的には交換関係 $[\hat{a}_1' - \hat{\mathfrak{a}}'_1, \hat{a}_2' + \hat{\mathfrak{a}}_2'] = 0$ が満たされており、$(\hat{a}_1' - \hat{\mathfrak{a}}'_1)/\sqrt{2}$ と $(\hat{a}_2' + \hat{\mathfrak{a}}_2')/\sqrt{2}$ の間で最小不確定性状態が成り立つ。すなわち、$\boldsymbol{a}'(\Omega)$ と $\boldsymbol{\mathfrak{a}}'(\Omega)$ を別々にホモダイン測定する場合[*1]、$\xi_{A'} = -\xi_{\mathfrak{A}'}$ とすればシグナルの測定値 $a_1'\cos\xi_{A'} + a_2'\sin\xi_{A'}$ とアイドラの測定値 $\mathfrak{a}_1'\cos\xi_{\mathfrak{A}'} + \mathfrak{a}_2'\sin\xi_{\mathfrak{A}'}$ の不確定性が最小になる。$\xi_{A'}$ と $\xi_{\mathfrak{A}'}$ は、それぞれシグナルとアイドラのホモダイン角である。シグナルの測定値からアイドラの測定値にフィルタ定数 g をかけて差し引いたものを測定値 a^g とする：

$$
a^g = (a_1'\cos\xi_{A'}+a_2'\sin\xi_{A'})-g(\mathfrak{a}_1'\cos\xi_{\mathfrak{A}'}+\mathfrak{a}_2'\sin\xi_{\mathfrak{A}'}) = (a_1'-g\mathfrak{a}_1')\cos\xi_{\mathfrak{A}'}-(a_2'+g\mathfrak{a}_2')\sin\xi_{\mathfrak{A}'} \qquad \text{(D.4)}
$$

式 (A.37) より、最小不確定性状態を取ることに対応して $a_1' - g\mathfrak{a}_1'$ と $a_2' + g\mathfrak{a}_2'$ のパワースペクトル密度は等しくなり、a^g のパワースペクトル密度 S_a^g は

$$
S_a^g = (\cosh u - g\sinh u)^2 + (\sinh u - g\cosh u)^2 \qquad \text{(D.5)}
$$

と計算できる。特に、$g = \tanh 2u$ としたとき最良のフィルタ (Wiener フィルタ) となり、S_a^g は最小値 $1/\cosh 2u$ を取る。縮退 OPA の場合の最小値 (squeeze した方向を測定したとき) は $1/s^2$ なので、強い squeezing を行っている場合 ($u \gg 1$) には縮退型の $\sqrt{2}$ 倍程度の振幅スペクトル密度を実現できることが分かる。

次に、干渉計に対する EPR 相関を持った揺らぎの応答を考え、感度を導出する。主干渉計はキャリア ω_0 に対して共振状態にあるので、シグナル光周りの揺らぎと信号の応

*1 [86] では Output Mode Cleaner (OMC) を 2 つ用いて分離する方法が提案されている。後の議論で分かるように Δ_{E} は主干渉計の cavity pole 程度に設定すればよく、これより共振幅の狭い OMC を作ることは通常の filter cavity の制作と同様に困難だが、Δ_{E} に主干渉計の FSR の整数倍だけ余分に加えておくことで、主干渉計に対する応答を変えないままに比較的広い共振幅を持った OMC を用いて分離できるようになる。また、この理論の実証実験 [87] では Bichromatic Balanced Homodyne Detection (BBHD) が用いられている。

答は通常の場合と同様である。キャリア光に対して共振している共振器にサブキャリア $\omega_0 + \Delta_\mathrm{E}$ を入射させたときの応答は、Δ_E だけ detune した共振器にキャリアを入射させたときの応答と同様であることを考えると、アイドラ光周りの揺らぎについてはキャリアから Δ_E だけ detune した共振器と同様の応答をすることになる。ただし、干渉計内にサブキャリアは存在しないため、アイドラ光周りの揺らぎには信号は現れず、オプトメカニカルな効果も起きない。Detuned SR 干渉計の応答 (3.102) において $\iota \to 0$ とすると、filter cavity の応答 (3.124) と一致していることが分かる。すなわち、アイドラ光周りの揺らぎに対しては主干渉計が filter cavity として働くことになる。この疑似的な filter cavity の cavity pole は変更できないので、理想的な filter cavity を実現することはできないが、主干渉計の cavity pole 付近で応答の変化する周波数依存回転効果を受けさせることができる。

干渉計から出力されるシグナル光周りの揺らぎ $\boldsymbol{b}$ は式 (3.85) と同様であり、特に phase quadrature に対しては

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \mathrm{e}^{2i\beta}(-\mathcal{K}a_1' + a_2') + \mathrm{e}^{i\beta}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_\mathrm{SQL}}h(\Omega) \\
&= \mathrm{e}^{2i(\beta+\pi/2)}(\sqrt{1+\mathcal{K}^2})(a_1'\cos\xi_\mathcal{K} + a_2'\sin\xi_\mathcal{K}) + \mathrm{e}^{i\beta}\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_\mathrm{SQL}}h(\Omega)
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

