

修士論文

巨視的な系における量子力学の検証に向けた磁気浮上による鏡
の支持方法の開発

東京工業大学
理学院物理学系物理学コース 宗宮研究室

小川 潤

はじめに

量子力学で記述される現象は原理的には質量スケールに依らないはずである。しかしながら、プランク質量を超える巨視的な系における量子力学の検証は未だなされておらず、実験的に観測する事が求められている。一般に物質がその量子性を失う現象はデコヒーレンスと呼ばれ、主に二つの要因によって引き起こされると考えられている。一つは巨視的な系はミクロな系に比べて、環境との相互作用を起しやすく、それによってデコヒーレンスが起るといふ説である。もう一つは、自身の重力によってその量子性が失われるという説で、この現象は重力デコヒーレンスと呼ばれる。しかしながら、重力デコヒーレンスを観測したという例はこれまでに一つもない。そこでこれらの説の検証を行う為に、近年ではレーザー干渉計のような機械光学系を用いる方法が注目されている。機械光学系は振動子の変位を光の干渉によって測定するもので、振動子に現れる量子的な効果が観測できると期待されている。

量子現象を観測するための条件として求められるのが、鏡の位置測定感度を標準量子限界に到達させる事である。標準量子限界とは Heisenberg の不確定性原理から導出される振動子の位置測定精度の限界のことである。位置測定精度は標準量子限界によって原理的に制限される。しかしながら、従来の懸架線を用いて鏡を支持させる方法では、鏡の位置測定感度は懸架線の熱雑音によって制限される。そこで先行研究では反磁性体に強力な磁場をかけることで反磁性体が浮上するという現象に着目し、反磁性体である石英鏡を磁気浮上させることで熱雑音を回避する事を狙った。永久磁石と鉄で構成した磁石懸架システムの開発を行い、プランクスケールを超えるミリグラムスケールの石英の浮上に実験的に成功した。また 0.1mg スケールにおいての雑音を計算し、磁気浮上を用いれば 400Hz から 80kHz において標準量子限界を狙えることを示した。しかし現在、このスケールで光学的に高品質な微小鏡は開発されていない。そこで、本研究では石英鏡を直接浮上させるのではなく、より浮上力の強いグラファイトを用いることを提案する。グラファイトを用いることで強力な磁場を必要とせずとも、大きな質量スケールの鏡の浮上が可能になる。先行研究ではグラファイトの電気抵抗率が石英に比べ極端に小さく、渦電流熱雑音が大きく影響してくるために石英を選択したが、リング型磁石を用いることによってこの問題を回避することができる。本研究では 10mg の振動子の雑音を見積もり、標準量子限界に到達するために必要なパラメータの要求値を計算した。要求値を満たせば、800Hz から 20kHz で標準量子限界を下回る。これよりグラファイトとリング型磁石を用いた磁気浮上による鏡の支持方法が有用である可能性を示した。また将来の干渉実験への応用を見据えて、リング型磁石を用いたマイケルソン干渉計の制御実験を試みた。

Abstract

In principle, the phenomenon described by quantum mechanics does not depend on the mass scale. However, the quantum mechanics in the macroscopic system exceeding Planck mass has not been verified yet. Therefore, it is required to observe it experimentally. Generally, the phenomenon that a matter loses its quantum property is called decoherence, and it is thought that decoherence is mainly caused by two factors. One is that macroscopic systems are more likely to interact with the environment than microscopic systems, which causes decoherence. The other is the theory that its quantum property is lost by its own gravity, and this phenomenon is called gravity decoherence. However, there has never been an example of observing gravity decoherence. Therefore, in order to verify these theories, a method using a mechanical optical system such as a laser interferometer has been attracting attention in recent years. The mechanical optical system measures the displacement of the oscillator by the interference of light, and it is expected that the quantum effect appearing on the oscillator can be observed.

As a condition for observing quantum phenomena, it is necessary to make the position measurement sensitivity of the mirror reach the standard quantum limit. The standard quantum limit is the limit of the position measurement accuracy of the oscillator derived from Heisenberg's uncertainty principle, and the position measurement accuracy is limited in principle by the standard quantum limit. However, in a conventional method of suspending a mirror using a wire suspension, the sensitivity of the mirror position measurement is limited by the thermal noise of the suspension wire. In the previous study, it focused on the phenomenon that the diamagnetic material levitates by applying a strong magnetic field to the diamagnetic material, and aimed at avoiding thermal noise by magnetically levitating the quartz mirror as the diamagnetic material. It developed a magnet suspension system composed of a permanent magnet and iron, and succeeded in levitation of mg-scale quartz experimentally. The noise at the 0.1 mg scale was calculated and it was shown that the standard quantum limit could be aimed at from 400 Hz to 80 kHz by using the magnetic levitation. On the other hand, micro mirrors at that mass scale have not yet been developed. Therefore, in this study, instead of directly levitating the quartz mirror, we propose to use graphite, which has stronger levitation force. By using graphite, it is possible to levitate a mirror of a large mass scale without requiring a strong magnetic field. In a previous study, it chose quartz because the electrical resistivity of graphite is extremely small compared to that of quartz, and eddy current thermal noise has a large influence on the electrical resistivity. In this study, we estimated the noise of a 10 mg oscillator and calculated the required parameters to reach the standard quantum limit. If the required value is met, the standard quantum limit can be aimed at 800 Hz to 20 kHz. This paper shows the possibility in which the support method of the mirror by magnetic levitation using graphite and ring type magnet is useful. We also attempted a control experiment of a Michelson interferometer using a ring-type magnet, aiming at application to future interference experiments.

目次

1	巨視的量子力学の検証	5
1.1	重ね合わせの原理	5
1.2	巨視的量子現象を観測するための検証条件	6
1.3	雑音	6
1.4	量子雑音	10
2	反磁性体の磁気浮上	10
2.1	磁性	11
2.2	反磁性体の浮上原理	15
2.3	磁石の配列と形状	16
2.4	グラファイトとリング型磁石	17
3	磁気浮上の雑音	21
3.1	磁石の磁場勾配測定	22
4	渦電流熱雑音	25
4.1	ジュール熱によるエネルギーの散逸	26
4.2	Q 値の測定実験	27
4.3	渦電流熱雑音の見積もり	29
5	環境磁場雑音	34
6	磁石の熱雑音	35
6.1	温度揺らぎ	35
6.2	磁石の温度揺らぎ	36
6.3	磁石が作り出す磁場の温度依存性	39
7	雑音のまとめ	43
8	磁気懸架を用いた干渉計の制御	44
8.1	フィードバック制御	45
8.2	信号	47
8.3	離散時間 LTI システム	48
9	干渉計の制御実験	49
9.1	実験機器	50
9.2	磁気浮上を用いたマイケルソン干渉計の制御	54
10	結論と今後の課題	58

1 巨視的量子力学の検証

量子力学は現代の物理学において根幹をなす理論である。巨視的な物体の運動は古典力学によって記述される。その一方で、原子などの微視的な物体の運動を記述するのが量子力学である。しかし、プランク質量スケールを超えるようなマクロな質量スケールになると量子力学が成立しなくなるのは何故かという疑問についての明確な答えはまだなく、コペンハーゲン解釈 [1] や多世界解釈 [2]、修正量子論 [3] などの様々な理論の提唱が行われ議論されている。したがってこれらの説を検証するため、実験的に巨視的量子現象を観測することが求められている。

1.1 重ね合わせの原理

量子力学の基本的な性質として、重ね合わせ状態というものがある。重ね合わせ状態を観測した有名な実験として、Claus Jönson の二重スリット実験がある [4]。この実験は、ヤングが光の波動と粒子の二重性を証明するために行った干渉実験を、電子に置き換えたものである。実験の様子を図 1 に示す。電子銃という装置を用いて、電子を 1 つずつ 2 つのスリットに向けて照射する。スリットを通り抜けた電子は、スリットの後ろに設置されたスクリーンに到達する。すると、スクリーンには、1 つの電子につき 1 つの輝点が現れる。これを何度も繰り返すことで、スクリーン上には干渉縞ができる。スリットを通り抜けた電子の状態 $|\phi\rangle$ は、右のスリットを通り抜けた状態 $|\phi_1\rangle$ と左のスリットを通り抜けた状態 $|\phi_2\rangle$ とすると、

$$|\phi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle \quad (1.1)$$

と書ける。ここで、 c_1 、 c_2 は定数であり、 $c_1^2 + c_2^2 = 1$ を満たす。このように電子の状態は 2 つの状態の重ね合わせで表すことができ、スクリーンに干渉縞が見えたのはこのためであると解釈できる。

次にスリットを通り抜ける時に右と左のどちらのスリットを通り抜けたのかを測定するため、センサーを設置し同様の実験を行う。すると、干渉縞は観測できなくなる。これはセンサーで測定したことによって、重ね合わせの状態が消失したためである。つまり、デコヒーレンスが起きたことを意味する。

これまでに、ミクロな物質の重ね合わせ状態は、電子の他にフラレン分子 [5] や原子量が 1000 程度の高分子 [6] などのものが確認されている。

一方で、マクロな物質の重ね合わせ状態は未だ観測された事はない。現在の量子力学は、質量スケールに依存しないと考えられているため、マクロな物質においても重ね合わせ状態は観測できるはずである。しかし、実際には観測できていないという事実から、以下の説が考えられる。1 つ目の説としてマクロな物質の重ね合わせ状態は存在するが、一般的にマクロな物質は周囲の環境との相互作用が起りやすくデコヒーレンスが起るからという説がある。2 つ目の説として、ある程度の質量をもつ物質は、自身の重力によって量子生が消失するという説で、これは重力デコヒーレンスと呼ばれる [7]。また 3 つ目の説として、マクロな物質には、重ね合わせの状態が存在しないというもので、量子力学が適用できる質量スケールには限界が存在するという説である。これらの説を検証するためには、様々な質量スケールにおいて実験検証を行う必要がある。検証実験として、現在注目を集めているのが、機械光学系実験（オプトメカニクス実験）であり、fg ~ kg までの質量スケールにおいて、実験が行われている [8]-[14]。

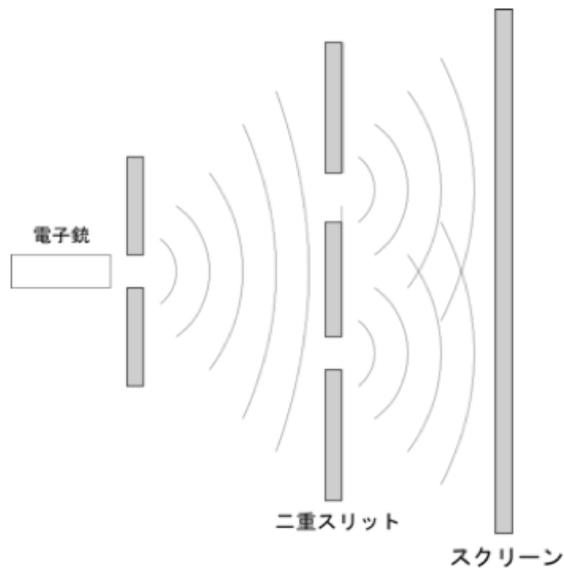


図 1: 二重スリット実験の様子

1.2 巨視的量子現象を観測するための検証条件

1.2.1 標準量子限界

巨視的量子現象を観測するには、実験系の位置測定精度を Heisenberg の不確定性原理 ([15]) より導出される標準量子限界 (Standard Quantum Limit : SQL) まで到達させる事が必要となる。Heisenberg の不確定性原理は、位置の揺らぎ $\Delta\hat{x}$ と運動量の揺らぎ $\Delta\hat{p}$ に対して、 \hbar はディラック定数とおくと

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.2)$$

という関係式で表すことができる。これより量子的な影響によって、実験系の位置測定精度は制限されることがわかる。

実際に、 ω を角周波数として、自由質点の標準量子限界の位置のパワースペクトル密度を式で表すと、

$$S_{SQL}(\omega) = \frac{2\hbar}{m\omega^2} \quad (1.3)$$

となる。また、一般的な振動子の力から変位の感受率を $\chi(\omega)$ とおけば

$$S_{SQL}(\omega) = 2\hbar|\chi(\omega)| \quad (1.4)$$

と書くこともできる [16]。

1.3 雑音

巨視的量子現象の検証を行うための条件として、実験系を SQL に到達させなくてはならないという事がある。すなわち系の量子性を覆い隠してしまうような全ての古典雑音が量子雑音よりも小さくなる実験系を用意する必要がある。ここでは、機械光学系において感度に制限を与える雑音について述べる。

1.3.1 地面雑音

地面は常に振動しており、その振動が懸架系から鏡に伝わり共振器長を変化させる要因となる。このような雑音を地面雑音という。地面振動のスペクトルは典型的におよそ、

$$\delta_{seis}(f) = \begin{cases} 10^{-5} & (f < 0.1Hz) \\ \frac{10^{-7}}{f^2} & (f > 0.1Hz) \end{cases} \quad (1.5)$$

であることが知られている [17]。これより、地面雑音は周波数 f の二乗に反比例して減衰し、主に低周波数帯において感度を制限する雑音となる。地面振動は懸架系を振り子にすることで防振することができる。

1.3.2 残留ガス雑音

空気分子は空気の温度によりランダムな熱運動をしており、一部の分子が鏡に衝突することで鏡の振動を励起する。この振動によって共振器長が変化するため、雑音となる。実験系を理想的な真空にすればこの雑音は存在しないが、実際はポンプの性能によって完全な真空を実現することはできないため、多少のガスが残留する。よってこの雑音を残留ガス雑音と呼ぶ。残留ガス雑音のスペクトルは、

$$S_{gas}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{4k_B T \omega_0 Q_{gas}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 Q_{gas}^2 + \omega_0^2 \omega^2} \quad (1.6)$$

で与えられる。ここで、 m は鏡の質量、 k_B はボルツマン定数、 T を鏡の温度、 ω_0 を鏡の共振角周波数と表す。また、 Q_{gas} は、

$$Q_{gas} = \frac{Cm\omega_0}{SP_{gas}} \sqrt{\frac{k_B T}{m_{mol}}} \quad (1.7)$$

で定義される [18]。ただし、 C は鏡の形状に依るパラメータで、一般的におよそ 1 程度である。 S は鏡の面積、 P_{gas} は残留ガスの圧力、 m_{mol} は残留ガスの平均質量である。

1.3.3 熱雑音

熱雑音とは系が熱浴と接している時に、エネルギー等分配則により 1 自由度あたり $k_B T/2$ のエネルギーをランダムにやりとりする事に起因して揺らぎが生じる雑音のことである。熱雑音の周波数依存性は揺動散逸定理 [21] によって求める事ができる。揺動散逸定理とは系における揺動と散逸の関係を記述する定理のことで、系の散逸が分かれば揺動力を一意に求める事ができる。

振動子の熱雑音

一般に振り子の運動方程式は、 m を振動子の質量、 ω_0 を共振周波数、 $F(t)$ を外力とすれば

$$m\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.8)$$

で表される。ここで Γ は速度に比例して働く減衰項の比例定数であり、 k は機械的なばね定数である。ばね定数は、

$$k = m\omega_0^2 \quad (1.9)$$

と書くことができ、振動子の散逸 γ を、

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2m} \quad (1.10)$$

と定義して、式 (1.8) をフーリエ変換を行い、書き直すと

$$m(\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) = F(\omega) \quad (1.11)$$

となる。式 (1.11) より、振動子の感受率 $\chi(\omega)$ を求めると、

$$\chi(\omega) = \frac{x(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \quad (1.12)$$

を得る。感受率とは角周波数空間における変位 x と外力 F の比であり、外力が加わったときにどの程度の変位が起こるのかを意味する物理量である。

外力の揺らぎが振動子に加わったときの変位スペクトルを考える。外力のスペクトルが S_f であったとき、その変位スペクトル S_x は、

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= |\chi_m(\omega)|^2 S_f \\ &= \frac{1}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} S_f \end{aligned} \quad (1.13)$$

となる。また、熱揺動力のスペクトル S_{fluc} は、

$$S_{fluc}(\omega) = 4k_B T \gamma m \quad (1.14)$$

で表される [18]。式 (1.12)、(1.14) より、振動子の熱雑音 S_{th} は

$$\begin{aligned} S_{th} &= |\chi(\omega)|^2 S_{fluc}(\omega) \\ &= \frac{1}{m} \frac{4k_B T \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

となる。

散逸には viscous damping モデルと structure damping モデルの 2 種類のモデルが存在する。viscous damping モデルは速度に比例した減衰力を考慮したモデルであり、散逸に周波数依存性をもつ。もう一方の structure damping モデルは散逸が周波数に依存しないモデルである。具体的に 2 つのモデルの損失角 ϕ はそれぞれ、

$$\phi = \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0 Q} & (\text{viscous モデル}) \\ \frac{1}{Q} & (\text{structure モデル}) \end{cases} \quad (1.16)$$

で表される。ここで、 Q とは共振周波数と散逸の比であり

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (1.17)$$

と定義される物理量である。また散逸 γ も同様の分類で、

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\omega_0}{2Q} & (\text{viscous モデル}) \\ \frac{\omega_0}{2Q\omega} & (\text{structure モデル}) \end{cases} \quad (1.18)$$

のように定義される。

鏡の熱雑音

鏡の熱雑音は鏡の基材とコーティング膜の熱雑音が存在する。2つの雑音のスペクトルはそれぞれ、

$$\delta_{sub}(\omega) = \sqrt{\frac{4k_B T}{\omega} \frac{\phi_{sub}}{\sqrt{\pi}\omega_L} \frac{1-\nu_s^2}{Y_s}} \quad (1.19)$$

$$\delta_{coat}(\omega) = \sqrt{\frac{4k_B T}{\omega} \frac{d_c \phi_c}{\pi\omega_L^2} \frac{Y_c^2(1+\nu_s)^2(1-2\nu_s)^2 + Y_s^2(1+\nu_c)^2(1-2\nu_c)}{Y_s^2 Y_c(1-\nu_c^2)}} \quad (1.20)$$

と与えられる [19]-[20]。ここで添字の s は鏡の基材、 c は鏡のコーティングを示し、 ϕ は損失角、 Y はヤング率、 ν はポアソン比、 d はコーティングの厚さ、 ω_L はビーム半径である。

鏡の基材として、fused silica(SiO_2)、コーティングとして TiO_2 doped Ta_2O_3 が $N+1$ 層、 SiO_2 が N 層の誘電体多層膜を考える。コーティングの厚さ d は鏡の反射率に決められる。屈折率がそれぞれ n_1 、 $n_2 (< n_1)$ の膜を交互にコーティングする誘電体多層膜の場合、1層の膜厚は光路長が $\lambda/4$ になるようにした時、反射光は最も強め合うに干渉する。通常は真空 ($n = 1$) から基材 ($n = n_2$) に向かって、 $n_1 n_2 n_1 n_2 \dots n_2 n_1$ と積層するようにコーティングを施し、 $2N + 1$ 層コーティングした時のコーティングの厚さ d は、

$$d = \frac{\lambda}{4} \left\{ \frac{1}{n_1} + \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) N \right\} \quad (1.21)$$

