

修士論文

巨視的量子力学の検証に向けた
鏡の磁石懸架システムの開発

東京工業大学理学院物理学系物理学コース宗宮研究室
18M00604 中島 良介

令和2年2月6日

はじめに

ミクロな世界における物理を記述するために生まれた量子力学では重ね合わせ状態などといった特異な現象を扱う。しかしマクロな物質の重ね合わせ状態はいまだ観測されたことがなく、マクロな世界でも量子力学が成立するかについては未解決問題である。物質が量子性を失う現象はデコヒーレンス [1] と呼ばれ、マクロな物質でこれが発生する要因は2つ考えられている。1つ目は、マクロな物質は一般に環境と相互作用しやすいためという説である。この場合系を十分に環境から孤立させれば量子性は見えるはずである。2つ目は、ある程度重い物質は自分自身の重力によって量子性が崩壊するという説でありこれは特に重力デコヒーレンス [2] と呼ばれる。ただし観測例はなく、デコヒーレンスがおきるまでの時間の質量依存性としていくつかモデルがあるため検証には様々な質量スケールの振動子において重力デコヒーレンスを観測する必要がある。そこで重力波検出器に代表されるようなレーザー干渉計を用いた量子計測を、様々な質量スケールの鏡で行うことができればこの問題に示唆を与えることができると考えられている。このような巨視的量子力学の検証実験に必要な条件は鏡の位置測定精度を Heisenberg の不確定性原理から導出される標準量子限界に到達させることである。しかし 0.1 mg スケールにおいては従来のワイヤー懸架では懸架線の熱雑音によって標準量子限界に到達できない。

本修士論文研究では石英鏡が反磁性であることに着目し、磁場をかけて浮上させる"磁石懸架システム"の開発を行った。反磁性は多くの物質が持っている性質であり、一般にその効果は非常に小さいが強磁場をかけることで受動的に浮上させることができる。制御が必要ないため制御における雑音を生じないことが特徴である。これまで生きた蛙 [3] やガラス [4] など多くの反磁性体の浮上が主に大型の超伝導コイルや常伝導コイルを用いて行われてきたが非常にコストがかかるため、本修士論文研究では永久磁石を用いた。永久磁石と鉄で構成した磁石懸架システムの磁場分布をシミュレーションして石英が浮上可能であることを示し、そして実際に 0.1 mg から 1 mg の石英の浮上の実験的検証に成功した。反磁性体はスケールが小さいほど浮上させやすい特徴があるが、このスケールかつ石英程度の磁化率での浮上例は永久磁石を用いたシステムとしては我々が調べた限り過去にはない。また磁石懸架システムの雑音の見積もりも行った。

本修士論文の構成を記す。第1章では背景を述べた。第2章では反磁性体の磁気浮上についてまとめた。第3章以降では直径 0.4 mm、厚さ 0.4 mm、質量 0.1 mg の石英鏡を磁石懸架した際のいくつかの代表的な古典雑音を見積もった。第3章では環境磁場雑音を見積もった。環境磁場雑音には環境磁場変動によるものと環境磁場勾配変動によるものがあるが前者のみを扱った。第4章では渦電流計算手法の精度検証実験と渦電流熱雑音の見積もりを行った。ただ実際に散逸を測定するまでには至

らなかった。第5章では磁石の熱雑音を理論的手法と実験的手法で見積もった。第6章ではその他の雑音をまとめた。第7章では本修士論文で見積もった古典雑音をまとめ、400 Hz から 80 kHz において標準量子限界を狙えることから、0.1 mg スケールにおいて磁石懸架はワイヤー懸架に代わる懸架手法として有望であることを示した。

Abstract

Quantum mechanics constructed to describe physics in the microscopic world deals with unique phenomena such as superposition. However, the superposition state of macroscopic matter has not been observed yet, and it is an unsolved problem whether quantum mechanics holds in the macroscopic world. The phenomenon a matter loses its quantum property is called decoherence [1], and there are two possible causes for this in macroscopic matter. The first is that macroscopic matter are generally more likely to interact with the environment. In this case, quantum properties should be visible if the system is sufficiently isolated from the environment. The second is that the quantum nature of a heavy matter collapses by its own gravity, which is called gravitational decoherence [2]. However, this phenomenon has not been observed yet, and there are several models as mass dependence of the time until decoherence occurs. For verification, it is necessary to observe gravitational decoherence with various mass scales. Therefore, it is thought that if quantum measurement using an laser interferometer is realized with mirrors of various mass scales, something may be found about this problem. A necessary condition required to realize such a macroscopic quantum mechanics verification experiment is to reach the position measurement sensitivity of the mirror the standard quantum limit derived from Heisenberg's uncertainty principle. However, at the 0.1 mg scale, the standard quantum limit cannot be reached with conventional wire suspension due to the thermal noise of the suspension wire.

In this master's thesis research, we used the fact that quartz mirrors are diamagnetic, and developed a "magnetic levitation system" that levitates by applying a magnetic field. Diamagnetism is a property of many substances, and its effect is generally very small, but it can be passively levitated by applying a strong magnetic field. The feature is that there is no noise related to control because no control is required. Up to now, many diamagnetic materials such as frogs [3] and glass [4] have been levitated mainly using large superconducting coils or normal conducting coils, but the cost is extremely high. In this thesis, permanent magnets were used. The magnetic field distribution of the magnetic suspension system composed of permanent magnets and yokes was simulated to show that quartz could levitate, and in fact, experimental verification of levitation of 0.1 mg \sim 1 mg quartz was successful. The diamagnetic material has the characteristic that the smaller the scale, the easier it is to levitate. To the best of our knowledge, there is no case of levitation with this scale and a susceptibility similar to that of quartz in the past. The noise of the magnetic suspension system was also estimated.

The composition of this master's thesis is described below. Chapter 1 summarizes some background. Chapter 2 summarizes the diamagnetic levitation. From Chapter 3 onward,

some typical classical noises were estimated when a quartz mirror with a diameter of 0.4 mm, a thickness of 0.4 mm, and a mass of 0.1 mg was suspended by the magnetic levitation system. In Chapter 3, the environmental magnetic field noise was estimated. There are two types of this noise, one due to environmental magnetic field fluctuation and the other due to environmental magnetic field gradient fluctuation. In this study, I dealt with only the former. In Chapter 4, eddy current thermal noise was estimated and accuracy verification experiment of eddy current estimation method was performed. However, the dissipation has not been measured yet. In Chapter 5, the thermal noise of the magnet was estimated by theoretical and experimental methods. Chapter 6 summarizes other noises. In Chapter 7, we summarize the classical noise estimated in this master's thesis and show that magnetic suspension is a promising alternative to wire suspension at the 0.1 mg scale because the standard quantum limit can be aimed at 400 Hz \sim 80 kHz.

目次

第1章	背景	1
1.1	巨視的量子力学	1
1.2	標準量子限界	2
1.3	振動子の熱雑音	3
1.4	鏡の熱雑音	5
1.5	懸架線の熱雑音	5
第2章	反磁性体の磁気浮上	8
2.1	磁性	8
2.2	ラーモア反磁性	11
2.3	浮上原理	13
2.4	磁化率一覧	15
2.5	強磁場の発生	16
2.6	歴史	16
2.7	磁石懸架システム	17
2.8	磁力のシミュレーション	19
2.9	浮上検証実験	23
第3章	環境磁場雑音	26
3.1	サーチコイル	26
3.2	環境磁場の測定	33
3.3	環境磁場雑音	36
第4章	渦電流熱雑音	37
4.1	渦電流によるエネルギーの散逸	37
4.2	渦電流計算手法の精度検証実験	38
4.2.1	渦電流による散逸の測定	38
4.2.2	永久磁石の磁場の測定	41
4.2.3	グラフィイトの電気抵抗率の測定	42
4.2.4	渦電流による散逸のシミュレーションと測定値の比較	43
4.3	渦電流熱雑音の見積もり	44
4.3.1	鏡以外の物質内部の渦電流	44
4.3.2	鏡内部の渦電流	49
4.3.3	渦電流熱雑音	49

第 5 章	磁石の熱雑音	50
5.1	理論的手法	50
5.1.1	磁石の温度変動	50
5.1.2	磁石の温度変動のスペクトル	51
5.1.3	磁石が作る磁場の温度依存性	55
5.1.4	磁石の温度変動による鏡の位置変動スペクトル	55
5.2	実験的手法	56
第 6 章	その他の雑音	60
6.1	残留ガス熱雑音	60
6.2	地面振動雑音	60
6.3	レーザーの量子雑音	61
第 7 章	まとめと今後の課題	62
付録 A	機械光学系の基礎	64
付録 B	磁石懸架システムの図面	69
	参考文献	72

第1章 背景

1.1 巨視的量子力学

量子力学はミクロな世界を記述するために生まれ、重ね合わせ状態などといった特異な現象を扱う。ただマクロな物質の重ね合わせ状態は観測されたことがないため、マクロな世界でも量子力学が成立するかについては未解決問題である。物質が量子性を失う現象はデコヒーレンス [1] と呼ばれ、これが発生する要因は2つ考えられている。1つ目は、マクロな物質は一般に環境と相互作用しやすいためという説である。この場合系を十分に環境から孤立させれば量子性は見えるはずである。2つ目は、ある程度重い物質は自分自身の重力によって量子性が崩壊するという説でありこれは特に重力デコヒーレンス [2] と呼ばれる。ただし観測例はなく、デコヒーレンスがおきるまでの時間の質量依存性といっていくつかモデルがあるため検証には様々な質量スケールの振動子において重力デコヒーレンスを観測する必要がある。

デコヒーレンス

量子力学ではある量子状態 $|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ が実現可能ならば複素数 c_1, c_2 を用いてこれらを重ね合わせた状態

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \quad (1.1)$$

も実現可能である。ここで環境も量子的に扱う。つまりこの系が状態 $|\psi_1\rangle$ をとるとき環境が状態 $|\epsilon_1\rangle$ 、状態 $|\psi_2\rangle$ をとるとき環境が状態 $|\epsilon_2\rangle$ をとるものとする。このとき環境も含めた状態は次のようにエンタングルする:

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle|\epsilon_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle|\epsilon_2\rangle \quad (1.2)$$

このとき任意の演算子 \hat{Q} の期待値は

$$\langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle = |c_1|^2\langle\psi_1|\hat{Q}|\psi_1\rangle + |c_2|^2\langle\psi_2|\hat{Q}|\psi_2\rangle + 2\text{Re}\left[c_1^*c_2\langle\psi_1|\hat{Q}|\psi_2\rangle\langle\epsilon_1|\epsilon_2\rangle\right] \quad (1.3)$$

と計算できる。第3項が状態 $|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ の干渉効果を表す。ここでこの項は $\langle\epsilon_1|\epsilon_2\rangle$ に比例することがわかる。つまり環境との相互作用が大きいほどデコヒーレンスが起きることになる。

デコヒーレンスが起きる具体的な例としてヤングの干渉実験(図 1.1)を考える。光源で発生させた光子をスリット A もしくはスリット B を通した後スクリーンで干渉させる。この実験を1光子で行っても自分自身と干渉するため干渉縞が見られるのが量子力学の特徴である。ここでスリットにセンサーを置くと干渉縞が消えることが知られているが、これはセンサーが光子を検出する状態と検出しない状態が直交

するためであると解釈できる。この実験を光子ではなくマクロな物質で行った場合、干渉縞を観測するのは困難である。これは物質がスリットを通過する際にスリットと相互作用してしまい、スリットを物体が通った状態と通らない状態が直交するためであると解釈できる。つまり実際にどちらのスリットを通ったか実際に測定をせずとも、それが原理的にわかるほど環境に影響を与えるならばデコヒーレンスが起きるのである。

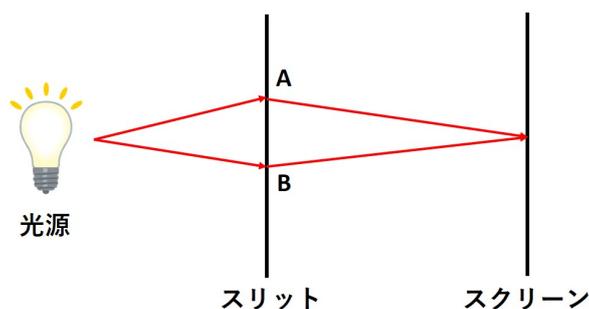


図 1.1: ヤングの干渉実験

1.2 標準量子限界

巨視的量子力学を検証するために必要な条件は、振動子の位置測定精度を Heisenberg の不確定性原理から導かれる標準量子限界 (SQL) まで到達させることである。

不確定性原理は振動子の位置の揺らぎを Δx 、運動量の揺らぎを Δp 、ディラック定数を \hbar とすると

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.4)$$

と表される。振動子の位置を連続測定する場合、式 (1.4) をパワースペクトル密度に換算すると

$$S_{\text{SQL}}(\omega) = 2\hbar |\chi(\omega)| \quad (1.5)$$

と書ける。ここで ω は角周波数、 $\chi(\omega)$ は振動子の力から変位の感受率である。

Fabry-Perot 共振器における標準量子限界

Fabry-Perot 共振器を用いて鏡の位置の測定を行う場合の標準量子限界と、光子の量子性に起因するレーザーの量子雑音の関係について記す。

レーザーの量子雑音にはフォトディテクターに入射する光子数が統計的に揺らぐことで生じる散乱雑音と、鏡が光子から受ける輻射圧が統計的に揺らぐことで生じる輻射圧雑音があり、それぞれの鏡の位置変動スペクトル $S_{\text{shot}}(\omega)$ 、 $S_{\text{rad}}(\omega)$ は次の

ように表される [5] :

$$S_{\text{shot}}(\omega) = \frac{\kappa}{4N_{\text{circ}}G^2} \left(1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa^2} \right) \quad (1.6)$$

$$S_{\text{rad}}(\omega) = \frac{4N_{\text{circ}}\hbar^2G^2|\chi(\omega)|^2}{\kappa} \left(1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa^2} \right)^{-1} \quad (1.7)$$

ここで共振器のキャビティポールを κ 、共振器内の光子数を N_{circ} 、レーザーの角周波数を ω_L 、片道の共振器長を L 、 $G = \omega_L/L$ 、 Δ を離調とした。

散射雑音と輻射圧雑音の和 $S_{\text{qn}}(\omega) = S_{\text{shot}}(\omega) + S_{\text{rad}}(\omega)$ は共振器のカップリング係数

$$\mathcal{K} = \frac{4N_{\text{circ}}\hbar^2G^2|\chi(\omega)|}{\kappa} \left(1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa^2} \right)^{-1} \quad (1.8)$$

を用いれば

$$S_{\text{qn}}(\omega) = \frac{S_{\text{SQL}}(\omega)}{2} \left(\mathcal{K} + \frac{1}{\mathcal{K}} \right) \geq S_{\text{SQL}}(\omega) \quad (1.9)$$

と書けることから量子雑音 $S_{\text{qn}}(\omega)$ を標準量子限界 $S_{\text{SQL}}(\omega)$ 以下にできないことがわかる。

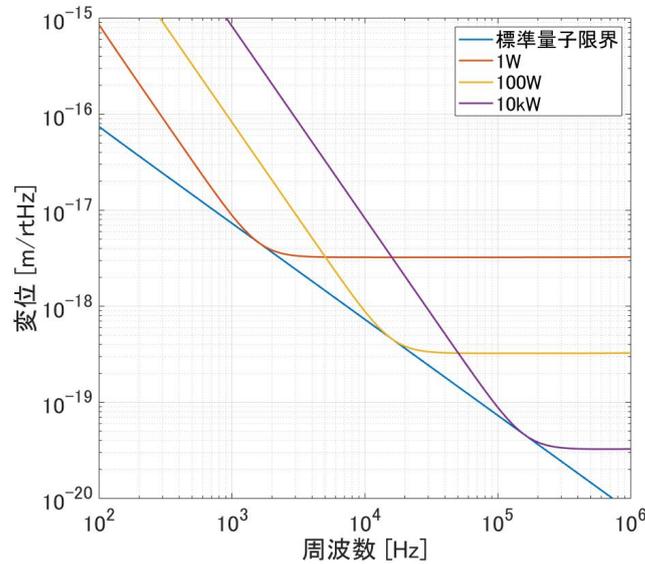


図 1.2: 標準量子限界とレーザーの量子雑音の関係。フィネス 100、長さ 10cm、オーバーカップリングの Fabry-Perot 共振器において共振器内パワーを 1W、100W、10kW とした。懸架鏡の質量は 0.1mg。

1.3 振動子の熱雑音

振動子の熱雑音について記す。

振動子は熱浴とエネルギーをランダムにやり取りし平衡状態になっており、揺動散逸定理により、熱浴へのエネルギーの散逸が大きいほど熱浴から流入する揺動力も大きくなる。この揺動力が振動子の熱雑音の起源であり、これによる振動子の変位スペクトルを求める。

まず散逸項を無視した場合の振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -m\omega_m^2 x(t) + F(t) \quad (1.10)$$

である。 m は質量、 ω_m は共振角周波数、 $F(t)$ は外力である。式 1.10 をフーリエ変換すると

$$-m\omega^2 x(\omega) = -m\omega_m^2(1 + i\phi)x(\omega) + F(\omega) \quad (1.11)$$

となる。ここではね定数に虚部を導入した。この項は散逸を表し、 ϕ は損失角と呼ばれる。

損失角 ϕ には周波数に比例する viscous モデルとほぼ一定である structure モデルの2種類がある:

$$\phi = \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_m Q} & (\text{viscous}) \\ \frac{1}{Q} & (\text{structure}) \end{cases} \quad (1.12)$$

ここで無次元量である Q 値を導入した。これはモデルによらず共振周波数における損失角 ϕ の逆数を表す。

次に散逸 γ を次のように定義する:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\omega_m}{2Q} & (\text{viscous}) \\ \frac{\omega_m^2}{2Q\omega} & (\text{structure}) \end{cases} \quad (1.13)$$

揺動散逸定理によれば熱揺動力のスペクトルはボルツマン定数 k_B 、温度 T 、散逸 γ を用いて次のように表される [6]:

$$S_{f,\text{th}}(\omega) = 8k_B T \gamma m \quad (1.14)$$

ここで感受率 $\chi(\omega)$ は式 (1.11) より

$$\chi(\omega) = \frac{x(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{m(\omega_m^2 - \omega^2 + i\omega_m^2\phi)} \quad (1.15)$$

であるから、熱雑音による振動子の変位スペクトルは式 (1.14)、(1.15) より

$$\begin{aligned} S_{x,\text{th}}(\omega) &= |\chi(\omega)|^2 S_{f,\text{th}}(\omega) \\ &= \frac{1}{m} \frac{8k_B T \gamma}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \omega_m^4 \phi^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

となる。

1.4 鏡の熱雑音

鏡の熱雑音は以下のように表される [7,8]:

$$S(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega} \left[\frac{\phi_s}{\sqrt{\pi} \omega_L} \frac{1 - \nu_s^2}{Y_s} + \sum_c \frac{d_c \phi_c Y_c^2 (1 + \nu_s)^2 (1 - 2\nu_s)^2 + Y_s^2 (1 + \nu_c)^2 (1 - 2\nu_c)^2}{\pi \omega_L^2 Y_s^2 Y_c (1 - \nu_c^2)} \right] \quad (1.17)$$

第1項が基材の熱雑音、第2項がコーティングの熱雑音である。ここで ϕ は損失角、 Y はヤング率、 ν はポアソン比、 d はコーティングの厚さ、 ω_L はビーム半径である。添え字の s は基材、 c はコーティングを表す。コーティングとして TiO_2 -doped Ta_2O_3 が $N+1$ 層、 SiO_2 が N 層の誘電体多層膜を考える。層の厚さは各層の片道の位相変化が $\pi/4$ となるようにする。屈折率をそれぞれ n_1 、 n_2 、鏡の反射率を r とすると

$$N = \frac{\ln \left((n_2/n_1^2)(1+r)/(1-r) \right)}{2 \ln(n_1/n_2)} \quad (1.18)$$

の関係がある。

鏡でのビーム径 ω_L の決定方法を考える。ガウシアンビームの規格化された強度分布は

$$P(r) = \frac{2}{\pi \omega_L^2} \exp \left(-\frac{2r^2}{\omega_L^2} \right) \quad (1.19)$$

であり、鏡の半径を r_0 とすると $r > r_0$ のレーザーパワーは失われ、その割合は

$$\int_{r_0}^{\infty} 2\pi r P(r) dr = \exp \left(-\frac{2r_0^2}{\omega_L^2} \right) \quad (1.20)$$

である。つまり

$$\exp \left(-\frac{2r_0^2}{\omega_L^2} \right) \ll 1 - r^2 \quad (1.21)$$

を満たす必要がある。

1.5 懸架線の熱雑音

鏡を懸架線で懸架したときの熱雑音について記す。

振り子の復元力として働くのは懸架線の張力のみではなく重力も含まれるが、重力には散逸がないため振り子の散逸は懸架線の素材が持つ散逸よりも軽減される。これは重力希薄化と呼ばれ、素材の Q 値を Q_{mat} 、鏡の質量を m 、重力加速度を g 、懸架線の長さを l 、半径を r 、本数を n 、ヤング率を Y とすると振り子の Q 値は

$$Q = \frac{4l}{nr^2} \sqrt{\frac{mg}{\pi Y}} Q_{\text{mat}} \quad (1.22)$$

となる [9]。つまり懸架線に同じ素材を用いた場合 Q 値は \sqrt{ml}/r^2 に比例するため、鏡は重くするほど、懸架線は細長くするほど Q 値を高くできる。

また懸架線にはバイオリンモードと呼ばれるそれ自身が弾性振動をするモードも存在し、その熱雑音も考慮する必要がある。懸架線の質量を m_w 、音速を $v = \sqrt{mgl/m_w}$ とすると n 次のバイオリンモードの共振角周波数は $\omega_n \approx n\pi\omega_m\sqrt{m/m_w}$ 、換算質量は $\mu_n = \frac{m}{2}(1 + (\omega_n/\omega_m)^2 / \cos^2(l\omega_n/v))$ であり、これを用いて熱雑音は

$$S(\omega) = \sum_n \frac{4k_B T}{\mu_n \omega} \frac{\omega_n^2 \phi_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \omega_n^4 \phi_n^2} \quad (1.23)$$

と書ける [10]。ここで ϕ_n は n 次モードの散逸であり、次数にはあまり依存せず基本の振り子モードの散逸の約4倍である [11]。鏡は重くするほど、懸架線は軽くするほどバイオリンモードを高周波にもっていけるため有利になる。

ここまでで鏡を懸架線で懸架したときの熱雑音について述べ、鏡が軽いほどこの雑音の影響は大きくなることを確認した。現在 mg スケールにおいて最も Q 値の高い振り子は長さ 5 cm、直径 $1 \mu\text{m}$ の石英ファイバーを用いたもので共振周波数 2.2 Hz、 Q 値 2×10^6 、鏡の質量は 7 mg であり、1 kHz 付近において標準量子限界を狙うことができる [12]。ところが仮にこれと同じ振り子を用いて 0.1 mg の鏡を懸架したとすると図 1.3 のように懸架線の熱雑音が標準量子限界を超えてしまう。

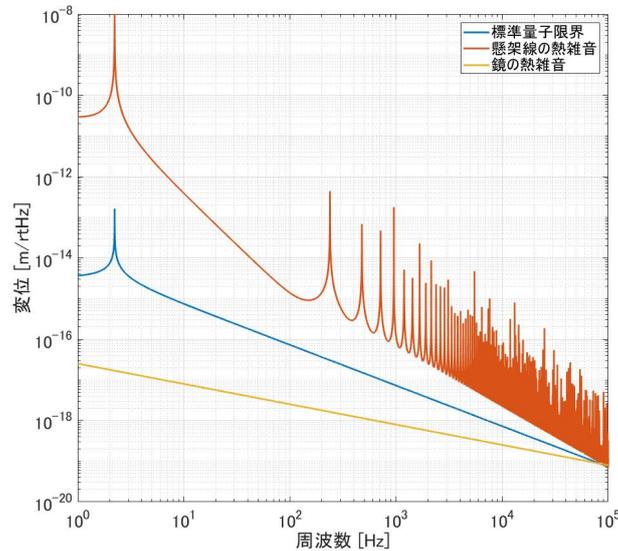


図 1.3: 0.1 mg の鏡を懸架したときの懸架線の熱雑音と鏡の熱雑音。鏡の半径は 0.2 mm、反射率は 99%、ビーム半径は 0.1 mm、鏡の物性値は表 1.1 の通りとした。

表 1.1: 鏡の物性値 [13]

物質	石英(基材)	石英(コーティング)	TiO ₂ -doped Ta ₂ O ₃
損失角 ϕ	1×10^{-6}	5×10^{-5}	2×10^{-4}
ポアソン比 ν	0.17	0.17	0.28
ヤング率 Y	73 GPa	73 GPa	140 GPa
屈折率 n	1.45	1.45	2.07

第2章 反磁性体の磁気浮上

前節では mg スケール以下では懸架線の熱雑音のためワイヤー懸架では標準量子限界の到達が難しいことを確認した。そこで本論文では石英鏡が反磁性であることを利用し、永久磁石を用いて発生させた磁場に反発させて浮上させる"磁石懸架システム"を開発する。ただし 0.1 mg よりも小さいスケールではピンセットで扱うことが難しく、鏡の製造も難しい。また後ほど述べるが磁気浮上はスケールが小さいほど行いやすい。そこで 0.1 mg~1 mg 程度の浮上を目指す。

2.1 磁性

全ての物質は磁場に対しなんらかの反応を示す。これは電子が磁気モーメントを持っているためでありこの磁気モーメントは電子のスピン運動によるものと電子の軌道運動によるものに分けられる。軌道運動についてはさらに電子の角運動量によるものと反磁性の効果によるものに分けられる。

電子のスピンによって生じるスピン磁気モーメント μ_{spin} は

$$\mu_{\text{spin}} = -g\mu_B S \quad (2.1)$$

と表される。ここで g は電子の g 因子(およそ 2)、 $\mu_B = e\hbar/2m \sim 9.274 \times 10^{-24}$ [J/T=A·m²] はボーア磁子、 $-e$ は電子の電荷、 m は電子の質量、 $\hbar s$ は電子のスピン角運動量である。

電子の軌道角運動量に起因する軌道磁気モーメント μ_{orbit} は

$$\mu_{\text{orbit}} = -\mu_B l \quad (2.2)$$

と表される。ここで $\hbar l$ は電子の軌道角運動量であり

$$\hbar l = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2.3)$$

で定義される。 \mathbf{r} は電子の位置、 \mathbf{p} は電子の運動量である。

反磁性の効果(ラーモア反磁性)による磁気モーメントは次節で述べる。

ちなみに原子核も磁気モーメント

$$\mu = g_N \mu_N I \quad (2.4)$$

を持つ。ここで g_N は 1 程度、 $\mu_N = e\hbar/2m_p$ は核ボーア磁子、 m_p は陽子の質量、 $\hbar I$ は原子核のスピン角運動量である。ただし陽子の質量は電子の約 2000 倍であるため

原子核の磁気モーメントは電子の磁気モーメントに対してふつう無視できる。

単位体積当たりの磁気モーメントを磁化 \mathbf{M} といい、体積を V とすれば

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{\mu}_i}{V} \quad (2.5)$$

と書ける。 μ_0 は真空の透磁率である。外部磁場を \mathbf{H} 、磁化を \mathbf{M} 、外部磁場と磁化が作る磁場を合わせた磁束密度を \mathbf{B} とすると