である。このように入射揺らぎ $\boldsymbol{a}'$ の係数を角度で表すと、入射揺らぎを疑似的なホモダイン角 $\xi_\mathcal{K} = -\arctan(1/\mathcal{K})$ で測定していることと同等になっていることが分かる。また、$\boldsymbol{\mathfrak{a}}'$ が角度 $-\Phi$ の理想的な回転効果を受けているとすると[*2]、干渉計から出力されるアイドラ光周りの揺らぎ $\boldsymbol{\mathfrak{b}}$ の phase quadrature は

$$
\mathfrak{b}_2 = \mathrm{e}^{2i\beta'}(-\mathfrak{a}_1'\sin\Phi + \mathfrak{a}_2'\cos\Phi) \tag{D.7}
$$

と表せる。$2\beta'$ は入射揺らぎ $\boldsymbol{\mathfrak{a}}'$ が干渉計から反射される間の位相遅れである。直接測定する場合と同様に、実効的なホモダイン角の和が 0 になる場合に量子雑音が最小となるので、$\Phi = \pi/2 + \xi_\mathcal{K} = \arctan\mathcal{K}$ となるように回転角を調整すればよい[*3]。これは Δ_E を主干渉計の cavity pole 程度に設定することで実現できる。測定量を $b_2^g = b_2 - g'\mathfrak{b}_2$ とすれば、先ほどと同様の議論から、$g' = \exp(2i(\beta - \alpha + \pi/2))\sqrt{1+\mathcal{K}^2}\tanh 2u$ のとき感度は最良となる：

$$
S_h = \frac{h_\mathrm{SQL}^2}{2\cosh 2u}\left(\mathcal{K} + \frac{1}{\mathcal{K}}\right) \tag{D.8}
$$

[*2] 実際には理想的な回転行列から少しずれがあるため、filter cavity を用いる場合と同様に、$\sim \pi/4$ の回転角が要求される帯域付近で実効的な squeezing factor が若干悪化する。

[*3] これは、3.4.3 小節で考えた縮退 OPA を用いる場合に要求される理想的な回転角と一致している。

EPR 相関を用いることによって、理想的な場合の $1/\sqrt{2}$ 倍程度の squeezing factor を持った周波数依存 squeezing を実現できることが分かった。

D.2　Long SR 共振器

3.3.5 小節では、BS と SRM 間の位相遅れを無視できるとしていた。この位相遅れが腕の位相遅れと同程度になると、SR 共振器長が有限であることに起因する効果が無視できなり、感度曲線が変化する。

BS と SRM 間の位相遅れを $\Phi \equiv l\Omega/c \pmod{2\pi}$ とする。l は BS と SRM 間の距離である。このとき、BRSE のカップリング定数 (3.92) は

$$\mathcal{K}'_{\mathrm{BRSE}} = \frac{t^2}{1+r^2+2r\cos(2\beta+2\Phi)}\mathcal{K} \tag{D.9}$$

と変更される。Φ も微小量であるとして近似すると、$\gamma_{\mathrm{s}} = Tc/(4l)$ を用いて

$$\mathcal{K}'_{\mathrm{BRSE}} = \frac{2\gamma_{\mathrm{BRSE}}\iota}{\Omega^2[\gamma_{\mathrm{BRSE}}^2 + (1-2\gamma_{\mathrm{BRSE}}/\gamma_{\mathrm{s}} + (\Omega/\gamma_{\mathrm{s}})^2)\Omega^2]} \tag{D.10}$$

と計算できる。

SR 共振器を離調していないにも関わらず、特定のパラメータの場合にはディップが現れる。感度曲線を図 D.1 に示した。パラメータは $2\mathcal{F}_{\mathrm{S}}/\pi = 1000$、$l = 100$ [m]、$T_{\mathrm{I}} = 0.0005$