で決定される。

また、鏡の熱雑音はビーム半径 ω_L にも依存しており、その値が小さいほど熱雑音は大きくなるためにビーム半径 ω_L も重要なパラメータとなる。ビーム半径 ω_L は次のように決定される。ガウシアンビームの規格化された分布関数は、

$$p(r) = \frac{2}{\pi\omega_L^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_L^2}\right) \quad (1.22)$$

である。鏡の半径が r_m だとすると $r > r_m$ のレーザーパワーが失われることになるので、その量は

$$\int_{r_m}^{\infty} 2\pi r P(r) dr = \left[-\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_L^2}\right) \right]_{r_m}^{\infty} = \exp\left(-\frac{2r_m^2}{\omega_L^2}\right) \quad (1.23)$$

と求まる。これより損失するレーザーパワーの量は、鏡の半径とビーム径の半径の比 r_m/ω_L で決定される。共振器を考えた時に式 (??) で表されるような回折によって損失するレーザーパワーが、透過によって損失する量よりも十分小さくなるように r_m/ω_L のパラメータを考える必要がある。

懸架線の熱雑音

鏡をワイヤー等の懸架線で吊る場合、振り子モードの熱雑音だけでなく懸架線自体が弦振動するバイオリンモードと呼ばれる雑音も考慮する必要がある。バイオリンモードの n 次の共振角周波数が $\omega_n \sim n\pi\omega_p\sqrt{m/m_w}$ 、換算質量が $\mu_n = m/2[1 + (\omega_n/\omega_p)^2/\cos^2(l\omega_n/\nu)]$ とすると、懸架線の熱雑音は、

$$S_p(\omega) = \sum_n \frac{4k_B T}{\mu_n \omega} \frac{\omega_n^2 \phi_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \omega_n^4 \phi_n^2} \quad (1.24)$$

となる [22]。ここで、 m_w は懸架線の質量、 l は懸架線の長さ、 $\omega_p = \sqrt{g/l}$ は振り子の共振周波数、 $\nu = \sqrt{m_w g l / m}$ は懸架線の音速、 ϕ_n は n 次のバイオリンモードの損失角を表す。

1.4 量子雑音

光学実験による位置測定を行う時、光子数の揺らぎに起因する量子雑音が存在する。この量子雑音は2種類あり、一つはレーザー光の光子数の揺らぎが鏡を揺らす事により生じる輻射圧雑音である。もう一つは、光検出器に入ってくるレーザー光の光子数の揺らぎによって生じる散乱雑音である。

輻射圧雑音

レーザー光の光子数が揺らぐ事によって、光子が鏡に与える反作用（輻射圧）が変化し、鏡を揺らす。これによって生じて雑音を輻射圧雑音という。輻射圧雑音は、

$$S_{rad}(\omega) = |\chi(\omega)|^2 \frac{4N_p \hbar^2 \omega_L^2}{\kappa L^2} \left\{ 1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa} \right\}^{-1} \quad (1.25)$$

と表される。ここで、 N_p は共振器内の光子数、 ω_L はレーザーの角周波数、 κ は共振器内のロス、 L は共振器長、 Δ は共振器の離調を表す。

散乱雑音

光検出器に入射するレーザーの光子数が統計的に揺らぎ位相変化として捉えられ、鏡が変位していないにも関わらず、生じる雑音を散乱雑音といい、

$$S_{shot}(\omega) = \frac{\kappa L^2}{4N_p \omega_L^2} \left\{ 1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa} \right\} \quad (1.26)$$

と表される。

輻射圧雑音と散乱雑音はトレードオフの関係にあり、カップリング係数 K を、

$$K = \frac{4N_p \hbar \omega_L^2 |\chi(\omega)|}{\kappa} \left\{ 1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa} \right\}^{-1} \quad (1.27)$$

とすれば、輻射圧雑音と散乱雑音の合計は、

$$S_{rad} + S_{shot} = \frac{S_{SQL}(\omega)}{2} \left(K * \frac{1}{K} \right) \geq S_{SQL}(\omega) \quad (1.28)$$

となる。これより、量子雑音は標準量子限界以下には抑える事ができない事が分かる。

2 反磁性体の磁気浮上

前章では機械光学系による位置測定実験を行う際に生じる雑音について述べたが、mg 程度の鏡をワイヤー等の懸架線で吊るような系では懸架線の熱雑音が SQL 到達を妨げる。振り子を用いた懸架系のままで SQL 到達を目指すには懸架線の改良が必要になり、mg スケールの鏡を吊るす場合には Q 値が 10^7 程度である事が求められる。しかし、現状ではそのような懸架線を制作することは困難である。そこで先行研究 [23] では、石英が反磁性体であることに着目し、永久磁石を用いて石英鏡を磁気浮上させることで懸架線の熱雑音を回避し、SQL 到達に向けた懸架システムの開発を行った。実験的には約 1mg の石英を磁気浮上させることに成功した。一方で、現在の技術ではこの質量スケールの高品質な鏡を作成することはできない。そこで本論文では、浮上体として石英よりもより大きな浮上力を持つグラファイトを用いることで、先行研究よりも大きな質

量スケールの鏡の浮上を可能とした。また、後述する渦電流雑音の低減を目的としてリング型磁石を用いて 10mg 程度の振動子を浮上させ、実験系が SQL に到達するような構成の設計を行った。本章では、反磁性体の浮上原理について述べる。

2.1 磁性

一般に物質は磁場によって磁化される。しかし、磁化の方向や大きさは物質によって異なる。物質の磁性はミクロに見ると原子の磁気モーメントの存在とその配列によって決定される。現代の電磁気学では、磁気モーメントは電子の回転運動に起因するモデルが考えられている。電子の回転運動は、電子の軌道運動と自転に分けられる。

電子の軌道運動の作る磁気モーメントを古典量子力学（ボーアモデル）によって考える。電子の軌道運動に伴う磁気モーメント μ_{orbit} は、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$ を真空透磁率、 e を電気素量、 m_e を電子の質量、 l を軌道量子数とすると、

$$\mu_{orbit} = -\frac{\mu_0 e \hbar}{2m_e} l = -\mu_B l \quad (2.1)$$

となる。ここで、 $\mu_B = \mu_0 e \hbar / 2m$ をボーア磁子と呼び、電子の最小の軌道運動量 ($l = 1$) により生じる磁気モーメントに等しい。

電子は自転しており、スピン角運動量 $= \hbar s = 1/2 \hbar$ をもつ。 s はスピン量子数を示し、電子の場合は $1/2$ である。自転する電子が作る磁気モーメント μ_s の大きさは量子電磁気学によって見積もることができ、

$$\mu_s = -2\mu_B s = -\mu_B \quad (2.2)$$

と書ける。

電子の回転運動に伴う磁気モーメントを表す式 (2.1)、(2.2) に負の記号がつくのは電子の電荷が負であるため、角運動量の方向と磁気モーメントの方向は逆を向く。また、物質中では電子の軌道運動は周囲の原子によって妨害されるために角運動量を失うことが多く、物質の磁性はスピン角運動による所が大きい。

一般的に磁気モーメントの単位体積あたりの大きさを磁化 M と呼び、その量は物質内の磁気モーメントのベクトル和を体積 V で割ったもので、

$$M = \sum_i \frac{\mu_i}{V} [Wb/m^2 = T] \quad (2.3)$$

と表される。

真空中に磁束密度 B と外部磁場 H が存在するとき、その関係は、

$$B = \mu_0 H [T] \quad (2.4)$$

である。この空間に磁化 M が存在する場合は、

$$B = \mu_0 H + M \quad (2.5)$$

となる。また、磁場中に物質が存在するとき、物質には磁化が生じる。磁化は磁場に比例し、

$$M = \frac{\chi}{\mu_0} B \quad (2.6)$$

と表せる。ここで、比例係数 χ を単位体積あたりの磁化率といい、単位は H/m である。正の磁化率をもつ物質を常磁性体、負の磁化率をもつ物質を反磁性体という。また一度磁場を加えて、その後、印加磁場を無くても物質に磁化が生じている（自発磁化）ようなものを強磁性体という。

2.1.1 磁性体の種類

前節に示したように物質の磁性は電子が回転運動し、磁気モーメントをもつことに起因する。しかし原子が結合しイオン結晶や共有結合性化合物を形成すると軌道回転は消失し、自転についてはスピン方向が異なる電子が電子対を形成することで、磁気モーメントを失う。一方で、一部の遷移金属原子や希土類原子には不対電子が存在し、原子が磁気モーメントをもつ。これらの原子の配列によって磁性体の種類が特徴付けられる。

強磁性

磁気モーメントをもつ原子間に互いに平行になろうとする相互作用が働き、これらの全ての原子が同一方向を向くことにより全体として大きな磁化をもつ。この相互作用は、量子力学的な交換相互作用によって説明される。鉄、コバルト、ニッケルが該当する。

常磁性

磁気モーメントをもつ原子間に働く交換相互作用が十分小さい時、熱エネルギーにより磁気モーメントは時間的、空間的にバラバラの方向をむく。これにより自発磁化を持たないが、磁場をかけると磁気モーメントをもつ原子の向きが磁場の方向にそろい、全体として磁気モーメントをもつ。

反強磁性

磁気モーメントをもつ原子が互いに逆向きに整列する場合、磁気モーメントが互いに打ち消しあい自発磁化を持たない。これは原子間に負の交換相互作用が働くためである。

フェリ磁性

異なる大きさの磁気モーメントをもつ原子が互いに逆向きに整列する場合、原子間に働く交換相互作用は反強磁性と同じだが、磁気モーメントは完全に打ち消されないために、自発磁化をもつ。フェイライト磁石に使用される材料やマグネタイトはフェリ磁性である。

パウリ常磁性

金属中の自由電子がもつ磁性のことを言う。一般的にその磁化率は小さく、ほとんど温度変化しない。

反磁性

構成原子が磁気モーメントを持たない場合、外部磁場をかけると内殻電子にそれを打ち消す方向に渦電流が生じ、磁場と逆向きに微小な磁気モーメントが誘起される。従って、負の磁化率をもち、大部分の無機化合物や有機化合物が該当する。表 1 に主な反磁性体とその磁化率を示す。

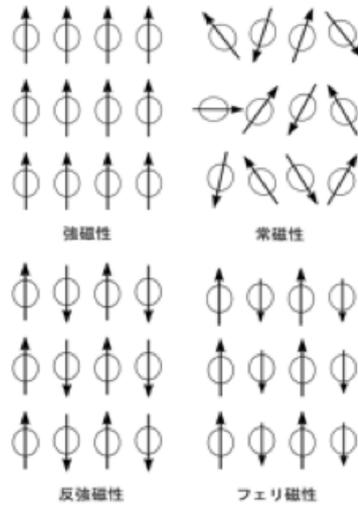


図 2: 磁性体の種類

表 1: 主な反磁性体の一覧 [24]

物質	磁化率 $-\chi (\times 10^{-6})$	密度 $\rho_m [g/cm^3]$	磁場 $\nabla B^2 [-T^2/m]$
熱分解グラファイト	450	2.2	60
グラファイト	160	2.2	170
ビスマス	170	9.8	710
水	9.04	1.0	1500
メタノール	6.66	0.79	1500
石英	13.9	2.2	1900
ダイヤモンド	21.8	3.5	2000
窒化ケイ素	9	3.2	4400
銀	23.8	11	5700
水銀	28	14	6200
金	34.5	19	6800
鉛	15.6	11	8700
シリコン	3.25	2.3	8700
銅	9.65	9.0	11000

磁石自身がもつエネルギーを静磁エネルギー U_m と呼び、磁石の表面から磁場 H が発生しているとする、

$$U_m = \frac{\mu_0}{2} \int \int \int H^2 dv \quad (2.7)$$

で与えられる。これより湧き出る磁束が大きいほど、大きな静磁エネルギーをもつ。

強磁性体のように磁気モーメントが内部で同一方向に揃っている時、その磁性体は静磁エネルギーが高く不安定な状態にある。磁気モーメントの向きが揃っている領域のことを磁区といい、一般的な強磁性体は複数の磁区に細分化されている。これによって静磁エネルギーが低下してポテンシャル的に安定した構造をとる。また、磁区の境界線を磁壁と呼ぶ。

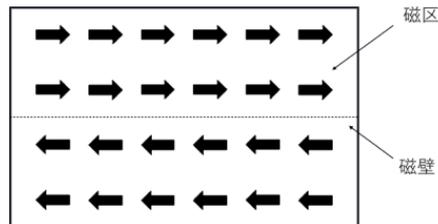


図 3: 磁区と磁壁

永久磁石は磁化していない強磁性体に外部磁場をかけることで作ることができる。この時の磁場と磁束密度の関係を曲線として表したものをヒステリシス曲線といい、図 4 に示す。0 から外部磁場を加えていくと、a のような曲線になり、b まで進み、磁性体内部の磁束密度が飽和する。この点の磁束密度 B_s を飽和磁束密度という。次に外部磁場を小さくしていくと元の曲線には戻らずに、c の曲線に従う。よって外部磁場を 0 にしてもある程度の大きさの磁束密度 B_r が残る。これを残留磁束密度という。さらに逆向きに外部磁場をかけると、磁化は 0 となる。この外部磁場の大きさ H_c を保磁力という。

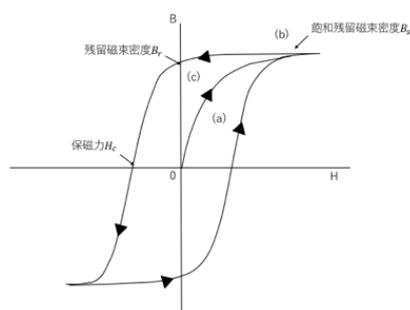


図 4: ヒステリシス曲線

2.2 反磁性体の浮上原理

Earnshaw の定理は、粒子に重力、静電力、磁力などの $\frac{1}{r^2}$ に従う任意の力またはそれらの組み合わせが作用する場合、安定した平衡位置を持たない可能性があることを証明した [25]。ここで、安定した平衡点とは全ての方向に対し、ポテンシャルが極小となる点のことである。外部磁場が印加された場では、正の磁化率 ($\chi > 0$) を持つ物質は磁場が最大化された場所に移動し、自由空間では安定して浮遊することができない。一方で、反磁性体についてはポテンシャルの極小領域が自由空間に存在する可能性があるため、磁場の最小領域に向かって押し出され、安定して浮上することができる。

静磁場の下で、反磁性体が安定して浮上できることを示す。その準備として、まず自由空間において静磁場 \mathbf{B} がラプラス方程式に従うことを示す。静磁場 \mathbf{B} の2階微分は、ベクトル解析の公式により

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.8)$$

と展開できる。Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.10)$$

を満たす。ここで、 μ は透磁率、 \mathbf{j} は電流密度、 ϵ は誘電率、 \mathbf{E} は電場を表す。今、静磁場、静電場の自由空間を考えると、静磁場 \mathbf{B} の2階微分は、

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (2.11)$$

となり、ラプラス方程式に従うことがわかる。

静的な外部磁場 \mathbf{B} 中に存在する磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ がもつポテンシャルエネルギー U_m は、

$$U_m = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (2.12)$$

で表される。ただし、これは $\boldsymbol{\mu}$ の大きさが一定であるという条件の元に導かれたものであることに注意する。

式 (2.6)、(2.12) より、体積 V の磁性体が磁場 \mathbf{B} 中に置かれた時に持つポテンシャルエネルギー U は、

$$\begin{aligned} U &= - \int_0^B V d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \\ &= - \frac{\chi V}{\mu_0} \int_0^B \mathbf{B} d\mathbf{B} \\ &= - \frac{\chi V}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。これより、磁性体が磁場から受ける力 \mathbf{F} は、

$$\mathbf{F} = -\nabla U = - \frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla \mathbf{B}^2 \quad (2.14)$$

である。

静的な外部磁場 \mathbf{B} を用いて、磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を持つ粒子を浮上させる事を考えると、安定な平衡点ではポテンシャルがどの方向でも極小である必要があるので、

$$\nabla^2 U > 0 \quad (2.15)$$

を満たさなくてはならない。しかし、式 (2.12)、(2.11) より、

$$\begin{aligned}\nabla^2 U &= \nabla^2(-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \\ &= -\boldsymbol{\mu} \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.16}$$

となり、ポテンシャルは極小点を持たない。つまり、安定に浮上する条件式 (2.15) を満たすことができず、自由空間において安定に浮上することはできない事がわかる。

次に粒子ではなく、体積 V の磁性体を浮上させることを考えると、式 (2.13)、(2.11) より、

$$\begin{aligned}\nabla^2 U &= \nabla^2\left(-\frac{\chi V}{2\mu_0} \mathbf{B}^2\right) \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}^2 \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \right)^2 + 2\mathbf{B} \nabla^2 \mathbf{B} \right\} \\ &= -\frac{\chi V}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \right)^2\end{aligned}\tag{2.17}$$

となる。これより、正の磁化率 ($\chi > 0$) を持つ強磁性体や常磁性体の場合は $\nabla^2 U < 0$ となってしまうが、負の磁化率 ($\chi < 0$) を持つ反磁性体の場合は $\nabla^2 U > 0$ となり、安定に浮上する条件式 (2.15) を満たすことができる。より具体的に水平方向と垂直方向に安定条件を区別して考える。この時、重力が負の z 方向に働くとすると、それぞれの安定条件と重力との釣り合いのための条件式は

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} > 0 \quad : \text{垂直方向安定性}\tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} > 0 \quad \text{水平方向安定性}\tag{2.19}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla \mathbf{B}^2 - \rho_m V g \mathbf{e}_z = 0 \quad : \text{釣り合い}\tag{2.20}$$

と表せる。ここで、 ρ_m は物質の密度、 \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトルを表す。

2.3 磁石の配列と形状

安定した浮上には磁場分布が非常に重要である。空間的に変化する磁場は超伝導磁石、またはハイブリッド磁石などによって生成することが可能である。また、電磁石や永久磁石、または両方の組み合わせによっても弱くはあるが、磁場を生成することができる。よって永久磁石を使用した反磁性浮上の場合、重要となるのは高い磁場勾配を構築することである。一般的に使用される磁石の構成を図5に示す。極性の異なる磁石が隣接するような構成の配列 (図5 (a)) は、局所的な急勾配の磁場を生成するのに効果的である。またこの磁石配列は安定しており、組み立ての際に接着する必要はない。磁極が回転するように磁石が並べられた線形ハルバッハ配列 (図5 (b)) は、一方の側に磁束を集中させ、もう一方の側に磁束をキャンセルする [26]。しかし、この配列方法は磁石の幅に沿った浮上体の動きを制限することはできない。2次元のハルバッハ配列が繰り返されている (図5 (c)) では、一方の側に磁場を集中させ、反対側の磁場をより少ない数の磁石を使用し