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.6)$$

の関係がある。横軸に \mathbf{H} 、縦軸に \mathbf{B} をとったグラフを \mathbf{B} - \mathbf{H} 曲線という。

物質は大きく分けて常磁性体、反磁性体、強磁性体の3種類に分類できる。まず常磁性と反磁性について述べる。

常磁性には2つのパターンがある。外部磁場がないとき各原子が磁気モーメントを持つ場合と持たない場合である。前者の場合、外部磁場がない場合は各磁気モーメントはばらばらの方向を向いているため全体の磁気モーメントは打ち消しあっている。ここで外部磁場をかけると各磁気モーメントが外部磁場の方向を向く確率が他の方向を向く確率よりもわずかに高くなり、その結果全体として外部磁場の方向にわずかな磁気モーメントを持つようになる。後者の場合は外部磁場によってそれと平行な向きにわずかに磁化される。反磁性は後者に相当するが、外部磁場と逆の向きに磁化される点異なる。

常磁性体、または反磁性体に外部磁場 \mathbf{B} をかけたとき物質が

$$\mathbf{M} = \frac{\chi}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (2.7)$$

だけ磁化されるとする。このとき χ を (単位体積あたりの) 磁化率という。 $\chi > 0$ の物質が常磁性体、 $\chi < 0$ の物質が反磁性体である。

体積 V の磁性体に外部磁場 \mathbf{B} をかけたときのエネルギーを求める。磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ に外部磁場 \mathbf{B} をかけた場合のエネルギー U は

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (2.8)$$

であるから、磁性体の場合は $-V d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$ を積分すればよい：

$$U = - \int_0^{\mathbf{B}} V d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\chi V}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (2.9)$$

これより磁性体が外部磁場 \mathbf{B} から受ける力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla \mathbf{B}^2 \quad (2.10)$$

となる。

鉄やコバルト、ニッケルなどは強磁性体と呼ばれる。永久磁石も強磁性体の一種である。例として鉄の構造について述べる。鉄の内部は図2.1のように磁区とよばれるいくつかの領域にわかれており、それぞれの磁区内の磁気モーメントは非古典的な相

相互作用により全て同じ方向を向いている。磁区の大きさはおよそ0.01 mm~0.1 mmである。外部磁場がない場合はそれぞれの磁区の磁気モーメントの向きは古典的なクーロン相互作用によりバラバラの方向を向いているため全体としては磁気モーメントは打ち消される。ここで外部磁場をかけていくとクーロン相互作用が破れ、それぞれの磁区は外部磁場と同じ方向を向いていき、図2.2のように全ての磁区が外部磁場の方向を向いたところで磁化は飽和する。B-H曲線は図2.3のようになる。鉄は2T程度で飽和することがわかる。

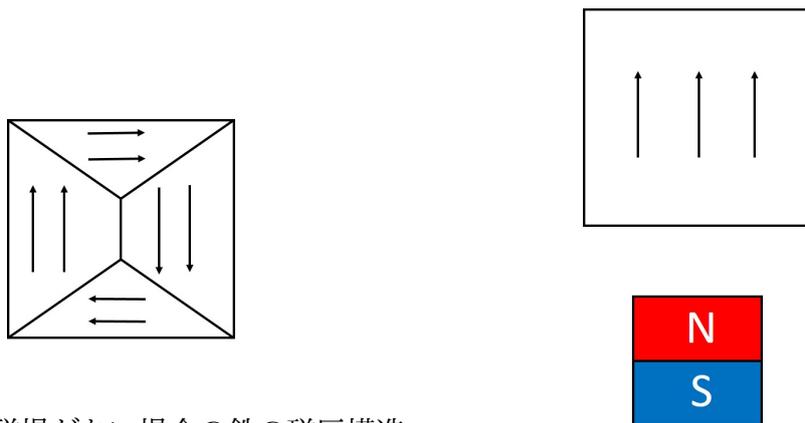


図 2.1: 外部磁場がない場合の鉄の磁区構造

図 2.2: 外部磁場がある場合の鉄の磁区構造

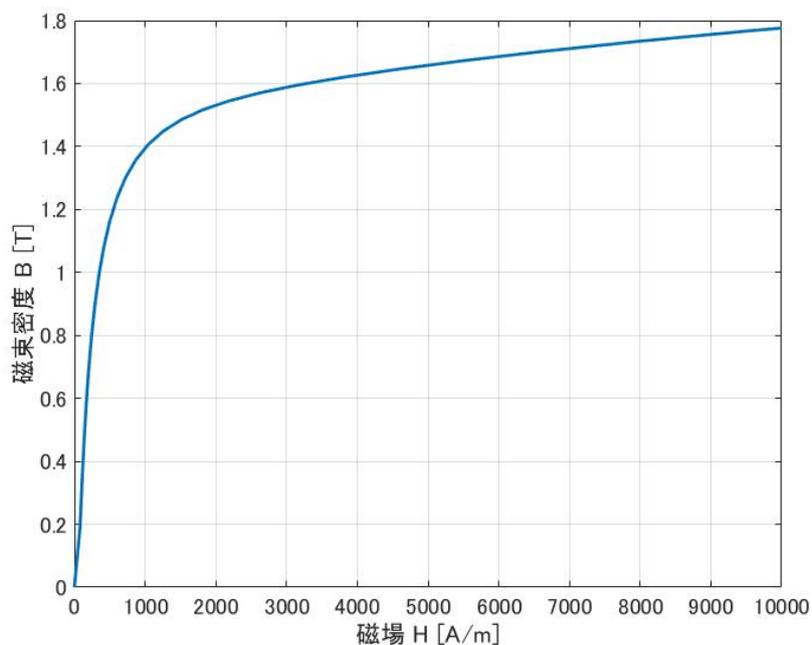


図 2.3: 鉄の B-H 曲線

鉄は通常外部磁場を取り去ると磁化はなくなる¹が永久磁石の場合は図2.4のように自発磁化を持つ。外部磁場がゼロのときの磁束密度を残留磁束密度 (B_r) といい、磁束密度をゼロにするのに必要な外部磁場の大きさを保持力 (H_c) という。これらが (絶対値として) 大きい程強力な永久磁石と言える。

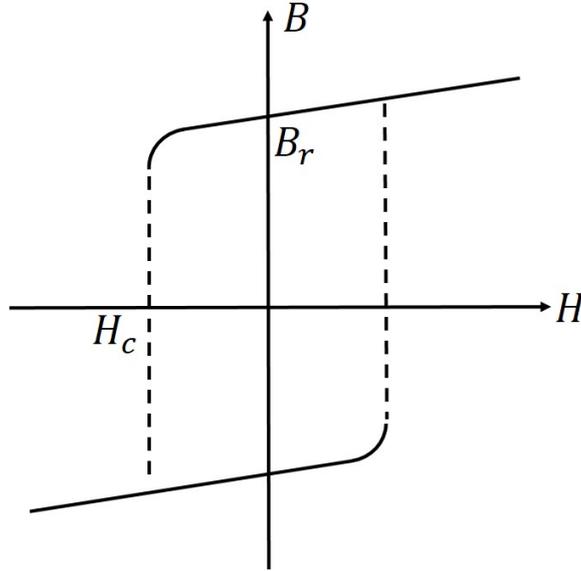


図 2.4: 永久磁石の B-H 曲線

2.2 ラーモア反磁性

石英が持つ反磁性はラーモア反磁性と呼ばれるものである。これについて見ていく。

簡単のため原点に静止した自由単原子を考える。これに z 方向に一様な外部磁場 \mathbf{B} をかけた系のハミルトニアン \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{(\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i))^2}{2m} + \sum_i g\mu_B \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{B} + \mathcal{H}_0 \quad (2.11)$$

である。第1項は電子の運動エネルギー、第2項は電子と外部磁場の相互作用によるゼーマンエネルギー、第3項は電子同士や電子と原子核の電磁相互作用を表す。ここで \sum_i はそれぞれの電子について和をとることを表す。 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ はベクトルポテンシャルである。ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対称ゲージ $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$ を用いるとハミルトニアン \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \mu_B \sum_i (l_{i,z} + g s_{i,z}) B + \sum_i \frac{e^2}{8m} (x_i^2 + y_i^2) B^2 + \mathcal{H}_0 \quad (2.12)$$

¹炭素の含有量が多い場合は多少の自発磁化を持つ。

と変形できる。このとき原子の磁気モーメントの z 成分 μ_z は

$$\begin{aligned}\mu_z &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B_z} \\ &= -\mu_B \sum_i (l_{i,z} + g s_{i,z}) - \sum_i \frac{e^2}{4m} (x_i^2 + y_i^2) B \\ &= \mu_{\text{para}} + \mu_{\text{dia}}\end{aligned}\quad (2.13)$$

となる。ここで

$$\mu_{\text{para}} = -\mu_B \sum_i (l_{i,z} + g s_{i,z}) \quad (2.14)$$

$$\mu_{\text{dia}} = -\sum_i \frac{e^2}{4m} (x_i^2 + y_i^2) B \quad (2.15)$$

とおいた。電子の軌道角運動量とスピン角運動量に由来する μ_{para} はよりエネルギーの低い $+z$ 方向を向きやすいため常磁性を表していることがわかる。これに対し μ_{dia} は外部磁場とは逆の $-z$ 方向を向くため反磁性を表している。この反磁性は特にラーモア反磁性と呼ばれる²。これはすべての物質が持つ性質であるが一般に非常に弱く、 μ_{para} がゼロとみなせない場合は覆い隠されてしまう。

ラーモア反磁性が古典的にはファラデーの法則に対応することを見してみる。 z 軸に垂直な面内の半径 a の円軌道上の電子を考える。初めは静止しているとする。時間 τ の間に磁場を 0 から B まで増加させる。磁場は z 方向で一様とする。このとき電子の軌道上にはファラデーの法則に従い誘導電場

$$E = -\frac{1}{2\pi a} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.16)$$

が発生し電子を加速させる。ここで Φ は軌道を貫く全磁束である。電子の最終速度 v は

$$v = \int_0^\tau \frac{-e}{m} E dt = \frac{e}{2\pi a m} \int d\Phi = \frac{eaB}{2m} \quad (2.17)$$

となるので電子の軌道運動が作る磁気モーメントの z 成分は

$$\mu_z = \frac{-eav}{2} = -\frac{a^2 e^2}{4m} B \quad (2.18)$$

となり式 (2.15) において電子を 1 個のみとした場合に一致する。このように古典的に扱った場合でも表式は量子的なものに一致するが、古典的には誘導電流は磁場変化に比例するため磁場変化が終われば消えるのに対し、量子力学が支配的な領域では永久に流れ続けることが反磁性の起源であると解釈できる。

²式 (2.15) からわかるようにラーモア反磁性を起源とする反磁性体の磁化率は温度にほぼ依存しない。室温程度では原子内の電子は励起されないからである。これに対し金属やグラファイトがもつ反磁性は Landau 反磁性と呼ばれ、この場合は磁化率は温度に依存する。

2.3 浮上原理

静磁場を用いて磁性体を安定して浮上させることができるための条件を考える。詳しくは [14] の付録 A~C を参照するとよい。

1839 年に T. Earnshaw は、ある自由空間に存在する荷電粒子に対し静電場のみを用いて安定なポテンシャルを作ることができないことを示した [15]。これを Earnshaw の定理という。自由空間において電氣的なポテンシャルはラプラス方程式に従い、自由空間では極大点や極小点を作れないためである。1939 年に W. Braunbek は Earnshaw の定理を拡張し、ある自由空間に存在する電気双極子モーメントや磁気モーメントに対し静電場や静磁場のみを用いて安定なポテンシャルを作ることができるための条件を考察した [16, 17]。これらについてまとめる。

まず自由空間において静磁場 \mathbf{B} がラプラス方程式に従うことを示す。ベクトル解析の公式より

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.19)$$

である。ここで透磁率を μ 、電流密度を \mathbf{j} としたとき静的な場合の Maxwell 方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (2.21)$$

であるが自由空間において電流はゼロであるため静磁場はラプラス方程式

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (2.22)$$

に従うことがわかる。

静的な外部磁場 \mathbf{B} を用いて磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を持つ永久磁石を浮上させる場合を考える。磁氣的なポテンシャルを U とする。安定点では

$$\nabla^2 U > 0 \quad (2.23)$$

となる必要があるが式 (2.8)、(2.22) を用いると

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= -\nabla^2(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \\ &= -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

となり、ポテンシャルは極大も極小もとれないことがわかる。つまり自由空間において静的な外部磁場を用いて永久磁石を安定に浮上させることは不可能である。これを Earnshaw の定理と呼ぶこともある。

次に体積 V 、磁化率 χ の常磁性体や反磁性体を浮上させる場合を考える。式 (2.9)、(2.22) を用いれば

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla^2 B^2 \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} (2(\partial_i B_j)^2 + 2\mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\chi V}{\mu_0} (\partial_i B_j)^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。これより $\chi < 0$ である反磁性体ならば静磁場のみを用いて安定に浮上しうることがわかる。

密度 ρ の十分小さい反磁性体を安定に浮上させるための必要十分条件を考える。重力は $-z$ 方向に働くとする。条件は浮上位置において

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} < 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} < 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} < 0 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{F} = 0 \quad (2.29)$$

が成り立つことである。式 (2.10) を用いるとこれらの条件は

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial x^2} > 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial y^2} > 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} > 0 \quad (2.32)$$

$$\nabla B^2 = \frac{2\mu_0\rho g}{\chi} \mathbf{e}_z \quad (2.33)$$

と変形できる。ただし \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトルである。

特に z 軸に対し軸対称な系において z 軸上で浮上させる場合を考えると、これらの条件は円柱座標系を用いて

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial r^2} > 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial^2 B_z^2}{\partial z^2} > 0 \quad (2.35)$$

$$B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\mu_0\rho g}{\chi} \quad (2.36)$$

と書ける。式 (2.34) が水平方向の安定条件である。これを満たすには z 軸上から水平方向にずれると磁場が大きくなるような系が必要となる。式 (2.35) が垂直方向の安定条件、式 (2.36) が磁力と重力がつり合うための条件である。反磁性体は一般に磁化率の絶対値が小さいため、浮上させるためには磁場と磁場勾配の積の絶対値を大きくする必要がある。

反磁性体の磁気浮上にはスケーリング則が存在する [18]。原点にある磁化 \mathbf{M} 、体積 V の磁石を用いて位置 \mathbf{r} にある反磁性体を浮上させる場合を考える。位置 \mathbf{r} における磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 V}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{M}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right) \quad (2.37)$$

である。ここで全体のスケールを k 倍する。このとき位置 \mathbf{r} は $\mathbf{r}' = k\mathbf{r}$ 、磁石の体積 V は $V' = k^3 V$ に変換される。ただし磁化 \mathbf{M} は不変とする。このとき位置 \mathbf{r}' の磁

場は

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(\mathbf{r}') &= -\frac{\mu_0 V'}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{M}}{r'^3} - \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'}{r'^5} \right) \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

と不変になるため磁場因子 ∇B^2 は

$$\nabla' B'^2(\mathbf{r}') = \frac{\nabla B^2(\mathbf{r})}{k} \quad (2.39)$$

と $1/k$ 倍になる。つまりスケールが小さいほど浮上力が大きくなり、浮上には有利である。

2.4 磁化率一覧

表 2.1: 磁化率

	磁化率 $-\chi(\times 10^{-5})$	密度 $\rho[\text{g}/\text{cm}^3]$	磁場 $[-\text{T}^2/\text{m}]$
熱分解グラファイト (\perp) [19]	45	2.3	62
グラファイト [19]	16	2.3	170
ビスマス [20]	16	9.8	730
エタノール [20]	0.72	0.79	1400
水 [20]	0.90	1.0	1400
エチレングリコール [21]	0.90	1.1	1500
PEEK [21]	0.93	1.3	1700
アセトン [20]	0.57	0.78	1700
石英 [20]	1.4	2.2	2000
ダイヤモンド [20]	2.2	3.5	2000
アクリル [20]	0.67	1.2	2200
テフロン [21]	1.0	2.2	2600
N-BK7 [21]	1.2	2.5	2700
酸化アルミニウム [20]	1.8	4.0	2700
銀 [20]	2.4	10.5	5400
金 [20]	3.5	19.3	6900
シリコン [20]	0.33	2.3	8900
銅 [20]	0.97	9.0	11000

代表的な反磁性体の磁化率と浮上に必要な磁場因子 $B_z \partial B_z / \partial z$ を表 2.1 に示す。熱分解グラファイトは永久磁石で容易に浮上できる。ただ第4章で詳しく述べるが導電性の物質を浮上させる場合は浮上体の内部に流れる渦電流による熱雑音が大きくなってしまう。そのため本修士論文では電気抵抗率が非常に大きく、また鏡の一般的な材質である石英を浮上させる。

2.5 強磁場の発生

反磁性体の磁気浮上には強磁場が必要である。

最も手軽に磁場を発生させる方法は永久磁石を用いることである。市販されている永久磁石の表面磁束密度は最高でもせいぜい1 T程度であり、さらに強くするには磁石の配置を工夫する必要がある。大型の永久磁石を特殊形状 (Hacbach 配列) に配置し、さらに鉄と組み合わせることで4 Tを発生させた例がある [22]。

さらに強くするためにはコイルを使う必要がある。コイルの内部に鉄芯を入れると効率よく磁場を発生させられるが鉄は図2.3のように2 T程度で飽和してしまうためそれ以上にする場合は空芯コイルが用いられる。ただし常伝導コイルの場合は大電流を流すと発熱の問題があり、20 Tを発生させるには消費電力はおよそ1000 Wワットにもなる。通常大型の常伝導コイルは水冷式である。

コイルのワイヤーに超伝導体を用いればジュール熱は発生せず、超伝導の転移温度以下への冷却のみが必要である。6 T程度までなら自作可能である [23]。それ以上にする場合は20 T程度までなら市販されている。冷却に液体ヘリウムを用いず冷凍機で動作する無冷媒型超伝導コイルも存在する。

最も強いDC磁場を発生させる方法は常伝導コイルと超伝導コイルを組み合わせたハイブリッド磁石を用いるもので、現在の世界記録は45.5 Tである [24]。

2.6 歴史

反磁性体の磁気浮上の歴史について述べる。詳細は [25–27] を参照するとよい。

反磁性体の磁気浮上は1939年にW. Braunbeckによって初めて行われた [16, 17]。彼は常伝導コイルを用いて2.1 T~2.3 Tにおいて75 mgのグラファイト、2.3 T~2.4 Tにおいて8 mgのビスマスの浮上に成功した。消費電力は530 Wであった。

永久磁石の浮上は1947年にV. Arkadievによって初めて行われた [28]。直径40 mmの鉛のディスクを液体ヘリウムによって冷却し超伝導体にすることで強い反磁性体とし、その上で約1 gの永久磁石が反発して浮上した。鉛は第一種超伝導体であるためピン止め効果ではなく純粋な反磁性による反発力である。水平方向を安定にするため鉛のディスクの中心を少し窪ませていた。

1956年にA.H. BoerdijkはW. Braunbeckの実験よりも少しスケールを小さくすることで永久磁石のみを用いたグラファイトの浮上に成功した [29]。また彼はグラファイトを用いた永久磁石の浮上にも成功した [30]。直径3 cm、厚さ30 cmの永久磁石の下のあたりに直径1 mm、厚さ0.3 mmの浮上させる永久磁石を不安定つり合いとなるように配置した。ここで浮上させる永久磁石のすぐ下にグラファイトを置くことで安定つり合いとなり、磁石は浮上した。彼が行ったこれら2つの実験は給電や冷却を必要としない磁気浮上の最初の例である。

1991年にE. BeaugnonとR. Toumierはハイブリッド磁石を用いてグラファイトとビスマスのみならず水、エタノール、アセトン、アンチモン、木、プラスチックの浮上に成功した [31, 32]。水の浮上には26.5 T~27 Tが必要であった。

1997年~2000年にかけてA.K. Geimらは16 T常伝導コイルを用いた体長数cmの生きた蛙の浮上や、永久磁石を指の反磁性を用いて浮上させるなど [3, 19, 26, 33] 世

間の注目を集める実験を行い、A.K. Geim と M.V. Berry は 2000 年にイグノーベル賞を受賞した。

2004 年に I.F. Lyuksyutov らは数 μm ~ 数十 μm 程度、質量にすると pg ~ μg 程度の水や油、ポリスチレンなどを永久磁石を用いて浮上させた [34]。永久磁石のサイズは長さ 10 mm、幅 10 mm、高さ 0.1 mm~2 mm で幅方向に磁化しており、同一平面上に幅方向に 2 つの磁石を高さの 0.25 倍 ~0.4 倍離して配置した。磁化方向は互いに向き合う方向である。これら 2 つの磁石の隙間に反磁性体が浮上した。磁場は 0.5 T 程度であるがスケールが小さいため磁場因子 $B_z \partial B_z / \partial z$ は $5000 \text{ T}^2/\text{m}$ 程度であり、ミクロンサイズ以下なら多くの反磁性体が永久磁石で浮上可能であることを示した。

2017 年に Semenov らは径方向に磁化したリング型の永久磁石を用いて直径 400 μm 、質量 40 μg の水を浮上させた [35]。

2.7 磁石懸架システム

前節で反磁性体の浮上における歴史を見た。大型の常伝導コイルや超伝導コイルを用いれば多くの反磁性体が浮上可能である一方、非常にコストがかかってしまう。ところが最近ではミクロスケールならば永久磁石で浮上可能になってきた。ただ 0.1~1 mg の石英については成功例がなかった。本修士論文では [35] のセットアップをアップグレードすることでこれを目指す。

磁石懸架システムの構成について述べる。なお各部品の図面は付録にのせた。

図 2.5 のような径方向に磁化した扇型ネオジム磁石を図 2.6 左のようにステンレスの容器 (内径 51 mm) に 8 個押し込むことで中心に磁場を集中させる。さらに中心に直径 2.3 mm の鉄芯を入れる。鉄は透磁率が高く磁場を引き付ける効果があるためこれによりさらに中心に集中させることができる。そして図 2.6 右のように磁石の上に中心に直径 2.3 mm の穴があいた円形の鉄板 (厚さ 3 mm) を配置する。この鉄板にはねじ穴が 3 個あいており、このねじを回すことで鉄板と磁石との距離を微調整できる。鉄芯に集中させられ上方向に向かった磁場は鉄芯の上端のあたりで最も強くなるが、鉄芯の外に出ると今度は鉄板に引き付けられるため径方向に急激に進路を変える。このため鉄芯の真上あたりの自由空間に大きな磁場因子 $B_z \partial B_z / \partial z$ を作るすることができる。断面図と磁場分布を図 2.7 に示す。鉄芯の上端の中心を原点とした円柱座標を用いた。



図 2.5: ネオジム磁石 (株式会社二六製作所製)

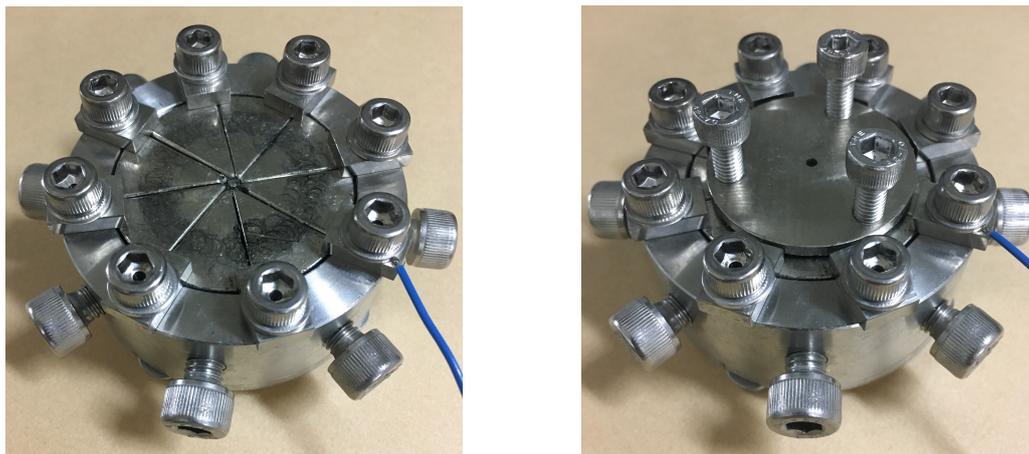


図 2.6: 磁石懸架システム

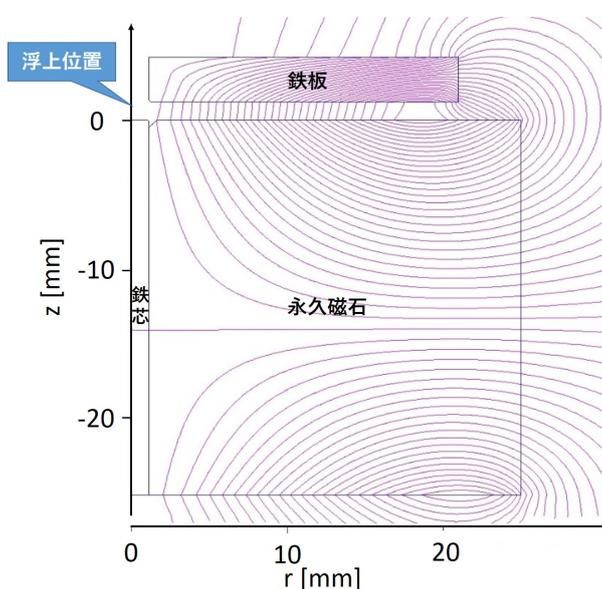


図 2.7: 磁石懸架システムの断面図と磁場分布

[35]のセットアップとの違いとしては、鉄芯を入れたことと、鉄板の穴の直径（と鉄芯の直径）を 1.6 mm から 2.3 mm に広げたことでより大きな物体を浮上できるようにしたことなどが挙げられる。スケールを大きくすることで浮上力は低下してしまうが鉄芯を入れることでこれを補った形である。

このシステムを組み立てる際の注意点を記す。磁石同士は反発するため、ステンレスの容器に押し込むことは容易ではなかった。磁石を手を持ち上から押し込もうとしても水平方向に働く磁力のためうまく真下に力を入れることができない。そこで図 2.8 のように L 字型のブロックを組み合わせることで押し込む際に磁石が水平方向にずれてしまうことを防ぎつつ、二人がかりで棒を使って押し込んだ。また、ステンレスの容器の側面のねじは磁石を中心に押し込むことで隙間をなくすことや鉄芯が上にあがるのを防ぐことが目的であるが、組み立ての際はもっと長いねじを差し込み、磁石が入るスペースを確保する目的もある。

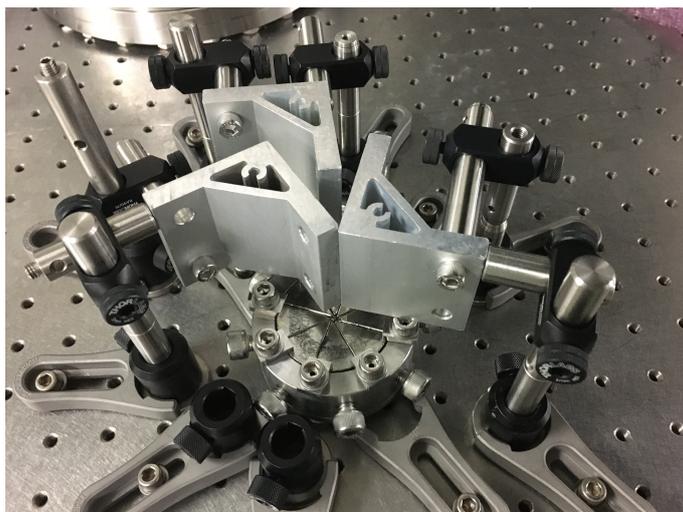


図 2.8: 磁石懸架システムの組み立て

2.8 磁力のシミュレーション

磁場シミュレーションソフト Poisson を用いて磁場分布のシミュレーションを行い、磁石と鉄板のギャップが 0.8 mm、1.2 mm、1.6 mm、2 mm の場合で比較をする。座標の取り方は図 2.7 と同じとする。1.2 mm のときのソースコードをソースコード 2.1 に示す。シミュレーションには磁石の残留磁束密度と保持力を指定する必要があるが株式会社二六製作所のホームページ [36] に掲載されている値を用いた。また鉄の B-H 曲線も必要であるが Poisson のデフォルト値である図 2.3 を用いた。