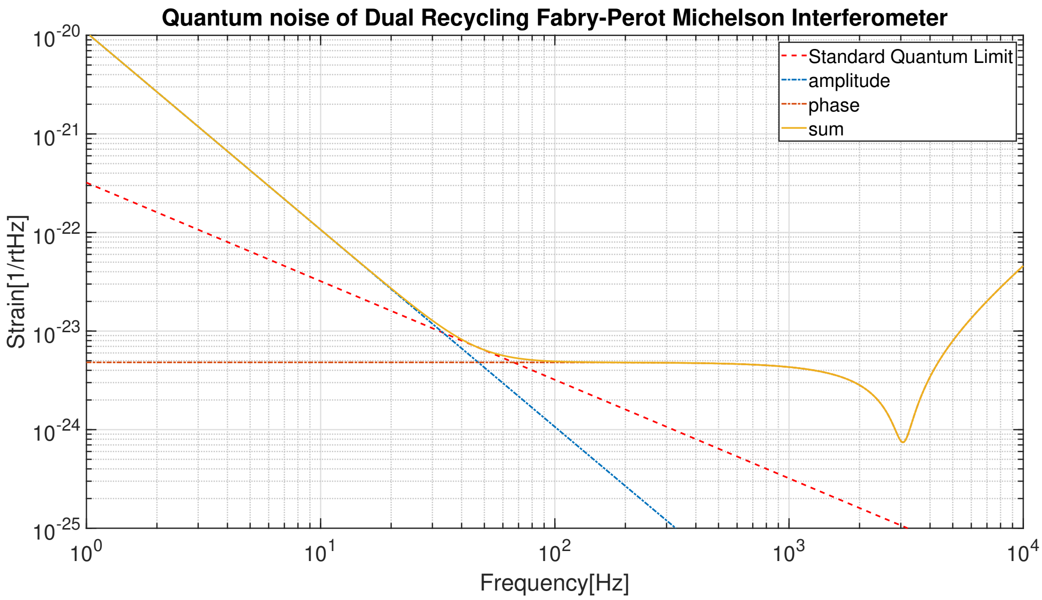


図 **D.1:** Dual Recycling Fabry-Perot Michelson 干渉計の感度
$P_G = 1\times 10^2$ [W]、$2\mathcal{F}_{\mathrm{F}}/\pi = 10$ とした。

としている。3kHz 程度に現れているディップは真空場の phase quadrature 由来である

ことから、DSR の optical resonance と同様に、この周波数で信号が共振する条件を満たしているためにディップが現れている分かる。これは、BS と SRM 間の位相遅れにより、反共振状態だった SR 共振器がこの周波数付近で疑似的な共振状態に切り替わっているためだと考えることができる。$1/\mathcal{K}'_{\mathrm{BRSE}}$ は $\Omega_{\mathrm{LSRC}} = \sqrt{(2\gamma_{\mathrm{BRSE}} - \gamma_{\mathrm{s}})\gamma_{\mathrm{s}}/2}$ で極致を取ることから、これがディップの角周波数である。この周波数では真空場の amplitude quadrature 由来の項が一時的に悪化するため、ディップの深さが SQL を超えることはない。ディップにおける感度が SQL より十分大きい場合、ディップの相対的な深さは、$\rho = \gamma_{\mathrm{BRSE}}/\gamma_{\mathrm{s}}$ を用いて

$$\frac{1/\mathcal{K}'_{\mathrm{BRSE}}|_{\Omega=\Omega_{\mathrm{LSRC}}}}{1/\mathcal{K}'_{\mathrm{BRSE}}|_{\Omega\to 0}} = \frac{4\rho - 1}{4\rho^2} \tag{D.11}$$

である。また、ディップの周波数以降では信号が 2 つの複合共振器で減衰されることになるため、周波数の 2 乗に比例して感度が悪化するようになる。

3.5.2 小節で考えた系と同じく数 kHz 程度の帯域にディップを作ることができるため、Long SR 共振器効果は高周波数帯域の感度改善方法として有用である。ただし、高いフィネスを持った arm cavity と高ゲインの RSE が共に必要なため、比較を行う場合には光学ロスの影響を考察することが重要である。現在建造されている第二世代重力波検出器の SR 共振器長はそれほど長くなくディップを作ることが難しいが、新たに建造する重力波検出器の光学系構成案として、積極的にこの効果を取り込んでいる例もある [88]。