てキャンセルすることにより、より高い磁場を形成することができる [27]。ただし、このハルバツハ配列は組み立てのために接着する必要がある [51]。上記の磁石配列は、回転対称の磁場を生成し、主軸の周りの回転を除くすべての自由度を安定させるリング状の磁石（図 5(d)-(f)）から構築することも可能である [28]。

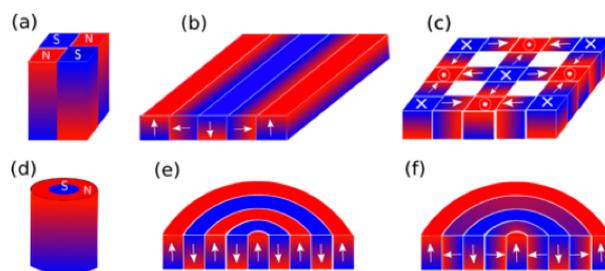


図 5: 反磁性浮上に用いられる主な磁石の配列方法 (a) 反対方向の磁極配列;(b) 線形ハルバツハ配列;(c)2 次元のハルバツハ配列;(d) と (e) リング型の反対方向の磁極配列;(f) リング型のハルバツハ配列

2.4 グラファイトとリング型磁石

本研究では、図 5 の (e) のような配列のリング型ネオジム磁石 (高さ 1cm、内径 1cm、外径 3.5cm、各の幅 5mm) を用いた。本節では永久磁石の形状をリング型にした理由について述べる。渦電流熱雑音は電気抵抗率と磁場勾配に依存する。その大きさは電気抵抗率には反比例し、磁場勾配に比例する。したがって、永久磁石と反磁性体を用いて磁気浮上を行う場合、浮上体の電気抵抗率を大きくし、永久磁石が作り出す磁場を一様にする事で渦電流熱雑音を低減できる。ここでいう磁場の一様性とは水平方向に対するものである。先行研究ではレーザーを鏡に対して垂直方向に当てる事を想定していたが、本研究では鏡に対し水平方向に当てる事を考える。磁気浮上で必要になるのは垂直方向に対する磁場勾配であるので、水平方向に対して磁場勾配が形成されないという事は、浮上に関しては問題ない。しかし安定性が確保されないので、浮上しても水平方向に対する支持力は働かないため、干渉計を組む際には何らかのアクチュエーターが必要になると考えられる。また、表 2 のように示すように浮上体としてグラファイトを用いた場合、浮上に必要な磁場因子の値は石英に比べ桁ほど小さく、浮上力が大きいことが分かる。そのため、より大きな質量スケールの鏡の浮上が可能となる。ここで電気抵抗率を見るとグラファイトが $10^{-6}[\Omega/m]$ と小さな値であるのに対し、石英は $10^{16}[\Omega/m]$ と非常に大きな値をもつ。これより渦電流熱雑音の悪化という観点から、先行研究では石英を選択している。しかし、本研究では永久磁石にリング型磁石を用いることで、浮上体としてグラファイトを用いても渦電流熱雑音の問題は、磁場勾配を小さくするというアプローチから回避することが可能である。

表 2: グラファイトと石英の物性値

	磁化率 $-\chi(10^{-5})$	密度 $\rho[g/cm^3]$	磁場因子 $\nabla B^2[-T^2/m]$	電気抵抗率 $[\Omega/m]$
グラファイト	16	2.2	170	10^{-6} [30]
石英	1.4	2.2	1900	10^{16} [31]

永久磁石の形状としてリング型磁石を用いた場合、理想的には系方向の磁場は一様になり、渦電流熱雑音の影響を低減が可能になる。例として棒型磁石とリング型磁石のそれぞれの磁場分布を図7と8に示す。リング型磁石が系方向に対し磁場が一様になっているのに対し、棒型磁石は端の方が強くなっており、磁場に非一様性があることが分かる。なおシミュレーションには有限要素法の解析ソフトである ANSYS を使用した。



図 6: 使用したリング型のネオジウム磁石

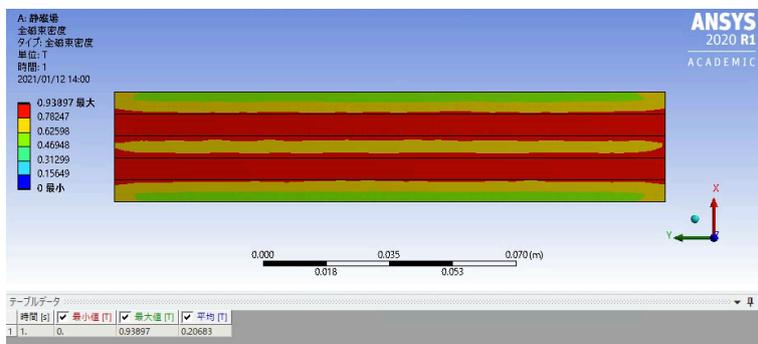


図 7: 反対方向の磁極を並べた棒型磁石の磁場分布

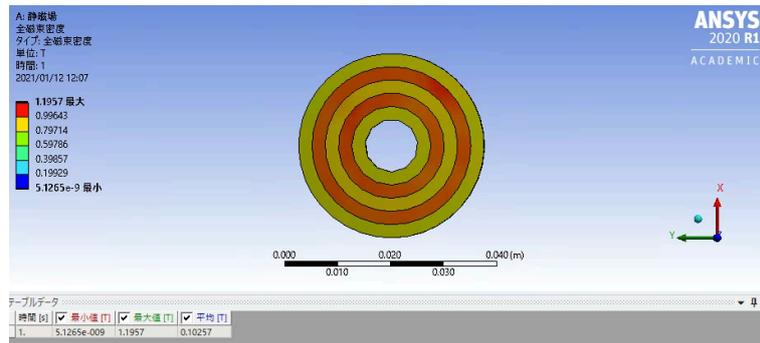


図 8: 反対方向の磁極を並べたリング型磁石の磁場分布

また、この図 6 のようなリング型磁石のセンター付近 ($1.75\text{cm} < x < 2.75\text{cm}$) で、グラファイトを浮上させる時の浮上位置をシミュレーションによって計算した。磁場のシミュレーションにはロスアラモス国立研究所が開発した電磁場シミュレーションソフト Poisson Superfish を用いた。Poisson Superfish は 2 次元または軸対称の問題を扱うことが可能である。またシミュレーションのコードをソースコード 1 に示す。重力で規格化させると図 9 のようになり、リングの頭上から 1mm 程度の高さで浮くことがわかる。

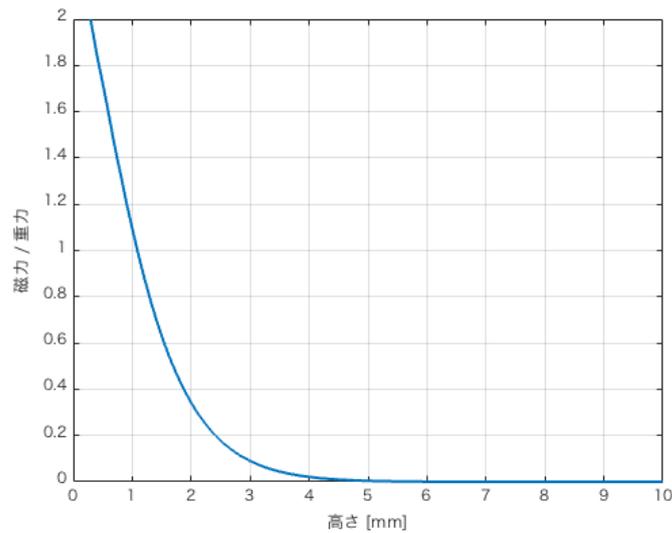


図 9: 浮上位置

ソースコード 1: 浮上位置のシミュレーションに用いたコード

```

1 Diamagnetic Levitation
2 &reg kprob = 0,
3 mode = 0,
4 icylin = 1,
5 xreg = 5
6 kreg = -1,300

```

```

7 kmax = 50
8 yreg = -2, 3
9 lreg = -1,10,300
10 lmax = 8
11
12 nbslo = 0,
13 nbsup = 0,
14 nbslf = 0,
15 nbsrt = 0 &
16
17 &po x = 0, y = -5 &
18 &po x = 20, y = -5 &
19 &po x = 20, y = 5 &
20 &po x = 0, y = 5 &
21 &po x = 0, y = -5 &
22
23 &reg mat =2 ,mshape = 1, mtid = 1 &
24 &po x = 1, y = 0 &
25 &po x = 1, y = -1 &
26 &po x = 1.5, y = -1 &
27 &po x = 1.5, y = 0 &
28 &po x = 1, y = 0 &
29
30 &reg mat = 3 ,mshape = 1, mtid = 2 &
31 &po x = 1.5, y = 0 &
32 &po x = 1.5, y = -1 &
33 &po x = 2, y = -1 &
34 &po x = 2, y = 0 &
35 &po x = 1.5, y = 0 &
36
37 &reg mat = 4 ,mshape = 1, mtid = 3 &
38 &po x = 2, y = 0 &
39 &po x = 2, y = -1 &
40 &po x = 2.5, y = -1 &
41 &po x = 2.5, y = 0 &
42 &po x = 2, y = 0 &
43
44 &reg mat = 5 ,mshape = 1, mtid = 4 &
45 &po x = 2.5, y = 0 &
46 &po x = 2.5, y = -1 &
47 &po x = 3, y = -1 &
48 &po x = 3, y = 0 &
49 &po x = 2.5, y = 0 &
50
51 &reg mat = 6 ,mshape = 1, mtid = 5 &
52 &po x = 3, y = 0 &

```

```

53 &po x = 3, y = -1 &
54 &po x = 3.5, y = -1 &
55 &po x = 3.5, y = 0 &
56 &po x = 3, y = 0 &
57
58
59 &mt mtid = 1
60 aeasy = 90,
61 gamper = 1,
62 hcept = -10800, bcept = 12800. &
63
64 &mt mtid = 2
65 aeasy = 270,
66 gamper = 1,
67 hcept = -10800, bcept = 12800. &
68
69 &mt mtid = 3
70 aeasy = 90,
71 gamper = 1,
72 hcept = -10800, bcept = 12800. &
73
74 &mt mtid = 4
75 aeasy = 270,
76 gamper = 1,
77 hcept = -10800, bcept = 12800. &
78
79 &mt mtid = 5
80 aeasy = 90,
81 gamper = 1,
82 hcept = -10800, bcept = 12800. &

```

3 磁気浮上の雑音

本章では磁気浮上を行う際に、本システム特有の主な雑音源について述べる。また、各雑音の大きさを見積もり、系がSQLに到達するために必要なパラメータを求める。なお、浮上させる鏡は半径 $2mm$ 、幅 $0.2mm$ 、質量 $5mg$ で、グラフィイトは長辺 $2mm$ 、短辺 $2mm$ 、高さ $0.5mm$ の直方体を想定する。グラフィイトは永久磁石が形成する磁場の他に環境などによる外部磁場の影響も受ける。それぞれの磁場を $B_{mag,x}$ 、 $B_{env,x}$ と書けば、グラフィイトが磁場から受ける力は、

$$F_x = \frac{\chi V}{\mu_0} (B_{mag,x} + B_{env,x}) \left(\frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

である。ここで、磁場と力をその平均値と揺らぎ成分に分けて書くことにすると、

$$B_{mag,x} = \overline{B_{mag,x}} + \Delta B_{mag,x} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x}} + \Delta \frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$B_{env,x} = \overline{B_{env,x}} + \Delta B_{env,x} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial B_{env,x}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial B_{env,x}}{\partial x}} + \Delta \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$F_x = \overline{F_x} + \Delta F_x \quad (3.6)$$

となる。これより力の揺らぎ成分のみを記述すると、

$$\Delta F_x \sim \frac{\chi V}{\mu_0} \left(\overline{B_{mag,x}} \Delta \frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x} + \overline{\frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x}} \Delta B_{mag,x} + \overline{\frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x}} \Delta B_{env,x} + \overline{B_{mag,z}} \Delta \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x} \right) \quad (3.7)$$

である。第1項と第2項は磁石の磁場変動に起因する項であり、磁石の熱雑音を表す。また第3項と第4項は環境磁場の変動に起因する項であり、環境磁場雑音を表す。

3.1 磁石の磁場勾配測定

リング型磁石は理想的には系方向に対し、磁場は一樣であり勾配は存在しないはずであるが、実際には磁気モーメントのばらつきなどの理由により非一様性が存在する。そこで、リング型磁石の表面磁束密度の測定実験を行い、リング上の垂直方向と周方向の平均磁場勾配を求めた。実験は、回転台に乗せたリング型磁石の上部にテスラメーターを設置し、回転させながら磁石の表面磁束密度を計測した。テスラメーターにはカネテックの TM-801 を使用した。

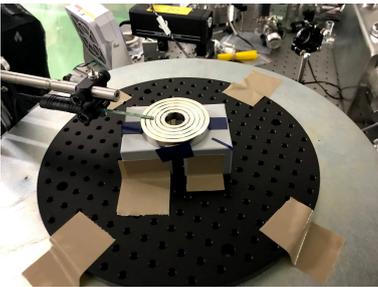


図 10: 回転台とリング型磁石

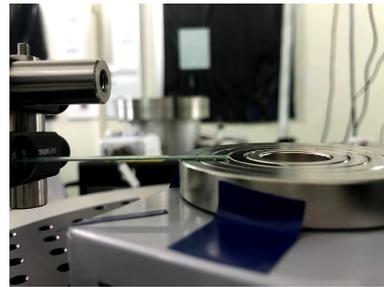


図 11: 垂直方向の磁束密度測定の様子

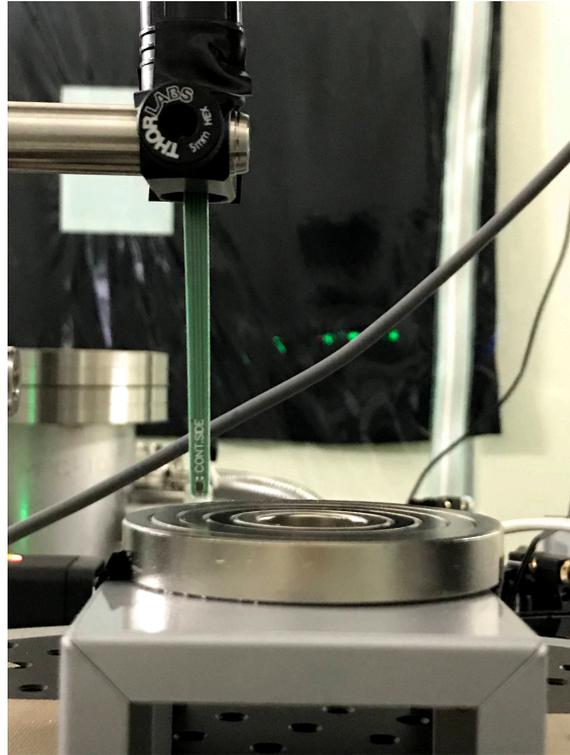


図 12: 周方向の磁束密度測定の様子

測定は磁石表面からの高さを 1mm から 5mm まで、1mm ずつ変えながら行なった。垂直方向の磁束密度の測定結果を図 13 に示す。また測定結果から磁場勾配を計算したものを表 3 に示す。これより、同じ高さでも周方向に位置が変化すると、磁場が変化している事が分かる。

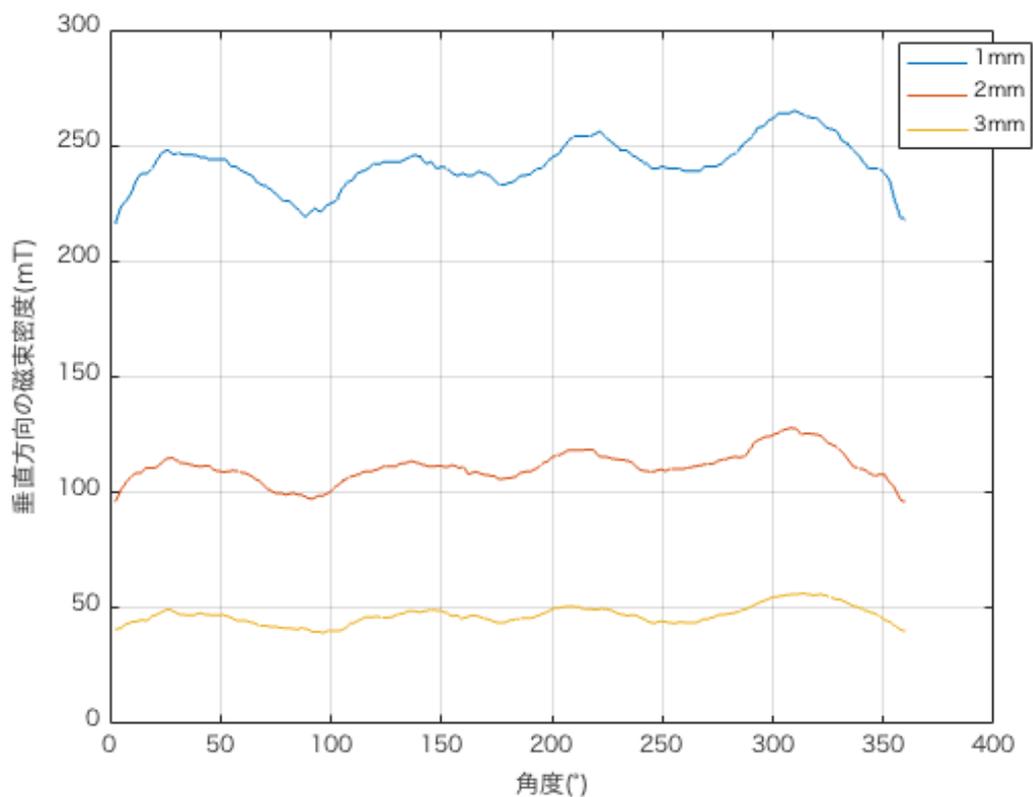


図 13: 垂直方向の磁束密度

表 3: 平均磁束密度勾配

高さ [mm]	垂直方向の平均磁束密度勾配 $\frac{dB_z}{dx}$ [T/m]
1	1.65
2	1.06
3	0.66

同様に、周方向についての磁束密度の測定結果と磁場勾配の計算結果を図 14 と表 4 に示す。前節まではリング型磁石は周方向の磁場に対して一様性がある事を示してきたが、実際には高さ $1mm$ で $0.23T/m$ 、 $2mm$ で $0.14T/m$ 、 $3mm$ で $0.09T/m$ の磁場勾配がある事が分かる。

