次世代重力波検出器のための
非線形光学効果を用いた信号増幅

東京工業大学 理学院物理学系物理学コース 宗宮研究室
17M00446 草柳　浩平

2019 年 3 月 16 日

はじめに

重力波とは時空の歪みが光速で伝わる現象であり，1916 年に A.Einstein によって予言された [1]．重力波は質量を持った物体が加速度運動をすることで生じるがその振幅は小さいため検出は難しく，J.H.Taylor と R.A.Hulse によって重力波の存在が間接的に証明されたのは予言から 62 年たった 1978 年だった [2]．直接的な観測は 2015 年にアメリカの LIGO が 2 台のレーザー干渉計型大型重力波望遠鏡によってブラックホール連星合体からの重力波を初検出したことによって成された [3]．2017 年には中性子星連星の合体からの重力波も初検出された [4]．このイベントではアメリカの 2 台の望遠鏡と，ヨーロッパの重力波望遠鏡である Virgo も加わったことで重力波の到来方向が絞られ，合体後に電磁波による観測も行われた [5]．日本の重力波望遠鏡である KAGRA は現在建設中で 2019 年に観測のネットワークに加わる．KAGRA を始めとする現在ある地上の重力波検出器は数 100Hz に感度のピークを持ち高周波数帯は量子雑音によって制限されている．ブラックホール連星合体において合体後に生じるリングダウンの周波数や，中性子星連星合体後の重力波信号は数 kHz 帯に存在し現在の検出器では十分な感度とは言えない [6]．中性子星の内部を知るためにも検出器の高周波帯の感度を向上は必要不可欠である．重力波検出器の高周波帯の感度を向上する技術として干渉計の AS ポートからスクイーズド真空場を入れる方法が知られており，ドイツの重力波検出器 GEO600 では 5.7[dB] のスクイージングレベルを達成している．しかし，スクイージングを用いた感度向上は光学損失に弱いという特徴を持っている．光学損失とは検出器の感度向上を妨げる要因の 1 つであり，鏡における吸収や散乱によって生じる．そこで宗宮研究室では，光学損失に強い次世代型重力波検出器として，光パラメトリック増幅を信号増幅器として利用した非線形光学結晶挿入型重力波検出器を考案した [10],[11]．この検出器は，共振器を離調した際に生じる光ばねを非線形光学効果で固くすることにより，高周波数帯の感度を向上させる利点を持っている．また先行研究 [13] より，光学損失が大きな状況下でも高周波数帯で標準量子限界を超える干渉計であることが示されている．本研究ではシグナルリサイクリング干渉計の中に非線形光学結晶 (pp-KTiOPO4) を挿入し，非線形光学結晶挿入型シグナルリサイクリング干渉計を構築した．これによって干渉計の内部で信号の増幅を行い，光共振器の離調と組み合わせることで，高周波数帯の感度向上の実験的検証を試みた．この原理検証実験では干渉計の内部で光パラメトリック増幅を生じさせることが必要であり，光学系の設計と制御手法の開発を行った．

Abstract

Gravitational waves are distortions in the fabric of the space-time that propagate as waves at the speed of light and predicted by A. Einstein in 1916 in his general theory of relativity[1]. Accelerated masses generate this wave, but the detection is difficult because its amplitude is very small. A strain amplitude of gravitational wave is extremely small as $10^{23}\mathrm{m/m}$. As late as 1978, the gravitational wave is observed indirectly by R.A.Hulse and J.H.Taylor[2]. On September 14, 2015, LIGO succeded in detecting the gravitational wave directly that generated by two colliding black holes[3]. The gravitational wave that generated by two colliding neutron stars was also detected on August 17, 2017 by the LIGO and Virgo detectors[4]. In this event an extensive observing campaign was launched across the electromagnetic spectrum based on the gravitational wave signal[5]. KAGRA which is the laser interferometric gravitational wave detector in Japan is currently under construction and will join the observation network in late 2019.

Ground-based Gravitational Wave Detectors like KAGRA have a sensitivity peak at several hundred Hz and high frequency band is limited by quantum noise. After the merging binary neutron star, there is the gravitational wave signal in frequency renge approximately 1000-4000 Hz and it can not be said that the current detectors have sufficient sensitivity. In order to reveal details on neutron star structure, improving the sensitivity of the high frequency band of the detector is indispensable.

It is known that squeezing technique is effective to improve the sensitivity of the high frequency band of the gravitational wave detector, and GEO600 which is British-German gravitational wave detector reached a squeezing level of 5.7 dB and therefore suppressed the quantum background noise by a factor of almost 2. However, a squeezed state is commonly affected by a optical loss. Optical loss is one of the obstacles to improving the sensitivity of detectors and caused by absorption and scattering in mirrors.