補遺 E

実験で用いた回路

実験で用いた主な回路の回路図を示す。

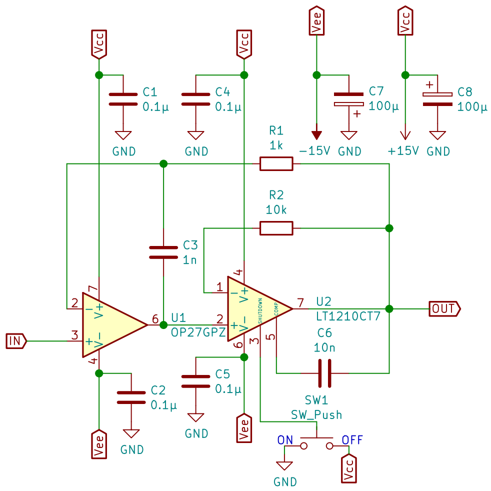


図 **E.1:** コイルドライバ

各 IC に対して 0.1 μF セラミックコンデンサをパスコンとして用いている。以降の回路図では省略する。

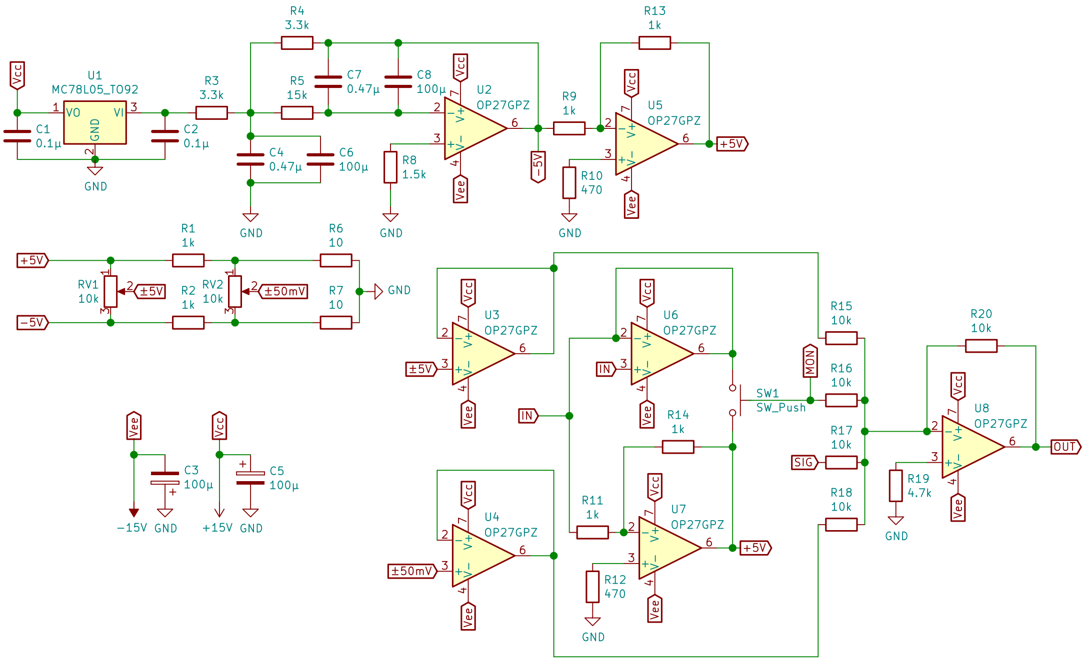


図 E.2: 伝達関数測定用加算器

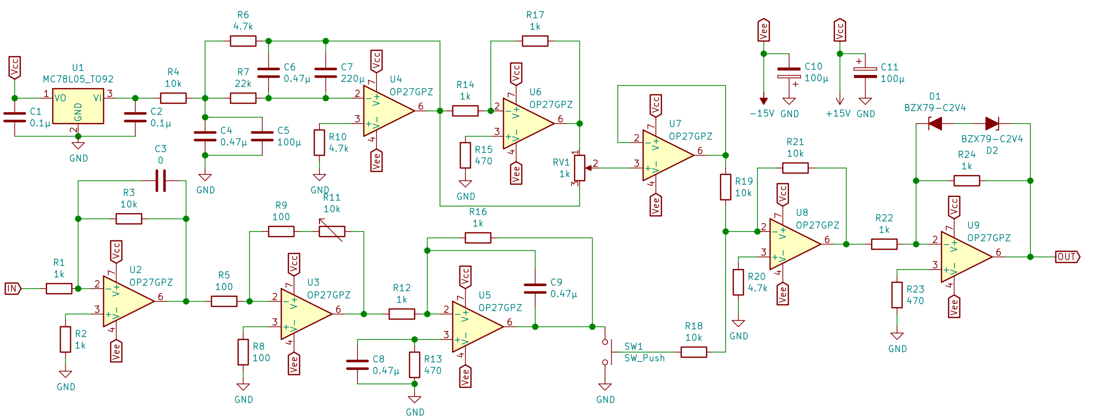


図 E.3: SHG 制御用 lowpass フィルタ

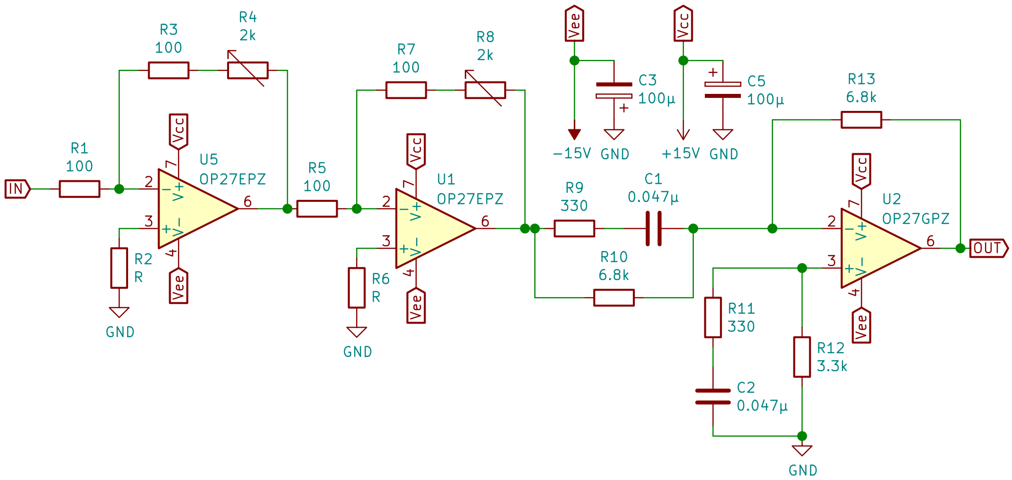


図 E.4: コイルマグネットアクチュエータ用位相進み保障回路
$1/2\pi(R_9 + R_{10})C_1$ [Hz] から $1/2\pi R_9 C_1$ [Hz] の範囲で位相保障がされる。

参考文献

[1] A. Einstein, "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation", *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 688–696, (1916).