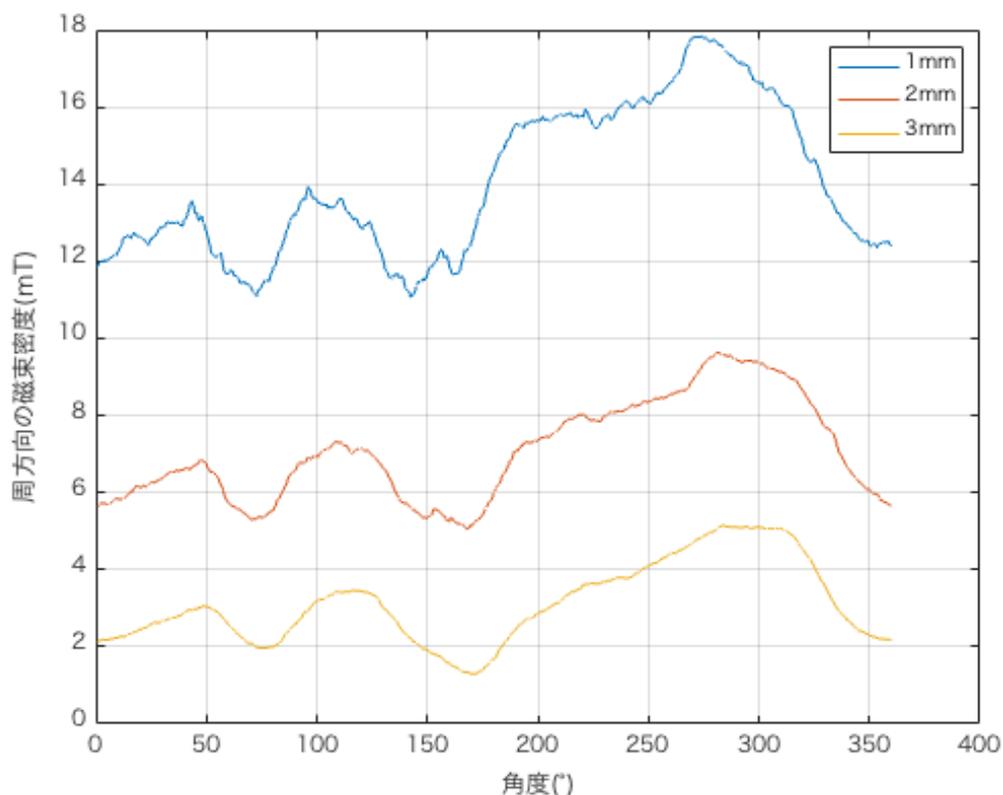


図 14: 周方向の磁束密度

表 4: 平均磁束密度勾配

高さ [mm]	周方向の平均磁束密度勾配 $\frac{dB_x}{dx}$ [T/m]
1	0.23
2	0.14
3	0.09

4 渦電流熱雑音

ある物質を貫く磁場の大きさが変化した時ファラデーの電磁誘導の法則に従い、物質の内部に磁場変化を打ち消すような渦電流が流れる。発生した渦電流はジュール熱に変換され、揺動散逸定理に従い、そのジュール熱は周囲の物質に散逸される。これによって発生するのが渦電流熱雑音である。この散逸は viscous モデルに従う。浮上しているグラファイトはわずかに磁化しているため、何らかの外乱により振動することによって磁石を貫く磁場の大きさは変化する。従って渦電流熱雑音は発生する。また渦電流が生じるのは磁石だけではなく、グラファイト内部においても発生する。浮上体の渦電流の散逸は電気抵抗率に反比例する。前章で示したようにグラファイトの平面に対して平行な電気抵抗率は、 10^{-6} 程度であった。一方で石英の電気抵抗率は

10^{16} 程度であり、グラファイトに比べて渦電流熱雑音の影響を大きく低減できる。先行研究 [23] では以上の理由から浮上体としてグラファイトではなく石英を選択している。しかし、リング型磁石は理想的には周方向に対する磁場勾配が存在しないため、低い電気抵抗率をもつグラファイトでも渦電流熱雑音を抑えることができると考えられる。しかしながら、実際には表 3 と表 4 に示したように、リング型磁石にも磁場勾配が存在することが実験的に確かめられた。そこで、本章では磁場勾配が存在する場合の渦電流熱雑音の散逸と Q 値を計算し、SQL に到達するためにはどの程度までの磁場勾配が許容されるのかを見積もる。

4.1 ジュール熱によるエネルギーの散逸

本節では渦電流によって生じるジュール熱と散逸の関係式を理論的に導出する。ジュール熱によってグラファイトが何らかの外乱によって振動したとする。グラファイトは磁化されているので、リング型磁石を貫く磁場は変化する。これよりリング型磁石には渦電流が誘起され、ジュール熱が発生する。発生する渦電流は、円柱座標 (r, z, ϕ) に対して ϕ 方向に流れる。磁束 Φ があるループ面を貫くとすると、発生する起電力 V は

$$V(r, z) = -\frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial t} \quad (4.1)$$

と表せる。また、電場の ϕ 成分を E_ϕ 、電流密度の ϕ 成分を j_ϕ 、電気抵抗率を ρ とすれば、

$$\Phi(r, z) = 2\pi \int_0^r B_r(r', z) r' dr' \quad (4.2)$$

$$V(r, z) = 2\pi r E_\phi(r, z) \quad (4.3)$$

$$E_\phi(r, z) = \rho j_\phi(r, z) \quad (4.4)$$

となる。これより、発生する渦電流 $j_\phi(r, z)$ は、

$$j_\phi(r, z) = -\frac{1}{\rho r} \int_0^r \frac{\partial B_r(r', z)}{\partial t} r' dr' \quad (4.5)$$

と表せる。これより渦電流によって生じるジュール熱 P は、

$$P = 2\pi\rho \int \int r j_\phi(r, z)^2 dr dz \quad (4.6)$$

となる。

式 (1.8) の外力に $F(t) = \delta(t)$ を入力した出力、すなわちインパルス応答を見ると、熱平衡状態に至るまでの変位 $x(t)$ は、

$$x(t) \propto e^{-\gamma t} \sin \omega_m t \quad (4.7)$$

となる。これを時間微分すると、

$$v(t) \propto -\gamma e^{-\gamma t} \sin \omega_m t + \omega_m e^{-\gamma t} \cos \omega_m t \quad (4.8)$$

となる。ここで、 $\sin \omega_m t$ が 0 となるような時刻を考えれば $v(t) = v_0 e^{-\gamma t}$ とおくことができ、さらに系のエネルギーのうち弾性エネルギーの時間微分を考えると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) \propto k e^{-\gamma t} \sin(\omega t) v(t) = 0 \quad (4.9)$$

となるので、エネルギーの散逸はすべて運動エネルギーに変換されることになり、

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2(t) \right) \\
 &= m \gamma v(t)^2
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

となる。

またグラファイトを浮上させる周辺の磁場 $B(r, z)$ は

$$B(r, z) = B_0 + \frac{dB}{dr} r
 \tag{4.11}$$

で近似される。式 (4.5)、(4.6)、(4.10) より、グラファイト内部で生じる渦電流による散逸は、

$$\gamma = \frac{\left(\frac{dB}{dr}\right)^2 r_0^2}{8\rho\rho_m}
 \tag{4.12}$$

となる。ここで、 r_0 は半径、 ρ_m は密度を表す。

4.2 Q 値の測定実験

実際に Q 値の測定実験を行なった。測定方法としては、図 15 のように真空槽にリング型磁石とグラファイト (5mm×3mm×1mm) を入れてシャドーセンシング法を用いた。

リング型磁石上に浮上させたグラファイトの縁に対して平行にレーザー光を入射する。その後、グラファイトに振動を励起すると、光検出器で検出されるレーザー光量も振動に従って変化する。この光量を計測することで、振動の減衰を見積もる。なお測定は真空度 10–4Pa の下で行なった。

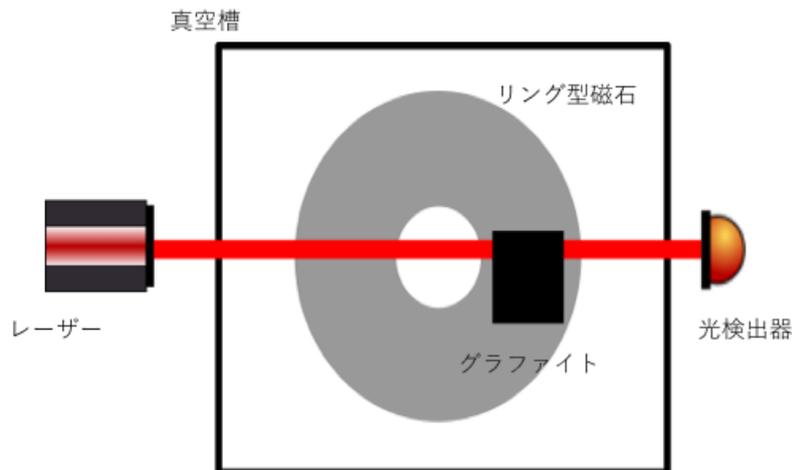


図 15: シャドーセンシングの概念図

結果は図 16 のようになった。これを式 (4.7) でフィッティングを行い Q 値の推定を行う。ただし、このままではフィッティングは行うのが難しいため、図 17 のように共振周波数付近でハイパスフィルターをかけてフィルター処理を行い、絶対値をとったのちにフィッティングを行なった。

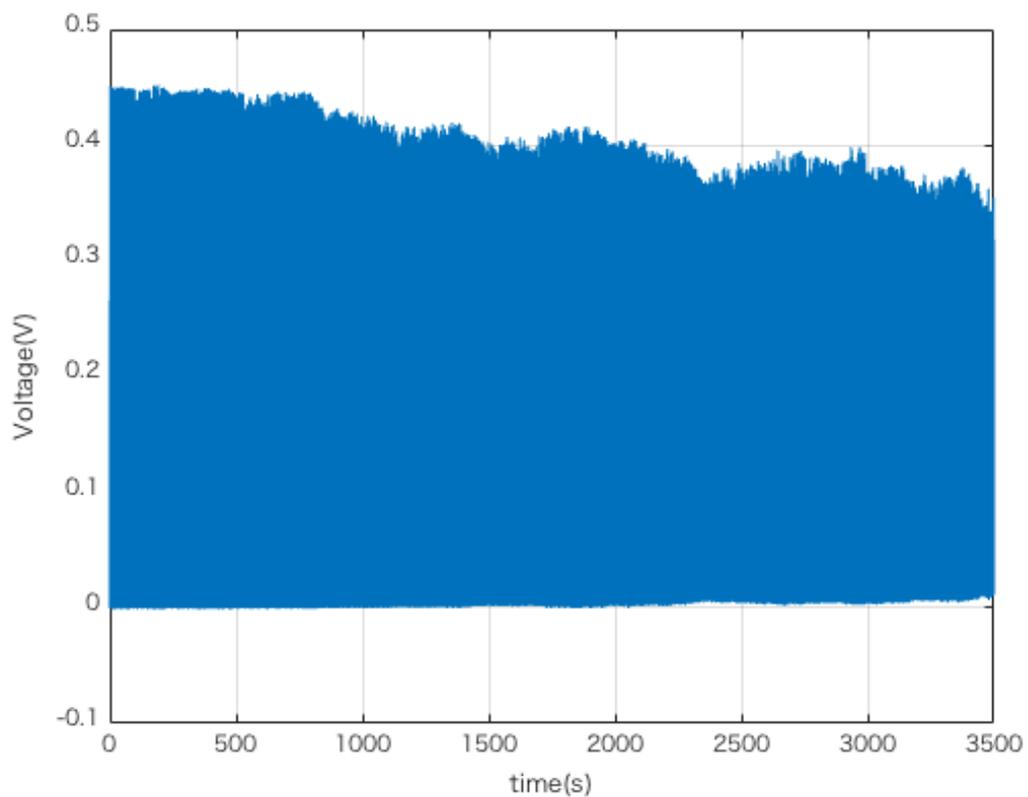


図 16: シャドーセンシングによるリングダウンの様子

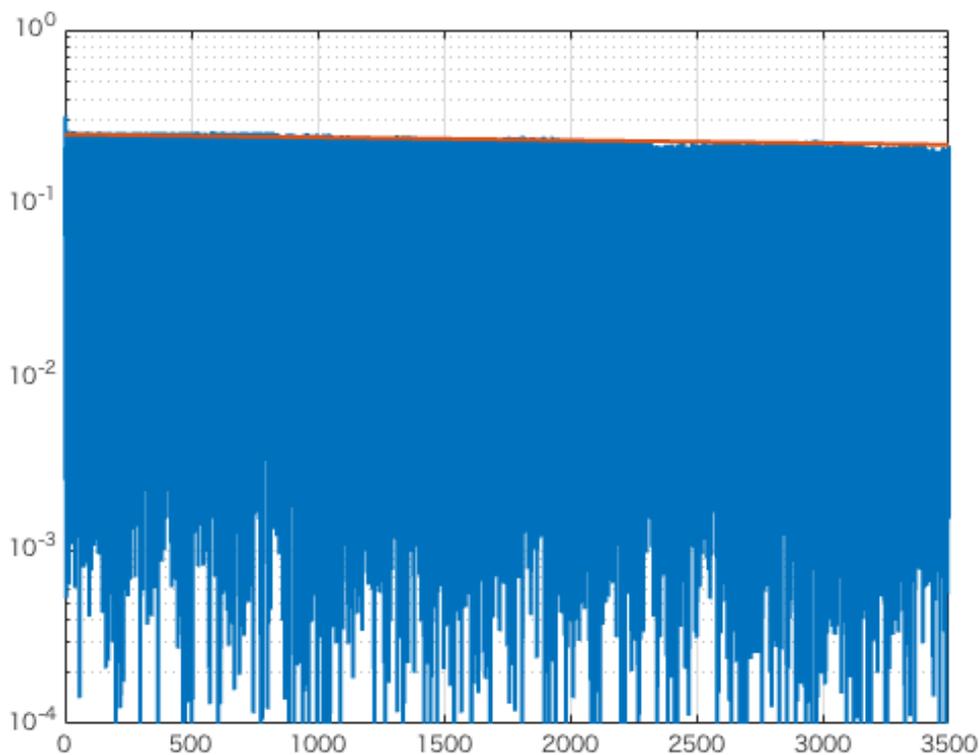


図 17: フィッティングの様子。図 16 の信号にフィルター処理をかけて、絶対値をとった。

以上より実験結果から共振周波数、フィッティングから散逸と Q 値を見積もったところ、表 5 のようになった。

表 5: Q 値の測定結果

共振周波数 [Hz]	散逸	Q 値
0.5	3.9×10^{-5}	3×10^4

4.3 渦電流熱雑音の見積もり

渦電流熱雑音が Q 値によってどの程度まで変化するかを計算する。そこで、Q 値を 10^5 、 10^6 、 10^7 と値を変化させてそれぞれの寄与を求めた結果、図 18 のようになった。鏡の熱雑音は Q 値に寄らない雑音である。これより、リング型磁石とグラファイトによる磁気浮上システムは低周波側は渦電流熱雑音、高周波側は鏡の熱雑音によって制限されることが分かる。また、SN 比 3 以上を得るためには Q 値が 10^6 以上であることが条件であることが求められた。これより前節の実験結果では Q 値 4×10^4 程度であったので、このままでは要求値を満たさない事が分かる。

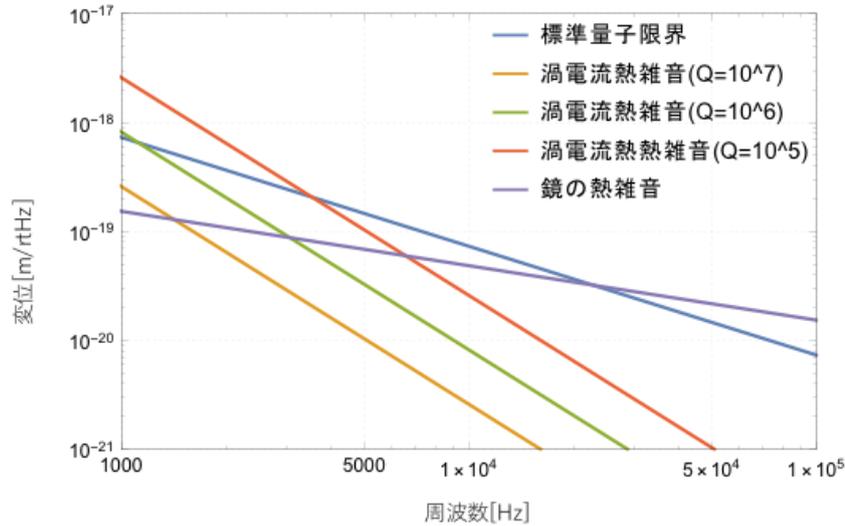


図 18: 渦電流熱雑音

4.3.1 渦電流による Q 値のシミュレーション

前節では磁場勾配が 1.65T/m 程度存在する場合、Q 値が 3×10^4 であることがわかった。そこで本節では、要求値である Q 値 10^6 以上を得るための磁場勾配を求める。リング型磁石上で浮上する磁化 μM のグラファイトが振動することによって、磁石とグラファイトに生じる渦電流をシミュレーションし、そこから散逸と Q 値を計算する。

浮上位置 1mm でグラファイトは 1.89×10^{-5} T 程度で磁化し、振動した時に周方向に磁場勾配が存在するとすれば、磁化の大きさは変化し磁石を貫く磁場も変化する。グラファイトがある位置にある場合とそこから微小にずらした場合のそれぞれの磁場分布のシミュレーションを ANSYS で行い、磁石を貫く磁場を差し引きする事で磁場の変動を求め、磁石内部に生じる渦電流を計算する。

解析対象の系はグラファイト、リング型磁石、それらを囲む空気から構成される。解析には磁場の境界条件を定めるために空気も設定する必要がある。シミュレーションではグラファイトを磁石に置き換えて、残留磁束密度が一様になるように保磁力を 1×10^6 Oe として十分高く設定した。さらにリング型磁石が作る磁場とグラファイトの磁場を同時に解析することは困難であるため、リング型磁石の磁場は無視する。表 6 に解析に用いた材料特性を示す。

表 6: 解析対象の材料特性

	材料特性
リング型磁石	比透磁率 1.05
グラファイト	保磁力 1×10^6 [Oe]
空気	比透磁率 1

グラファイトの磁化は

$$\begin{aligned}\mu\chi &= \chi B \\ &= \chi(B_0 + \frac{dB}{dr}r)\end{aligned}\tag{4.13}$$

で決定される。ここで、 B_0 は定数である。浮上位置 1mm で $B_0 = 0.42\text{T}$ 程度である。この式 (4.13) より磁場勾配 $\frac{dB}{dr}$ が存在することにより、 r だけ変位した時に磁化の値が変化することがわかる。シミュレーションではグラファイトの変位を 1mm として、磁場勾配を 0.1、0.01、0.001T/m と変化させて解析を行なった。