ソースコード 2.1: 磁石懸架システムの磁場分布 (ギャップ 1.2 mm)

```

1 Magnetic Levitation System
2 &reg kprob=0,           ; Poisson or Pandira problem
3 mode=0,               ; Materials have variable permeability
4 icylin=1,             ; Cylindrical symmetry
5 xreg= 2.5
6 kreg=-1,250
7 kmax=40
8 yreg=-2.5,0.5
9 lreg=-1,25,300
10 lmax=25
11
12 nbslo=0,              ; Dirichlet boundary condition on lower edge
13 nbsup=0,              ; Dirichlet boundary condition on upper edge
14 nbslf=0,              ; Dirichlet boundary condition on left edge
15 nbsrt=0               ; Dirichlet boundary condition on right edge
16 xminf=0,xmaxf=0      ; X range for field interpolation
17 yminf=-6,ymaxf=4 & ; Fixed Y for field interpolation

```

```

18
19 &po x=0,y=-6 & ; Outer boundary of geometry
20 &po x=6,y=-6 &
21 &po x=6,y=4 &
22 &po x=0,y=4 &
23 &po x=0,y=-6 &
24
25 &reg mat=7,mshape=1,mtid=1 &
26 &po x=0.165 ,y= 0 &
27 &po x=2.5 ,y= 0 &
28 &po x=2.5 ,y=-2.5 &
29 &po x=0.115 ,y= -2.5 &
30 &po x=0.115 ,y= -0.05 &
31 &po x=0.165 ,y= 0 &
32
33 &reg mat=2& ; yoke
34 &po x=0.125 ,y= 0.12 &
35 &po x=2.1 ,y= 0.12 &
36 &po x=2.1 , y=0.42 &
37 &po x=0.115 , y=0.42 &
38 &po x=0.115 , y=0.13 &
39 &po x=0.125 ,y= 0.12 &
40
41 &reg mat=3& ; center yoke
42 &po x=0.105 ,y= 0 &
43 &po x=0 ,y= 0 &
44 &po x=0 , y=-2.5 &
45 &po x=0.115 , y=-2.5 &
46 &po x=0.115 , y=-0.01 &
47 &po x=0.105 ,y= 0 &
48
49 &mt mtid=1 ; Material ID number
50 aeasy=180, ; Easy axis direction
51 gamper=1, ; Gamma perpendicular to easy axis
52 hcept=-10800,bcept=12800. & ; H and B intercepts

```

鉄芯の真上付近の磁場は図 2.9 のようになった。強い磁場と磁場勾配が発生している。また $z \leq 1.5 \text{ mm}$ で水平方向に安定なポテンシャルとなっていることもわかる。 z 軸上で十分小さい石英が受ける磁力を重力で規格化すると図 2.10 のようになった。例えばギャップが 0.8 mm のときは $z=1.2 \text{ mm}$ のあたりで浮上でき、ギャップを変えることで浮上高さを変えられる。水平方向と垂直方向の共振周波数は図 2.11、2.12 のようになった。負の領域はばね定数が負であることを意味する。図 2.10、2.11、2.12

をまとめ、磁力と重力がつり合う位置における水平方向と垂直方向の共振周波数を示すと図2.13となった。石英をピンセットでリリースする際の揺れや静電気を考えると共振周波数はなるべく高いほうが浮上は容易に行うことができるため、ギャップは1.6 mm程度が最適となる。

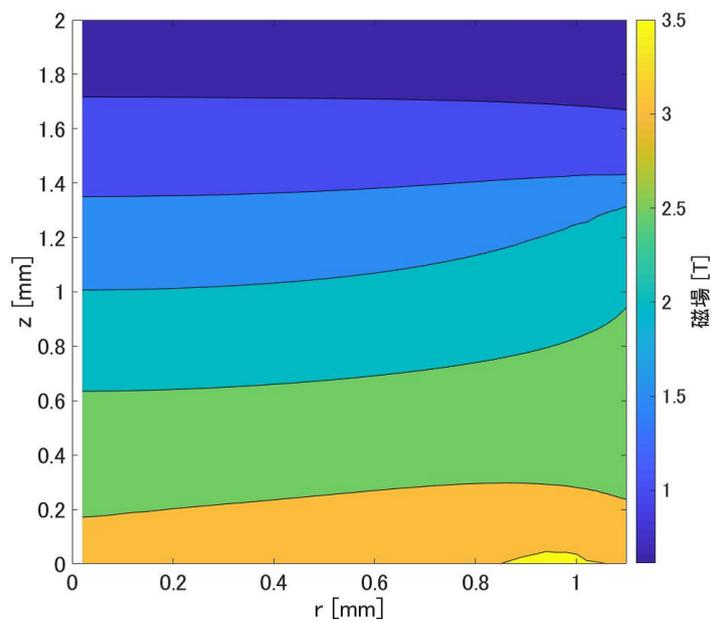


図 2.9: 磁場

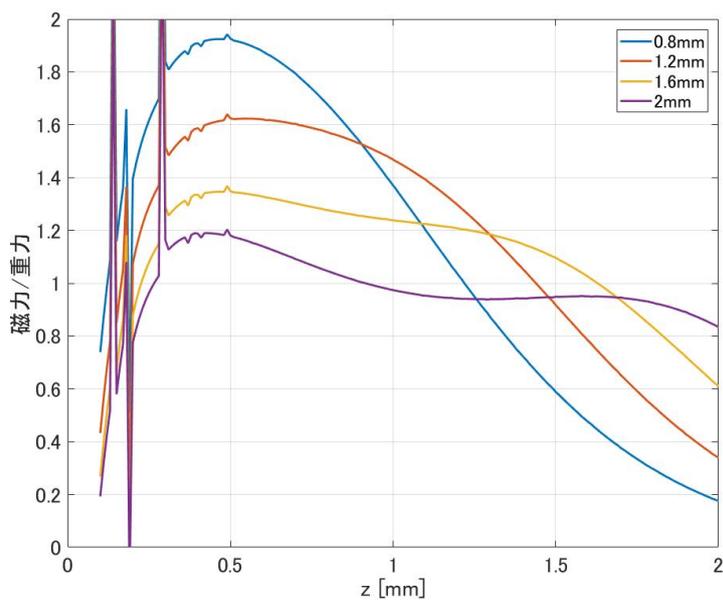


図 2.10: 磁力

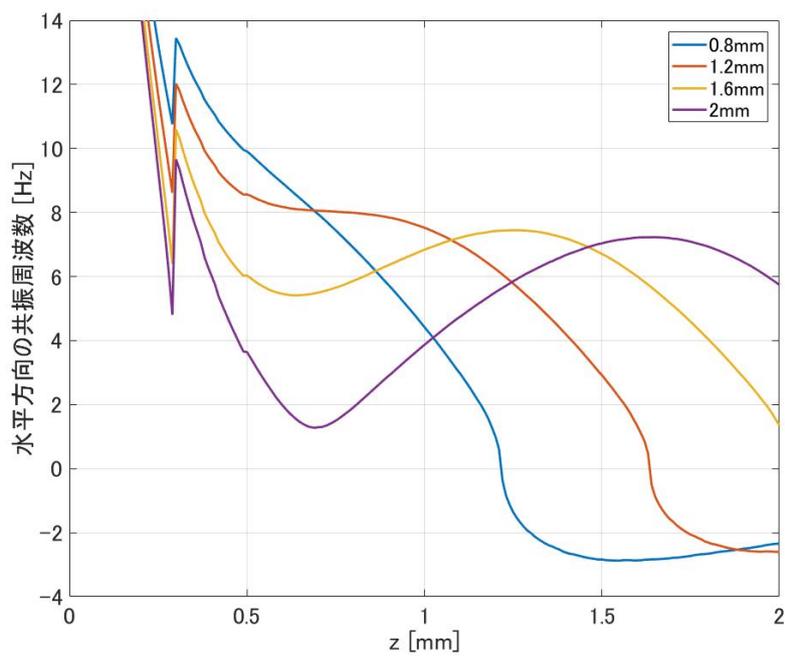


図 2.11: 水平方向の共振周波数

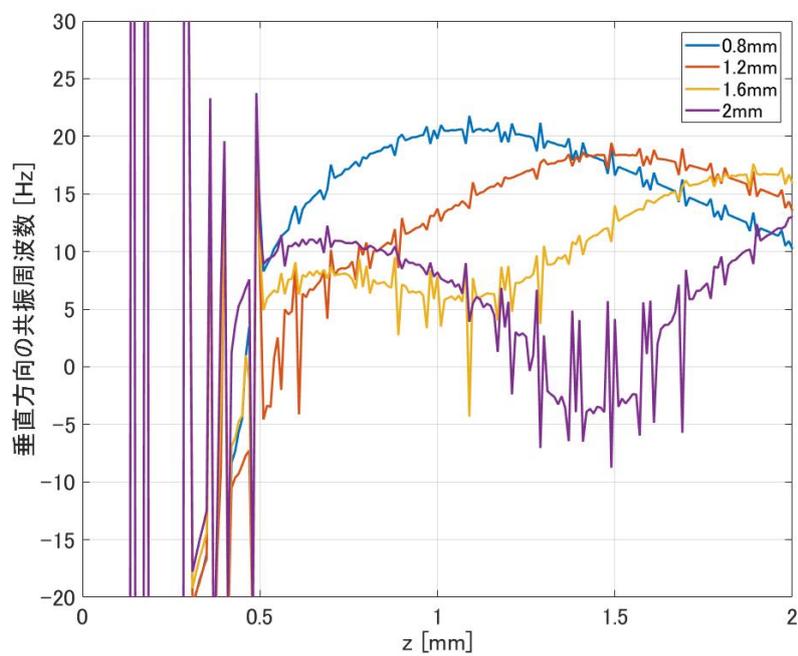


図 2.12: 垂直方向の共振周波数

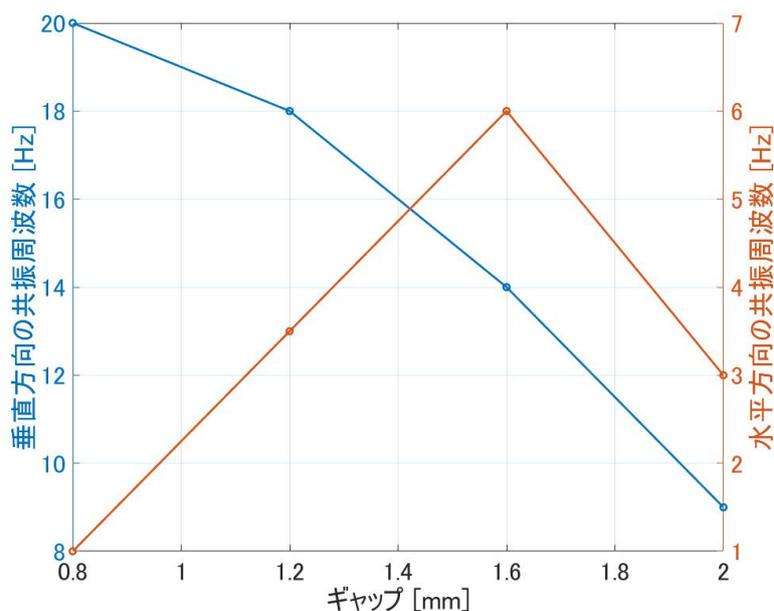


図 2.13: つり合い位置における共振周波数

2.9 浮上検証実験

現状まだこのスケールの石英鏡は用意できていないため、石英鏡を砕くことで作成した破片を用いた。ギャップがおよそ 1.2 mm のとき、大きさ 0.3 mm×0.3 mm×0.6 mm 程度で質量約 0.1 mg の石英ガラスと、大きさ 0.7 mm×0.7 mm×0.7 mm 程度で質量約 1 mg の石英ガラスの浮上に成功した。それぞれ上からと横からの画像を図 2.14~2.17 に示す。ここで、石英ガラスはいびつな形状をしているため大きさと質量はおおよその値である。

なお静電気対策なしで浮上することはなかった。対策方法を記す。石英を静電気をためにくい竹製ピンセットで掴んだままイオナイザ (ER-F12SA) の風に十秒~数十秒当てて除電した。イオナイザからはプラスイオンとマイナスイオンがほぼ等量噴射されるため、石英がプラスに帯電している場合はマイナスイオンが、マイナスに帯電している場合はプラスイオンが吸着し中和される。石英を掴んだ状態のピンセットは鉄板の穴に入らなかったため穴の真上あたりからリリースした。また磁石はアースをした。図 2.6 の青いケーブルがアース線である。

ギャップを 1.2 mm にした場合の浮上高さのシミュレーション値は図 2.10 より 1.4 mm であり大きさ 0.7 mm 程度までなら大きさの効果はほとんどなさそうであるが、実際の浮上高さは 0.7~0.8 mm 程度となった。このずれの原因としては、まだ静電気を除電しきれていない可能性や、磁石の残留磁束密度や保持力のシミュレーション値と実際の値とのずれ、鉄の B-H 曲線のシミュレーション値と実際の値とのずれなどが考えられる。磁場を測定することで後者 2 つは検証できるが十分小さい磁場センサーが必要であり、今回は測定を見送った。

次章以降では磁石懸架システムにおける雑音を見積もる。鏡の直径は 0.4 mm、厚さ 0.4 mm、質量 0.1 mg、浮上高さはシミュレーション通り 1.4 mm とする。

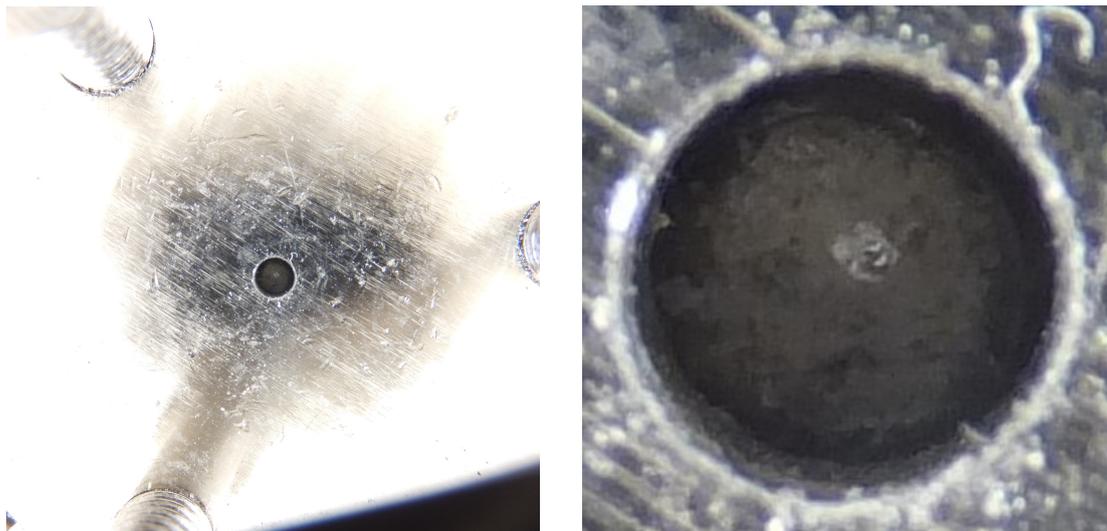


図 2.14: 0.1 mg の石英ガラスの磁気浮上 (上から)

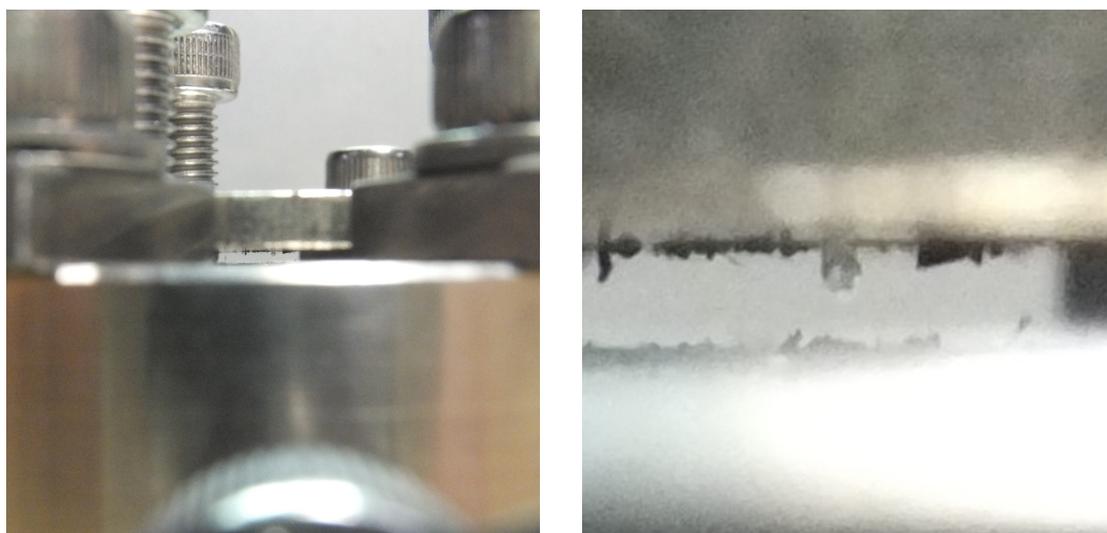


図 2.15: 0.1 mg の石英ガラスの磁気浮上 (横から)

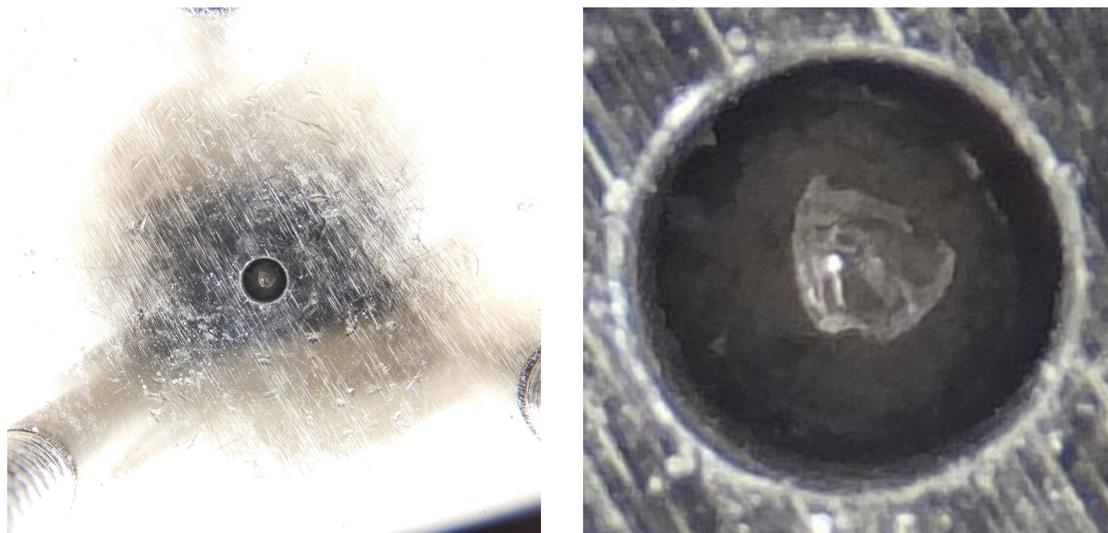


図 2.16: 1 mg の石英ガラスの磁気浮上 (上から)

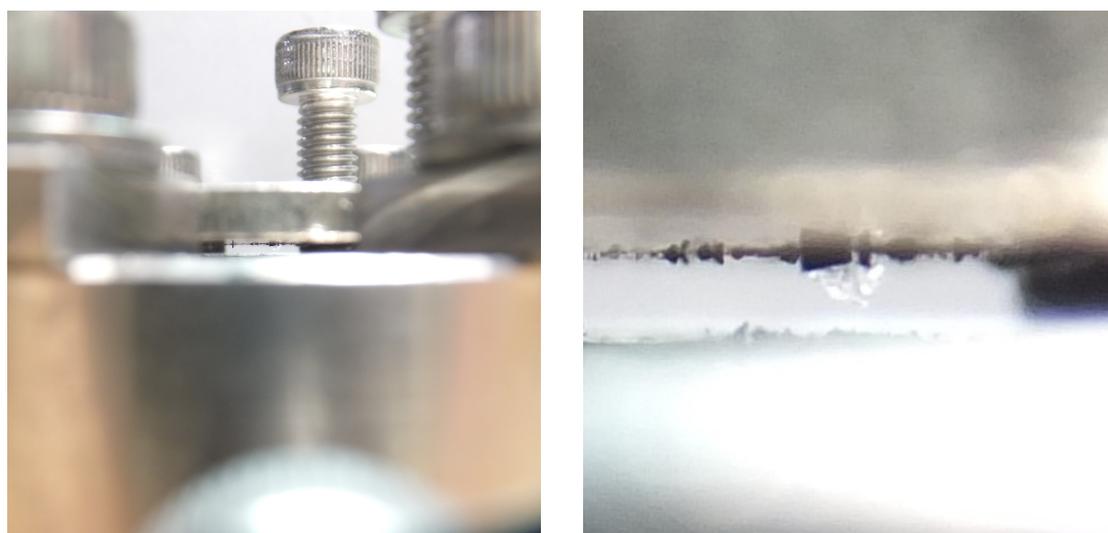


図 2.17: 1 mg の石英ガラスの磁気浮上 (横から)

第3章 環境磁場雑音

磁石懸架システムが作る磁場によって鏡は磁化するため環境磁場から力を受け雑音となる。この章ではこの雑音の大きさを見積もる。

鏡が受ける磁場は磁石が発生させるものと環境磁場に分けることができ、それぞれを $B_{\text{mag},z}$ 、 $B_{\text{ex},z}$ と書くことにすれば、鏡が受ける磁力は式 (2.10) より

$$F_z = \frac{\chi V}{\mu_0} (B_{\text{mag},z} + B_{\text{ex},z}) (\partial_z B_{\text{mag},z} + \partial_z B_{\text{ex},z}) \quad (3.1)$$

となる。ここで $\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ とした。ここで磁場と力を平均値と揺らぎ成分に分ける：

$$B_{\text{mag},z} = \overline{B}_{\text{mag},z} + \Delta B_{\text{mag},z} \quad (3.2)$$

$$\partial_z B_{\text{mag},z} = \overline{\partial_z B}_{\text{mag},z} + \Delta(\partial_z B_{\text{mag},z}) \quad (3.3)$$

$$B_{\text{ex},z} = \overline{B}_{\text{ex},z} + \Delta B_{\text{ex},z} \quad (3.4)$$

$$\partial_z B_{\text{ex},z} = \overline{\partial_z B}_{\text{ex},z} + \Delta(\partial_z B_{\text{ex},z}) \quad (3.5)$$

$$F_z = \overline{F}_z + \Delta F_z \quad (3.6)$$

すると式 (3.1) は次のようになる：

$$\begin{aligned} \Delta F_z \sim & \frac{\chi V}{\mu_0} (\overline{B}_{\text{mag},z} \Delta(\partial_z B_{\text{mag},z}) + \overline{\partial_z B}_{\text{mag},z} \Delta B_{\text{mag},z} + \overline{B}_{\text{mag},z} \Delta(\partial_z B_{\text{ex},z}) \\ & + \overline{\partial_z B}_{\text{mag},z} \Delta B_{\text{ex},z}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

第1項と第2項は磁石の磁場変動に起因する項であり第5章で扱う。第3項と第4項が環境磁場雑音であり、第3項は環境磁場勾配変動に起因し第4項は環境磁場変動に起因する。本修士論文では簡単のため第4項のみを扱う。

3.1 サーチコイル

環境磁場を測定するため図3.1のようなサーチコイルを作成した。巻き数 5200 回、外径 30 mm、内径 23 mm、長さ 21 mm、銅線の直径 0.1 mm である。外部磁場によってコイル内部の磁束が変化するとファラデーの法則に従いコイルに誘導起電力が発生するため、磁場センサーとして用いることができる。巻き数を N 、断面積を S とすると外部磁場 $B(t)$ によってコイルに発生する誘導起電力 $V(t)$ は

$$V(t) = -NS \frac{dB(t)}{dt} \quad (3.8)$$

$$\iff V(\omega) = -i\omega NSB(\omega) \quad (3.9)$$

であり高周波ほど感度が高く DC には感度がない。ただし測定できるのは局所的な磁場ではなくコイル内部で平均化された磁場であることに注意する。コイルを大きくすれば式(3.9)の上での感度は上がるが微小鏡が受ける磁場は局所的なものであるから乖離が大きくなる。そのためほどほどの大きさとした。このコイルの内部では磁場が一様であるという近似を以降用いる。

まずこのコイルのインダクタンスと内部抵抗を測定する。図3.2のようにカレントバッファにコイルと抵抗 $R1$ を直列につなげ、図3.2の in から out の伝達関数を測定する。コイルのインダクタンスを L 、内部抵抗を r とすると伝達関数は $R1/(R1+r+i\omega L)$ となるためフィッティングにより求められる。伝達関数を測定した結果図3.3のようになった。これよりインダクタンスが 0.58H 、内部抵抗が $1080\ \Omega$ と求まった。