[2] A. Einstein, "Über Gravitationswellen", *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 154–167, (1918).

[3] M. Maggiore, *"Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments"*, Vol. 1, Oxford university press, (2008).

[4] R. Epstein, R. V. Wagoner, "Post-Newtonian generation of gravitational waves", *Astrophys. J.*, Vol. 197, pp. 717–723, (1975).

[5] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *"Gravitation"*, Princeton University Press, (2017).

[6] L. D. Landau, *"The classical theory of fields"*, Vol. 2, Elsevier, (2013).

[7] R. A. Hulse, J. H. Taylor, "Discovery of a pulsar in a binary system.", *Astrophys. J.*, Vol. 195, pp. L51–L53, (1975).

[8] T. Damour, J. H. Taylor, "On the orbital period change of the binary pulsar PSR-1913+16", *Astrophys. J.*, Vol. 366, pp. 501–511, (1991).

[9] G. M. H. and, "Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 27, No. 8, p. 084006, (2010).

[10] B. P. Abbott *et al.*, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 061102, (2016).

[11] T. Kinugawa *et al.*, "Possible indirect confirmation of the existence of Pop III massive stars by gravitational wave", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 442, No. 4, pp. 2963–2992, (2014).

[12] M. Sasaki *et al.*, "Primordial black holes—perspectives in gravitational wave astronomy", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 35, No. 6, p. 063001, (2018).

[13] F. Acernese *et al.*, "Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravita-

tional wave detector", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 32, No. 2, p. 024001, (2014).

[14] B. P. Abbott *et al.*, "GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 161101, (2017).

[15] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration *et al.*, "GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass $\sim 3.4 M_{\odot}$", *arXiv*, 2001.01761, (2020).

[16] K. Somiya, "Detector configuration of KAGRA–the Japanese cryogenic gravitational-wave detector", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 29, No. 12, p. 124007, (2012).

[17] C. D. Ott *et al.*, "A New Mechanism for Gravitational-Wave Emission in Core-Collapse Supernovae", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 96, p. 201102, (2006).

[18] D. Radice *et al.*, "Probing Extreme-density Matter with Gravitational-wave Observations of Binary Neutron Star Merger Remnants", *Astrophys. J.*, Vol. 842, No. 2, p. L10, (2017).

[19] J. Weber, "Evidence for Discovery of Gravitational Radiation", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 22, pp. 1320–1324, (1969).

[20] G. E. Moss, L. R. Miller, R. L. Forward, "Photon-Noise-Limited Laser Transducer for Gravitational Antenna", *Appl. Opt.*, Vol. 10, No. 11, pp. 2495–2498, (1971).

[21] C. M. Caves, "Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 45, pp. 75–79, (1980).

[22] B. P. Abbott *et al.*, "LIGO: the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory", *Reports on Progress in Physics*, Vol. 72, No. 7, p. 076901, (2009).

[23] C. Bradaschia *et al.*, "The VIRGO Project: A wide band antenna for gravitational wave detection", *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 289, No. 3, pp. 518 – 525, (1990).

[24] K. Tsubono, "300-m laser interferometer gravitational wave detector (TAMA300) in Japan.", *First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments* (eds. E. Coccia, G. Pizzella, F. Ronga), (1995), p. 112.

[25] K. Danzmann *et al.*, "GEO 600 - a 600 m laser interferometric gravitational wave antenna.", *First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments* (eds. E. Coccia, G. Pizzella, F. Ronga), (1995), p. 100.

[26] H. Grote (forthe LIGO Scientific Collaboration), "The GEO 600 status", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 27, No. 8, p. 084003, (2010).

[27] Y. Aso *et al.*, "Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector", *Phys. Rev. D*, Vol. 88, p. 043007, (2013).

[28] M. Punturo *et al.*, "The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 27, No. 19, p. 194002, (2010).

[29] B. P. Abbott *et al.*, "Exploring the sensitivity of next generation gravitational wave detectors", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 34, No. 4, p. 044001, (2017).

[30] K. Danzmann, A. R. diger, "LISA technology concept, status, prospects", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 20, No. 10, pp. S1–S9, (2003).