表 7: 磁場勾配による磁化の変化

磁場勾配 [T/m]	磁化 [T]
0.1	1.88968×10^{-5}
0.01	1.88928×10^{-5}
0.001	1.88924×10^{-5}

グラファイト、リング型磁石、空気の 3 次元モデルを作成した。グラファイトは $2\text{mm} \times 2\text{mm} \times 0.5\text{mm}$ の直方体、リング型磁石は高さ 1cm、内径 1cm、外径 3.5cm、各の幅 5mm、空気は $2070\text{mm} \times 2070\text{mm} \times 2070\text{mm}$ の直方体である。グラファイトの位置はリング型磁石表面から高さ 1mm の位置に設定した。作成したモデルを図 19、20 に示す。

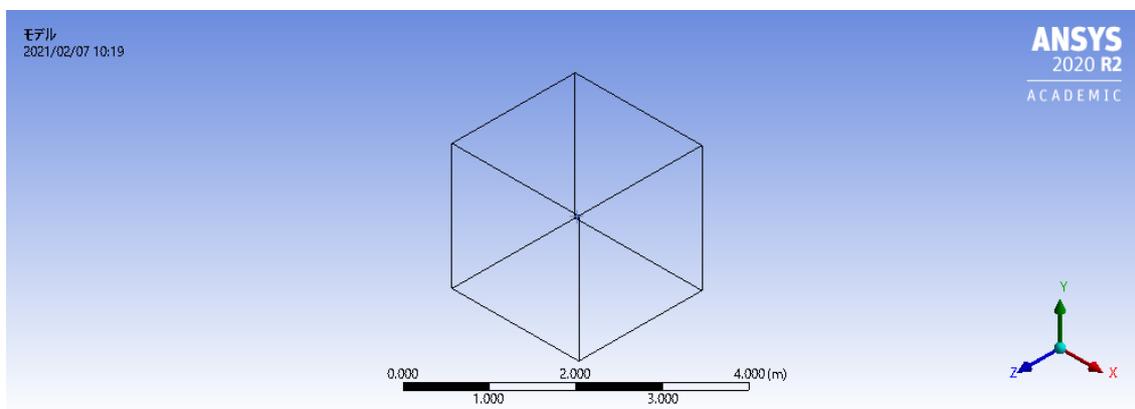


図 19: 空気のモデル

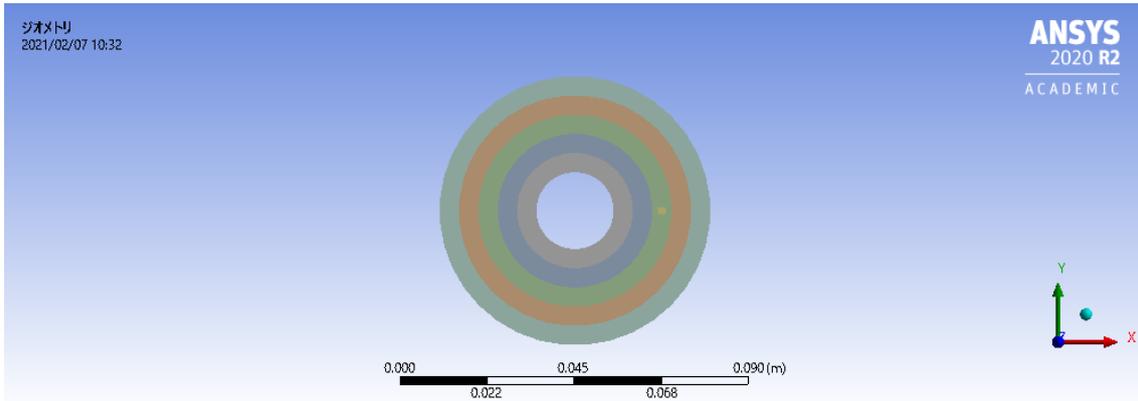


図 20: リング型磁石とグラファイトのモデル

ANSYS の解析方法は有限要素法であり、解析にはモデルをメッシュに切る必要がある。この時メッシュサイズは小さいほど、解析の精度は良くなる。今回使用した ANSYS Student というバージョンでは要素数が 32000 という制限があるため、要素サイズを 2mm に設定し、制限内に収まるようにした。またメッシュのタイプにはフリーメッシュとマップトメッシュの 2 種類があり、フリーメッシュは節点が自由に配置される。それに対し、マップトメッシュは節点が一定の規則性に従って配置され、解析の精度はマップトメッシュの方が良くなる。しかし、マップトメッシュにはモデルに対して面が 3 辺か 4 辺でなくてはならない等の制限が課せられる。そのため、一般的にフリーメッシュは複雑な形状のモデルを解析するときに用いられ、対称性をもつモデルにはマップトメッシュが用いられる。今回の解析では、空気にはフリーメッシュ、グラファイトとリング型磁石のメッシュの作成にはマップトメッシュを用いた。

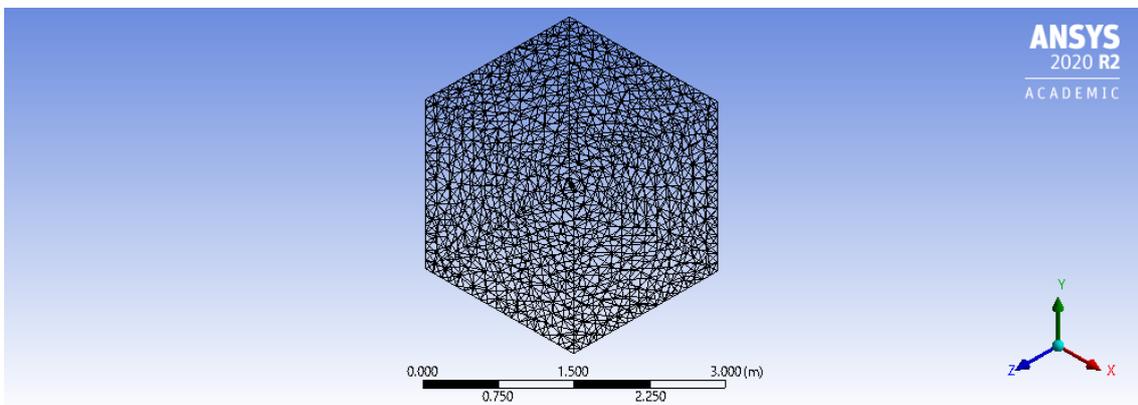


図 21: フリーメッシュ

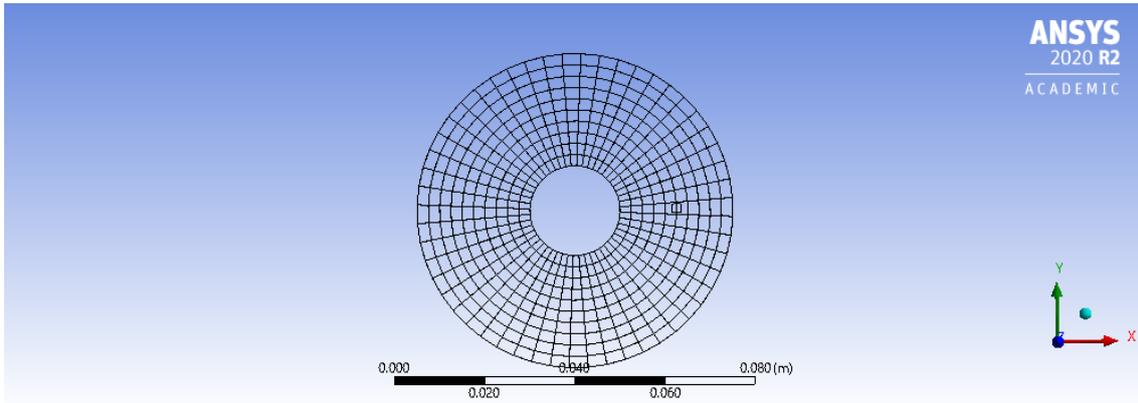


図 22: マップトメッシュ

変位なしの磁場分布の解析結果を図 23 に示す。解析結果からは各節点ごとの磁場密度の値を求めることができる。グラフィットの位置を 1mm だけ変位させ、グラフィットの残留磁束密度を表 7 に従って、それぞれの磁場勾配による磁化の各値を設定して同様の解析を行なった。

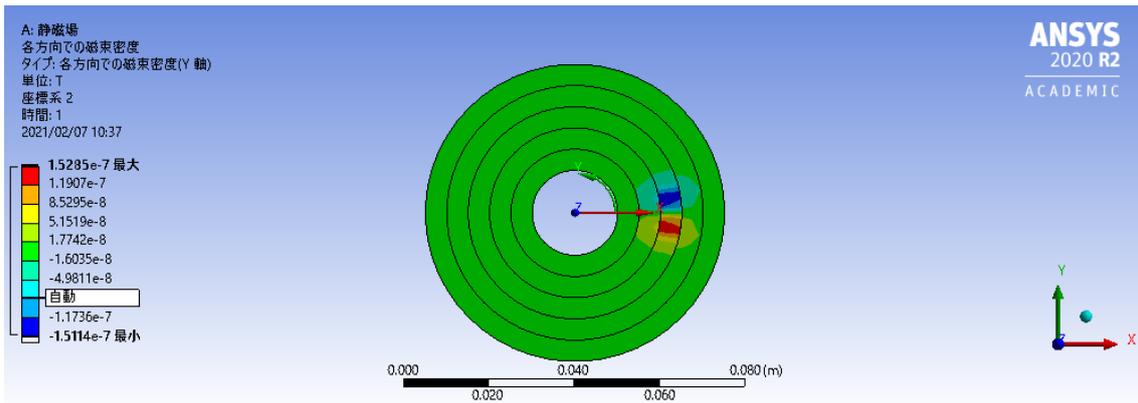


図 23: 磁場分布の様子

各磁場勾配によるグラフィット、磁石内部の散逸 γ は表 8 のようになった。これより、磁場勾配が大きいとグラフィットの散逸が大きく、磁石内部の散逸よりも支配的である。これより Q 値 10^6 を満たすためには、磁場勾配は 0.09T/m 以下に抑えれば良いことが分かる。

表 8: 磁場勾配（渦電流）による散逸の変化

磁場勾配 [T/m]	グラフィットの散逸	磁石の散逸	散逸の合計	Q 値	共振周波数 [Hz]
0.1	3.6×10^{-7}	7.8×10^{-12}	3.6×10^{-7}	8.7×10^5	0.10
0.09	2.9×10^{-6}	4.3×10^{-12}	2.9×10^{-6}	1.0×10^6	0.09
0.01	3.6×10^{-9}	8.7×10^{-12}	3.6×10^{-9}	2.6×10^7	0.03
0.001	3.6×10^{-11}	8.7×10^{-12}	4.5×10^{-11}	7.2×10^8	0.01

また前節の実験から、実際のリング型磁石には 1.65T/m 程度の磁場勾配が存在し、Q 値は 3×10^4 である事が求められた。これも同様にしてシミュレーションを行なってみると、共振周波数 0.4Hz、Q 値 2×10^4 程度と計算でき、実験結果と概ね合致していることが分かる。

表 9: 1.65T/m の散逸

磁場勾配 [T/m]	グラファイトの散逸	磁石の散逸	散逸の合計	Q 値	共振周波数 [Hz]
1.65	6.3×10^{-6}	1.7×10^{-12}	6.3×10^{-6}	2×10^4	0.4

5 環境磁場雑音

グラファイトと環境磁場は相互作用を行うため、環境磁場が変動するとグラファイトが揺れてしまい、雑音となる。これが環境磁場雑音である。磁場雑音源としては、地磁気による定常的な磁場の変化や周囲の電子機器からの影響などがある。式 (3.7) より、環境磁場の変動による影響だけを取り出すと、環境磁場雑音のスペクトルは以下の式で表すことができる。

$$\sqrt{S_{env}(\omega)} = |\chi_m(\omega)| \Delta F_x \quad (5.1)$$

$$= |\chi_m(\omega)| \frac{\chi V}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x} \Delta B_{env,x} + \overline{B_{mag,x}} \Delta \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x} \right) \quad (5.2)$$

と書くことができる。図 24 に環境磁場雑音を示す。環境磁場雑音は、環境磁場の変動 $\Delta B_{env,x}$ と $\Delta \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x}$ を抑えることで小さくすることができる。図??では環境磁場の変動 $\Delta B_{env,x}$ と $\Delta \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x}$ を 10^{-12} 、 10^{-13} 、 10^{-14} と値を変えて計算を行った。ここで、 $\Delta B_{env,x}$ 、 $\Delta \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x}$ の参考値として、参考文献 [32] を用いた。 $\Delta B_{env,x} = \Delta \frac{\partial B_{env,x}}{\partial x} = 10^{-12}$ のとき、0.6Hz 付近で SQL に到達する。

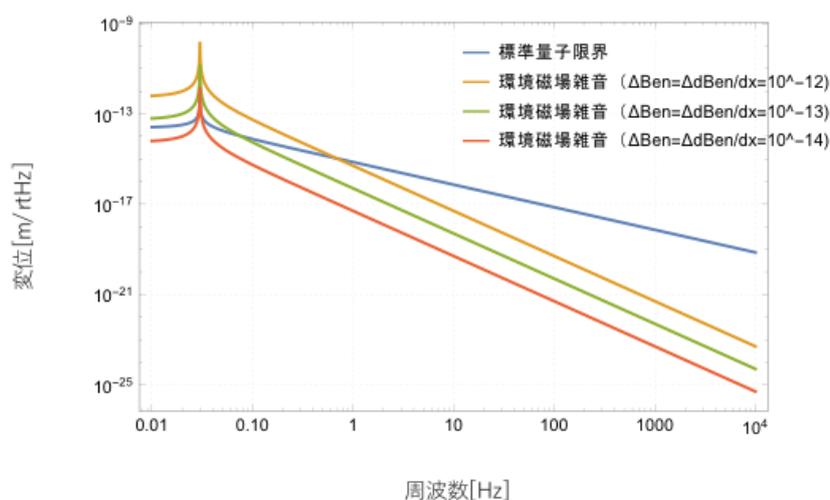


図 24: 環境磁場雑音

6 磁石の熱雑音

熱雑音とは、系が熱浴とランダムなエネルギーのやりとりをする事によって、揺らぎが生じてしまう雑音の事である。磁石は微小な磁気モーメントの集まりであり、それぞれの磁気モーメントは周囲との熱浴とエネルギーのやりとりをランダムに行う。これより、磁石が作る磁場の向きもランダムに変化し、磁場の強さは時間的に一定ではなくなる。この章では、温度の揺らぎによって生じる磁場の変化に起因する雑音を理論的に求める。

6.1 温度揺らぎ

磁石の温度揺らぎを熱伝導方程式に発熱を表すランダムな項を導入するというランジュバンアプローチによって求める。ランジュバンアプローチとはレーザー干渉計型重力波検出器の反射鏡を熱弾性雑音を求めるために、V.B. Braginsky が考案した計算方法である [33]。

熱力学的に平均温度 T の熱浴に接した体積 V の物体が熱浴とランダムにエネルギーのやりとりを行う事によって生じる温度揺らぎ δT を求める。まずエネルギーの揺らぎ

$$\delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - (\langle E \rangle)^2} \quad (6.1)$$

を求める。物体がカノニカル分布に従うとし、逆温度 $\beta = 1/k_B T$ 、分配関数 $Z(\beta)$ を用いると、エネルギーの期待値は、

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i (E_i)^2 e^{-\beta E_i} \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_i e^{-\beta E_i} \\ &= \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

である。式 (6.1)、(6.2) より、

$$\begin{aligned} (\delta E)^2 &= \langle E^2 \rangle - (\langle E \rangle)^2 \\ &= \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} - \left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} \right)' \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z(\beta) \end{aligned} \quad (6.3)$$

と計算できる。ここで、定積熱容量 C_V は、

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z(\beta) \end{aligned} \quad (6.4)$$

で表されるので、式 (6.3)、(6.4) より、

$$(\delta E)^2 = k_B T^2 C_V \quad (6.5)$$

が導かれる。エネルギーと温度には、

$$E = C_V T \quad (6.6)$$

の関係があるので、式 (6.5) を温度揺らぎ δT で、

$$(\delta T)^2 = \frac{k_B T^2}{C_V} \quad (6.7)$$

と書き直すことができる。

また、一般的に物体内に発熱がある場合の熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho C} \Delta u(\mathbf{r}, t) = Q \quad (6.8)$$

で表される。ここで、 u は平均温度からの揺らぎ、 λ は熱伝導率、 ρ は密度、 C は比熱容量、 Q は発熱を表す。ここで、 Q を局所的な温度揺らぎを生み出す項として、 $F(\mathbf{r}, t)$ と置き換えると、熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) \quad (6.9)$$

となる。ここで、 $a^2 = \lambda/\rho C$ とした。

6.2 磁石の温度揺らぎ

いま、磁石に温度勾配がない場合について考える。磁石を 1 辺の長さが $2L$ 、体積が V の立方体とし、 $-L \leq x \leq L$ 、 $-L \leq y \leq L$ 、 $-L \leq z \leq L$ にあるとする。この時の境界条件を

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pm L} = 0 \quad (6.10a)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\pm L} = 0 \quad (6.10b)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\pm L} = 0 \quad (6.10c)$$

のようにする。時間と空間のフーリエ変換を用いて、式 (6.9) の解を求めると、

$$u(\mathbf{r}, t) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{F(\mathbf{k}, \omega)}{a^2(\mathbf{k}) + i\omega} e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (6.11)$$

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_V d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt F(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (6.12)$$

が得られる。磁石の温度揺らぎの片側パワースペクトル密度 S_T を求めるためには、Wiener-Khinchin の定理より、時刻 t における磁石の平均温度からの温度揺らぎ u_{ave} の自己相関関数を計算すれば良い事が知られている。 u_{ave} は、

$$u_{ave} = \frac{1}{V} \int_V u dV \quad (6.13)$$

で表される。これより、磁石の温度揺らぎの片側パワースペクトル密度 S_T は、

$$\begin{aligned} S_T(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle u_{ave}(t) u_{ave}^*(t + \tau) \rangle d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle u_{ave}(t) u_{ave}^*(t + \tau) \rangle \cos \omega t d\tau \\ &= 4 \int_0^{\infty} \langle u_{ave}(t) u_{ave}^*(t + \tau) \rangle \cos \omega t d\tau \end{aligned} \quad (6.14)$$

である。ここで、 $F(\mathbf{k}, \omega)$ の自己相関関数を

$$\langle F(\mathbf{k}, \omega) F^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^4 F_0^2 |\mathbf{k}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \quad (6.15)$$

であるとする。 F_0 は規格化定数である。 u_{ave} の自己相関関数は、

$$\begin{aligned} \langle u_{ave}(t) u_{ave}^*(t + \tau) \rangle &= \left\langle \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r}' \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega d\omega'}{(2\pi)^8} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{F(\mathbf{k}, \omega) F^*(\mathbf{k}', \omega')}{(a^2(\mathbf{k})^2 + i\omega)(a^2(\mathbf{k}')^2 + i\omega')} e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega'(t+\tau) - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \right\rangle \end{aligned} \quad (6.16)$$