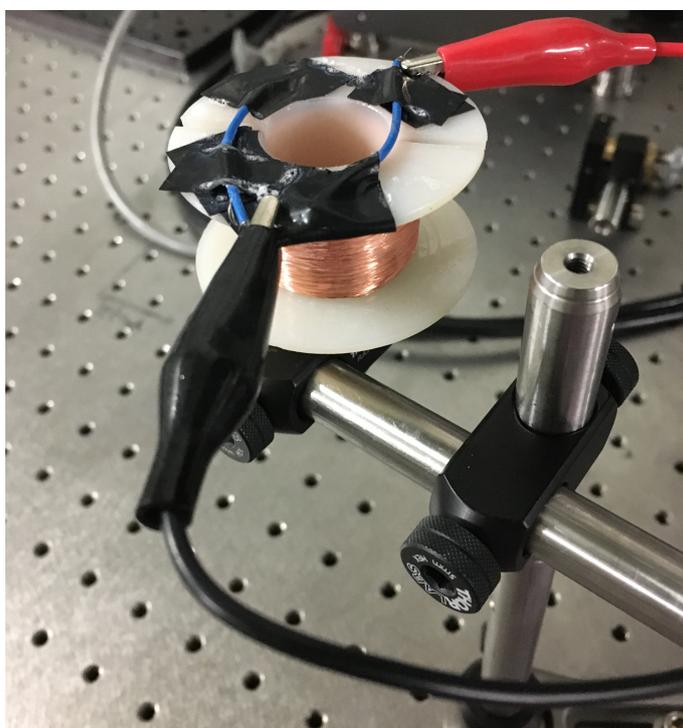


図 3.1: サーチコイル

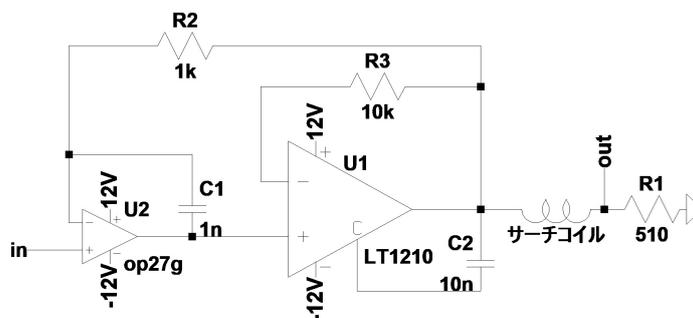


図 3.2: コイルのインダクタンスと内部抵抗測定回路

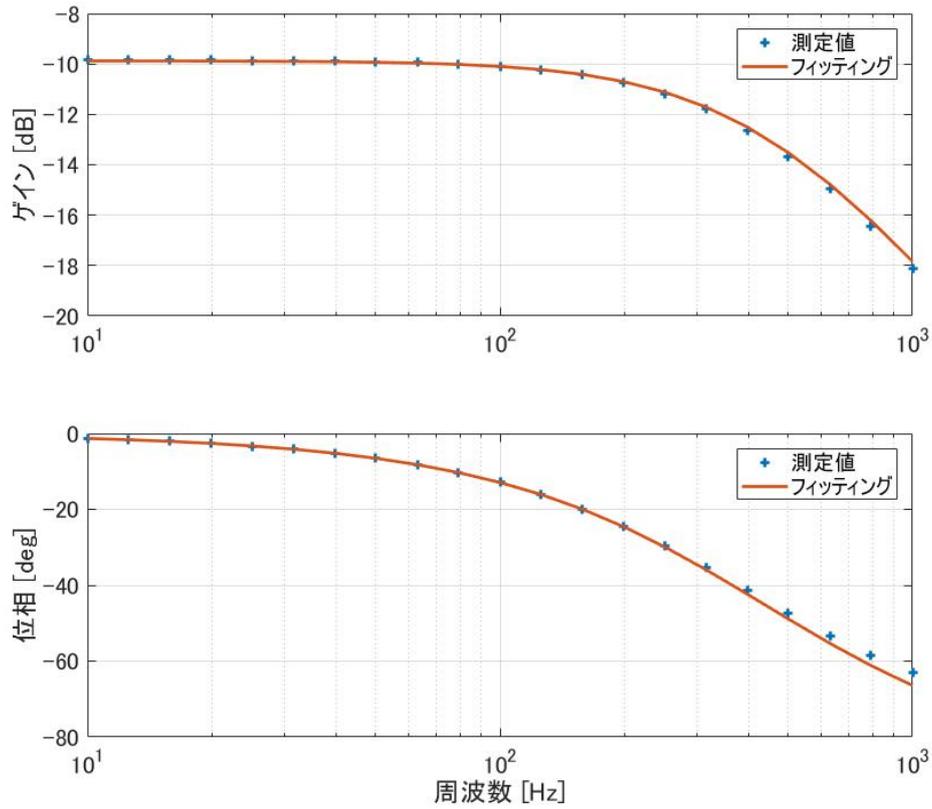


図 3.3: 伝達関数

次に図 3.4 のようなコイルの増幅回路を作成した。目的はコイルの信号を ADC 雑音以上に増幅することとアンチエイリアシングである。ゲインは 4500、ローパスはポール 1 kHz で 3 次とした。この回路はゲインが高いためこの回路単体での伝達関数の測定は難しい。そこでこの回路の前に図 3.5 のようなアッテネーターを入れて測定した。アッテネーターも含めた測定結果を図 3.6 に示す。ほぼ理論値通りとなった。

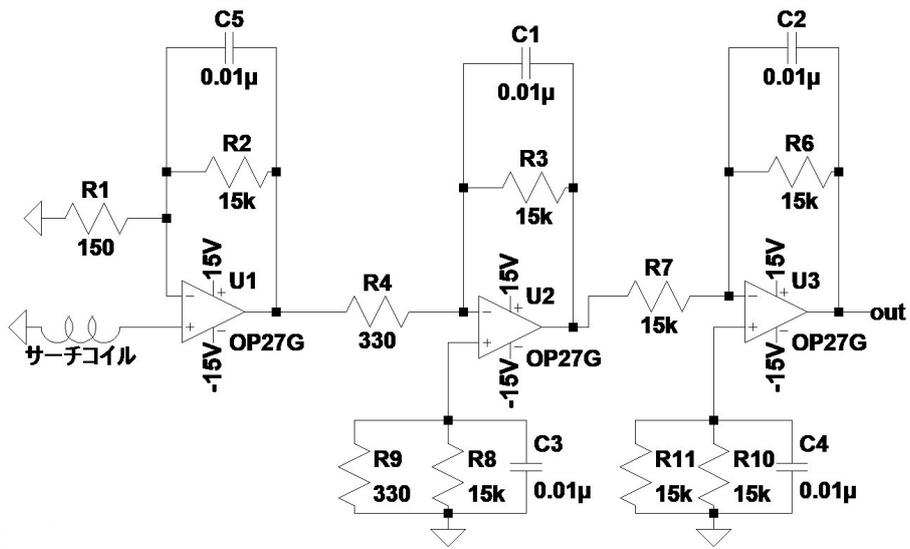


図 3.4: コイルの増幅回路。U2 と U3 では反転増幅をしているが、電源雑音などの同相雑音の対策として通常の反転増幅回路ではなく図のように差動回路の形をさせた。U1 においては入力インピーダンスを高くするため通常の非反転増幅回路とした。

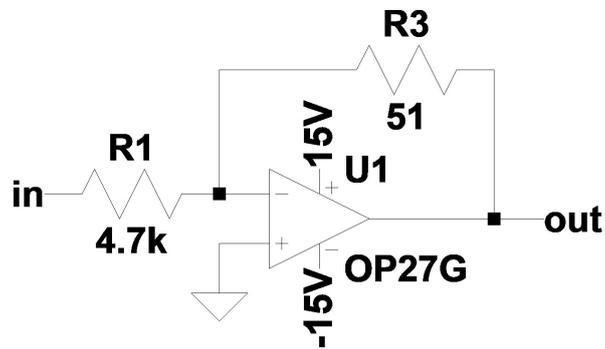


図 3.5: アッテネーター

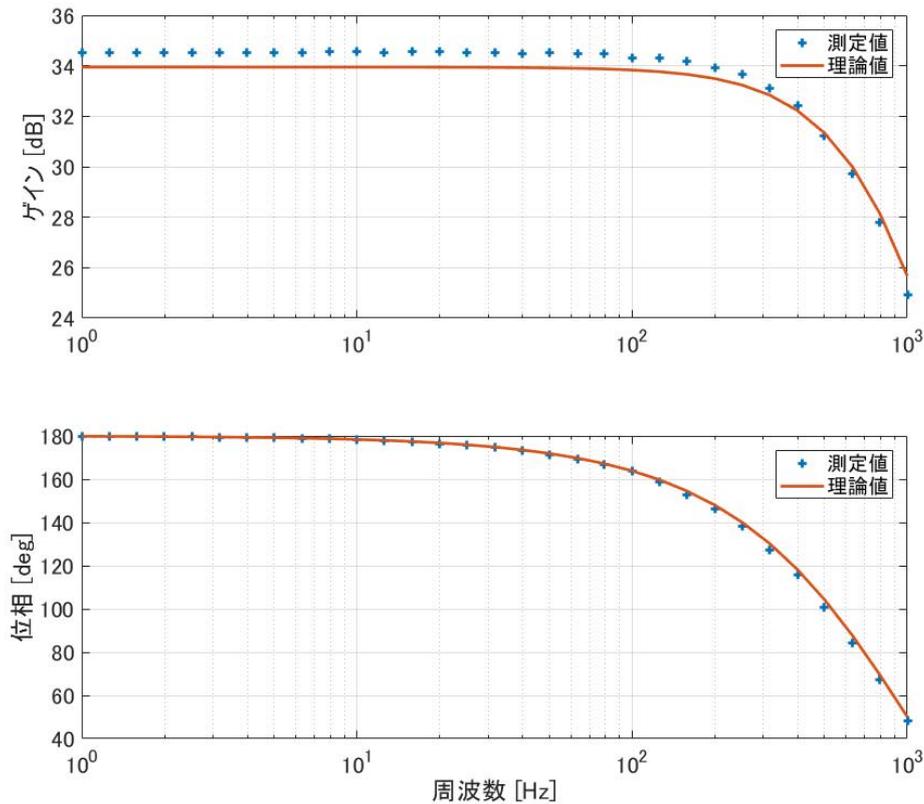


図 3.6: 図 3.4 と図 3.5 の伝達関数

次にコイルの増幅回路の入力換算雑音を測定した。ここでコイルの内部抵抗は約 1.1 k Ω であるからコイルを 1.1 k Ω の抵抗に置き換えることでコイルの熱雑音の寄与も含めた。測定結果とコイルの熱雑音とオペアンプ (図 3.4 の U1) の電圧雑音の比較を図 3.7 に示す。抵抗の熱雑音は $\sqrt{4k_BRT}$ [V/ $\sqrt{\text{Hz}}$] のホワイトノイズである。ここで k_B はボルツマン定数、 R は抵抗の大きさ、 T は温度である。オペアンプの電圧雑音は LTspice により求めた。100~1 kHz ではコイルの熱雑音とオペアンプの電圧雑音で制限されていることがわかる。これらの大きさは同程度であるため電気回路を改善してもコイルの熱雑音のため感度を大きく改善することはできない。それ以下の周波数帯では少し雑音が大きいが原因は不明である。なお使用した電源や ADC のグラウンドはアースされておらずこの状態では雑音が若干大きかったため、増幅回路の出力と ADC の間のケーブルを T 字コネクタで分岐し、グラウンドがアースされているオシロスコープにつないだ。

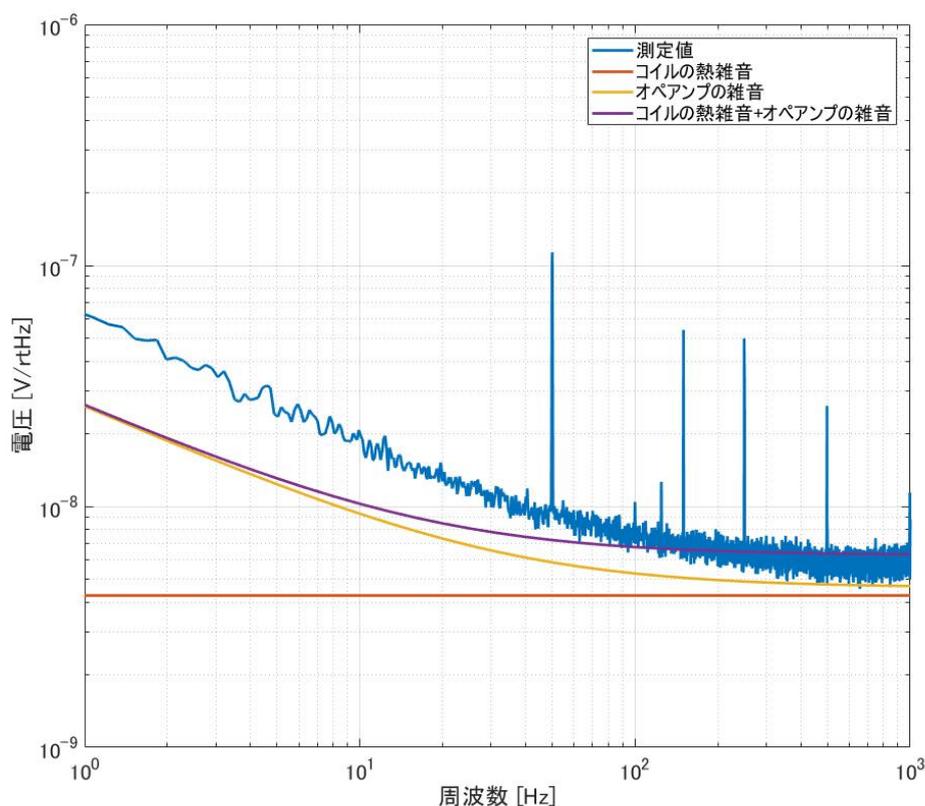


図 3.7: コイル増幅回路の入力換算雑音

外部磁場からコイルの誘導起電力の伝達関数を測定する。外部磁場の発生源として図 3.8 のような、コイルの付近に一樣な磁場を発生させられるヘルムホルツコイルを作成した。半径 13 cm、9 回巻き、銅線の線径は 1 mm である。インダクタンスをコイルと同様に測定すると 53 μH となった。内部抵抗は十分小さかった。

ヘルムホルツコイルがサーチコイルの位置に作る磁場は

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 N I}{r} \quad (3.10)$$

で与えられる。ここで N はヘルムホルツコイルの巻き数、 r は半径、 I は電流である。

ヘルムホルツコイルのドライバーには図 3.2 でサーチコイルをヘルムホルツコイルに、 $R1$ を 10 Ω に変えたものを用いた。この 10 Ω 抵抗の電圧からヘルムホルツコイルの電流に換算し、それを式 (3.10) 用いて磁場に換算した。

測定値と理論式 (3.9) の比較を図 3.9 に示す。ほぼ理論値通りとなった。

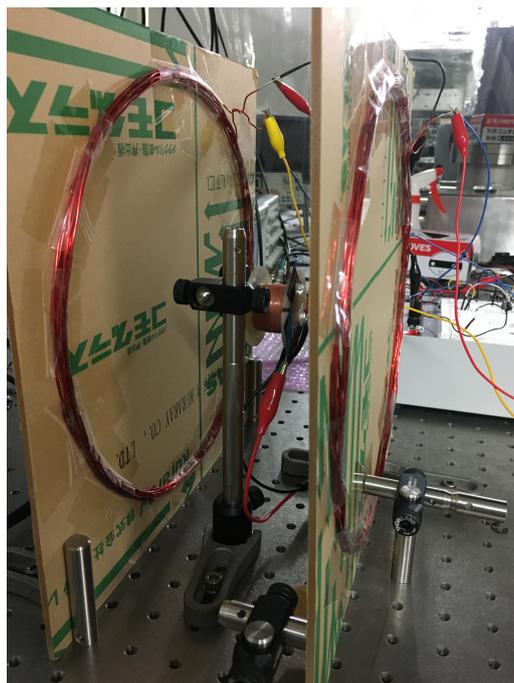


図 3.8: ヘルムホルツコイル

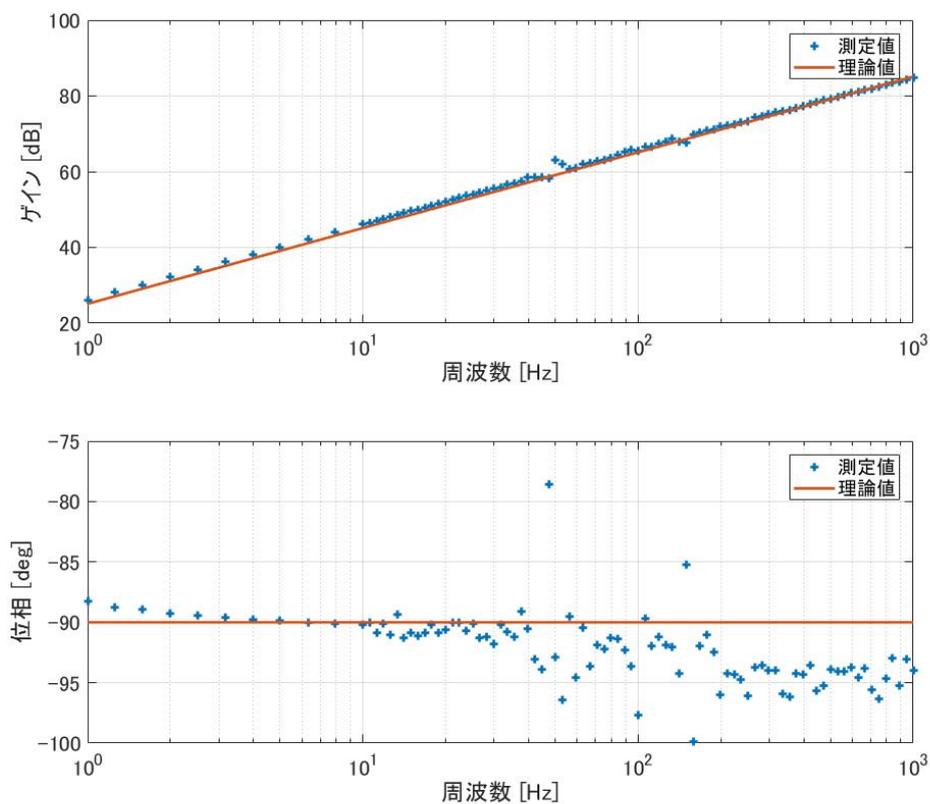


図 3.9: 外部磁場からサーチコイルの誘導起電力の伝達関数

3.2 環境磁場の測定

2019年12月31日の早朝と昼間に真空槽の外で垂直方向の環境磁場を測定した結果を図3.10に示す。早朝のほうが低周波は小さくなったが高周波は違いがなかった。早朝に真空槽の外で測定方向を変えて測定したところ図3.11のようになり、低周波はセンサーノイズで制限されているが高周波は方向によって違いが出た。

2020年1月5日午後4時頃に真空槽(図3.12)の中と外で垂直方向の磁場を比較したところ図3.13となった。高周波のピークは小さくなっているがフロアの大きさはそれほど変わっていないことがわかる。原因としては真空槽の4つのポートがすべて開いているためあまり遮蔽できていないことや、コイルの揺れなどの雑音が見えている可能性などがある。真空槽の壁の厚さを d 、電気伝導率を σ 、透磁率を μ 、角周波数を ω 、 $\delta = \sqrt{2/(\sigma\mu\omega)}$ とすると真空槽内の磁場は真空槽外の $e^{-d/\delta}$ 倍に遮蔽され、高周波ほど遮蔽効果は大きい。使用した真空槽の壁の厚さは上下は25 mm、左右は3 mmであり、遮蔽率はそれぞれ図3.14のようになる。高周波のピークの減衰率はこれらの中間程度であることがわかる。

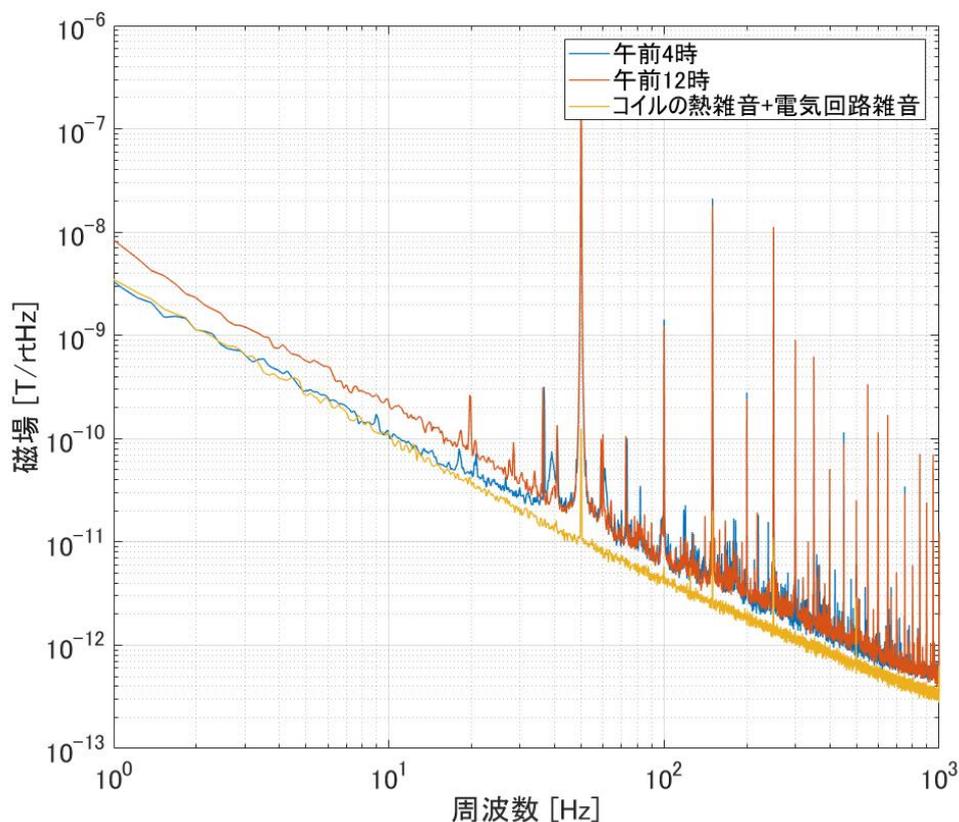


図 3.10: 垂直方向の環境磁場の時間依存性

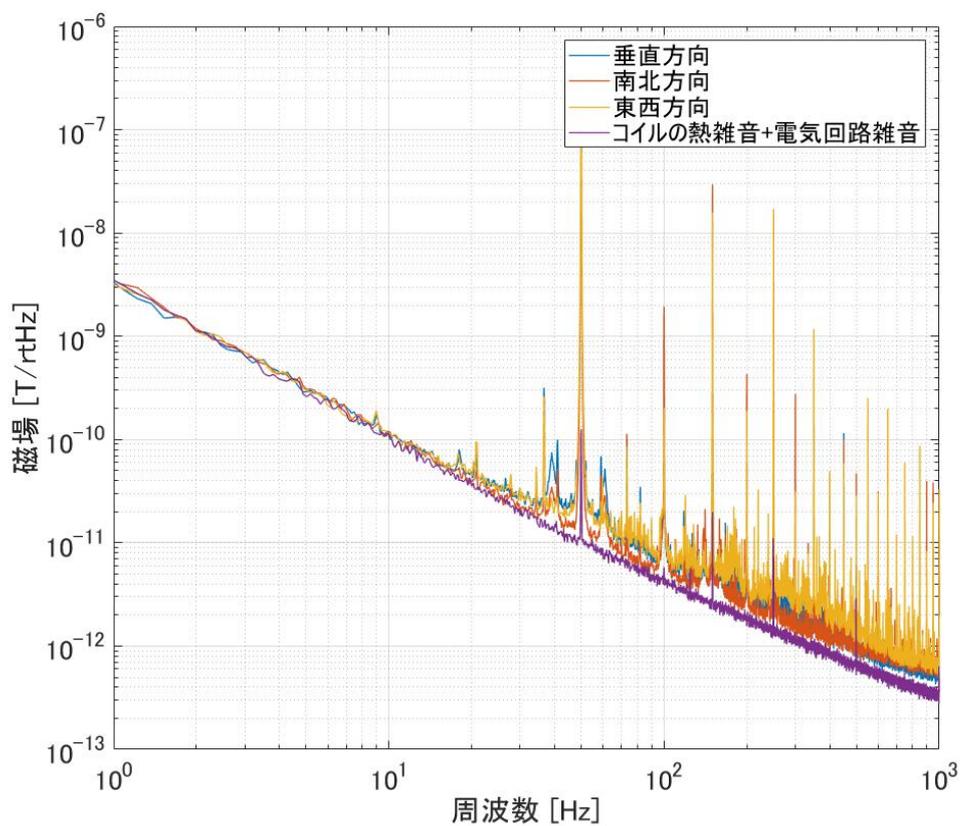


図 3.11: 環境磁場の方向依存性

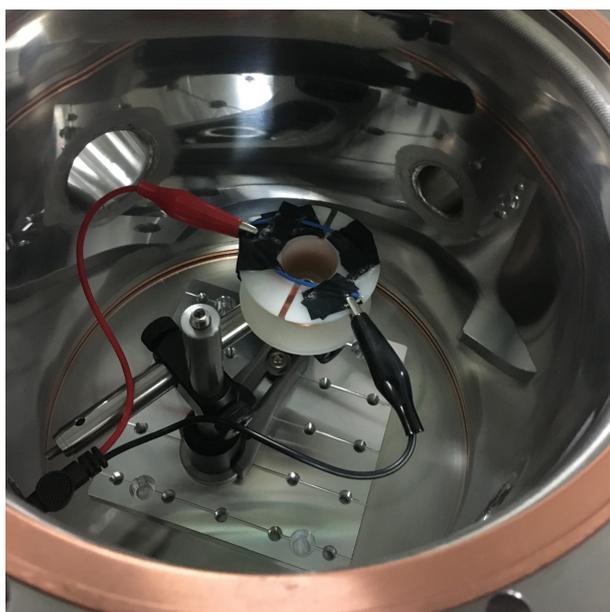


図 3.12: 真空槽

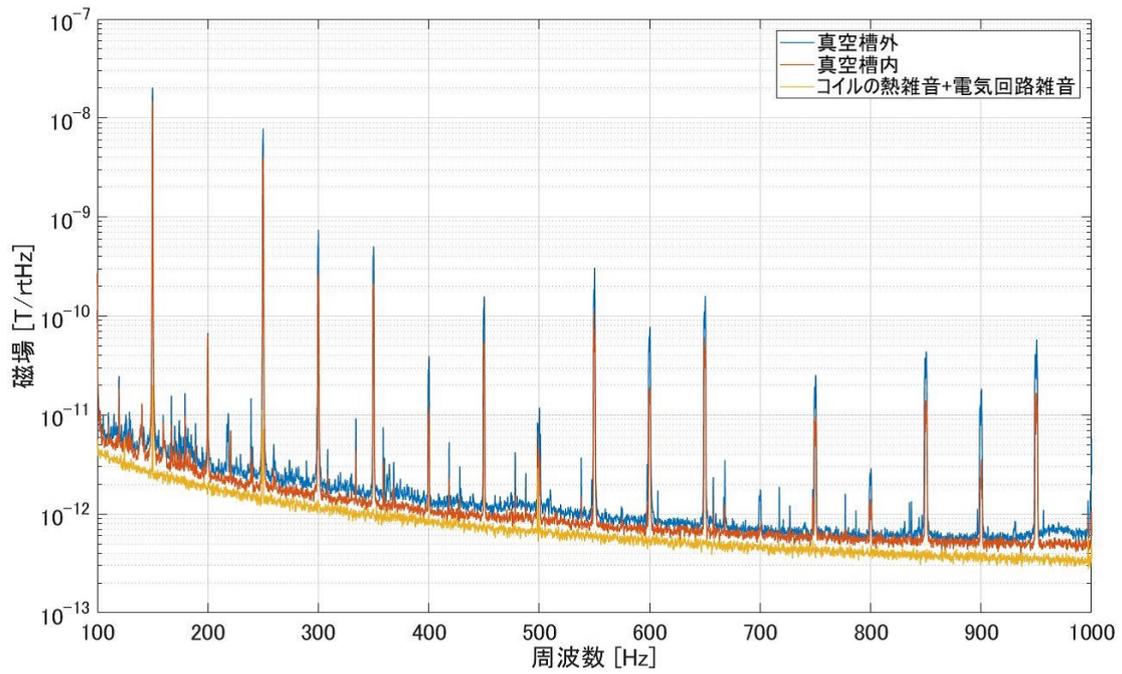


図 3.13: 真空槽内の環境磁場

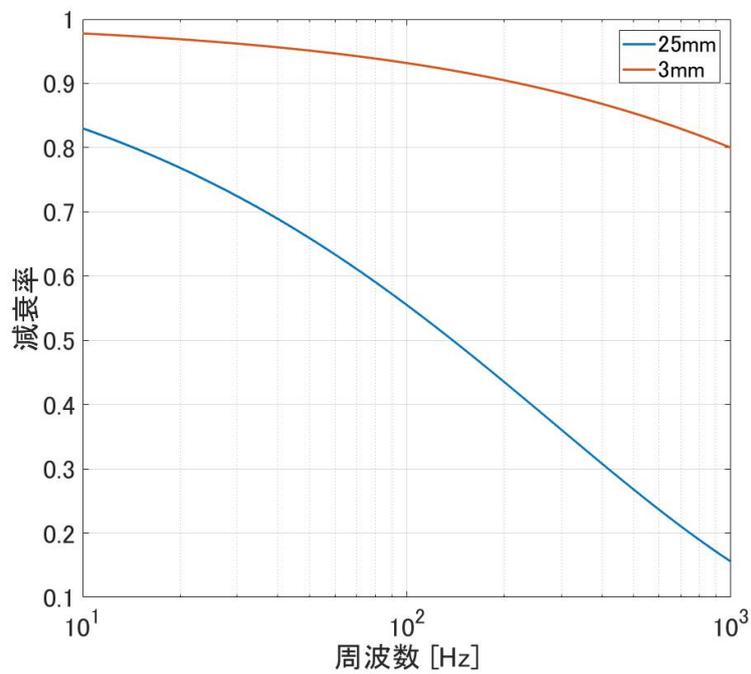


図 3.14: 真空槽の遮蔽効果

3.3 環境磁場雑音

環境磁場変動による鏡の変位は式 (3.7) より

$$\sqrt{S(\omega)} = |\chi(\omega)|\Delta F_z \tag{3.11}$$

$$= |\chi(\omega)|\frac{\chi^V}{\mu_0}\overline{\partial B_{\text{mag},z}}\Delta B_{\text{ex},z} \tag{3.12}$$