[31] S. Kawamura *et al.*, "The Japanese space gravitational wave antenna: DECIGO", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 28, No. 9, p. 094011, (2011).

[32] 井上崇, "重力波望遠鏡における地下水の重力勾配雑音の研究", 卒業論文, 東京工業大学, (2019).

[33] H. B. Callen, T. A. Welton, "Irreversibility and Generalized Noise", *Phys. Rev.*, Vol. 83, pp. 34–40, (1951).

[34] M. Evans *et al.*, "Thermo-optic noise in coated mirrors for high-precision optical measurements", *Phys. Rev. D*, Vol. 78, p. 102003, (2008).

[35] V. Braginsky, M. Gorodetsky, S. Vyatchanin, "Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae", *Physics Letters A*, Vol. 271, No. 5, pp. 303 – 307, (2000).

[36] 山元一広, "干渉計型重力波検出器における低温鏡の先進性", 低温工学, Vol. 46, No. 7, pp. 426–433, (2011).

[37] J. Cripe *et al.*, "Measurement of quantum back action in the audio band at room temperature", *Nature*, Vol. 568, No. 7752, pp. 364–367, (2019).

[38] C. M. Caves, B. L. Schumaker, "New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states", *Phys. Rev. A*, Vol. 31, pp. 3068–3092, (1985).

[39] 柳沼拓哉, "非線形光学結晶設置型重力波検出器の原理と光学損失の振る舞い", 修士論文, 東京工業大学, (2018).

[40] V. B. Braginskiĭ, Y. I. Vorontsov, "Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique", *Soviet Physics Uspekhi*, Vol. 17, No. 5, pp. 644–650, (1975).

[41] J. Mizuno, *"Comparison of optical configurations for laser-interferometric gravitational-wave detectors"*, PhD thesis, Hannover U., (1995).

[42] J. Mizuno *et al.*, "Resonant sideband extraction: a new configuration for inter-

ferometric gravitational wave detectors", *Physics Letters A*, Vol. 175, No. 5, pp. 273 – 276, (1993).

[43] A. Buonanno, Y. Chen, "Optical noise correlations and beating the standard quantum limit in advanced gravitational-wave detectors", *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 18, No. 15, pp. L95–L101, (2001).

[44] H. Miao, *"Exploring Macroscopic Quantum Mechanics in Optomechanical Devices"*, PhD thesis, The University of Western Australia, (2010).

[45] N. Matsumoto *et al.*, "Direct measurement of optical-trap-induced decoherence", *Phys. Rev. A*, Vol. 94, p. 033822, (2016).

[46] R. E. Slusher *et al.*, "Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 55, pp. 2409–2412, (1985).

[47] M. Korobko *et al.*, "Beating the Standard Sensitivity-Bandwidth Limit of Cavity-Enhanced Interferometers with Internal Squeezed-Light Generation", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 118, p. 143601, (2017).

[48] K. Somiya *et al.*, "Parametric signal amplification to create a stiff optical bar", *Physics Letters A*, Vol. 380, No. 4, pp. 521 – 524, (2016).

[49] H. J. Kimble *et al.*, "Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics", *Phys. Rev. D*, Vol. 65, p. 022002, (2001).

[50] F. Y. Khalili, "Optimal configurations of filter cavity in future gravitational-wave detectors", *Phys. Rev. D*, Vol. 81, p. 122002, (2010).

[51] E. Oelker *et al.*, "Audio-Band Frequency-Dependent Squeezing for Gravitational-Wave Detectors", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 041102, (2016).

[52] E. Capocasa *et al.*, "Measurement of optical losses in a high-finesse 300 m filter cavity for broadband quantum noise reduction in gravitational-wave detectors", *Phys. Rev. D*, Vol. 98, p. 022010, (2018).

[53] M. Korobko, F. Khalili, R. Schnabel, "Engineering the optical spring via intracavity optical-parametric amplification", *Physics Letters A*, Vol. 382, No. 33, pp. 2238 – 2244, (2018), Special Issue in memory of Professor V.B. Braginsky.

[54] H. Vahlbruch *et al.*, "Detection of 15 dB Squeezed States of Light and their Application for the Absolute Calibration of Photoelectric Quantum Efficiency", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 117, p. 110801, (2016).

[55] V. Peano *et al.*, "Intracavity Squeezing Can Enhance Quantum-Limited Optomechanical Position Detection through Deamplification", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 115, p. 243603, (2015).

[56] M. Asjad *et al.*, "Optomechanical cooling with intracavity squeezed light", *Opt. Express*, Vol. 27, No. 22, pp. 32427–32444, (2019).

[57] G. S. Agarwal, S. Huang, "Strong mechanical squeezing and its detection", *Phys. Rev. A*, Vol. 93, p. 043844, (2016).

[58] W.-A. Li, G.-Y. Huang, "Enhancement of optomechanically induced sum sidebands using parametric interactions", *Phys. Rev. A*, Vol. 100, p. 023838, (2019).