となる。ここで、確率的な値を取るのには、 $F(\mathbf{k}, \omega)$ と $F^*(\mathbf{k}', \omega')$ のみなので、

$$\begin{aligned} \langle u_{ave}(t) u_{ave}^*(t + \tau) \rangle &= \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r}' \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega d\omega'}{(2\pi)^8} \\ &\quad \times \frac{\langle F(\mathbf{k}, \omega) F^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle}{(a^2(\mathbf{k})^2 + i\omega)(a^2(\mathbf{k}')^2 + i\omega')} e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega'(t+\tau) - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (6.17)$$

と表せる。式 (6.15) を式 (6.17) に代入すると、

$$\begin{aligned} \langle u_{ave}(t) u_{ave}^*(t + \tau) \rangle &= \frac{F_0^2}{V^2} \int \int_V d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4} \frac{\mathbf{k}^2}{a^4 \mathbf{k}^4 + \omega^2} e^{-i\omega\tau + i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &= \frac{F_0^2}{V^2} \int \int_V d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{\pi}{a^2} e^{-a^2 \mathbf{k}^2 |\tau| + i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &= \frac{F_0^2}{V^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\pi}{a^2} \left(\frac{\pi}{a^2 |\tau|} \right)^{3/2} \int \int_V d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4a^2 |\tau|}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

と計算できる。ここで、

$$\begin{aligned} \int \int_V d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4a^2 |\tau|}} &= \int_{-L}^L dx \int_{-L}^L dx' e^{-\frac{(x - x')^2}{4a^2 |\tau|}} \\ &\quad \times \int_{-L}^L dy \int_{-L}^L dy' e^{-\frac{(y - y')^2}{4a^2 |\tau|}} \\ &\quad \times \int_{-L}^L dz \int_{-L}^L dz' e^{-\frac{(z - z')^2}{4a^2 |\tau|}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

であり、まず x について解くと、

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L dx \int_{-L}^L dx' e^{-\frac{(x - x')^2}{4a^2 |\tau|}} &= 4a^2 \left(e^{-\frac{L^2}{a^2 |\tau|}} - 1 \right) |\tau| \\ &\quad + 4aL \sqrt{\pi |\tau|} \text{Erf} \left(\frac{L}{a \sqrt{|\tau|}} \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

となる。ここで、 $\text{Erf}(x)$ は誤差関数を表し、

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (6.21)$$

で定義される関数である。 y, z についても同様に計算する事で、 u_{ave} の自己相関関数は

$$\langle u_{ave}(t) u_{ave}^*(t + \tau) \rangle = \frac{F_0^2}{2V a^2} \left\{ \text{Erf} \left(\frac{L}{a \sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2 |\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \quad (6.22)$$

と表せる。ここで、 F_0 を求めるために式 (6.16) で $\tau = 0$ と置いて、式 (6.7) と $\langle u_{ave}(t)u_{ave}^*(t) \rangle$ が等しくなるように F_0 を決定すると

$$\begin{aligned} (\delta T)^2 &= \langle u_{ave}(t)u_{ave}^*(t) \rangle \\ \frac{k_B T^2}{C_V} &= \frac{F_0^2}{2Va^2} \\ F_0^2 &= \frac{2Va^2 k_B T^2}{C_V} \end{aligned} \quad (6.23)$$

が得られる。

式 (6.14)、(6.22)、(6.23) より、磁石の温度揺らぎの片側パワースペクトル密度 S_T は、

$$S_T = \frac{4k_B T^2}{C_V} \int_0^\infty d\tau \left\{ \text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega t) \quad (6.24)$$

となる。しかし、この積分を解析的に解くことは困難である。そこで積分区間 $0 \leq \tau \leq \infty$ を、 $\tau_s \gg L^2/a^2$ で分割し、 $0 \leq \tau \leq \tau_s$ と $\tau_s \leq \tau \leq \infty$ に分けて

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{4k_B T^2}{C_V} \left[\int_0^{\tau_s} d\tau \left\{ \text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_s}^\infty d\tau \left\{ \text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (6.25)$$

とする。この時、第2項の積分は、

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_s}^\infty d\tau \left\{ \text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega t) \\ &\sim \int_{\tau_s}^\infty d\tau \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{L}{a\sqrt{\tau}} + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} (1-1) \right\}^3 \cos(\omega t) \\ &= \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_{\tau_s}^\infty \tau^{-\frac{3}{2}} \cos(\omega t) d\tau \\ &= \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \left\{ \frac{2 \cos(\tau_s \omega)}{\sqrt{\tau_s}} + 2\sqrt{2\pi\omega} \left(S \left(\sqrt{\frac{2\tau_s \omega}{\pi}} \right) - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

と近似的に計算できる。ここで、 $S(z)$ はフレネル関数を表し、

$$S(z) = \int_0^z \sin \left(\frac{\pi t^2}{2} \right) dt \quad (6.27)$$

で定義される。これより温度揺らぎのパワースペクトル密度は式 (6.25)、(6.26) から、

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{4k_B T^2}{C_V} \left[\int_0^{\tau_s} d\tau \left\{ \text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \left\{ \frac{2 \cos(\tau_s \omega)}{\sqrt{\tau_s}} + 2\sqrt{2\pi\omega} \left(S \left(\sqrt{\frac{2\tau_s \omega}{\pi}} \right) - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

となる。これを計算すると、図 25 のようになった。なお計算には、 $T = 300[K]$ 、 $V = 3.84 * 10^{-5}[m^3]$ 、 $L = (V/8)^{1/3}[m]$ 、 $\lambda = 9[W/m \cdot K]$ 、 $C = 500[J/kg \cdot K]$ $\rho = 7500[kg/m^3]$ を用いた。

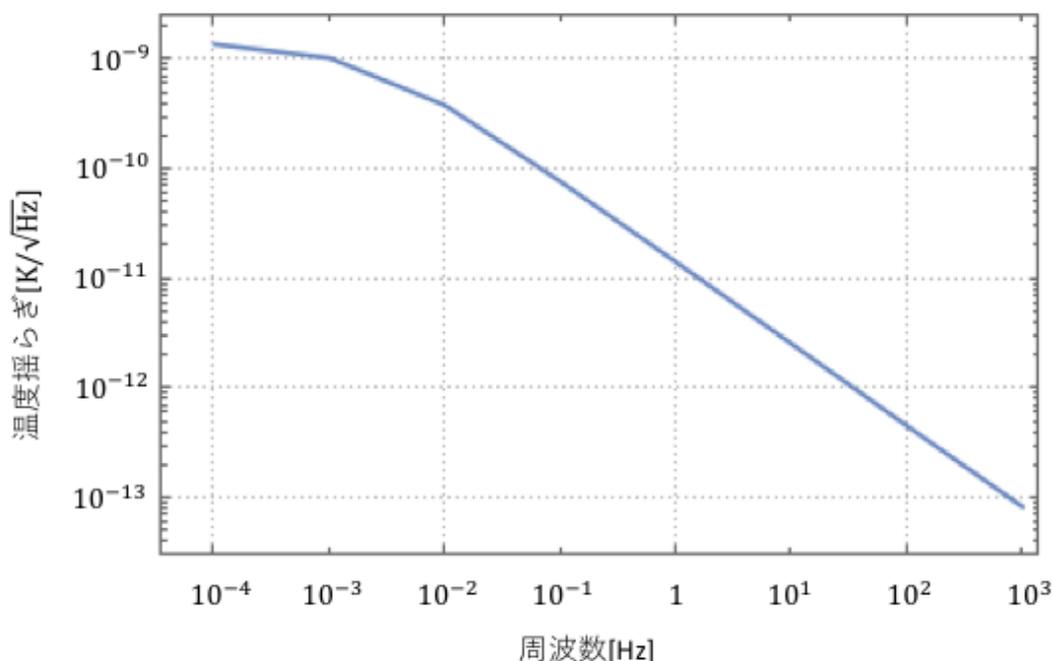


図 25: 磁石の温度揺らぎ

6.3 磁石が作り出す磁場の温度依存性

磁石が加熱されると、熱エネルギーによって磁気モーメントの向きにばらつきが生じ、磁力が小さくなるという現象を起こす。これを熱減磁という。ある温度まで加熱されると磁気モーメントの方向性が完全になくなり、磁力を失う。この温度をキュリー温度という。

ネオジム磁石の BH 曲線から残留磁束密度 Br と保磁力 Hb の温度係数は次の式で与えられる。

$$\text{温度係数}(Br) = \frac{Br_H - Br_L}{Br_L(T_H - T_L)} \times 100, \quad \text{温度係数}(Hb) = \frac{Hb_H - Hb_L}{Hb_L(T_H - T_L)} \times 100 \quad (6.29)$$

ここで、下添字の H は高温、 L は低温の値を表す。これらの温度係数を BH 曲線 ([34]) より読み取ると、残留磁束密度の温度係数がおおよそ $-0.12\%/K$ 、保磁力の温度係数がおおよそ $-0.59\%/K$ となった。これより残留磁束密度と保磁力は 20 度と 21 度で表 10 のような違いが現れる。

表 10: 磁石の温度依存性

	20 度	21 度
保磁力 $H_b[Oe]$	10800	10736
残留磁束密度 $B_r[G]$	12800	12785

Poisson Superfish を用いて、20 度～30 度で磁石が作りだす磁場の変化率の計算を行った。高さ 1mm あたりの磁場の変化率 α は平均 $-2.14\%/K$ である事が分かった。シミュレーションに用いたコードをソースコード (2) に示す。このコードを実行すると 20 度の時の磁場をシミュレーション結果が得られる。21 度の時のシミュレーションには、コード内のコメントアウトを外し、20 度の時の保磁力と残留磁束密度の設定をコメントアウトする。

ソースコード 2: 温度変化による磁場の変化のシミュレーションに用いたコード

```
1 Diamagnetic Levitation
2
3 &reg kprob = 0,
4 mode = 0,
5 icylin = 1,
6 xreg = 5
7 kreg = -1,300
8 kmax = 50
9 yreg = -2, 3
10 lreg = -1,10,300
11 lmax = 8
12
13 nbslo = 0,
14 nbsup = 0,
15 nbslf = 0,
16 nbsrt = 0 &
17
18 &po x = 0, y = -5 &
19 &po x = 20, y = -5 &
20 &po x = 20, y = 5 &
21 &po x = 0, y = 5 &
22 &po x = 0, y = -5 &
23
24 &reg mat =2 ,mshape = 1, mtid = 1 &
25 &po x = 1, y = 0 &
26 &po x = 1, y = -1 &
27 &po x = 1.5, y = -1 &
28 &po x = 1.5, y = 0 &
29 &po x = 1, y = 0 &
30
31 &reg mat = 3 ,mshape = 1, mtid = 2 &
32 &po x = 1.5, y = 0 &
33 &po x = 1.5, y = -1 &
34 &po x = 2, y = -1 &
35 &po x = 2, y = 0 &
36 &po x = 1.5, y = 0 &
37
38 &reg mat = 4 ,mshape = 1, mtid = 3 &
```

```

39 &po x = 2, y = 0 &
40 &po x = 2, y = -1 &
41 &po x = 2.5, y = -1 &
42 &po x = 2.5, y = 0 &
43 &po x = 2, y = 0 &
44
45 &reg mat = 5 ,mshape = 1, mtid = 4 &
46 &po x = 2.5, y = 0 &
47 &po x = 2.5, y = -1 &
48 &po x = 3, y = -1 &
49 &po x = 3, y = 0 &
50 &po x = 2.5, y = 0 &
51
52 &reg mat = 6 ,mshape = 1, mtid = 5 &
53 &po x = 3, y = 0 &
54 &po x = 3, y = -1 &
55 &po x = 3.5, y = -1 &
56 &po x = 3.5, y = 0 &
57 &po x = 3, y = 0 &
58
59
60 &mt mtid = 1 ;20°C
61 aeasy = 90,
62 gamper = 1,
63 hcept = -10800, bcept = 12800. &
64
65 &mt mtid = 2
66 aeasy = 270,
67 gamper = 1,
68 hcept = -10800, bcept = 12800. &
69
70 &mt mtid = 3
71 aeasy = 90,
72 gamper = 1,
73 hcept = -10800, bcept = 12800. &
74
75 &mt mtid = 4
76 aeasy = 270,
77 gamper = 1,
78 hcept = -10800, bcept = 12800. &
79
80 &mt mtid = 5
81 aeasy = 90,
82 gamper = 1,
83 hcept = -10800, bcept = 12800. &
84

```

```

85
86 ;&mt mtid = 1 ;21°C
87 ;aeasy = 90,
88 ;gamper = 1,
89 ;hcept = -10736, bcept = 12785. &
90
91 ;&mt mtid = 2
92 ;aeasy = 270,
93 ;gamper = 1,
94 ;hcept = -10736, bcept = 12785. &
95
96 ;&mt mtid = 3
97 ;aeasy = 90,
98 ;gamper = 1,
99 ;hcept = -10736, bcept = 12785. &
100
101 ;&mt mtid = 4
102 ;aeasy = 270,
103 ;gamper = 1,
104 ;hcept = -10736, bcept = 12785. &
105
106 ;&mt mtid = 5
107 ;aeasy = 90,
108 ;gamper = 1,
109 ;hcept = -10736, bcept = 12785. &

```

6.3.1 磁石の熱雑音

磁石の磁場が変化した時の鏡に与える磁力 F の変化 ΔF_{mt} は、磁場勾配が磁場に比例するとすれば

$$\begin{aligned}
\Delta F_{mt} &= \frac{\chi V}{\mu_0} \left(\overline{B_{mag,x}} \Delta \frac{\partial B_{mag,x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{B_{mag,x}}}{\partial x} \Delta B_{mag,x} \right) \\
&= \frac{2\chi V}{\mu_0} \frac{\partial \overline{B_{mag,x}}}{\partial x} \Delta B_{mag,x}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

となる。温度の変動による磁場の揺らぎ $\Delta B_{mag,x}$ は、

$$\Delta B_{mag,x} = \alpha \sqrt{S_T \overline{B_{mag,x}}} \tag{6.31}$$

で表されるので、磁石の熱雑音スペクトルは、

$$\begin{aligned}
\sqrt{S_{mt}(\omega)} &= |\chi_m(\omega)| \Delta F_{mt} \\
&= |\chi_m(\omega)| \frac{2\chi V}{\mu_0} \frac{\partial \overline{B_{mag,x}}}{\partial x} \alpha \sqrt{S_T \overline{B_{mag,x}}}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

と計算できて、結果は図 26 のようになり、100Hz 付近で SQL を下回る。

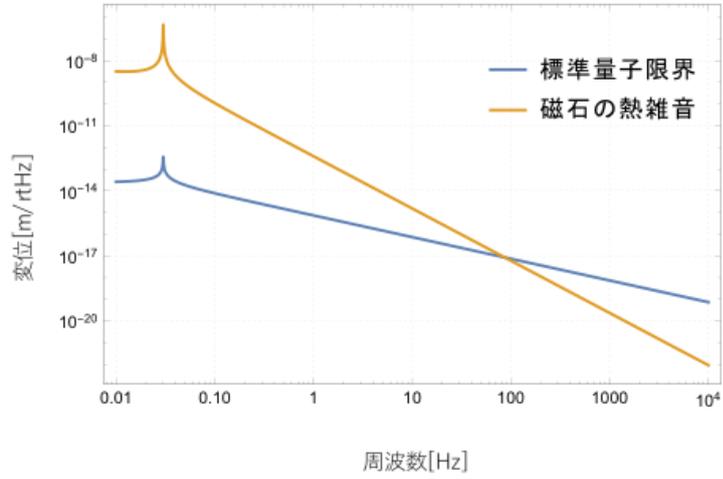


図 26: 磁石の熱雑音

7 雑音のまとめ

前節までに求めた各雑音の寄与を考え、SN 比が 3 以上になるような最低限のパラメータの要求値と鏡の熱雑音に用いた物性値をそれぞれ表 11、表 12 に示す。また各雑音をまとめて示すと図 27 のようになる。これより 800Hz から 20kHz の周波数帯で各雑音が SQL を下回り、2kHz あたりで SN 比 3 以上を達成する。

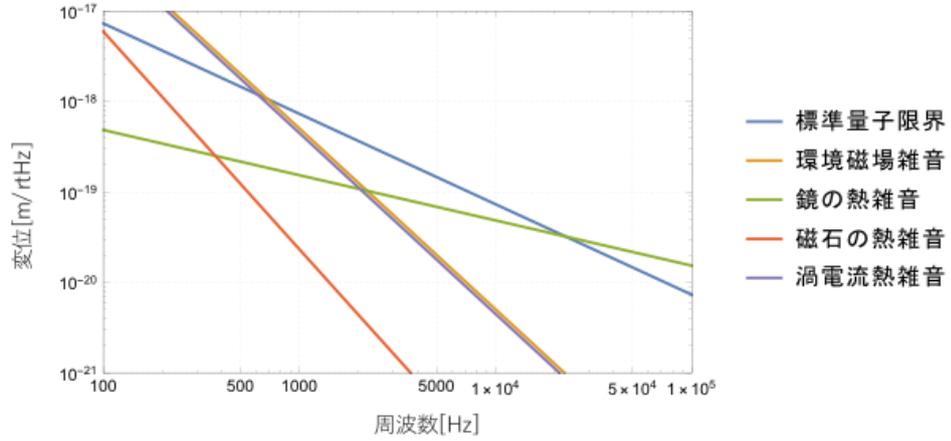


図 27: 雑音のまとめ

表 11: SQL 到達に必要なパラメータ

Q 値	10^6
磁石の磁場勾配 [T/m]	0.01
環境磁場の変動 $\Delta B_{env,x}$ [T]	10^{-9}
環境磁場勾配の変動 $\Delta \frac{dB_{env,x}}{dx}$ [T/m]	10^{-9}

表 12: 鏡の物性値

	石英 (基材)	石英 (コーティング)	TiO ₂ -doped Ta ₂ O ₅
損失角	1×10^{-6}	5×10^{-5}	2×10^{-4}
ポアソン比	0.17	0.17	0.28
ヤング率	73 GPa	73 Gpa	140GPa
屈折率	1.45	1.45	2.07

8 磁気懸架を用いた干渉計の制御

将来の干渉計実験への応用を考えて、片方の鏡を磁気浮上をさせた状態のマイケルソン干渉計を構築し、ミッドFRINGE制御を実験的に行った。磁気浮上には棒型磁石とリング型磁石の二つの方法を試みた。