であり、磁石の磁場勾配の平均 $\overline{\partial B_{\text{mag},z}}$ として 1400 T/m、環境磁場の変動 $\Delta B_{\text{ex},z}$ として図 3.10 の午前 4 時の値を用いれば図 3.15 のようになり、150 Hz 以上で標準量子限界以下となることがわかった。

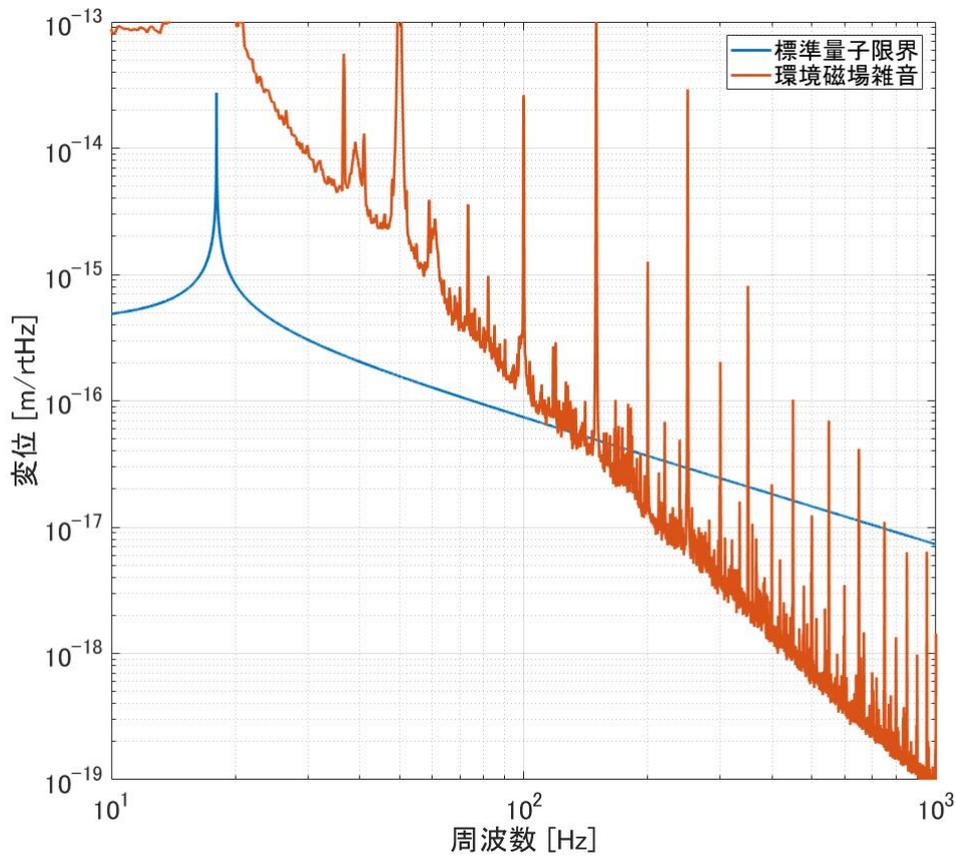


図 3.15: 環境磁場雑音

第4章 渦電流熱雑音

磁石懸架システムにより浮上した鏡はわずかに磁化しているため、鏡が振動するとファラデーの電磁誘導の法則に従い周囲の物質の内部に磁場変化を打ち消すような渦電流が流れ、ジュール熱によりエネルギーが散逸される。これによって発生するのが渦電流熱雑音である。この散逸は viscous モデルに従う。この章の構成としては、まずは渦電流熱雑音の計算方法について述べ、次に簡単な実験を行い結果を比較することで渦電流の計算手法の精度を検証し、最後に磁石懸架システムにおける渦電流熱雑音を見積もる。

4.1 渦電流によるエネルギーの散逸

磁石懸架システムは軸対称であるため円柱座標 (r, z, ϕ) に対し渦電流は ϕ 方向に流れる。そこで位置 (r, z) を通り軸対称となるループに誘起される起電力 $V(r, z)$ を考える。ループで囲まれた面を貫く磁束を $\Phi(r, z)$ とすると

$$V(r, z) = -\frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial t} \quad (4.1)$$

となる。ここで位置 (r, z) における磁束密度の z 成分を $B_z(r, z)$ 、電場の ϕ 成分を $E_\phi(r, z)$ 、電流密度の ϕ 成分を $j_\phi(r, z)$ 、電気抵抗率を ρ とすると

$$\Phi(r, z) = 2\pi \int_0^r B_z(r', z) r' dr' \quad (4.2)$$

$$V(r, z) = 2\pi r E_\phi(r, z) \quad (4.3)$$

$$E_\phi(r, z) = \rho j_\phi(r, z) \quad (4.4)$$

となることを用いると式 (4.1) は

$$j_\phi(r, z) = -\frac{1}{\rho r} \int_0^r \frac{\partial B_z(r', z)}{\partial t} r' dr' \quad (4.5)$$

となる。これを用いるとジュール熱 P は

$$P = 2\pi\rho \iint r dr dz j_\phi(r, z)^2 \quad (4.6)$$

となる。

ジュール熱 P を散逸 γ に変換する。感受率を逆ラプラス変換することにより鏡のインパルス応答は

$$x(t) \propto e^{-\gamma t} \sin(\omega_m t) \quad (4.7)$$

となる。微分すると速度は

$$v(t) \propto -\gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega_m t) + \omega_m e^{-\gamma t} \cos(\omega_m t) \quad (4.8)$$

のように減衰するが $\sin(\omega_m t) = 0$ となるような時刻を考えれば $v = v_0 e^{-\gamma t}$ とおけ、さらに系のエネルギーのうち弾性エネルギーの時間微分はゼロとなるため、エネルギーの散逸は全て運動エネルギーの散逸となるので、

$$\begin{aligned} P &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v(t)^2 \right) \\ &= m \gamma v(t)^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

が成り立つ。

式(4.5)、(4.6)、(4.9)を用いると磁場の変化から散逸を計算できる。磁場の変化は静 Poisson を用いて、鏡がある位置にある場合とそこから少しずらした場合とでそれぞれ磁場分布をシミュレーションし、差し引くことで求めることができる。

4.2 渦電流計算手法の精度検証実験

前節で述べた計算手法の精度を検証するため鏡を浮上させるよりも単純な実験系で渦電流による散逸を測定し、計算値と比較する。シミュレーションに必要となる、永久磁石が作る磁場とグラファイトの電気抵抗率の測定も行った。

4.2.1 渦電流による散逸の測定

渦電流による散逸を測定する実験系を説明する。図4.1のように上方に大きなネオジム磁石(バイアス磁石)を固定し、それにより引き付けられる磁力と重力がつり合うように浮上させる小さなネオジム磁石(直径4mm、高さ4mm)を下方に置く。このままでは鉛直方向は不安定つり合いとなるため、浮上磁石の下に非常に強い反磁性体である熱分解グラファイトのプレート(17mm×17mm×2.2mm)を置くことで安定つり合いとなり、永久磁石は浮上する(図4.2)。そしてバイアス磁石よりもさらに上方で永久磁石を手を持ち鉛直方向に軽く振ることで浮上磁石の鉛直方向の振動を励起し、グラファイト内に流れる渦電流により振動が式(4.7)に従ってダンピングされていく様子を測定する。浮上高さが0.6mmの場合と0.28mmの場合でそれぞれ3回ずつ測定した。浮上高さは図4.2のような拡大写真から見積もり、誤差は ± 0.1 mm程度である。

浮上磁石の位置の測定方法にはシャドーセンサーを用いた。この測定方法の原理は図4.3、4.4のように浮上させた磁石の上の縁にレーザーを横から当てることで浮上磁石が鉛直方向に振動すると覆い隠されるレーザーの面積が変化することで後方に置いたフォトセンサーに入射する光量も変化することを用いたものである。

フォトセンサーで測定された信号をフィルター処理により共振周波数付近のみ取り出すと図4.5のようなリングダウンとなった。ただこれでは式(4.7)でフィッティングしづらいため、信号に絶対値をとってから縦軸をlogでプロットすると図4.6の

ように傾きが $-\gamma$ の直線的に信号が減衰するためフィッティングが容易になる。

なおこの実験は大気中で行ったが渦電流による散逸が十分大きいため大気による散逸は影響しない。また、グラファイト以外の物質内の渦電流によるダンピングを避けるためグラファイトは電気抵抗率の非常に大きいアクリル板の上に置いた。

結果は図4.10のようになった。

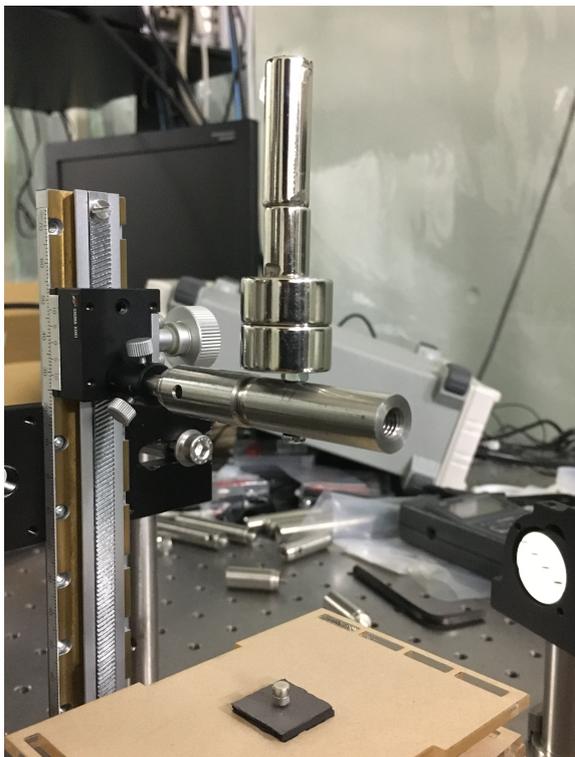


図 4.1: グラファイトを用いた永久磁石の磁気浮上



図 4.2: 永久磁石の拡大写真

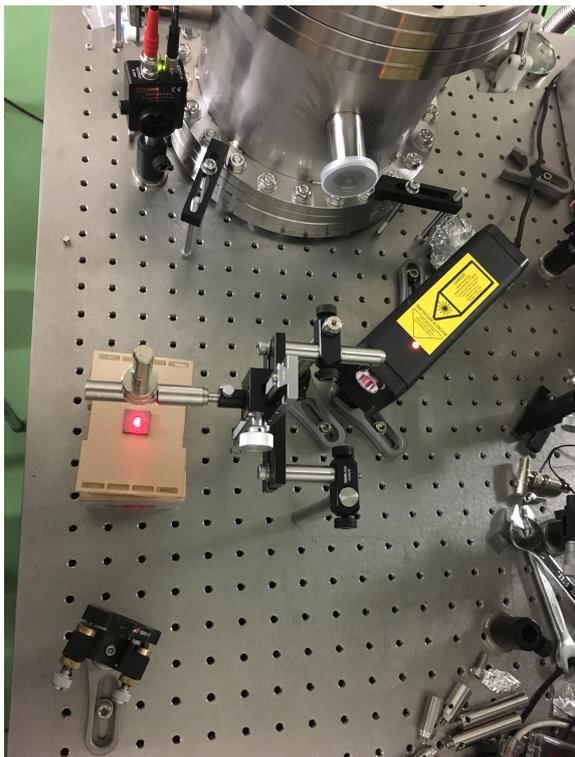


図 4.3: シャドーセンサー

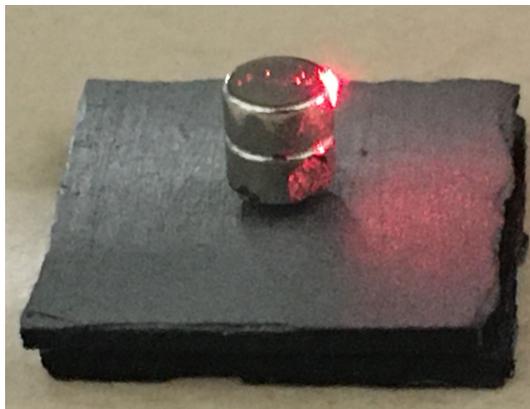


図 4.4: 永久磁石の拡大写真

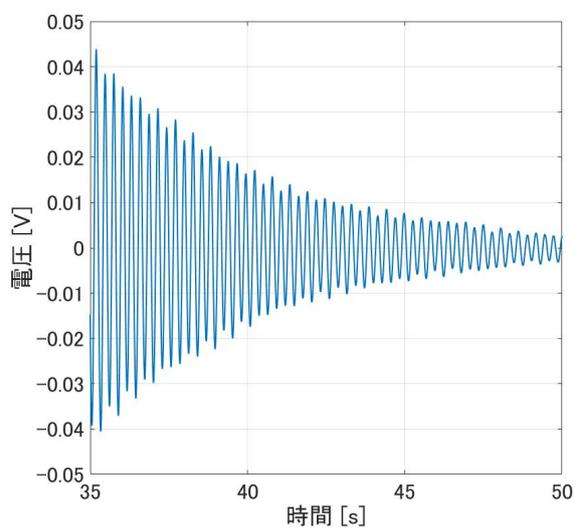


図 4.5: シャドーセンサーにより測定したリングダウン

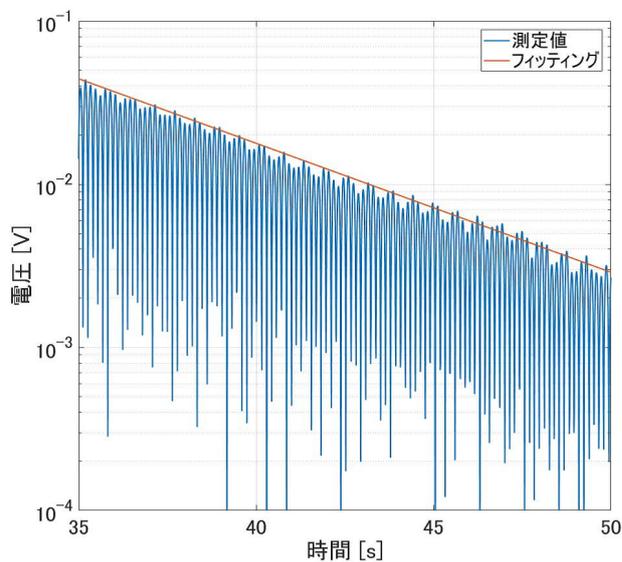


図 4.6: 図 4.5 において絶対値をとってから縦軸を log でプロットした図

4.2.2 永久磁石の磁場の測定

テスラメータ TM-801 を用いて浮上させる磁石が作る磁場の距離依存性を測定し、同じ強さになるようシミュレータにおける磁石の磁力を調節した。なおテスラメータのセンサー部分は有限の大きさを持っているため、センサーを磁石の表面に接触させたときの測定値は表面から少し離れた位置での磁場の大きさとなる。ここではセンサーの大きさを 0.7 mm と仮定した。測定値とシミュレーション結果を図 4.7 に示す。シミュレータのソースコードはソースコード 4.1 に示す。

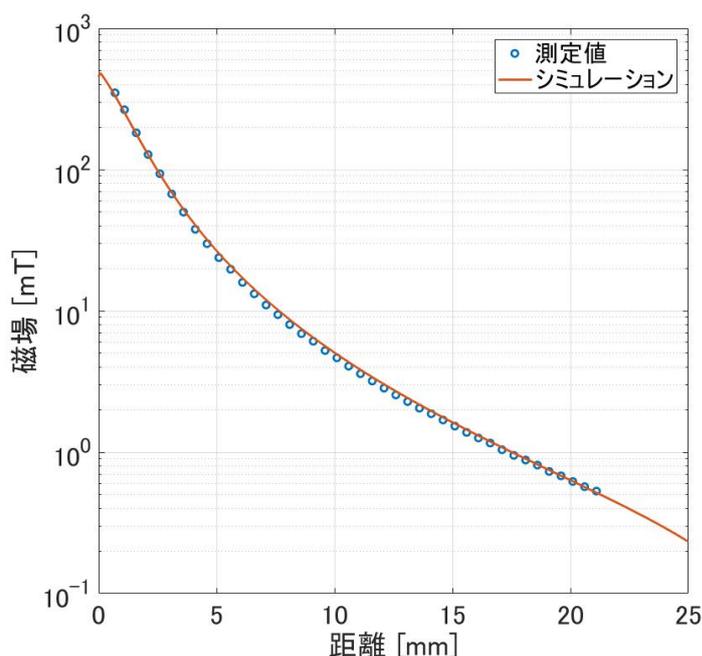


図 4.7: 直径 4 mm、高さ 4 mm のネオジウム磁石が作る磁場の距離依存性

ソースコード 4.1: permanent magnet simulation.am

```

1 Permanent Magnet
2 &reg kprob=0,           ; Poisson or Pandira problem
3 mode=0,               ; Materials have variable permeability
4 icylin=1,             ; Cylindrical symmetry
5 xreg= 1
6 kreg=-1,400
7 kmax=50
8 yreg=-0.5,0.5
9 lreg=-1,50,400
10 lmax=50
11
12 nbslo=0,              ; Dirichlet boundary condition on lower edge
13 nbsup=0,              ; Dirichlet boundary condition on upper edge

```

```

14 nbslf=0,          ; Dirichlet boundary condition on left edge
15 nbsrt=0          ; Dirichlet boundary condition on right edge
16 xminf=0,xmaxf=0.15      ; X range for field interpolation
17 yminf=0.15,ymaxf=0.15 & ; Fixed Y for field interpolation
18
19 &po x=0,y=-3 & ; Outer boundary of geometry
20 &po x=0,y=3 &
21 &po x=3,y=3 &
22 &po x=3,y=-3 &
23 &po x=0,y=-3 &
24
25 &reg mat=7,mshape=1,mtid=1 & ;Permanent magnet
26 &po x=0 ,y= -0.4 &
27 &po x=0.2 ,y= -0.4 &
28 &po x=0.2 ,y=0 &
29 &po x=0 ,y= 0 &
30 &po x=0 ,y= -0.4 &
31
32 &mt mtid=1          ; Material ID number
33 aeasy=90,          ; Easy axis direction
34 gamper=1,          ; Gamma perpendicular to easy axis
35 hcept=-10800,bcept=11600. & ; H and B intercepts

```

4.2.3 グラファイトの電気抵抗率の測定

グラファイトの電気抵抗率を四端子法により測定した。四端子法とは小さい電気抵抗率を正確に測定できる手法である。この手法の原理は、電気抵抗率を測定したい物質に端子を直線状に4つ繋げ、外側の2つの端子を用いて定電流を流し、内側の2つの端子間の電圧をテスターで測定することにより、電流はテスターのプロープに流れ込まないためテスターのプロープ内の抵抗に影響されずに測定したい物質の抵抗のみを測定できるというものである。

電気抵抗は細長い形状をしているほど抵抗が大きくなり測定しやすいため、グラファイトを幅3.3 mm、厚さ1.1 mm、長さ30 mmに加工し、端子を図4.8のように取り付けた。定電流源には5V電源(PB-204)に33 Ω (±1%)を直列に3つ繋げたものを用いた。テスターで電源の電圧を測定したところ5.15 Vであったため電流は52 mAとなる。なおグラファイトの抵抗は無視できる。テスター間距離が12 mmのときテスターの電圧は1.7 mVとなったことから電気抵抗率 ρ は

$$1.7 \text{ [mV]} = \rho \frac{12 \text{ [mm]}}{3.3 \text{ [mm]} \times 1.1 \text{ [mm]}} \times 52 \text{ [mA]} \quad (4.10)$$

$$\iff \rho = 9.9 \times 10^{-6} \text{ [\Omega}\cdot\text{m]} \quad (4.11)$$

と求めた。



図 4.8: 四端子法によるグラファイトの電気抵抗率の測定

4.2.4 渦電流による散逸のシミュレーションと測定値の比較

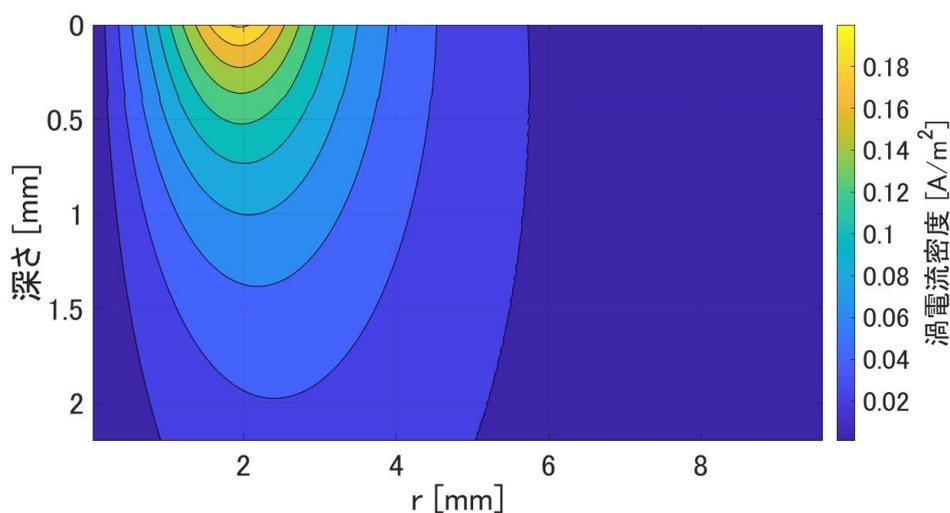


図 4.9: グラファイト内部に誘起される渦電流 $j_\phi(r, z)$ 。深さ 0 mm はグラファイトの表面 (浮上磁石に相対する面)、深さ 2.2 mm はグラファイトの裏面 (アクリル板に接触している面) に対応する。浮上高さは 0.6 mm、磁石の速度は 0.01 mm/s とした。

磁石の変位を 0.02 mm としてグラファイト内部の磁場変化をシミュレーションした¹。なお Poisson は系が軸対称 (もしくは並進対称) な場合のみ扱えるため、グラファイトを本来直方体であるが同じ高さ、同じ断面積の円柱で置き換えた。

¹グラファイトの比透磁率はほぼ 1 であるから、磁石を変位させたときの磁場分布の変化は磁石の変位分スライドするだけであるから 2 度シミュレーションする必要はない。なおソースコード 4.1 を使いました。

渦電流をシミュレーションした結果を図4.9に示す。磁石から遠ざかるほど渦電流が減衰していく様子がわかる。

浮上高さが0.1~1 mmのときの散逸の計算値と測定値との比較を図4.10に示す。両者が大まかに一致していることからこの手法が有用であることが検証できた。

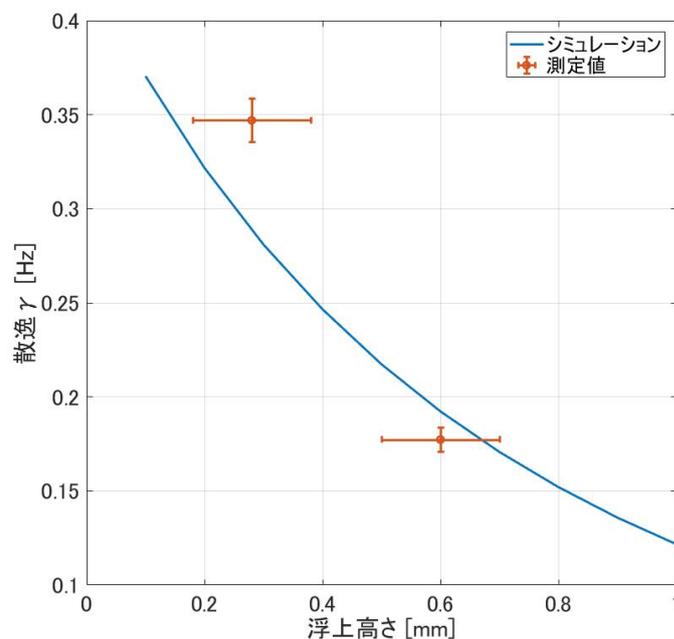


図 4.10: 渦電流による散逸の計算値と測定値

4.3 渦電流熱雑音の見積もり

4.3.1 鏡以外の物質内部の渦電流

磁石懸架システムを用いて鏡を浮上させた場合における渦電流熱雑音を見積もる。基本的な方針としては前節と同じである。

ただ磁石が作る磁場が1 T程度であるのに対し、鏡の磁化 $\mu_0 \vec{M}$ は(鏡の位置の外部磁場) × (鏡の磁化率) $\sim 10^{-5}$ T程度であり鏡から離れると鏡が作る磁場はこれよりもさらに減衰していくため、磁石が作る磁場と鏡が作る磁場を同時にシミュレーションすることは計算精度の問題があり難しい。そこで磁石は無視し、鏡を鏡が作る磁場と同じ磁場を発生させる磁石で置き換える。実際は磁石により鉄の内部が一部飽和し、その領域は透磁率が下がることにより鏡が作る磁場が鉄の内部に侵入しづらくなるが、この近似により侵入しやすくなるため散逸は多少増えると考えられる。そのためこの場合を散逸の上限値とし、鉄の比透磁率を1に設定した場合を下限值とする。

鏡の代わりに置き換える磁石の設定においては、保持力を通常よりも十分強く(-10000000 Oe) 設定することにより磁石内部の磁束密度は残留磁束密度で一様になる

性質を用いて設定した。実際は鏡の内部には磁場勾配が存在するがその効果は無視した。

鏡が平衡位置にある場合の磁場分布をシミュレーションするコードをソースコード 4.2 に示す。0.05 mm 鉛直上向きに変位させる場合は 28 ~ 33 行目をコメントアウトし、35 ~ 40 行目のコメントアウトを外す。なお鏡の磁化 $\mu_0 \vec{M}$ は平衡位置では 0.200 G (=20.0 μ T)、0.05 mm 鉛直上向きに変位した場合は 0.190 G (=19.0 μ T) であるが、残留磁束密度は整数値でしか設定できないためそれぞれ 1000 倍に設定してシミュレーションした結果を 1/1000 倍することにより磁場分布を求めた。鉄が飽和しない程度 (<1 T) に磁場が弱い場合はこのようなスケールリングが可能である。