[59] T. Corbitt *et al.*, "Measurement of radiation-pressure-induced optomechanical dynamics in a suspended Fabry-Perot cavity", *Phys. Rev. A*, Vol. 74, p. 021802, (2006).

[60] T. Corbitt *et al.*, "An All-Optical Trap for a Gram-Scale Mirror", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 98, p. 150802, (2007).

[61] J. Cripe *et al.*, "Observation of an optical spring with a beam splitter", *Opt. Lett.*, Vol. 43, No. 9, pp. 2193–2196, (2018).

[62] 加藤準平, "重力波望遠鏡における光ばねと非線形結晶を用いた信号増幅器のデザインとその検証", 修士論文, 東京工業大学, (2015).

[63] 片岡優, "非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発", 修士論文, 東京工業大学, (2017).

[64] 草柳浩平, "次世代重力波検出器のための非線形光学効果を用いた信号増幅", 修士論文, 東京工業大学, (2019).

[65] R. W. P. Drever *et al.*, "Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator", *Applied Physics B*, Vol. 31, No. 2, pp. 97–105, (1983).

[66] H. Vahlbruch *et al.*, "Coherent Control of Vacuum Squeezing in the Gravitational-Wave Detection Band", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 97, p. 011101, (2006).

[67] 松本伸之, "重力波検出器の感度向上に向けたスクイーズド光の生成実験", 修士論文, 東京大学, (2011).

[68] S. E. Dwyer, *"Quantum noise reduction using squeezed states in LIGO"*, PhD thesis, Wellesley College, (2013).

[69] E. Oelker, *"Squeezed States for Advanced Gravitational Wave Detectors"*, PhD thesis, University of California Berkeley, (2016).

[70] A. Siegman, *"Lasers"*, University Science Books, (1986).

[71] 粕谷順子, "重力波検出器 KAGRA の出力モードクリーナの開発", 修士論文, 東京工業大学, (2018).

[72] 中島良介, "IIR フィルタを用いた光干渉計の制御", 卒業論文, 東京工業大学, (2018).

[73] 久富正博, "光ばね実験における懸架系の開発及びその性能評価", 卒業論文, 東京工業大学, (2017).

[74] J. A. Sidles, D. Sigg, "Optical torques in suspended Fabry-Perot interferometers", *Physics Letters A*, Vol. 354, No. 3, pp. 167 – 172, (2006).

[75] Covesion Ltd, *"MgO:PPLN for efficient wavelength conversion"*.

[76] 榎本雄太郎, "干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用と光の空間モードの揺らぎについて", 修士論文, 東京大学, (2017).

[77] R. Schnabel, "Squeezed states of light and their applications in laser interferometers", *Physics Reports*, Vol. 684, pp. 1 – 51, (2017).

[78] 黒田和男, "非線形光学", コロナ社, (2008).

[79] 広田修, "スクィズド光", 光通信理論研究会, (1990).

[80] 小森健太郎, "巨視的振動子の遠隔光冷却", 修士論文, 東京大学, (2016).

[81] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, F. Marquardt, *"Cavity optomechanics: nano- and micromechanical resonators interacting with light"*, Springer, (2014).

[82] K. Komori, "Optomechanical Torsion Pendulum for Measurement of Quantum Radiation Pressure Fluctuation", PhD thesis, University of Tokyo, (2019).

[83] J. Chan *et al.*, "Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state", *Nature*, Vol. 478, No. 7367, pp. 89–92, (2011).

[84] J. D. Teufel *et al.*, "Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state", *Nature*, Vol. 475, No. 7356, pp. 359–363, (2011).

[85] R. W. Peterson *et al.*, "Laser Cooling of a Micromechanical Membrane to the Quantum Backaction Limit", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 063601, (2016).

[86] Y. Ma *et al.*, "Proposal for gravitational-wave detection beyond the standard quantum limit through EPR entanglement", *Nature Physics*, Vol. 13, No. 8, pp. 776–780, (2017).

[87] J. Südbeck *et al.*, "Demonstration of interferometer enhancement through EPR entanglement", *arXiv*, 1908.09602, (2019).

[88] M. Bailes *et al.*, "Ground-Based Gravitational-Wave Astronomy in Australia: 2019 White Paper", *arXiv*, 1912.06305, (2019).