8.1 フィードバック制御

フィードバック制御とは、ある物理量を特定の値に固定したい時に用いられる制御方法の一つである。フィードバック制御を行うことで外乱の影響を修正することができる。

8.1.1 理論

制御したい物理量（マイケルソン干渉計であれば鏡の位置）を x_0 とする。入力 x をセンサー H によって測定し、その結果が x_t と出力されたとする。入力された x に対して、差 $x - x_t$ が 0 に近くようにアクチュエータやフィルタなどの操作 G を通して制御を行う。この制御の一連の流れは周波数空間上で、

$$x = x_0 - GH(x - x_t) \quad (8.1)$$

となる。ここで GH のことをオープンループゲイン（オープンループ伝達関数）という。式 (8.1) を変形すると、

$$x - x_t = \frac{1}{1 + GH}(x_0 - x_t) \quad (8.2)$$

となる。したがって、目標との差 $x_0 - x_t$ を $1/(1 + GH)$ 倍に抑えることができる。

一般にオープンループゲインは周波数依存性があり、 $|GH| = 1$ となる周波数をユニティゲイン周波数といい、 $|GH| > 1$ となる周波数帯を制御帯域という。問題となるのは、 $GH = -1$ となる周波数で、この時、式 (8.2) の右辺が発散してしまうため、制御できずに信号は発振してしまうので制御が不安定となる。 $GH = -1$ となる場合は、位相が 180° 遅れてしまう時である。

これを回避するために、回路などによって、周波数を 0 から ∞ に変化させた時に位相が 180° 遅れないようにするために位相に余裕を持たせてやる必要がある。この -180° より何度大きいかを位相余裕という。位相余裕を 0 より大きくすることで、フィードバック制御は安定となる。また、位相が -180° となる周波数において、 $|GH|$ がどれだけ小さいのかをゲイン余裕という。

8.1.2 マイケルソン干渉計の制御におけるオープンループゲイン

マイケルソン干渉計をミッドフリンジ制御する方法について説明する。マイケルソン干渉計の AS ポート側の信号の他に、REFL ポート側からの信号を取得し、二つの信号の差をとる。これを、位相進み補償回路に通してコイルに磁場を発生させ、サスペンション付きミラーに貼った磁石にコイルからの磁場を作用させることでフィードバック制御する。

ここで、ミラーの変位とマイケルソン干渉計の出力の関係を導く。マイケルソン干渉計の腕の長さをそれぞれ L_x 、 L_y とすると、ミラーの変位は $\Delta L = L_x - L_y$ と表せる。ビームスプリッタに入射するレーザーの電場を $E_0 e^{i\omega t}$ とすると、各腕を折り返してくるレーザーの電場 E_x 、 E_y は、

$$E_x = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega(t + \frac{2L_x}{c})} \quad (8.3)$$

$$E_y = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega(t + \frac{2L_y}{c})} \quad (8.4)$$

である。これより、干渉計の反射光を取得する REFL ポートと鑑賞光を取得する AS ポートの強度 I_{REFL} 、 I_{AS} は、

$$I_{REFL} \propto |E_x - E_y|^2 = E_0^2 \sin^2 \frac{\omega \Delta L}{c} \quad (8.5)$$

$$I_{AS} \propto |E_x + E_y|^2 = E_0^2 \cos^2 \frac{\omega \Delta L}{c} \quad (8.6)$$

とであり、これらの差をとると、

$$I_{AS} - I_{REFL} \propto E_0^2 \cos \frac{2\omega \Delta L}{c} = E_0^2 \cos \frac{4\pi \Delta L}{\lambda} \quad (8.7)$$

となる。ここで、 λ はレーザーの波長である。この二つの信号の差を表す式 (8.7) をエラー信号という。

干渉計はミッドフリンジで動作するように制御を行う。このエラー信号はミッド・フリンジでゼロとなり、そのまわりでミッド・フリンジからのずれにリニアな信号を与える。エラー信号を適当なフィルター・アンプを通してミラーの位置のアクチュエーターにフィードバックすることにより、干渉計を常にミッドフリンジに保つことができる。そしてこのフィードバック信号をモニターすることにより光路長の変化が検出できる。

式 (8.7) が 0 となるように制御するので、両腕の差 ΔL が

$$\Delta l = \frac{\lambda}{4} \quad (8.8)$$

となるように、アクチュエータを動作させる。

エラー信号をフィードバックする事を考える。コイルからの磁場の力 F は

$$F = \beta \frac{V}{r + i\omega L} \quad (8.9)$$

と表せる [35]。ここで、電圧を V 、抵抗を r 、コイルのコンダクタンスを L 、比例定数を β とおいた。コイルからの力 F とミラーの変位 ΔL の関係を運動方程式で表すと、

$$m \frac{d^2 \Delta L}{dt^2} = -k \Delta L - \gamma \frac{d \Delta L}{dt} + F \quad (8.10)$$

となる。ここで、 m を鏡の質量、 k をバネ定数、ダンピング係数を γ とした。なお地面振動については無視している。式 (8.10) をフーリエ変換すると、

$$\frac{\Delta L}{F} = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (8.11)$$

と表せる。しかし、この設計のオープンループゲインでは位相余裕がないため、図 28 のような位相進み補償回路を用いる必要がある。

表 13: 信号の分類

	連続振幅	離散振幅
連続時間	アナログ信号	多値信号
離散時間	サンプル値信号	デジタル信号

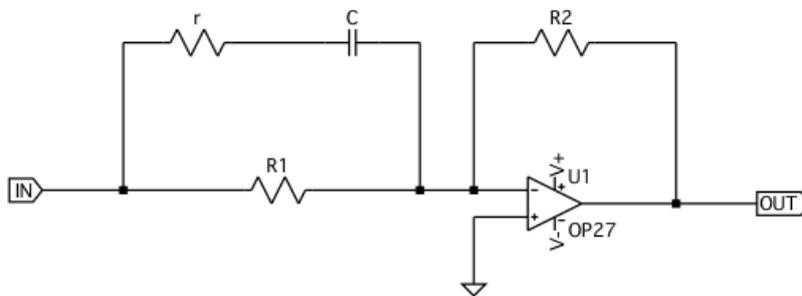


図 28: 位相進み補償回路

本実験ではこの位相進み補償回路をデジタルフィルタにて置き換えた。

8.2 信号

物理系における信号とは次の4種類に分類される。

ここでは、アナログ信号とデジタル信号について述べていく。正弦波信号をアナログ信号として表すと

$$\text{連続時間 (アナログ信号)} : x(t) = \cos \omega_a t \quad (8.12)$$

となる。ここで、 t は実数である。 ω_a は周波数を表す。

デジタル制御では、センサから得られたアナログ値をデジタル値に変換する。このデジタル値をコンピュータのプログラムによって適当に処理して操作量に換算したら、再びアナログ値に変換して、アクチュエータなどを操作する。アナログ値からデジタル値に変換する装置を A/D 変換器、その逆の操作を行う装置を D/A 変換器という。

正弦波信号をデジタル信号として表すと

$$\text{離散時間 (デジタル信号)} : x(n) = \cos \omega_a n \quad (8.13)$$

となる。ここで n は整数である。信号値を取得する事をサンプリング (標本化) といい、サンプリングは周期

的に行われる。このサンプリングの間隔をサンプリング周期 t_s と呼び、その逆数をサンプリング周波数 f_s という。ここでは ω_d をサンプリング周波数の角周波数とした。 ω_a と ω_d には、

$$\omega_a = \omega_d f_s \quad (8.14)$$

の関係がある。

8.3 離散時間 LTI システム

デジタルで得られる信号は、次のように表すことができる。

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots \quad (8.15)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (8.16)$$

ここで、 $\delta[n]$ は単位インパルス信号といい、

$$\delta = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (8.17)$$

を満たす。これより、時刻 0 に入力された信号 x_0 は、単位インパルス信号 δ_n を用いて取得することができる。またその右側に 1 サンプルだけずれたサンプル値 x_1 に対しては、1 サンプルだけ遅れた δ_{n-1} を用いて取り出すことができる。つまり、離散時間信号は式 (8.15) のように、多項式として表現することが可能である。実際に入力信号 $x[n]$ に対して、システムの応答を $h_k[n]$ 、出力信号を $y[n]$ とすると、

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \quad (8.18)$$

という関係式で表せる。また入力信号が $x[n] = \delta[n]$ である時のシステムの応答 $h_k[n]$ をインパルス応答という。

システムへの入力と出力の関係が時間的に不変である場合、つまり入力 $x(t)$ に対する出力が $y(t)$ である時、時刻が T だけ遅延した入力 $x(t-T)$ に対する出力は $y(t-T)$ を満たす。このようなシステムの特性を時不変性という。この時、システムがインパルス応答であれば、

$$h_k[n] = h[n-k] \quad (8.19)$$

を満たす。

線型性と時不変性をもつシステムの事を線形時不変 (LTI(Liner-Time-Invariant)) システムという。LTI システムの場合、インパルス応答さえ知っていれば、他のどんな入力に対する出力も求める事ができる。LTI システムの入出力の関係式は、

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (8.20)$$

で表され、この右辺の演算をたたみこみという。またたたみこみは略して、

$$x[n] * h[n] \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (8.21)$$

と表記される事もある。

8.3.1 LTI システムの性質

現在の出力 $y[n]$ が未来の入力 $x[m]$, $m > n$ に対して依存しないという性質を因果性といい、インパルス応答 $h[n]$ が

$$h[n] = 0, //n < 0 \quad (8.22)$$

を満たすようなシステムを因果システムと呼ぶ。式 (8.22) が成立しないシステムを非因果システムと呼ぶ。任意の有界な入力 (bounded input) をシステムに加えた時、有界な出力 (bounded output) が得られる時、そのシステムは安定である。また、これを BIBO 安定という。ここで、有界な入力 $x[n]$ とは、全ての n に対し、

$$|x[n]| < C \quad (8.23)$$

を満たす信号の事をいう。ここで、 C は正の定数である。また、LTI システムが、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (8.24)$$

満たす時、その LTI システムは安定であると言える。インパルス応答が有限個の場合、システムは必ず安定となる。このシステムは有限応答システム (FIR(Finite Impulse Response system)) といい、離散時間特有のシステムである。FIR システムに対し、インパルス応答が無限個である場合、そのシステムを無限インパルス応答システム (IIR(Infinite Impulse Response system)) という。

8.3.2 z 変換

本実験で用いたデジタルフィルタは、z 変換という手法を用いられて設計されている。z 変換とは、離散時間系におけるラプラス変換のようなものである。連続時間系であるアナログ回路の場合、伝達関数をボード線図で表す際はラプラス変換を用いて導出される。これと同様の事をデジタル回路で行うためのものが z 変換である。z 変換の定義は離散時間信号 $x[n]$ の z 変換を $X(z)$ とすると、

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (8.25)$$

で表される。ここで、 z は複素変数である。

9 干渉計の制御実験

本実験のセットアップの概略図と実験の様子を図 29、30 に示す。マイケル干渉計の REFL と AS からの 2 つの出力を差動回路によって差し引きを行い、デジタルによる位相進み補償回路に通してからコイルマグネットアクチュエータにフィードバックする。

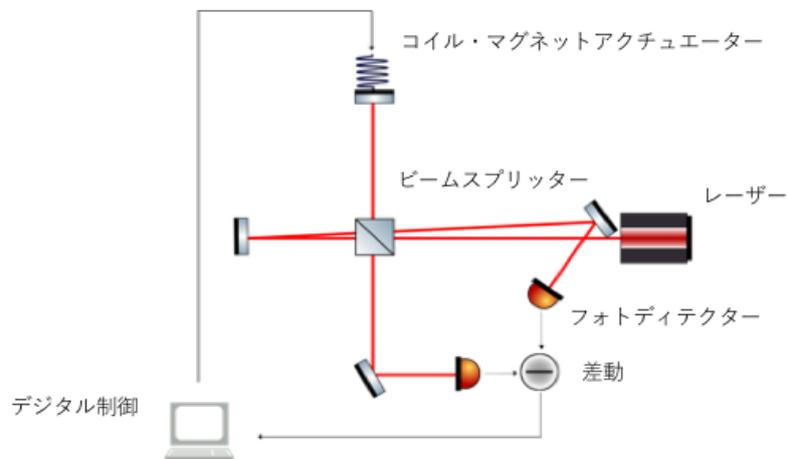


図 29: 制御実験の概略図

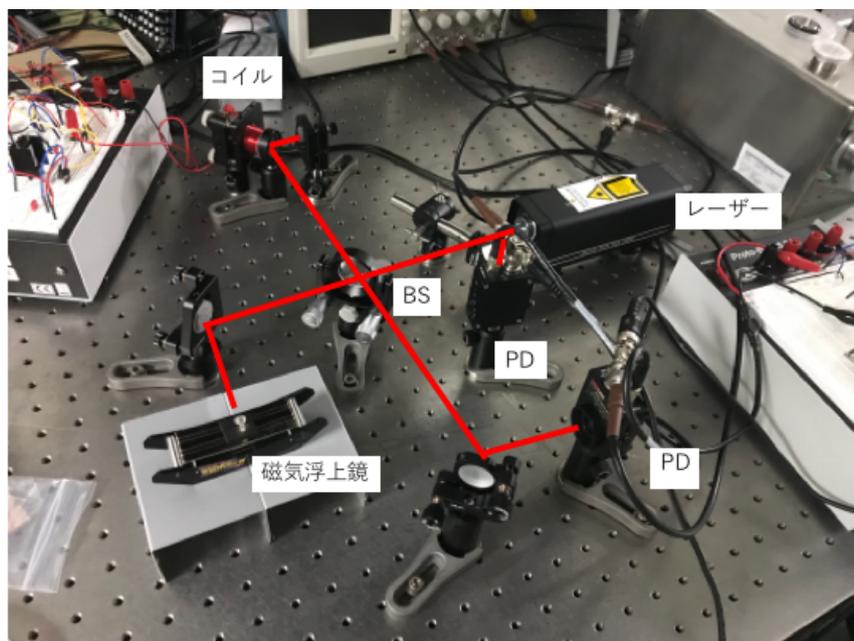


図 30: 実験の様子

9.1 実験機器

実験に用いた主な機器を以下に示す。

1. 光学素子

(a) レーザー

波長 633nm、最大出力 4mW の HeNe レーザーを使用した。

(b) サスペンション付きミラー

宗宮研究室で開発した OHP シート製のサイクルばねを使用した。Longitudinal 方向の共振周波数はおよそ 16Hz 程度で、鏡の直径は 6mm、重さは 0.2g である。

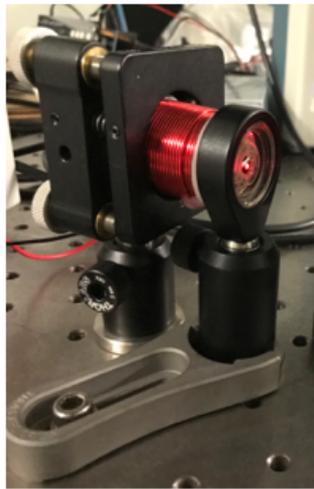


図 31: サスペンション付きミラー。裏に磁石が付いていて、コイルによる磁場で Longitudinal 方向の長さを可変できる。

2. デジタル

(a) RTC-6000

C# 言語で作成したプログラムを実行できるリアルタイムコンバータ。アナログデジタルコンバータ (ADC) から入力されたデータからフィルタ計算を行い、その結果をデジタルアナログコンバータ (DAC) へ渡す。



図 32: RTC-6000

(b) AD 16-64(LPCI)LA

アナログデジタルコンバータ。RTC-6000 の PCI バスに差し込まれている。

(c) DA 16-8(LPCI)L

デジタルアナログコンバータ。RTC-6000 の PCI バスに差し込まれている。

(d) ATP-32F

入力信号を入れるための BNC 端子台

(e) ADC-68M/96F

ADC と ATP-32F をつなぐシールドケーブル

(f) PCA-50PS

DAC と出力 BNC 端子台をつなぐシールドケーブル

(g) 出力 BNC 端子台

宗宮研究室で作成された出力 BNC 端子台

3. 磁気浮上

(a) ハルバッハ配列型棒磁石

ハルバッハ配列で並べられた棒型磁石

(b) リング型磁石

前章でも紹介した隣同士の磁石が反対方向の磁極を向いている配列の 5 層のリング型磁石

(c) 熱分解グラファイト

鏡を磁気浮上させるためのグラファイト。直径 6mm、重さ 0.2g の鏡が乗るように適度に加工した。

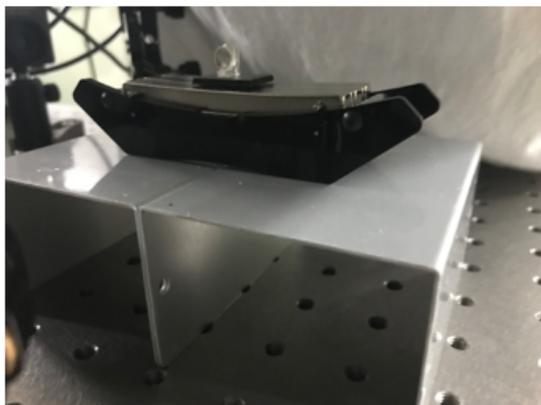


図 33: グラファイトに乗った鏡がハルバツハ配列型棒磁石の上で磁気浮上している様子。

4. 電気回路

(a) 差動回路

マイケルソン干渉計の AS ポートと REFL ポートの出力の差し引きするための回路。回路図を図 34 に示す。

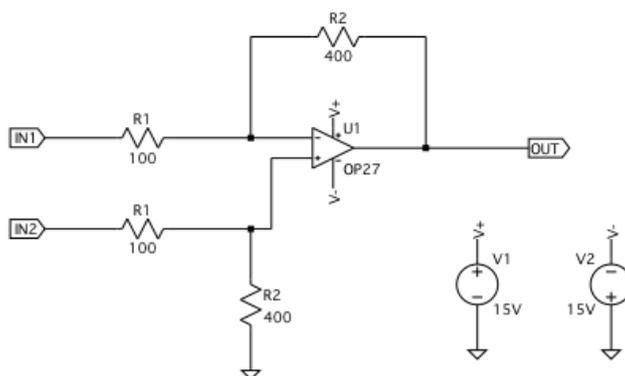


図 34: 差動回路

(b) コイルドライバ

コイルに電流を流すための回路。制御には大電流が必要となることから、LT1210 というオペアンプを入れる。

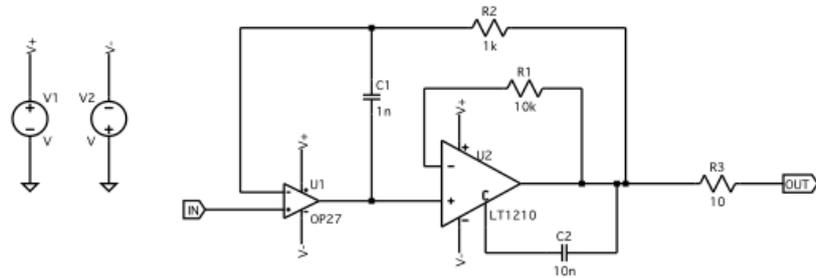


図 35: コイルドライバ

9.2 磁気浮上を用いたマイケルソン干渉計の制御

片腕を磁気浮上させたマイケルソン干渉計を制御し、その感度を測定した。干渉計をミッドフリンジに制御するには、エラー信号が線形になるように常に制御しなくてはならないため、低周波で高いゲインが必要となる。しかし、ゲインを上げるためにユニティゲイン周波数を高くしようとすると不安定となるため、デジタルの位相進み補償フィルタを $f_z = 100\text{Hz}$ 、 $f_p = 1\text{kHz}$ に設定して、ユニティゲイン周波数が 250Hz 付近になるようにする。この時、低周波側のゲインが 40dB 程度となる。