ソースコード 4.2: magnetically levitated mirror v26.am

```

1 Magnetic Levitation System
2
3 &reg kprob=0,           ; Poisson or Pandira problem
4 mode=0,               ; Materials have variable permeability
5 icylin=1,             ; Cylindrical symmetry
6 xreg= 0.3
7 kreg=-1,120
8 kmax=360
9 yreg=-0.3
10 lreg=-1,440
11 lmax=288
12
13 ; dx=0.01
14 ; dy=0.01
15 nbslo=0,             ; Dirichlet boundary condition on lower edge
16 nbsup=0,            ; Dirichlet boundary condition on upper edge
17 nbslf=0,            ; Dirichlet boundary condition on left edge
18 nbsrt=0             ; Dirichlet boundary condition on right edge
19 xminf=0,xmaxf=0     ; X range for field interpolation
20 yminf=-1,ymaxf=0 & ; Fixed Y for field interpolation
21
22 &po x=0,y=-2.5 & ; Outer boundary of geometry
23 &po x=2.1,y=-2.5 &
24 &po x=2.1,y=0.42 &
25 &po x=0,y=0.42 &
26 &po x=0,y=-2.5 &
27
28 &reg mat=7,mshape=1,mtid=1 & ; mirror
29 &po x=0 ,y= 0.12 &
30 &po x=0.02 ,y= 0.12 &
31 &po x=0.02 ,y= 0.16 &

```

```

32 &po x=0      ,y= 0.16 &
33 &po x=0      ,y= 0.12 &
34
35 ;&reg mat=7,mshape=1,mtid=2 & ;mirror
36 ;&po x=0      ,y= 0.125 &
37 ;&po x=0.02   ,y= 0.125 &
38 ;&po x=0.02   ,y= 0.165 &
39 ;&po x=0      ,y= 0.165 &
40 ;&po x=0      ,y= 0.125 &
41
42 &reg mat=2&      ;upper yoke
43 &po x=0.115    ,y= 0.12 &
44 &po x=2.1      ,y= 0.12 &
45 &po x=2.1      ,y=0.42 &
46 &po x=0.115    ,y=0.42 &
47 &po x=0.115    ,y= 0.12 &
48
49 &reg mat=3&      ;center yoke
50 &po x=0.115    ,y= 0 &
51 &po x=0        ,y= 0 &
52 &po x=0        ,y=-2.5 &
53 &po x=0.115    ,y=-2.5 &
54 &po x=0.115    ,y= 0 &
55
56 &mt mtid=1      ; Material ID number
57 aeasy=90,      ; Easy axis direction
58 gamper=1,      ; Gamma perpendicular to easy axis
59 hcept=-1000000,bcept=200. & ; H and B intercepts
60
61 &mt mtid=2      ; Material ID number
62 aeasy=90,      ; Easy axis direction
63 gamper=1,      ; Gamma perpendicular to easy axis
64 hcept=-1000000,bcept=190. & ; H and B intercepts

```

ただし前節の実験との違いとして、鉄板内部の磁束 $\Phi(r,z)$ を計算する際に式 (4.2) を用いると $1.2\text{ mm} \leq z \leq 1.6\text{ mm}$ において磁石の内部が積分経路に入ってしまうが、磁石の内部は磁場分布のシミュレーション精度が悪い。そこで $1.2\text{ mm} \leq z \leq 2.5\text{ mm}$ においては、任意の閉曲面を貫く全磁束がゼロになることを用いて、上面が中心 ($r = 0, z = 2.5\text{ mm}$)、底面が中心 ($r = 0, z$)、半径 r の円柱を考え、上面と側面で磁束密度を面積分することで求める：

$$\Phi(r,z) = \begin{cases} 2\pi \int_0^r B_z(r',z)r' dr' & (2.5\text{ mm} \leq z) \\ \Phi(r,z = 2.5\text{ mm}) + 2\pi r \int_z^{2.5\text{ mm}} B_r(r,z') dz' & (1.2\text{ mm} \leq z < 2.5\text{ mm}) \end{cases} \quad (4.12)$$

ここで $B_r(r, z)$ は磁束密度の r 方向成分である。磁束を式 (4.2) で計算した場合と、式 (4.12) に積分経路を変更して計算した場合を比較すると図 4.11 のようになる。変更後は磁束を連続にできている。

鉄板、鉄芯、磁石の内部の渦電流は図 4.12~図 4.14 となった。。ここで鏡の速度は 0.01 mm/s とした。散逸 γ は表 4.1 のようになった。Q 値に換算すれば共振周波数 $f_m = 18 \text{ Hz}$ を用いて $Q = \pi f_m / \gamma$ となる。

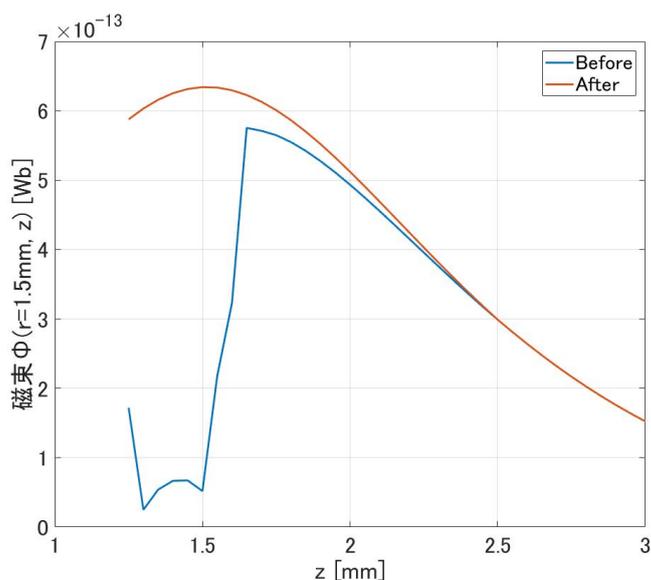


図 4.11: 積分経路を変更する前と後で磁束 $\Phi(r = 1.5 \text{ mm}, z)$ を比較

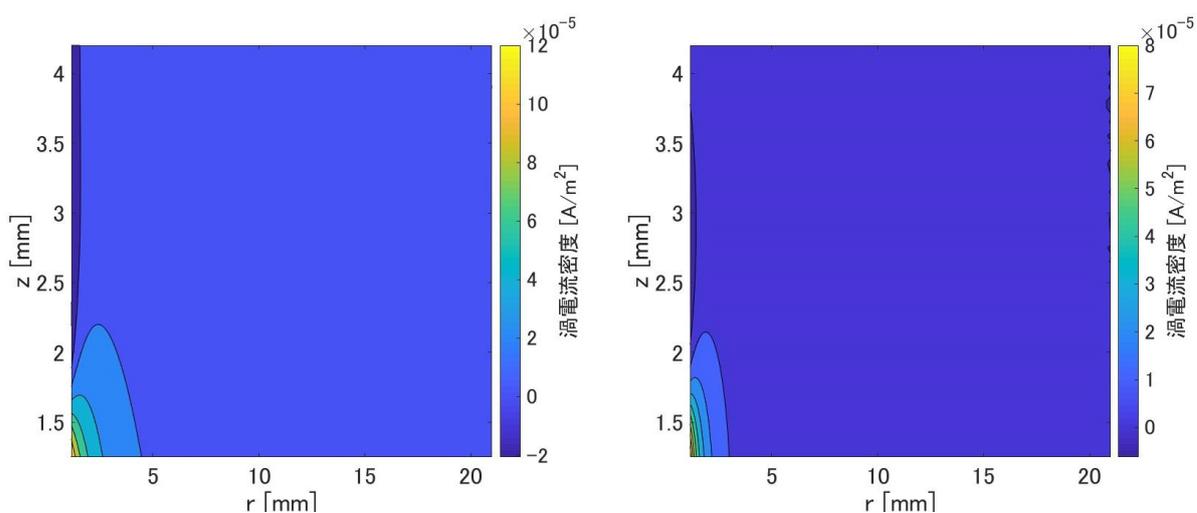


図 4.12: 鉄板内部の渦電流 (左 : 上限値、右 : 下限値)

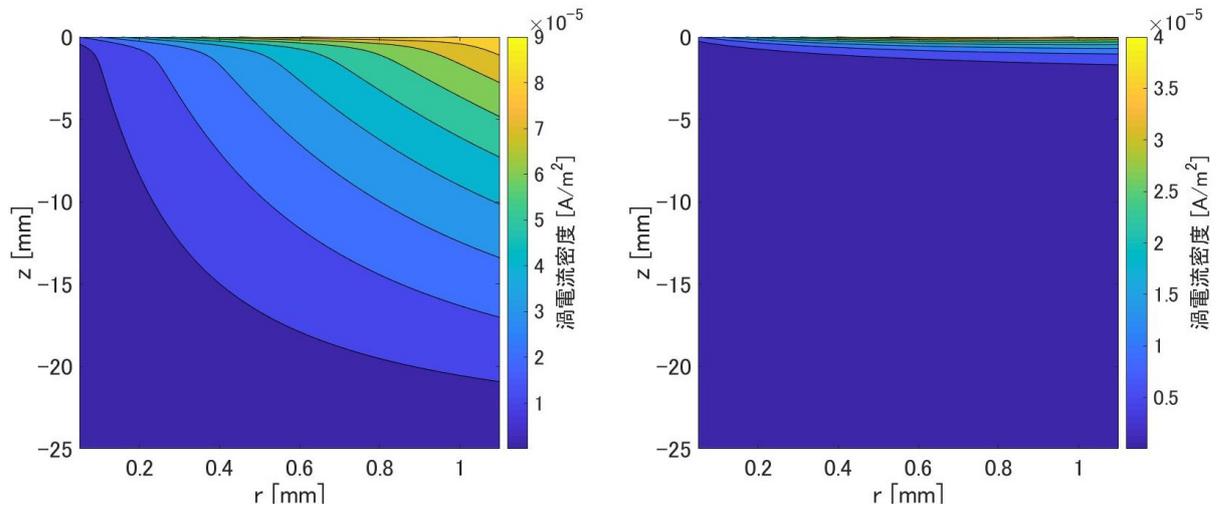


図 4.13: 鉄芯内部の渦電流 (左：上限値、右：下限値)

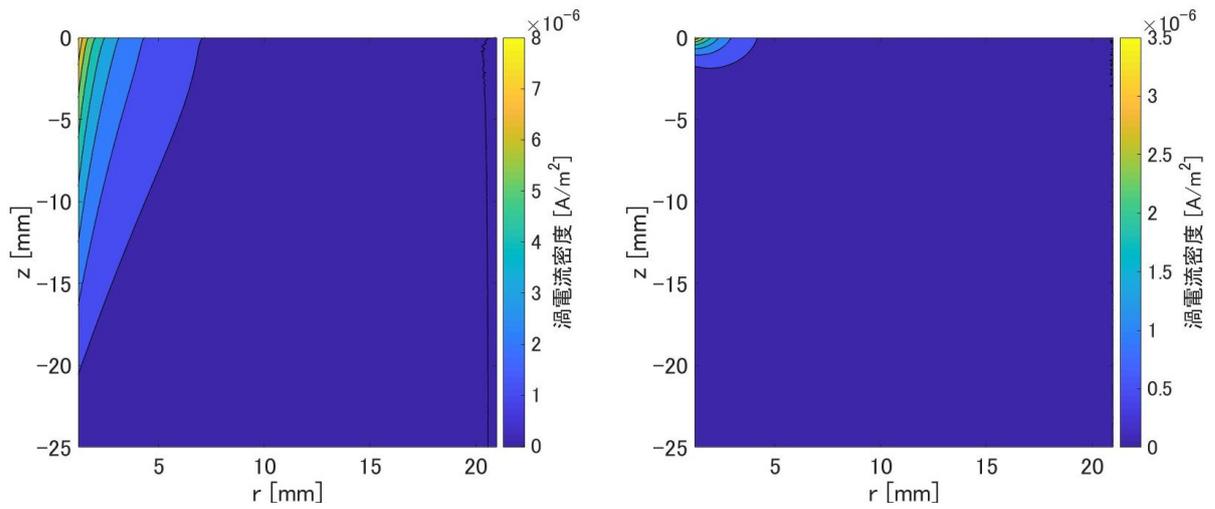


図 4.14: 磁石内部の渦電流 (左：上限値、右：下限値)

表 4.1: 渦電流による散逸

	鉄板内部	鉄芯内部	磁石内部	散逸合計	Q 値
上限値	1.3×10^{-8} Hz	1.4×10^{-8} Hz	9.8×10^{-9} Hz	3.7×10^{-8} Hz	1.5×10^9
下限値	1.9×10^{-9} Hz	2.8×10^{-10} Hz	1.6×10^{-10} Hz	2.3×10^{-9} Hz	2.5×10^{10}

4.3.2 鏡内部の渦電流

前節では鏡以外の物質内部の渦電流を考えたが、この節では鏡内部を考える。

鏡を浮上させる位置付近では図 2.9 より磁場は $B(r,z) = -B_0z + B_1$ と近似できる。ここで $B_0 = 1500 \text{ T/m}$ 、 B_1 は定数である。このとき半径 r_0 、厚さ d_0 、電気抵抗率 ρ 、密度 ρ_m の鏡内部の渦電流による散逸は式 (4.5)、(4.6)、(4.9) より

$$\gamma = \frac{B_0^2 r_0^2}{8\rho\rho_m} \quad (4.13)$$

と計算できる。半径 $r_0 = 0.2 \text{ mm}$ 、電気抵抗率 $\rho = 10^{16} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ [37]、密度 $\rho_m = 2200 \text{ kg/m}^3$ とすると散逸は $\gamma \sim 5 \times 10^{-22} \text{ Hz}$ となり、石英の非常に高い電気抵抗率により無視できることがわかる。

4.3.3 渦電流熱雑音

本節で鏡内部と鏡以外の物質内部の渦電流を見積もった結果鏡以外の物質内部の渦電流が支配的であり、その散逸は $2.3 \times 10^{-9} \text{ Hz} < \gamma < 3.7 \times 10^{-8} \text{ Hz}$ と求められた。渦電流熱雑音を標準量子限界と比較すると図 4.15 のようになり、悪く見積もっても 400 Hz 以上で下回ることがわかった。

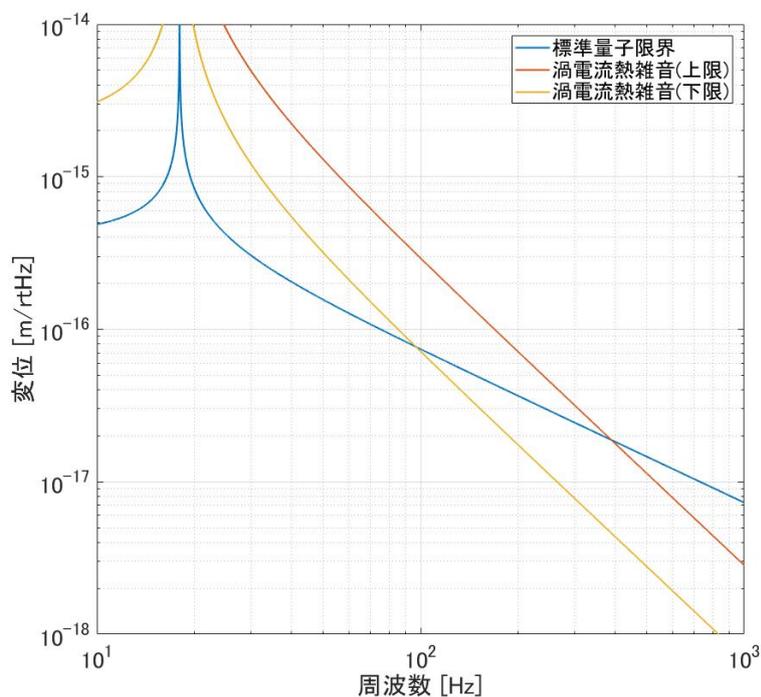


図 4.15: 渦電流熱雑音

第5章 磁石の熱雑音

磁石は微小な磁気モーメントの集まりであり、それぞれの磁気モーメントは周囲の熱浴と熱エネルギーをランダムにやり取りし向きがランダムに変化するため、磁石が作る磁場は時間的に一定ではない。この章ではこの雑音による鏡の位置変動スペクトルを理論的な手法と実験的な手法で見積もる。

5.1 理論的手法

方針としては、まず磁石の（空間的な平均）温度のゆらぎを統計力学により計算し、次にそのスペクトルをランジュバンアプローチにより計算し、最後に磁石が作る磁場の温度依存性をシミュレーションにより求めることで見積もる。ただし、磁石の平均温度が時間的に一定で磁石内の温度勾配のみが時間的に変動するモードも存在するが簡単のために考えないことにする。

5.1.1 磁石の温度変動

磁石が温度 T の熱浴に接触し平衡状態となったときの、熱浴とエネルギーをランダムにやり取りすることによる平均温度のゆらぎ δT を計算する。まずエネルギーのゆらぎ

$$\delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - (\langle E \rangle)^2} \quad (5.1)$$

を計算する。磁石がとる状態がカノニカル分布に従うとし、逆温度を β 、分配関数を $Z(\beta)$ 、エネルギー固有状態 i においてエネルギー固有値 E_i をとるとすると、エネルギーの期待値は

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} \\ &= -\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i e^{-\beta E_i} \\ &= -\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta) \quad (5.3)$$

となる。エネルギーの2乗の期待値は

$$\begin{aligned}
 \langle E^2 \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i (E_i)^2 e^{-\beta E_i} \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_i e^{-\beta E_i} \\
 &= \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。よって式(5.1)、(5.2)、(5.4)より、

$$\begin{aligned}
 (\delta E)^2 &= \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} - \left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} \right)^2 \\
 &= \frac{Z(\beta)Z''(\beta) - (Z'(\beta))^2}{(Z(\beta))^2} \\
 &= \left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} \right)' \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z(\beta)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

が得られる。ここで定積熱容量 C_V を変形すると式(5.3)、(5.5)より、

$$\begin{aligned}
 C_V &= \frac{d}{dT} \langle E \rangle \\
 &= \frac{d\beta}{dT} \frac{d}{d\beta} \langle E \rangle \\
 &= \frac{1}{k_B T^2} \frac{d^2}{d\beta^2} \log Z(\beta) \\
 &= \frac{1}{k_B T^2} (\delta E)^2 \\
 \iff (\delta E)^2 &= k_B T^2 C_V
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

となりエネルギーのゆらぎが求まる。ここで、エネルギーと温度の関係

$$E = C_V T \tag{5.7}$$

を用いると式(5.6)は温度のゆらぎとも解釈でき、

$$(\delta T)^2 = \frac{k_B T^2}{C_V} \tag{5.8}$$

が得られる。

5.1.2 磁石の温度変動のスペクトル

磁石の温度変動のスペクトルをランジュバンアプローチにより計算する [38]。磁石を1辺の長さ $2L$ 、体積 V の立方体とし、 $-L \leq x \leq L$ 、 $-L \leq y \leq L$ 、 $-L \leq z \leq L$ に

あるとする。磁石内の位置 \mathbf{r} 、時刻 t における温度の熱浴の温度からのずれを $u(\mathbf{r}, t)$ 、熱伝導率を λ^* 、密度を ρ 、単位密度当たりの熱容量を C 、熱揺動項を $F(\mathbf{r}, t)$ とすると熱伝導方程式は次のような確率微分方程式になる。

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t), \quad a^2 = \frac{\lambda^*}{\rho C} \quad (5.9)$$

Fourier 変換して解くと

$$u(\mathbf{r}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4} u(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \quad (5.10)$$

$$u(\mathbf{k}, \omega) = \frac{F(\mathbf{k}, \omega)}{a^2 k^2 + i\omega} \quad (5.11)$$

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \int_V d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt F(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \quad (5.12)$$

となる。時刻 t における磁石の平均温度の熱浴の温度からのずれ $\bar{u}(t)$ は

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{V} \int_V u(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (5.13)$$

である。求めるものは $\bar{u}(t)$ の片側パワースペクトル密度であり $S_T(\omega)$ とおく。Wiener-Khinchin の定理より自己相関関数¹ をフーリエ変換すればよいので

$$\begin{aligned} S_T(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \bar{u}(t) \bar{u}^*(t + \tau) \rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau) \langle \bar{u}(t) \bar{u}^*(t + \tau) \rangle \\ &= 4 \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau) \langle \bar{u}(t) \bar{u}^*(t + \tau) \rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。ここで

$$\bar{u}(t) \bar{u}^*(t + \tau) = \frac{1}{V^2} \iint_V d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k} d\omega d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^8} \frac{F(\mathbf{k}, \omega) F^*(\mathbf{k}', \omega')}{(a^2 k^2 + i\omega)(a^2 k'^2 - i\omega')} \cdot e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega'(t+\tau) - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \quad (5.15)$$

において確率的な値をとるのは F と F^* のみであるから、 $\bar{u}(t)$ の自己相関関数は

$$\langle \bar{u}(t) \bar{u}^*(t + \tau) \rangle = \frac{1}{V^2} \iint_V d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k} d\omega d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^8} \frac{\langle F(\mathbf{k}, \omega) F^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle}{(a^2 k^2 + i\omega)(a^2 k'^2 - i\omega')} \cdot e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega'(t+\tau) - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \quad (5.16)$$

となる。また、熱揺動項の自己相関関数は [38]

$$\langle F(\mathbf{k}, \omega) F^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^4 F_0^2 k^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \quad (5.17)$$

¹エルゴード性を仮定すれば $\langle \rangle$ の意味は時間平均でもありアンサンブル平均でもある。

である。 F_0 は規格化定数である。式 (5.17) を用いると式 (5.16) は

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{u}(t) \bar{u}^*(t + \tau) \rangle &= \frac{F_0^2}{V^2} \iint_V dr dr' \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dk d\omega}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{a^4 k^4 + \omega^2} e^{-i\omega\tau + ik(r-r')} \\
 &= \frac{F_0^2}{V^2} \iint_V dr dr' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{\pi}{a^2} e^{-a^2 k^2 |\tau| + ik(r-r')} \\
 &= \frac{F_0^2}{V^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\pi}{a^2} \left(\frac{\pi}{a^2 |\tau|} \right)^{3/2} \iint_V dr dr' e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2 |\tau|}} \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

となる。最終式の積分を実行する。誤差関数

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (5.19)$$

を用いて

$$\begin{aligned}
 &\int_{-L}^L dx \int_{-L}^L dx' e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2 |\tau|}} \\
 &= \int_{-L}^L dx \sqrt{a^2 \pi |\tau|} \left(\text{Erf} \left(\frac{x+L}{2a\sqrt{|\tau|}} \right) - \text{Erf} \left(\frac{x-L}{2a\sqrt{|\tau|}} \right) \right) \\
 &= 4aL\sqrt{\pi |\tau|} \left(\text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2 |\tau|}} - 1 \right) \right) \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

となることから自己相関関数

$$\langle \bar{u}(t) \bar{u}^*(t + \tau) \rangle = \frac{F_0^2}{2Va^2} \left(\text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2 |\tau|}} - 1 \right) \right)^3 \quad (5.21)$$

が得られる。よって式 (5.14), (5.21) より、

$$S_T(\omega) = \frac{2F_0^2}{Va^2} \int_0^\infty d\tau \left(\text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2 |\tau|}} - 1 \right) \right)^3 \cos(\omega\tau) \quad (5.22)$$

となる。ここで式 (5.22) が式 (5.8) と整合するように F_0 を決定する。式 (5.21) で $\tau = 0$ とおくことにより

$$\begin{aligned}
 (\delta T)^2 &= \langle \bar{u}(t) \bar{u}^*(t) \rangle \\
 &= \frac{F_0^2}{2Va^2} \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

となる。よって式 (5.8)、(5.23) より F_0 が

$$F_0^2 = \frac{2Va^2 k_B T^2}{C_V} \quad (5.24)$$

と求まった。よって式 (5.22)、(5.24) より、

$$\begin{aligned}
 S_T(\omega) &= \frac{4k_B T^2}{C_V} \int_0^\infty d\tau \left(\text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2 |\tau|}} - 1 \right) \right)^3 \cos(\omega\tau) \\
 &= \frac{4k_B T^2}{\rho CV} \int_0^\infty d\tau \left(\text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{\tau}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2 \tau}} - 1 \right) \right)^3 \cos(\omega\tau) \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

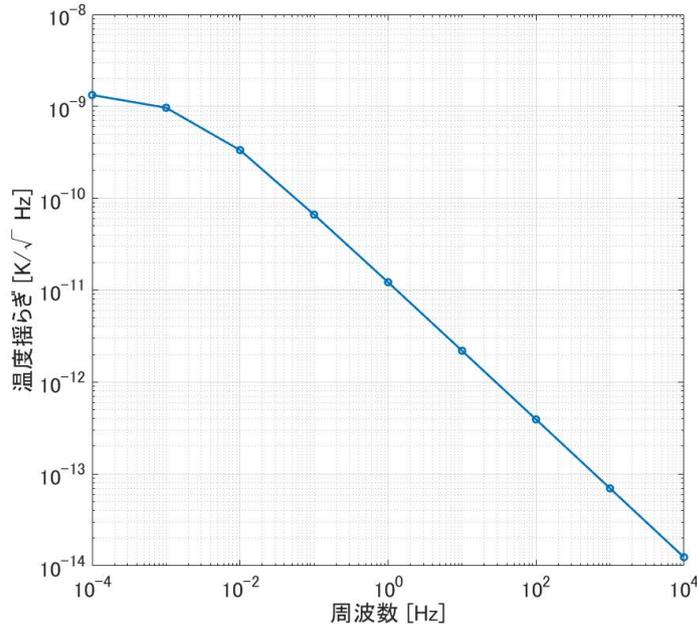


図 5.1: 磁石の温度変動の振幅スペクトル密度 $\sqrt{S_T}$ を数値積分で求めた結果。 $\tau_0 = 10^4$, $d\tau = 10^{-6}$, $V = 4.91 \times 10^{-5} \text{ [m}^3\text{]}$, $L = (V/8)^{1/3}$ とした。ネオジム磁石の特性値には [39] のデータ $\rho = 7500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, $C=500 \text{ [J/kg}\cdot\text{K]}$, $\lambda^*=9 \text{ [W/m}\cdot\text{K]}$ を用いた。

となる。この積分を解析的に実行することは難しいため τ_0 をある程度大きく ($\gg L^2/a^2$) 取り積分区間を $\int_0^{\tau_0}$ と $\int_{\tau_0}^{\infty}$ に分割し、 $\int_0^{\tau_0}$ では数値積分を行い、 $\int_{\tau_0}^{\infty}$ では次のように近似を用いて計算する：

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \left(\text{Erf} \left(\frac{L}{a\sqrt{\tau}} \right) + \frac{a}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2\tau}} - 1 \right) \right)^3 \cos(\omega\tau) \\
 & \sim \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-\frac{3}{2}} \cos(\omega\tau) \\
 & = \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \left(2\sqrt{2\pi\omega} \left(S \left(\sqrt{\frac{2\omega\tau_0}{\pi}} \right) - \frac{1}{2} \right) + \frac{2 \cos(\omega\tau_0)}{\sqrt{\tau_0}} \right) \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

ここで $S(x)$ はフレネル積分であり、

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \quad (5.27)$$

で定義される。

計算結果を図 5.1 に示す。振幅スペクトル密度にすると高周波では $f^{-3/4}$ に比例して減衰することがわかる。

5.1.3 磁石が作る磁場の温度依存性

ネオジウム磁石の保持力 H_c と残留磁束密度 B_r の温度依存性は BH 曲線 [40] から読み取るとそれぞれおよそ 0.88%/K と -0.13%/K となった。これから 21°C における値を求めると表 5.1 のようになった。