謝辞

多くの方々からのご支援のおかげで、本修士論文は完成させることができました。簡単にではありますが、この場で感謝の意を述べさせていただきます。

指導教員の宗宮健太郎准教授は、大変興味深い研究テーマを与えてくださり、3 年間の研究室生活を全面的に支えてくださいました。何度も壁にぶつかりながらもほぼ一貫したテーマで研究を続けることができたのは、ひとえに宗宮先生の幅広い知識と臨機応変なアドバイスのおかげです。また、重力波検出器に関する様々なトピックを機会のあるたびに教えてくださり、いくつもの国内学会や国際会議への参加を許可してくださいました。さらに、KAGRA での OMC インストール作業にも従事させてくださり、大変貴重な経験を何度もすることができました。狭い視野にとらわれないことの大切さを教えてくださったことにも大変感謝しております。

原田健一講師は、光学実験の豊富な経験から実験をサポートしてくださいました。幾度となく実験器具についての相談をさせていただきましたが、いつも親切に対応してくださいました。原田先生の協力なしでは導入できなかった光学系はいくつもあります。また、同行させていただいたイタリア出張は始終トラブルの連続でしたが、原田先生の頼もしい機転のおかげで無事乗り切ることができ、大変思い出深い出張になりました。

国立天文台の藤本眞克名誉教授は、研究室ゼミの際に大変貴重なご意見をくださいました。藤本先生が参加してくださることにより、ゼミでの議論を何倍にも深めることができました。福岡大学の端山和大准教授には、福岡大学訪問の際に大変お世話になりました。また、神岡では周辺区域の環境調査に同行させてくださり、何にも代えがたい経験をさせていただきました。

Massachusetts Institute of Technology の小森健太郎氏は、研究に関する様々な相談に乗ってくださいました。量子雑音などの理論的な考察に限らず、制御方法など実験に関することも、いつも非常に丁寧に教えてくださいました。小森氏とのやり取りの中で気づかされたことは数多くあり、本論文の至る箇所に反映されています。氏の本質を突き詰めるような議論展開と研究に対する真摯な姿勢を心から尊敬しております。

Laboratory of Mechanics and Acoustics の Jerome DEGALLAIX 氏には、桁違いの

スペックを持った鏡を提供していただきました。大変お忙しい中のお願いでしたが、実験に間に合わせてくださり感謝しております。

大岡山設計工作部門の杉原輝哉技術専門員と職員の皆様には、ベリリウム銅製のサスペンションを制作していただきました。完成品の極めて高い工作精度や、一緒に作成していただいた治具の便利さには大変驚きました。常圧下での光ばねの精密測定に光明が見えたのは、設計工作部門の方々が持つ高い技術力のおかげでもあります。

KAGRA での OMC インストール作業では、宇宙線研究所、国立天文台、高エネルギー加速器研究機構、東京大学、富山大学など、いくつもの機関の方々に大変お世話になりました。KAGRA での作業で学んだことは数多くあり、実験に大いに反映されております。作業の進捗を常に気にかけ、有用なアドバイスをしてくださった皆様、本当にありがとうございました。

宗宮研究室のメンバーにも大変お世話になりました。修士 2 年の佐々木開君は、熱雑音に関するアドバイスをしてくれました。不労所得について語りあったのも良い思い出です。同じく修士 2 年の中島良介君は、3 年間同じ研究室だったこともあり、思いついたことを何でも相談できる仲でいてくれました。中島君が制作したスペクトラムアナライザは非常に性能が高く、測定の際にはいつも頼らせてもらいました。同じく修士 2 年で留学生の Liu Yuting 君は、重力波の信号解析と機械学習に関するトピックを聞かせてくれました。海外出張に関するアドバイスも大変参考になりました。

修士 1 年の小川潤君は、私が度々する変な質問に対し的確な答えをしてくれました。理論に対する深い理解を持っている小川君は頼もしい存在です。学部 4 年の栗林誠君とは、熱・電気雑音に関する議論を何度もしました。新たな雑音が見つかるかもしれないという点には大変刺激を受けました。同じく学部 4 年の立原浩輝君は、実験に関する手伝いをしてくれました。また、立原君が企画してくれた様々な催し事は研究室の交流を深めるきっかけとなりました。

技術支援員の前川直美さんと深山史子さんは、研究以外の面で宗宮研究室全体を支えてくださいました。事務手続きを気にすることなく研究に集中することができるのは、お二人がいてくださったおかげです。

宗宮研究室の OB にも大変お世話になりました。一昨年卒業された粕谷順子さんは、右も左も分からない時期に実験の基礎的な事柄を丁寧に教えてくださいました。同じく一昨年卒業された柳沼拓哉さんは、量子雑音に関する理論的な考察を教えてくださり、これは今でも私の中の重力波検出器に対する原像であり続けています。昨年卒業された草柳浩平さんは、光ばね実験を行っている立場から実験に関する様々なアドバイスをしてくださいました。同じく昨年卒業された久富正博さんは、本実験で使用しているサスペンションを制作した方であり、久富さんが行った特性評価は今でも参考にさせていただいております。同じく去年卒業した井上崇君は、KAGRA における地下水の調査への同行を許可し

てくれ、KAGRA のあまり知られていない一面を知る機会を作ってくれました。

修士過程在学中においても、家族は様々な面で私を支えてくれました。特に、兄は電気回路に関する的確なアドバイスをいくつもしてくれ、実験を行っていく中での大きな助けになりました。最後に、何不自由なく研究に打ち込める環境を与えてくれ、私の選択に理解を示してくれた両親に感謝します。