制御はハルバツハ配列型棒磁石の場合は、比較的容易に行うことができた。マイケルソン干渉計の出力を FFT すると図 36 のようになり、固定鏡を用いた場合とほぼ変わらない結果が得られた。また伝達関数は図 37 のようになった。

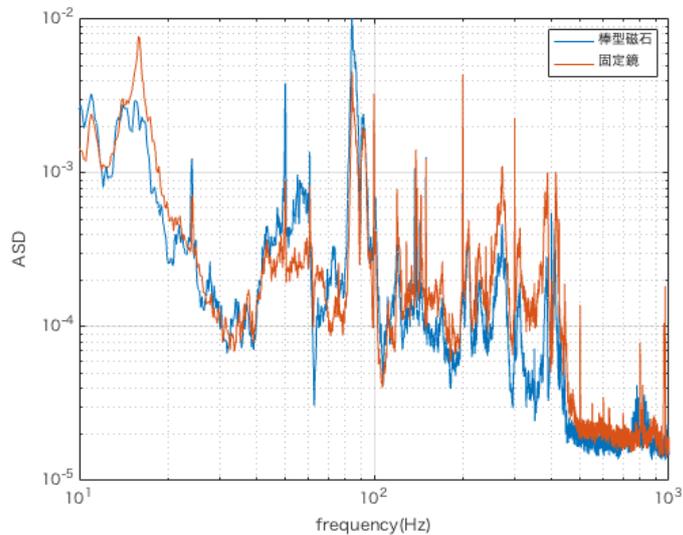


図 36: 磁気懸架と固定懸架で行なったマイケルソン干渉計の出力

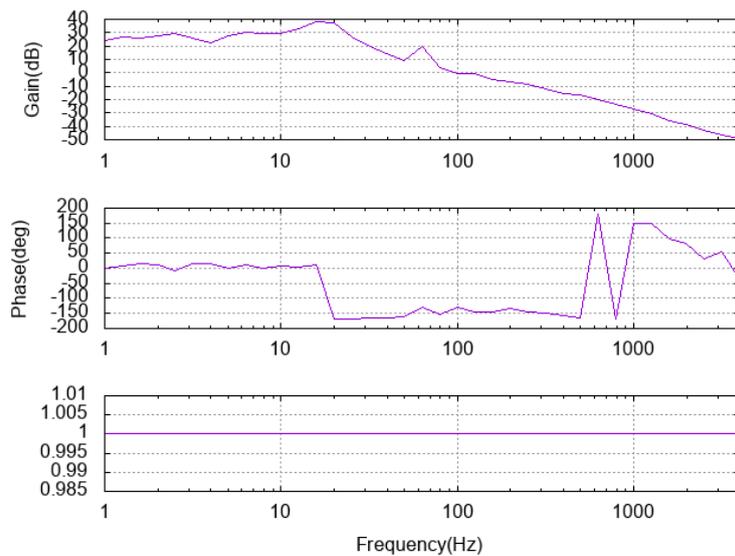


図 37: 棒型磁石を用いた伝達関数

一方でリング型磁石の場合は周方向に対して振動を繰り返し、干渉が安定せず制御は行えなかった。棒型磁石が制御に成功した理由としては、棒型磁石のもつ磁場の非一様性が関係していると考えられる。図 7 でも示したように、棒型磁石が作り出す磁場は端の方で高くなっており、真ん中付近に磁場の谷ができる。よって、グラファイトは磁石の真ん中にトラップされるような状況となる。これより、棒型磁石は安定して、干渉状態を維持することができたと考えられる。リング型磁石の方でも実験により磁場の非一様性が見られたが、棒型磁石のように綺麗な谷になっているはいないため、トラップされず振動を繰り返したと考えられる。

リング型磁石におけるグラファイトの振動を減衰させるために、図 38 のようにグラファイトの周囲に磁石

を配置して、外部磁場によるダンピングを試みた。その結果、磁石とグラファイトの相互作用によって振動を抑えることに成功した。マイケルソンの出力と伝達関数は、図 39、40 のようになり、制御する事ができた。しかしこのダンピング方法では、リング型磁石がもつ磁場の一様性という利点が潰されてしまう。従ってリング型磁石の制御方法としては、外部でアクチュエータを用いるか、何かしらの方法でグラファイトの振動を抑えた後、一切手を加えないという状況にするのが理想的である。仮に磁場勾配がほとんどないような、精度の良いリング型磁石を製造することに成功したとしても、それは振動がより減衰しなくなる事を意味するため、将来の干渉実験への応用のためにも制御方法の確立は必要不可欠である。



図 38: グラファイトの周囲に磁石を配置した様子

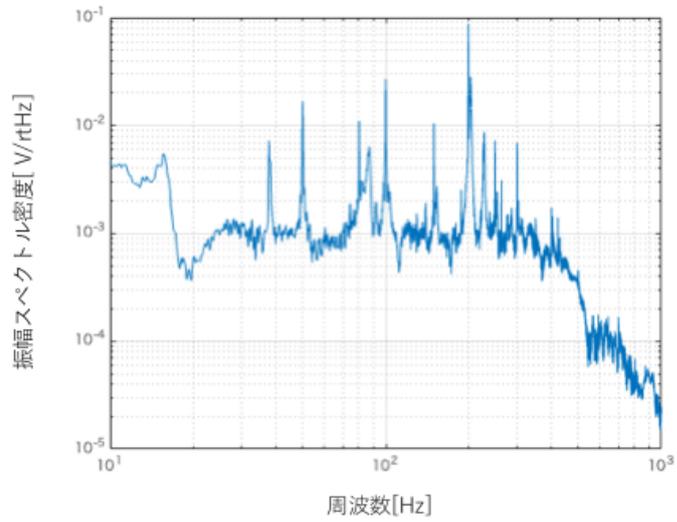


図 39: リング型磁石を用いたマイケルソン干渉計の出力

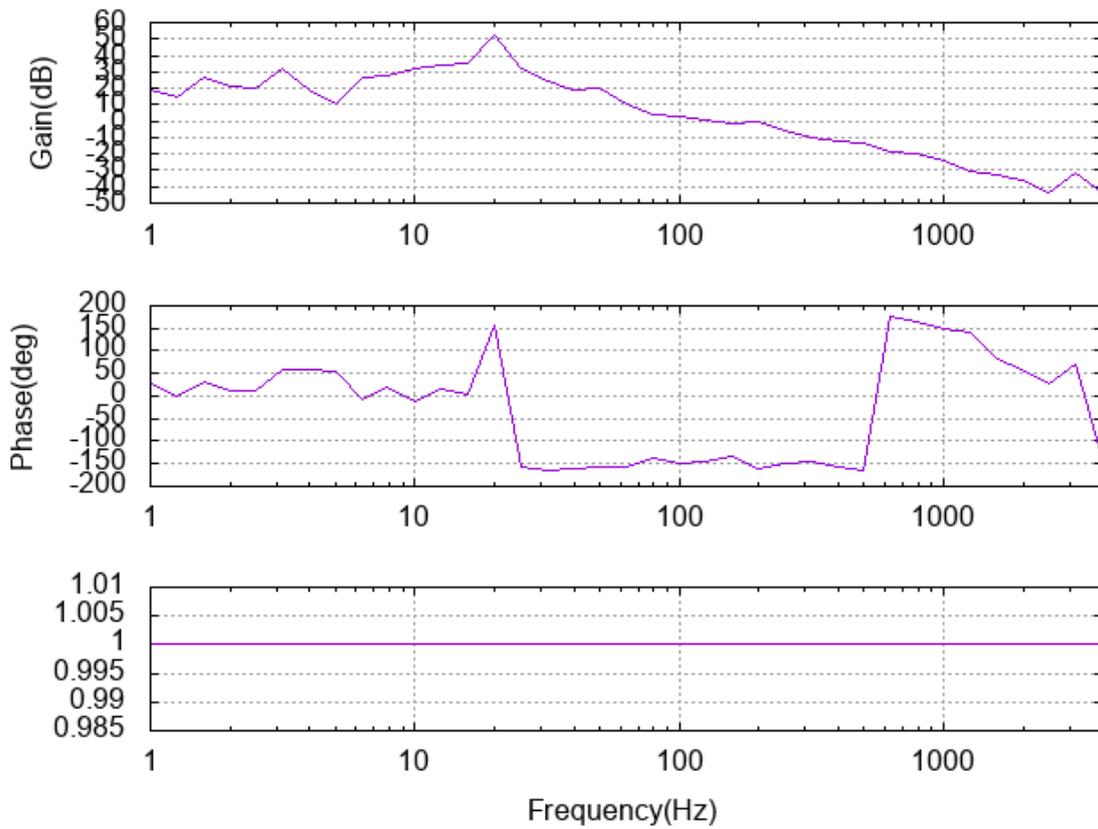


図 40: リング型磁石を用いた伝達関数

10 結論と今後の課題

本研究では、グラファイトとリング型磁石を用いた磁気浮上による鏡の支持方法の提案と雑音の見積もりを行い、振動子 10mg スケールにおける標準量子限界への到達のために必要なパラメータの要求値を求めた。

磁場勾配の要求値であるが、実際の磁石がその要求値を満たさないという事に関しては、本実験で用いたリング型磁石は市販の物であり、5層からなるリングに歪みが存在すること、5つの磁石の磁力にムラがある等の理由により磁場勾配が生じてしまい、精度が良くないと思われる。従ってオーダーメイドで製造することにより、技術的にこの問題は解決できる可能性がある。

本研究で用いた環境磁場の磁場変動と磁場勾配変動の参考値は KAGRA 坑内の値であるため、あまり関係性は薄い。しかし要求値は参考値よりも 10^4 程度大きく、たとえ実験系の環境磁場の影響が大きかったとしても、磁気シールド等を用いることによって低減できるため、参考値は十分満たす事が可能であると考えられる。

また、リング型磁石を用いたマイケルソン干渉計の制御実験については、芳しい結果を得ることはできなかった。巨視的量子現象の検証のためには干渉計への応用が必要であるため、制御方法を確立することは必要不可欠である。浮上体の制御には外部磁場を用いることが有用であるが、外部磁場を加えればリング型磁石の利点である磁場の一様性を消してしまうため、制御方法に磁場を用いる場合は、制御を行なった後に外部磁場の影響を完全に消し去る必要がある。

参考文献

- [1] N. Bohr, The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. *Nature (London)* 121, 580, 1928.
- [2] Everett III, "Relative State" formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 29, 454, 1957.
- [3] A. Bassi et al., Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests. *Rev. Mod. Phys.* 85, 471, 2013.
- [4] C. Jonsson. Electron Diffraction at Multiple Slits. *Am. J. Phys.*, vol. 42, no. 1, p. 4, 1974.
- [5] M. Arndt and K. Hornberger. Testing the limits of quantum mechanical superpositions. *Nat. Phys.*, vol. 10, no. 4, pp. 271-277, 2014.
- [6] S. Eibenberger, S. Gerlich, M. Arndt, M. Mayor, and J. Tüxen. Matter-wave interference of particles selected from a molecular library with masses exceeding 10000 amu. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, vol. 15, no. 35, p. 14696, 2013.
- [7] Roger Penrose. On gravity's role in quantum state reduction. *General relativity and gravitation*. Vol. 28, No. 5, pp. 581-600, 1996.
- [8] J. Chan et al. Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. *Nature*, vol. 478, no. 10461, pp. 89-92, 2011.
- [9] J. D. Teufel et al. Sideband Cooling Micromechanical Motion to the Quantum Ground State. *Nature*, vol. 475, no. 7356, pp. 359-363, 2011.
- [10] R. W. Peterson et al. Laser Cooling of a Micromechanical Membrane to the Quantum Backaction Limit. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, pp. 1-6, 2016.
- [11] B. P. Abbott et al. GW150914: The advanced LIGO detectors in the era of first discoveries. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 13, pp. 1-12, 2016.
- [12] M. Bawaj et al. Probing deformed commutators with macroscopic harmonic oscillators. *Nat. Commun.*, vol. 6, no. May, p. 7503, 2015.
- [13] N. Matsumoto, K. Komori, Y. Michimura, G. Hayase, Y. Aso, and K. Tsubono. 5-Mg Suspended Mirror Driven By Measurement-Induced Backaction. *Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 92, no. 3, pp. 6-11, 2015.
- [14] A. R. Neben, T. P. Bodiya, C. Wipf, E. Oelker, T. Corbitt, and N. Mavalvala. Structural thermal noise in gram-scale mirror oscillators. *New J. Phys.*, vol. 14, 2012.
- [15] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.* 43, 172., vol. 43, no. 3-4, pp. 172-198, 1927.
- [16] H. Müller Ebhardt. On quantum effects in the dynamics of macroscopic test masses. Doctoral thesis, Hannover University, 2009.
- [17] D. Shoemaker, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Maischberger and A. Rüdiger. Noise behavior of the Garching 30-meter prototype gravitational-wave detector. *Physical Review D* 38 1988 423-432.
- [18] P. R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. *Phys. Rev. D* 42 1990 2437-2445.

- [19] Y. Levin. Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach. *Phys. Rev. D* 57 1998 659-663.
- [20] G. M. Harry, A. M. Gretarsson, P. R. Saulson, S. E. Kittelberger, S. D. Penn, W. J. Startin et al. Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings. *Classical and Quantum Gravity* 19 2002 897-917.
- [21] H. B. Callen and T. A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Physical Review*, 83(1):34-40, 1951.
- [22] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健. 重力波をとらえる 存在の証明から検出へ. 京都大学学術出版会 (1998).
- [23] 中島良介. 巨視的量子力学の検証に向けた鏡の磁石懸架システムの開発. 修士論文 (2020).
- [24] William M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 97th Edition. CRC Press, 2016.
- [25] Earnshaw S. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Trans Camb Phil Soc*, 1842, 7: 97^{e2}80⁹³¹¹²
- [26] Salauddin M, Park J Y. Design and experiment of human hand motion driven electromagnetic energy harvester using dual Halbach magnet array. *Smart Mater Struct*, 2017, 26: 035011
- [27] Barrot F, Sandtner J, Bleuler H. Acceleration sensor based on diamagnetic levitation. In: *International Symposium on Vibration Control of Nonlinear Mechanisms and Structures*. Munich, 2005.130: 81^{e2}80⁹³⁹⁰
- [28] Küstler G. Extraordinary levitation height in a weight compensated diamagnetic levitation system with permanent magnets. *IEEE Trans Magn*, 2012, 48: 2044^{e2}80⁹³²⁰⁴⁸
- [29] 中島良介, IIR フィルタを用いた光干渉計の制御, (卒業論文)
- [30] Hugh O. Pierson, *Handbook of carbon, graphite, diamond, and fullerenes: properties, processing, and applications*, p. 61, William Andrew, 1993 ISBN 0-8155-1339-9.
- [31] 理科年表 平成 30 年. 丸善出版, 2017
- [32] 下田智文, ビームスプリッターにおける磁場雑音の計算. JGW-T1504459-v9
- [33] V.B. Braginsky, *Phys. Lett. A* 264 1996 1-10
- [34] 株式会社二六製作所 HP. <https://www.26magnet.co.jp/database/associated-data/no2.html>.
- [35] 小田部 荘達, 偏光解析法を用いたリング共振器の制御, (卒業論文)

謝辞

本修士論文を完成させるにあたり、多くの方々のご協力を賜りました。改めてこの場にて、感謝申し上げます。

指導教員である宗宮健太郎先生には、研究生活にあたり非常に多くの事をお世話になりました。外部からやってきた浅学の私に対して、基礎から様々なことを優しく教えていただきました。研究に悩んだ時もいつも相談に乗っていただき、ご助言をいただきました。宗宮研究室には自由な雰囲気があり、やりたい事を積極的にやらせていただける環境であり、そのような場で研究をすることができて、とても有意義に学生生活を過ごす事ができたと思っています。また、経験未熟な私にも KAGRA へ行く機会を与えてくださった事を非常に感謝しております。KAGRA に行くことはこの研究室に来た大きな理由の一つであり、その願いが叶った事は嬉しく、また貴重な経験をする事ができました。

特任講師の原田先生にも、大変お世話になりました。勉強会に誘って頂いたり、実験室で困っている時は声をかけてくれたりといつも優しく気にかけて頂いた事、非常に感謝しております。特に実験で悩んでいる時には原田先生を持つ光学実験に対する豊富な知見に何度も助けていただきました。

国立天文台の藤本先生には、研究室のゼミにご参加頂き、先生がお持ちになる幅広い学問の深い知識と長年の研究経験からのご意見にはいつも敬服しておりました。

博士1年の小田部さんは非常に優秀な方で、私の素っ頓狂な質問に対してもいつも優しく誠実に答えていただきました。小田部さんはいつも頼りになる存在で、研究に何か困った時にはいつも相談をして、その度に的確なアドバイスを頂きました。

また去年に卒業した中島さんにも大変お世話になりました。私の中島さんの研究テーマを引き継いだという事もあって、卒業したにも関わらず困った時には連絡させて頂き、幾度もご助言頂いた事に非常に感謝しております。

修士1年の栗林くん、立原くんは、外部から新しく入ってきた私にとっては半ば同期のような存在でした。先輩らしく振舞うことが出来なかったことは心苦しいですが、2人はいつも私に気さくにコミュニケーションをとってくれました。栗林くんとは、研究について何度も議論を行っており、栗林くんの鋭い指摘にはいつも刺激を受けていました。立原くんは研究室のムードメーカー的な存在で、何度も企画ごとを立ち上げて研究室の交流を図ってくれました。

また、OBである佐々木さん、Liu さんにもお世話になりました。佐々木さんには私が就職活動で悩んでいる時にアドバイスをして頂き、大変助けて頂きました。Liu さんは留学生ながらも日本語が達者で、よく世間話に付き合ってくれました。Liu さんもまた私にとっては同期のような存在で、授業と一緒に参加したり、ご飯にも何度か行ったことが思い出深いです。

修士1年の阿部くん、4年生の海堂くん、孝典くんとはコロナの影響もあり、あまり交流がなくて残念でしたが、ゼミなどの場面で質問や意見を頂きました。

技術支援員の前川さんと深山さんは、研究以外の面で支えて頂きました。お二人のおかげで実験器具の検収などの事務手続きを気にすることなく研究に専念する事ができました。

私の大学院生活を様々な面で支えてくれた家族にも、感謝を伝えたいと思います。学費や生活費の面で私が苦勞することなく、研究に集中して取り組むことができたのは家族の理解と援助があつてこそでした。

最後に改めて皆様に感謝申し上げます。誠にありがとうございました。