Poisson を用いて磁石の温度を 21°C として磁力をシミュレーションした結果を 20°C のときの磁力である図 2.10 と比較すると図 5.2 のようになり、鏡が浮上する位置である高さ 1.4mm のあたりでの磁力の変化率 α は -0.75%/K 程度であることがわかる。

表 5.1: ネオジウム磁石の保持力 H_c と残留磁束密度 B_r の温度依存性

	20°C	21°C
保持力 H_c [Oe]	-10800	-10705
残留磁束密度 B_r [G]	12800	12783

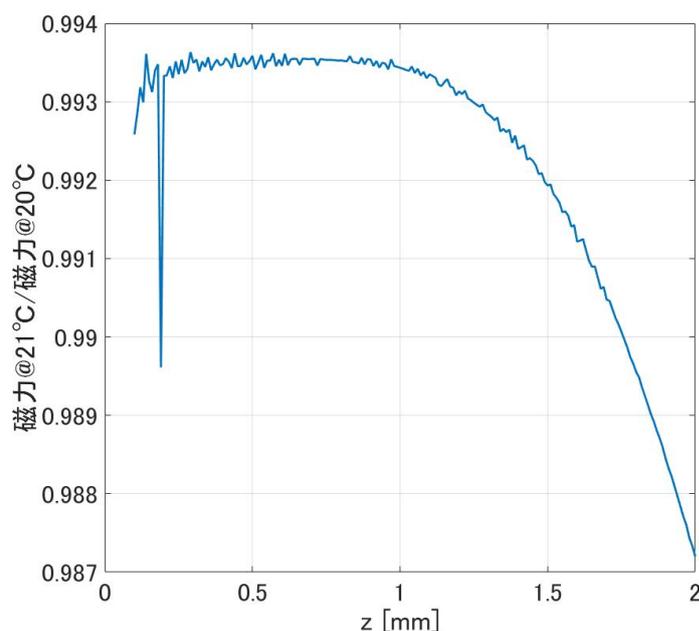


図 5.2: 磁石の温度が 20°C と 21°C のときの鏡が受ける磁力の比較。ネオジウム磁石の特性値の温度依存性は表 5.1。

5.1.4 磁石の温度変動による鏡の位置変動スペクトル

前節までの結果をまとめ、磁石の温度変動による鏡の位置変動のスペクトルを求める。鏡が受ける磁力の時間平均は重力と等しいことを用いると

$$\sqrt{S(\omega)} = mg\alpha\sqrt{S_T(\omega)}|\chi(\omega)| \quad (5.28)$$

となる。標準量子限界と比較すると図 5.3 となり十分小さいことがわかる。

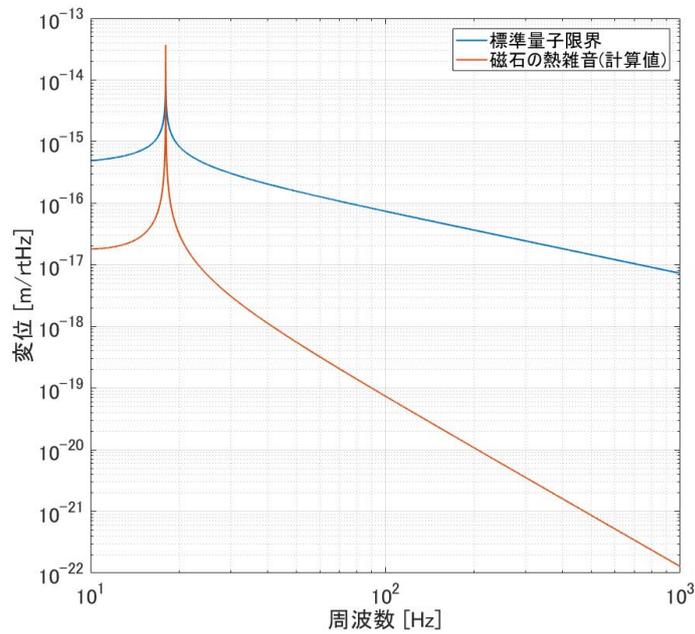


図 5.3: 磁石の熱雑音 (計算値)

5.2 実験的手法

実際に磁石の磁場変動の測定を行い、それから鏡の変位に換算することを考える。

直径 2 cm、厚さ 2 cm の永久磁石を図 5.4 のようにサーチコイル内部に入れることで磁石の磁場変動を測定した。結果は図 5.5 となり、磁石を入れない場合とで差は見られなかった。

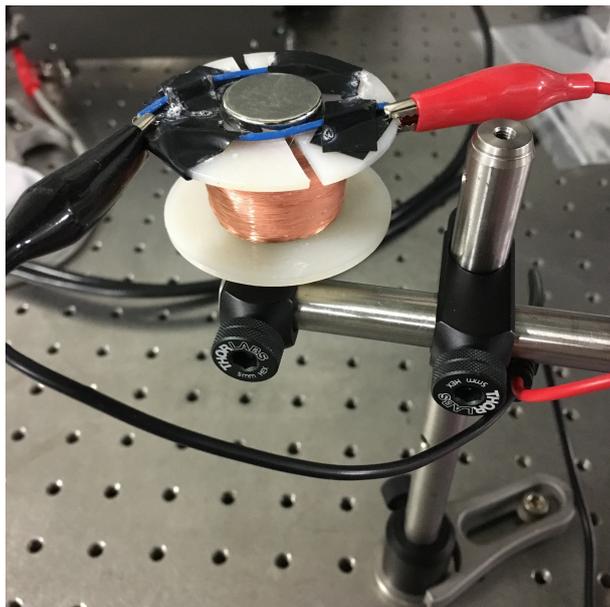


図 5.4: 磁石の磁場変動の測定

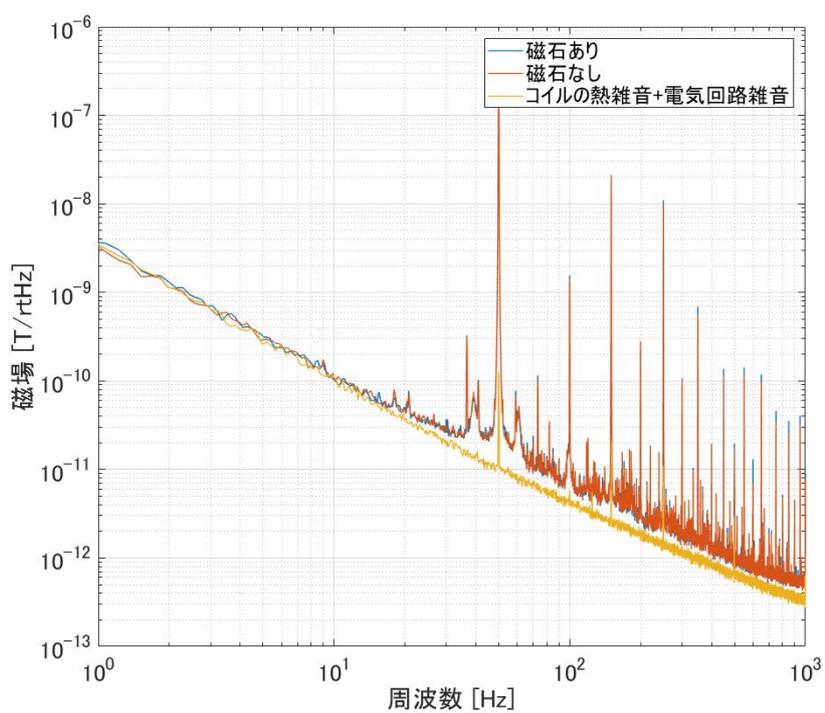


図 5.5: 磁石の磁場変動

ここで、磁石の磁場変動 ΔB と磁場の平均値 B の比が磁石懸架システムにおいても同じであると仮定する。つまり磁石の大きさによる効果を見捨てる。

そこでコイル内部の磁場の平均値を求める。Poisson を用いてサーチコイル内部の

磁束をシミュレーションすると図5.6のようになった。これを平均すると $1.9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ となった。コイルの半径は平均すると約 13 mm であるからコイル内部の磁場は平均すると 0.36 T となる。これより $\Delta B/B$ の上限値として図 5.7 が得られる。

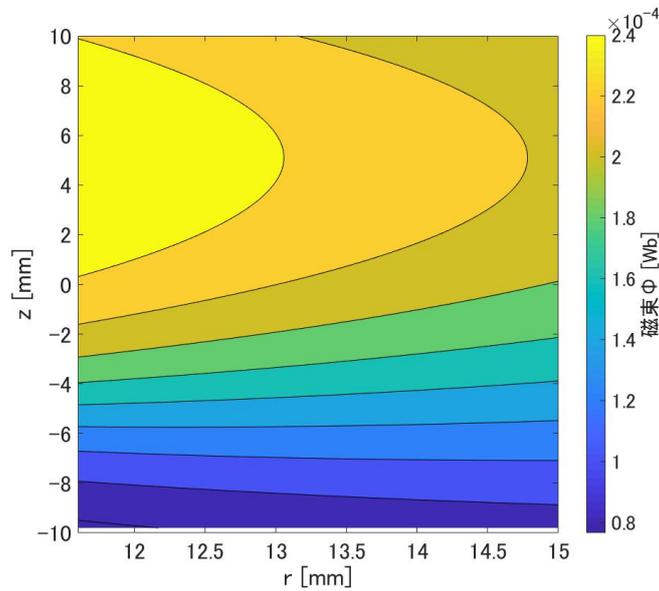


図 5.6: コイル内部の磁束

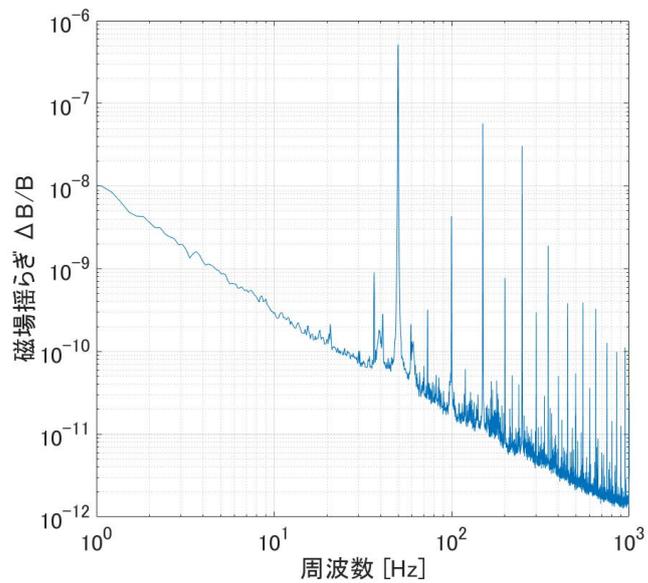


図 5.7: 磁石の磁場変動と平均磁場の比の上限値

また磁石の磁場が変動したとき鏡が受ける磁力 F の変化 ΔF は、磁場勾配 $\partial_z B_z$ が

磁場 B_z に比例すると仮定すれば式 (3.7) より

$$\Delta F = \frac{2\chi V}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial B_z} \overline{B_z} \Delta B_z \quad (5.29)$$

となるから鏡の変位は

$$\begin{aligned} \sqrt{S(\omega)} &= |\chi(\omega)| \Delta F \\ &= |\chi(\omega)| \frac{\Delta F}{F} \overline{F} \\ &= |\chi(\omega)| \frac{2\Delta B_z}{B_z} mg \end{aligned} \quad (5.30)$$

と計算でき、図 5.8 となる。300 Hz 以上で標準量子限界を下回ることがわかった。

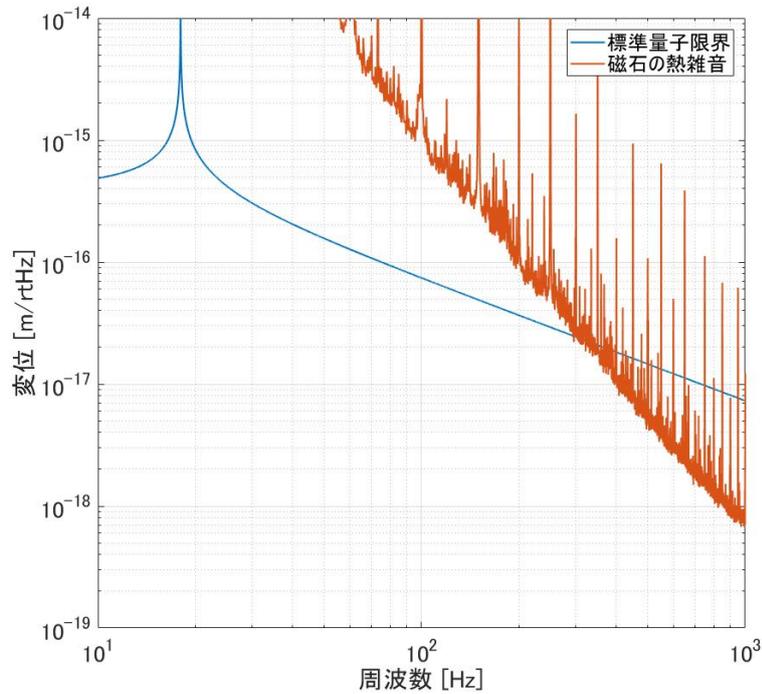


図 5.8: 磁石の熱雑音の上限

第6章 その他の雑音

6.1 残留ガス熱雑音

残留ガス分子が熱運動をし鏡にランダムに衝突することで発生するのが残留ガス熱雑音である。これによる散逸は

$$\gamma_{\text{gas}} = \frac{P}{Ch\rho} \sqrt{\frac{m_{\text{mol}}}{k_B T}} \quad (6.1)$$

と表される [6]。\$P\$ は圧力、\$C\$ は鏡の形状に依存する 1 程度の定数、\$h\$ は鏡の大きさ、\$\rho\$ は鏡の密度、\$m_{\text{mol}}\$ は残留ガス分子の平均質量である。圧力を \$1 \times 10^{-5}\$ Pa とすると \$\gamma_{\text{gas}} \sim 4 \times 10^{-8}\$ Hz となる。

6.2 地面振動雑音

懸架鏡は地面振動に対し共振周波数以上で防振されるが共振器を構成する他の鏡には固定されたものを用いるとすれば、地面振動が共振器長を変化させてしまう。地面振動のスペクトルは典型的には

$$\sqrt{S_{\text{seis}}(\omega)} \sim \frac{10^{-7}}{f^2} \quad (6.2)$$

である。

共振器を振り子で懸架して防振したときの防振比を求める。振り子で懸架した重りの重さを \$m\$、共振角周波数を \$\omega_m\$、位置を \$y(t)\$、地面振動を \$x(t)\$ とすれば運動方程式は

$$m\ddot{y}(t) = -m\omega_m^2(y(t) - x(t)) - \frac{m\omega_m}{Q}(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) \quad (6.3)$$

である。フーリエ変換をして整理し、地面振動から重りの位置の伝達関数を求めれば

$$\frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{\omega_m^2 + i\omega\omega_m/Q}{\omega_m^2 - \omega^2 + i\omega\omega_m/Q} \quad (6.4)$$

となり、\$Q\$ 値がある程度大きければ共振周波数以上で

$$\frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{\omega_m^2}{\omega^2} \quad (6.5)$$

となり、2次で防振できることがわかる。\$n\$ 段振り子の場合は \$2^n\$ 次で防振される。

例えば共振周波数 2 Hz の 1 段振り子で防振した場合を考えれば、1 kHz における変位は \$4 \times 10^{-19}\$ m/\$\sqrt{\text{Hz}}\$ となり、1 kHz における標準量子限界の変位 \$7 \times 10^{-18}\$ m/\$\sqrt{\text{Hz}}\$ を下回る。

6.3 レーザーの量子雑音

散射雑音の表式 (1.6) と輻射圧雑音の表式 1.7 を共振器をオーバーカップリングとした場合に共振器の入射光量 P_{in} とフィネス \mathcal{F} と規格化した離調角周波数 $\delta = \Delta/\kappa$ を用いて書き直すと次のようになる [41]:

$$S_{\text{shot}}(\omega) = \frac{\hbar c^2}{8\omega_L P_{\text{in}}} \left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right)^2 (1 + \delta^2) \left(1 + \frac{\omega^2}{\kappa^2}\right) \quad (6.6)$$

$$S_{\text{rad}}(\omega) = \frac{8\hbar\omega_L P_{\text{in}} |\chi(\omega)|^2}{c^2} \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \frac{1}{1 + \delta^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)^{-1} \quad (6.7)$$

キャビティポールは

$$\kappa = \frac{c\pi}{2L\mathcal{F}} \quad (6.8)$$

で与えられる。

例えばフィネス 100、長さ 10 cm の共振器に 6 mW を入射すると図 6.1 のように 1 kHz 付近で標準量子限界に到達できる。

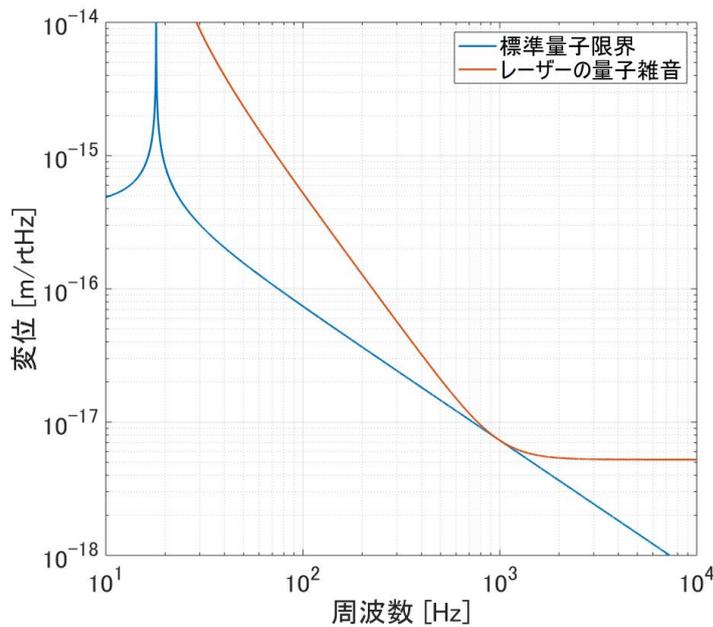


図 6.1: 標準量子限界とレーザーの量子雑音

第7章 まとめと今後の課題

まとめ

本修士論文のまとめを記す。

第1章では本修士論文の背景を述べた。巨視的量子力学の検証のためには様々な質量スケールにおいて鏡の位置測定感度を標準量子限界に到達させる必要があるが、ワイヤー懸架した場合は鏡の質量が小さいほど懸架線の熱雑音の影響が大きくなり、0.1 mg 程度では標準量子限界に到達できないことを見た。

第2章では反磁性体の磁気浮上についてまとめた。永久磁石を用いた0.1~1 mgの石英ガラスの浮上に成功した。スケールが大きく磁化率の絶対値が小さいほど浮上の難易度は上がるが、このスケール、石英程度の磁化率での浮上例は我々が調べた限り過去にはない。これ以降の章では直径0.4 mm、厚さ0.4 mm、質量0.1 mgの石英鏡を浮上させたときの雑音の見積もりを行った。なお共振周波数をシミュレーションしたところ18 Hzであった。

第3章では環境磁場雑音の見積もりを行った。環境磁場雑音には式(3.7)のように環境磁場変動に比例する項と環境磁場勾配変動に比例する項があるが、簡単のため前者のみを扱った。サーチコイルを用いて環境磁場変動を測定し、鏡の位置変動に換算したところ図3.15となり、150 Hz以上で標準量子限界に到達できることがわかった。ただしサーチコイル内部では磁場が一様であるという近似を用いた。

第4章では渦電流熱雑音の見積もりを行った。まずはグラフィイトを用いて永久磁石を浮上させるといった簡単な系で散逸の測定値と計算値がほぼ一致することを示し、散逸の計算手法が有用であることを確認した。そして磁石懸架における散逸を計算した結果散逸が $2 \times 10^{-9} \text{ Hz} < \gamma < 4 \times 10^{-8} \text{ Hz}$ 、Q値に換算すれば $2 \times 10^9 < Q < 3 \times 10^{10}$ となった。鏡の変位にすれば図4.15のようになり、悪く見積もった場合でも400 Hz以上で標準量子限界に到達できることがわかった。

第5章では磁石の熱雑音を2つの手法で見積もった。1つ目はランジュバンアプローチにより磁石の平均温度の揺らぎを計算し、それによる磁力の変動をシミュレーションするというものである。これによると磁石の熱雑音は図5.3となり非常に小さいことがわかった。ただし磁石の平均温度が一定で内部の温度勾配が変動するモードは考えられていないためこれはあくまで下限値である。2つ目は直径2 cm、厚さ2 cmの永久磁石の磁場変動をサーチコイルを用いて測定することで磁場変動と磁場の平均値の比を求め、この値が磁石懸架システムにおいても同じであると仮定し、磁石懸架システムの磁場と磁場勾配が比例するという仮定も用いて鏡の変位に換算するというものであった。結果図5.8となり、300 Hz以上で標準量子限界に到達できることがわかった。

第6章では残留ガス熱雑音、鏡の熱雑音、地面振動雑音、レーザーの量子雑音を

見積もった。

今回見積もった古典雑音をすべて示すと図7.1となる。Q値は 2×10^9 、鏡の反射率は99%、レーザー半径は0.1 mmとした。400 Hz~80 kHzで標準量子限界を狙うことができ、0.1 mgスケールにおいて磁石懸架がワイヤー懸架に代わる懸架系として有望であることが示された。

今後の課題

今後の課題として1つ目はQ値の測定である。残留ガスダンピングの影響をなくすため測定は高真空下で行う必要があるが、現在 5×10^{-2} Paまでしか到達できていない。2つ目は環境磁場勾配変動の測定である。サーチコイルを2つ用いれば測定できると考えられる。3つ目は微小鏡の製造である。アライメントが安定になりやすい鏡の形状を検討することも必要である。

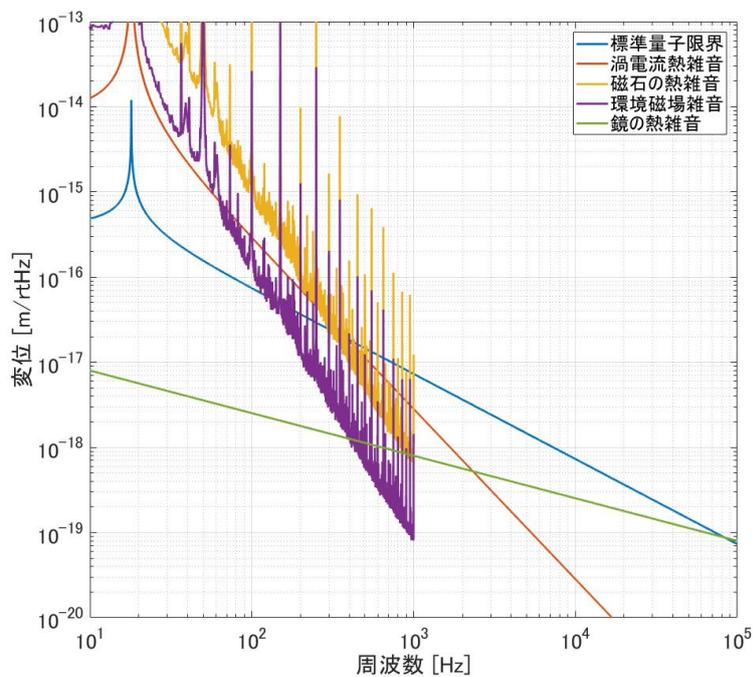


図 7.1: 磁石懸架における標準量子限界と古典雑音

付録A 機械光学系の基礎

機械的な振動子である鏡とレーザーを強く結合させた系を機械光学系といい、重力波検出器などの精密位置測定分野でよく用いられる。機械光学系の基礎についてまとめる。

鏡の位置測定の感度を標準量子限界まで到達させるには高いレーザーパワーが必要であり、そのためにはレーザーを何度も往復させて増幅する共振器が有用である。最も単純な共振器である Fabry-Perot 共振器について見てみる。

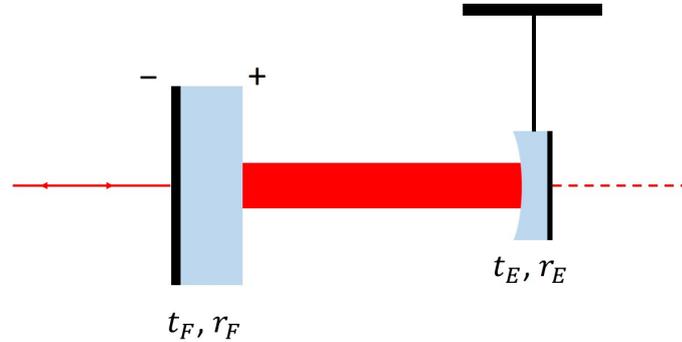


図 A.1: Fabry-Perot 共振器

図 A.1 のようなフロントミラーとエンドミラーで構成される Fabry-Perot 共振器に左からレーザーを入射させる場合を考える。鏡の振幅透過率と振幅反射率の絶対値をそれぞれ t_F, r_F, t_E, r_E とし、符号は図の通りとする。共振器の片道長を L 、レーザーの角周波数を ω_L 、電場が共振器を片道進む間に回る位相を $\phi = \omega_L L / c$ とする。

入射電場、反射電場、透過電場、共振器内電場をそれぞれ $E_{\text{in}}, E_r, E_t, E_{\text{cav}}$ とおくとこれらには

$$E_{\text{cav}} = t_F E_{\text{in}} + r_F r_E e^{-2i\phi} E_{\text{cav}} \quad (\text{A.1})$$

$$E_r = -r_F E_{\text{in}} + t_F r_E e^{-2i\phi} E_{\text{cav}} \quad (\text{A.2})$$

$$E_t = t_E e^{-i\phi} E_{\text{cav}} \quad (\text{A.3})$$

の関係があり、それぞれを入射電場 E_{in} について解くと

$$\frac{E_{\text{cav}}}{E_{\text{in}}} = \frac{t_F}{1 - r_F r_E e^{-2i\phi}} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{E_r}{E_{\text{in}}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-2i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-2i\phi}} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{E_t}{E_{\text{in}}} = \frac{t_F t_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-2i\phi}} \quad (\text{A.6})$$

となる。入射強度、反射強度、透過強度、共振器内強度をそれぞれ $P_{\text{in}}, P_r, P_t, P_{\text{cav}}$ とおくと

$$\frac{P_{\text{cav}}}{P_{\text{in}}} = \left| \frac{E_{\text{cav}}}{E_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{t_F^2}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2 \phi} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{P_r}{P_{\text{in}}} = \left| \frac{E_r}{E_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{((r_F^2 + t_F^2)r_E - r_F)^2 + 4r_F r_E (r_F^2 + t_F^2) \sin^2 \phi}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2 \phi} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{P_t}{P_{\text{in}}} = \left| \frac{E_t}{E_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{t_F^2 t_E^2}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2 \phi} \quad (\text{A.9})$$

となり、式 (A.7) より整数 n を用いて $\phi = n\pi$ となるととき共振することがわかる。つまり共振器長が条件

$$L = \frac{n\pi c}{\omega_L} \quad (\text{A.10})$$

を満たすときに共振する。

また共振条件を満たすレーザーの周波数の間隔 $c/2L$ を FSR といい、共振ピークの半値全幅と FSR の比をフィネスという：

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \quad (\text{A.11})$$

反射率の高い鏡を用いるほどフィネスは上がり、共振は鋭くなる。

次に共振器から光子が失われていく時間スケールを表す因子を定義する。インプットミラー、アウトプットミラー、共振器内のロスで失われていく時間スケールをそれぞれ $\kappa_{\text{in}}, \kappa_{\text{out}}, \kappa_{\text{loss}}$ とし、その和を

$$\kappa = \kappa_{\text{in}} + \kappa_{\text{out}} + \kappa_{\text{loss}} \quad (\text{A.12})$$

と書く。 κ はキャビティポールや共振器の線幅とも呼ばれる。各因子は次のように書ける：

$$\kappa = \frac{\pi c}{2L\mathcal{F}} \quad (\text{A.13})$$

$$\kappa_{\text{in}} = \frac{ct_F^2}{4L} \quad (\text{A.14})$$

$$\kappa_{\text{out}} = \frac{ct_E^2}{4L} \quad (\text{A.15})$$

$$(\text{A.16})$$

これらの因子によって共振器は3つに分類される：

$$\kappa_{\text{in}} > \kappa_{\text{out}} \iff \text{オーバーカップリング共振器} \quad (\text{A.17})$$

$$\kappa_{\text{in}} = \kappa_{\text{out}} \iff \text{クリティカルカップリング共振器} \quad (\text{A.18})$$

$$\kappa_{\text{in}} < \kappa_{\text{out}} \iff \text{アンダーカップリング共振器} \quad (\text{A.19})$$

次に離調 Δ を定義する。ある共振器長 L に対し共振する角周波数 ω_{cav} とレーザーの角周波数の差が離調である：

$$\Delta = \omega_L - \omega_{\text{cav}} \quad (\text{A.20})$$

規格化された離調角周波数 δ は

$$\delta = \frac{\Delta}{\kappa} \quad (\text{A.21})$$

と定義される。

離調角周波数 δ やキャビティポール κ などを用いると式 (A.8)、(A.9)、(A.7) は次のように書き直せる [9] :

$$\frac{P_{\text{cav}}}{P_{\text{in}}} = \frac{\mathcal{F}}{\pi} \frac{2\kappa_{\text{in}}}{\kappa} \frac{1}{1 + \delta^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{P_{\text{r}}}{P_{\text{in}}} = 1 - \frac{4\kappa_{\text{in}}}{\kappa} \left(1 - \frac{\kappa_{\text{in}}}{\kappa}\right) \frac{1}{1 + \delta^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{P_{\text{t}}}{P_{\text{in}}} = \frac{4\kappa_{\text{in}}\kappa_{\text{out}}}{\kappa^2} \frac{1}{1 + \delta^2} \quad (\text{A.24})$$

式 (A.22) より、強いオーバーカップリング共振器 ($\kappa_{\text{in}} \sim \kappa$) のとき共振器内パワーは約 $2\mathcal{F}/\pi$ 倍となることがわかる。

光ばね

次に離調した際に生じる光ばねについて記す。鏡を共振点から離調したある点において鏡の機械的な復元力とアクチュエータによる力とレーザーの輻射圧の合力がつり合うようにする。そこから鏡が変位したときレーザーの輻射圧は図 A.2 左のように線型に変化するため、離調の向きによってばねや反ばねとして働く。この光ばねには減衰効果もある。これは共振器内のレーザーパワーの変化が鏡の変位に追従する際に遅延があるため、輻射圧は正確には図 A.2 右のようになり、ダンピング効果やアンチダンピング効果となる。光ばねの複素ばね定数は

$$K(\omega) \simeq \frac{16\omega_L \mathcal{F}^2 P_{\text{in}} \kappa_{\text{in}}}{\pi^2 c^2} \frac{\delta}{\kappa (1 + \delta^2)^2} \left(1 - \frac{2i\omega}{\kappa(1 + \delta^2)}\right) \quad (\text{A.25})$$

$$= K_{\text{opt}} + i\Gamma_{\text{opt}}\omega \quad (\text{A.26})$$

と書ける [42]。実部 K_{opt} は鏡の共振周波数を変化させ、虚部 Γ_{opt} は鏡の散逸を変化させる。通常の機械的なものなどに起因する散逸は式 (1.14) の熱雑音を生じさせるが光ばねによる散逸は熱雑音がないのが特徴である。

ただし K_{opt} と Γ_{opt} は必ず異符号になるため光ばねは不安定なばねであり、その他の外力も含めたトータルのばね定数の実部と虚部が正になるようにしなければならない。もしくは安定な光ばねを構成する手法が2つある。1つ目は光ばねを2本用いることである。これによりトータルの K_{opt} と Γ_{opt} をどちらも正にできる [43]。2つ目は共振器を用いない手法である。この場合振動子の変位と輻射圧の変化の間に遅延がないため Γ_{opt} はゼロになる [44]。

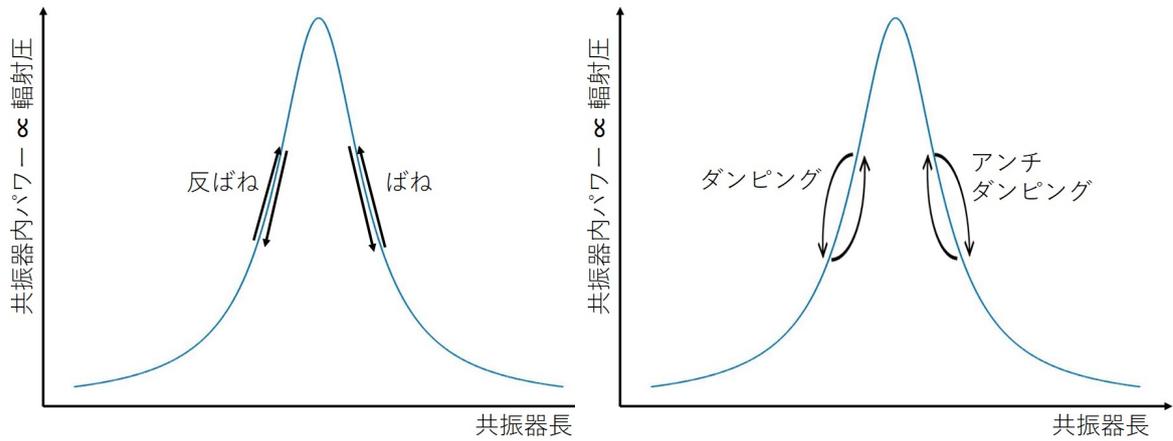


図 A.2: 離調したときの輻射圧

冷却

機械振動子の冷却について記す [9,42]。

オプトメカニクスにおいては機械振動子のエンタングルメント状態を生成することが1つの目標であり、そのためには感度を標準量子限界に到達させるのみならず振動子を基底状態に冷却する必要がある。オプトメカニクスにおいて基底状態とはフォノン数が1以下の状態を指す。まずフォノン数について述べる。

フォノン数 n_{pn} は振動子のエネルギーが1量子 $\hbar\omega_m$ を単位として基底状態よりもどれだけ大きいかを示す物理量であり、平均2乗変位量 $\langle x^2 \rangle$ を用いて

$$n_{pn} = \frac{m\omega_m}{\hbar} \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \tag{A.27}$$

と書ける。厳密な基底状態では $n_{pn}=0$ となる。

フォノン数は熱雑音起源の熱フォノンとレーザーの輻射圧揺らぎ由来の輻射圧フォノン数に分けられ、トータルのフォノン数を1以下にするためにはこれらのフォノン数を1以下にする必要がある。

熱フォノン数を下げるには実効温度

$$T_{\text{eff}} = \frac{\gamma_m T}{\gamma_{\text{eff}}} \tag{A.28}$$

を下げれば良い。ここで γ_m は振動子の機械的な散逸であり、 γ_{eff} はトータルの散逸である。つまり何らかの方法で散逸を増やすことができればよいことがわかる。

輻射圧フォノン数を減らすには good cavity と呼ばれる $\omega_m \geq \kappa$ を満たす場合と bad cavity と呼ばれる $\kappa \geq \omega_m$ を満たす場合で戦略が異なる。good cavity ならば光ばねを用いたサイドバンド冷却によってパッシブに輻射圧フォノン数を1以下にできるが bad cavity の場合はフィードバック冷却をしなければならない。ワイヤーで懸架した通常の振り子の場合共振周波数が低く bad cavity になるためフィードバック冷却が必要である。鏡が十分重い場合は鏡にアクチュエーターを取り付けられるが、鏡が微小な場合は困難なため光ばねを用いてリモートに微小鏡をアクチュエートする手法がある [9]。なお例外的に、磁石懸架システムの場合は bad cavity でありかつ懸架

鏡が微小であるが、懸架鏡が磁化しているためコイルを用いて直接アクチュエートできると考えられる。

また、基底状態に冷却できたとしてもコヒーレントに 1 回以上振動しなければ冷却の意義はない。これは fQ 条件と呼ばれ室温において以下の条件を満たさなければならない：

$$f_m Q_m > 6 \times 10^{12} \quad (\text{A.29})$$

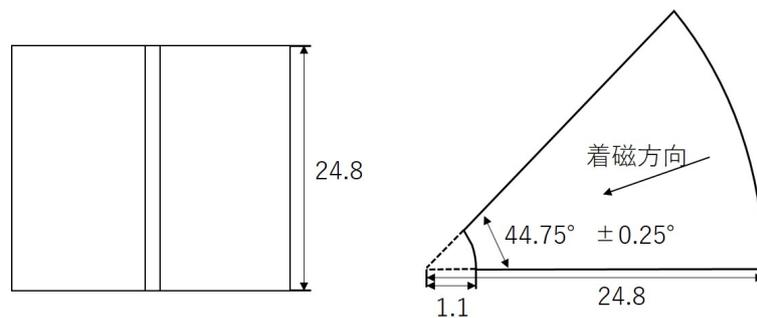
これは満たすのは非常に困難であるが光ばねで共振周波数を上げればこの条件は以下のように緩和される：

$$f_m Q_m > 6 \times 10^{12} \left(\frac{f_m}{f_{\text{eff}}} \right)^3 \quad (\text{structure}) \quad (\text{A.30})$$

$$f_m Q_m > 6 \times 10^{12} \left(\frac{f_m}{f_{\text{eff}}} \right)^2 \quad (\text{viscous}) \quad (\text{A.31})$$

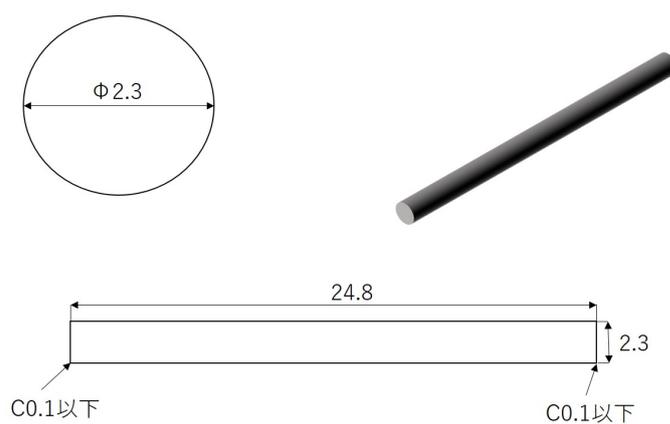
磁石懸架の場合共振周波数 $f_m = 18 \text{ Hz}$ 、Q 値は悪く見積もっても 2×10^9 であったが $f_{\text{eff}} = 300 \text{ Hz}$ 程度で式 (A.31) を満たす。

付録B 磁石懸架システムの図面



- アーク型ネオジム磁石
- 径方向着磁
- 表面はニッケル鍍金
- 長さの単位はmm
- 寸法許容差はJIS B 0419-mK
- 数量は10個

図 B.1: 磁石



- 長さの単位はmmとする
- 指定のない寸法許容差はJIS B 0419-mKとする
- 材質はSS400とする
- 表面はニッケル鍍金
- 数量は1個

図 B.2: 鉄芯

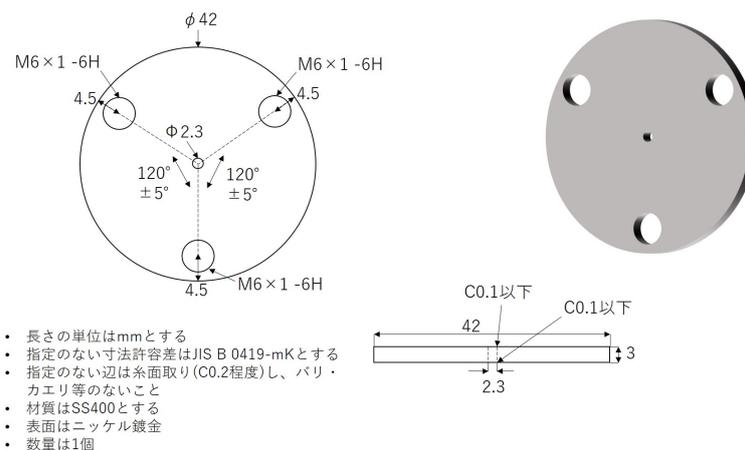
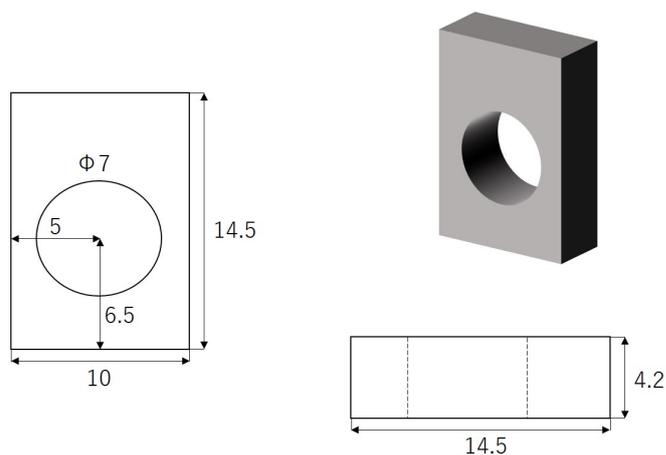
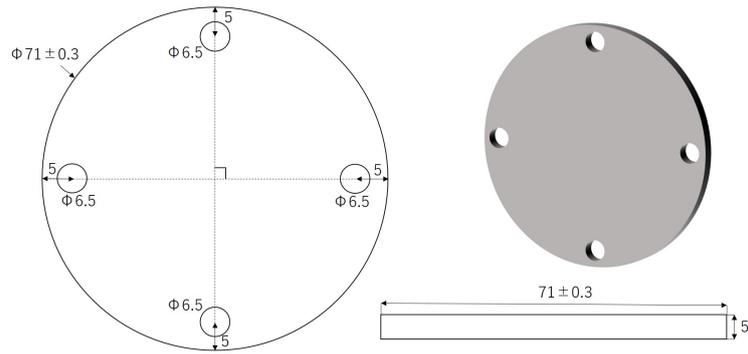


図 B.3: 鉄板



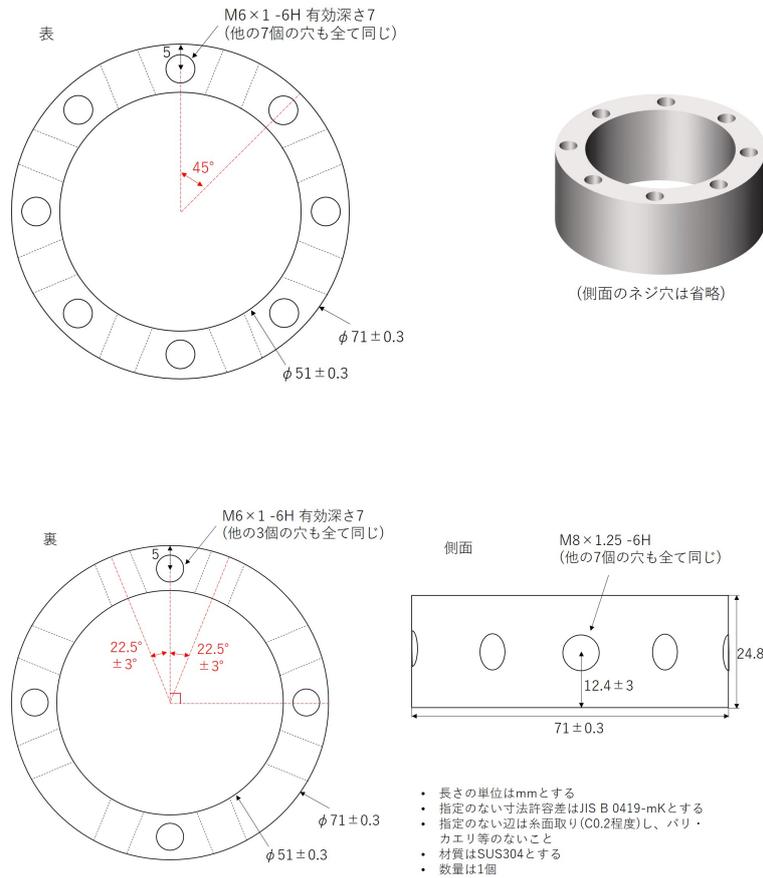
- 長さの単位はmmとする
- 指定のない寸法許容差はJIS B 0419-mKとする
- 指定のない辺は糸面取り (C0.2程度) し、バリ・カエリ等のないこと
- 材質はSUS304とする
- 数量は8個

図 B.4: 磁石のクランプ



- 長さの単位はmmとする
- 指定のない寸法許容差はJIS B 0419-mKとする
- 指定のない辺は糸面取り(C0.2程度)し、バリ・カエリ等のないこと
- 材質はSUS304とする
- 数量は1個

図 B.5: ステンレスの容器の下蓋



- 長さの単位はmmとする
- 指定のない寸法許容差はJIS B 0419-mKとする
- 指定のない辺は糸面取り(C0.2程度)し、バリ・カエリ等のないこと
- 材質はSUS304とする
- 数量は1個

図 B.6: ステンレスの容器

参考文献

- [1] Juan Pablo Paz and Wojciech Hubert Zurek. Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical. In *Fundamentals of Quantum Information*, pp. 77–148. Springer, 2002.
- [2] Roger Penrose. On gravity’s role in quantum state reduction. *General relativity and gravitation*, Vol. 28, No. 5, pp. 581–600, 1996.
- [3] M V Berry and A K Geim. Of flying frogs and levitrons. *European Journal of Physics*, Vol. 18, No. 4, pp. 307–313, jul 1997.
- [4] Naoyuki Kitamura, Masaki Makihara, Miho Hamai, Takayuki Sato, Iwao Mogi, Satoshi Awaji, Kazuo Watanabe, and Mitsuhiro Motokawa. Containerless melting of glass by magnetic levitation method. *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 39, No. 4A, p. L324, 2000.
- [5] Markus Aspelmeyer, Tobias J Kippenberg, and Florian Marquardt. Cavity optomechanics. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 86, No. 4, p. 1391, 2014.
- [6] Peter R Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. *Physical Review D*, Vol. 42, No. 8, p. 2437, 1990.
- [7] Gregory M Harry, Andri M Gretarsson, Peter R Saulson, Scott E Kittelberger, Steven D Penn, William J Startin, Sheila Rowan, Martin M Fejer, DRM Crooks, Gianpietro Cagnoli, et al. Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 19, No. 5, p. 897, 2002.
- [8] Yu Levin. Internal thermal noise in the ligo test masses: A direct approach. *Physical Review D*, Vol. 57, No. 2, p. 659, 1998.
- [9] 小森健太郎. 巨視的振動子の遠隔光冷却. 修士論文, 東京大学, 2016.
- [10] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健編著. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会.
- [11] Gabriela I González and Peter R Saulson. Brownian motion of a mass suspended by an anelastic wire. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 96, No. 1, pp. 207–212, 1994.

- [12] Seth B Cataño-Lopez, Keiichi Edamatsu, and Nobuyuki Matsumoto. High q mg-scale monolithic pendulum for quantum-limited gravity measurements. *arXiv preprint arXiv:1912.12567*, 2019.
- [13] Raffaele Flaminio, Janyce Franc, Christine Michel, Nazario Morgado, Laurent Pinard, and Benoit Sassolas. A study of coating mechanical and optical losses in view of reducing mirror thermal noise in gravitational wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 27, No. 8, p. 084030, 2010.
- [14] Robert H Austin and Kirk T McDonald. Diamagnetic levitation. *Joseph Henry Laboratories, Princeton University Communication*, 2001.
- [15] Trans Earnshaw. *Cambridge philos. Soc*, Vol. 7, No. 97, p. 1824, 1842.
- [16] Werner Braunbek. Freischwebende körper im elektrischen und magnetischen feld. *Zeitschrift für Physik*, Vol. 112, No. 11, pp. 753–763, Nov 1939.
- [17] Werner Braunbek. Freies schweben diamagnetischer körper im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, Vol. 112, No. 11, pp. 764–769, Nov 1939.
- [18] Orphee Cugat, Jerome Delamare, and Gilbert Reyne. Magnetic micro-actuators and systems (magmas). *IEEE Transactions on magnetics*, Vol. 39, No. 6, pp. 3607–3612, 2003.
- [19] M. D. Simon and A. K. Geim. Diamagnetic levitation: Flying frogs and floating magnets (invited). *Journal of Applied Physics*, Vol. 87, No. 9, pp. 6200–6204, 2000.
- [20] William M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 97th Edition*. CRC Press, 2016.
- [21] Matthias C Wapler, Jochen Leupold, Iulius Dragonu, Dominik von Elverfeld, Maxim Zaitsev, and Ulrike Wallrabe. Magnetic properties of materials for mr engineering, micro-mr and beyond. *Journal of Magnetic Resonance*, Vol. 242, pp. 233–242, 2014.
- [22] M Kumada, T Fujisawa, Y Hirao, M Endo, M Aoki, T Kohda, I Bolshakova, and R Holyaka. Development of 4 tesla permanent magnet. In *PACS2001. Proceedings of the 2001 Particle Accelerator Conference (Cat. No. 01CH37268)*, Vol. 5, pp. 3221–3223. IEEE, 2001.
- [23] 本河光博. 強い磁場をつくる. 岩波書店, 2002.
- [24] Seungyong Hahn, Kwanglok Kim, Kwangmin Kim, Xinbo Hu, Thomas Painter, Iain Dixon, Seokho Kim, Kabindra R Bhattarai, So Noguchi, Jan Jaroszynski, et al. 45.5-tesla direct-current magnetic field generated with a high-temperature superconducting magnet. *Nature*, p. 1, 2019.

- [25] MM Ferreira and AJ Silva-Oliveira. Magnetic levitation with diamagnetic boundaries. Technical report, CM-P00038446, 2001.
- [26] Andrey Geim. Everyone's magnetism. *Physics today*, Vol. 51, No. 9, pp. 36–39, 1998.
- [27] G Kustler. Diamagnetic levitation-historical milestones. *Revue Roumaine Des Sciences Techniques Serie Electrotechnique Et Energetique*, Vol. 52, No. 3, p. 265, 2007.
- [28] V Arkadiev. A floating magnet. *Nature*, Vol. 160, No. 4062, p. 330, 1947.
- [29] AH Boerdijk. Levitation by static magnetic fields. *Philips technical review*, Vol. 18, No. 125-127, p. 5, 1956.
- [30] Arie Hendrick Boerdijk. *Technical aspects of levitation*. Philips research laboratories, 1956.
- [31] E Beaunon and R Tournier. Levitation of organic materials. *Nature*, Vol. 349, No. 6309, p. 470, 1991.
- [32] E Beaunon and R Tournier. Levitation of water and organic substances in high static magnetic fields. *Journal de Physique III*, Vol. 1, No. 8, pp. 1423–1428, 1991.
- [33] AK Geim, MD Simon, MI Boamfa, and LO Heflinger. Magnet levitation at your fingertips. *Nature*, Vol. 400, No. 6742, p. 323, 1999.
- [34] IF Lyuksyutov, DG Naugle, and KDD Rathnayaka. On-chip manipulation of levitated femtodroplets. *Applied physics letters*, Vol. 85, No. 10, pp. 1817–1819, 2004.
- [35] Sergey Semenov, Vincent Haguët, Christian Jeandey, and Mickaël Antoni. Experimental investigation of the evaporation of droplets in diamagnetic levitation. 2017.
- [36] 株式会社二六製作所 HP. <https://www.26magnet.co.jp/database/associated-data/no3.html>.
- [37] 理科年表 平成 30 年. 丸善出版, 2017.
- [38] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky, and S.P. Vyatchanin. Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A*, Vol. 264, No. 1, pp. 1 – 10, 1999.
- [39] Eclipse Magnetics 社 HP. https://www.eclipsemagnetics.com/media/wysiwyg/datasheets/magnet_materials_and_assemblies/ndfeb_neodymium_iron_boron-standard_ndfeb_range_datasheet_rev1.pdf.
- [40] 株式会社二六製作所 HP. <https://www.26magnet.co.jp/database/associated-data/no2.html>.

- [41] 和田祥太郎. 巨視的量子力学の検証に向けた 光輻射圧による浮上手法の開発. 修士論文, 東京大学, 2018.
- [42] 小森健太郎. *Optomechanical Torsion Pendulum for Measurement of Quantum Radiation Pressure Fluctuation*. 博士論文, 東京大学, 2019.
- [43] Thomas Corbitt, Yanbei Chen, Edith Innerhofer, Helge Müller-Ebhardt, David Ottaway, Henning Rehbein, Daniel Sigg, Stanley Whitcomb, Christopher Wipf, and Nergis Mavalvala. An all-optical trap for a gram-scale mirror. *Physical review letters*, Vol. 98, No. 15, p. 150802, 2007.
- [44] Jonathan Cripe, Baylee Danz, Benjamin Lane, Mary Catherine Lorio, Julia Falcone, Garrett D Cole, and Thomas Corbitt. Observation of an optical spring with a beam splitter. *Optics letters*, Vol. 43, No. 9, pp. 2193–2196, 2018.

謝辞

本修士論文は多くの方の支えにより完成しました。ここで感謝申し上げます。

指導教員の宗宮健太郎准教授には学部4年のときから3年間お世話になりました。宗宮研究室はとても自由な雰囲気があり、また欲しいものはなんでも買ってくださいのため、やりたいことはなんでもやることができました。神岡にも連れて行ってくださり、なかなかできない経験をさせていただきました。

国立天文台の藤本先生にはゼミでお世話になりました。長年重力波検出に携わられている立場からの興味深いお話を聞かせていただきました。

福岡大学の端山さんには釣りに連れて行ってくださいました。初めての体験で面白いものでした。

東京大学の道村さんには OMC 関連の作業でお世話になりました。はんだ付けを超人的な速さと正確さで行う姿には驚きました。

MIT の小森さんには富山でお会いしたときに質問に答えていただきました。

研究室の皆様にもお世話になりました。

原田先生、小田部君、佐々木君、Liu 君、小川君、栗林君、立原君とはゼミでお世話になりました。

原田先生には異分野をやられていた方ならではの視点のお話を伺うことができました。

小田部君は同期ながらとても頼りになる存在であり、私の実験に多くのアドバイスをくれました。磁石懸架システムの組み立てにおいては危険な作業でしたが文字通り血を流しながら一緒に頑張ってくれました。また浮上に用いる鏡も提供してくれました。

佐々木君と元留学生のメロディーさんとは卓球をたまに一緒にやり、とても楽しかったです。初めは初心者でしたが少し鍛えられた気がします。

秘書の深山さんは検収など事務的な作業を全てやってくださいました。そのため研究に集中することができました。

そして何より今まで支えてくださった家族にも感謝いたします。

皆様のご支援のもと本修士論文を執筆するまでに至りました。改めて感謝申し上げます。ありがとうございました。