Therefore, in our laboratory we suggested the next generation gravitational wave detector using an Optical Parametric Amplification[10],[11]. This detector has the advantage of improving the sensitivity of the high frequency band because an optical parametric amplification technique realizes the stiff optical spring without increasing the circulating laser power. Moreover, from the previous study it has been shown that the our interferometer exceeds the standard quantum limit in the high frequency band even under lossy system[13].

In order to test this theory, I constructed a signal amplifire using a Optical Parametric Amplification in a signal recycling interferometer and I observed this effect. The non linear crystal I used is periodically polled KTiOPO4. Signal amplification levels are 0.13dB in single pass. Then, I made the signal recycling cavity detuned but a optical spring effect was not confirmed.

目次

第 1 章

一般相対性理論と重力波

Einstein 方程式は, 重力場が弱い場合には線形化することができる．重力波とは, この線形化された Einstein 方程式の波動解である．本節では Einstein 方程式を線型化, 波動解を求める．また, そこから重力波の基本的な性質を求める．

1.1 Einstein 方程式

重力波の存在はアインシュタインが 1916 年に発表した一般相対性理論の中で予測された．一般相対論はそれよりも前に発表されていた特殊相対性理論と等価原理，リーマン幾何学が元になっており，ニュートンの万有引力の理論を拡張した重力の理論である．一般相対論に於いて，4 次元時空 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の線素 ds は,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1.1}$$

で表される．ここで $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルである．重力がない平坦な時空 (Minkovski 時空) では,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

一方重力のある時空では計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式に従い，以下の式で表される．

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.1.3}$$

ここで $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソル，$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである．Einstein テンソルは以下の様に定義する．

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.1.4}$$

ここで,

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \tag{1.1.5}$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\gamma\beta} \tag{1.1.6}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \tag{1.1.7}$$

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha} \tag{1.1.8}$$

$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ はクリストッフェル記号，$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ はリーマン曲率テンソル，$R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル，R はリッチスカラーである．偏微分 $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ について，

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A^{\mu} = \partial_{\nu} A^{\mu} = A^{\mu}_{,\nu} \tag{1.1.9}$$

とする．

1.2 Einstein 方程式の線形化

次に重力が弱い場合について考える．すなわち摂動の 1 次までを考える．この時計量テンソルは,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \tag{1.2.1}$$

と書くことが出来る．次にこれをクリストッフェル記号に代入する．

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} (h_{\alpha\nu,\lambda} + h_{\alpha\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\alpha}) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

次にこれをリーマン曲率テンソルに代入する．

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &= \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\gamma\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\nu,\beta} + h_{\sigma\beta,\nu} - h_{\nu\beta,\sigma})_{,\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\nu,\alpha} + h_{\sigma\alpha,\nu} - h_{\nu\alpha,\sigma})_{,\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\nu,\alpha\beta} + h_{\sigma\beta,\alpha\nu} - h_{\nu\beta,\alpha\sigma} - h_{\sigma\nu,\alpha\beta} - h_{\sigma\alpha,\beta\nu} + h_{\nu\alpha,\beta\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\alpha\nu} - h_{\nu\beta,\alpha\sigma} - h_{\sigma\alpha,\beta\nu} + h_{\nu\alpha,\beta\sigma}) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

よってリッチテンソルとリッチスカラーは,

$$\begin{aligned} R_{\nu\beta} &= R^{\mu}_{\nu\mu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\mu\nu} - h_{\nu\beta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\nu\mu,\beta\sigma}) \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$$\begin{aligned} R &= g^{\nu\beta} R_{\nu\beta} \\ &\simeq \eta^{\nu\beta} R_{\nu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\mu\nu} - h_{\nu\beta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\nu\mu,\beta\sigma}) \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

これらを Einstein 方程式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
G_{\nu\beta} &= R_{\nu\beta} - \frac{1}{2}g_{\nu\beta}R \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\mu\nu} - h_{\nu\beta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\nu\mu,\beta\sigma}) - \frac{1}{2}(\eta_{\gamma\beta} + h_{\nu\beta}) \cdot \frac{1}{2}\eta^{\tau\delta}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\delta,\mu\tau} - h_{\tau\delta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\delta\tau} + h_{\tau\mu,\delta\sigma}) \\
&\simeq \frac{1}{4}[2\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\mu\nu} - h_{\nu\beta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\nu\mu,\beta\sigma}) - \eta_{\nu\beta}\eta^{\tau\delta}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\delta,\mu\tau} - h_{\tau\delta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\delta\tau} + h_{\tau\mu,\delta\sigma})] \\
&= \frac{1}{4}[2(h^{\mu}{}_{\beta,\mu\nu} - h_{\nu\beta,\mu}{}^{\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\beta\nu} + h^{\sigma}{}_{\nu,\beta\sigma}) - \eta_{\nu\beta}(h^{\mu\tau}{}_{,\mu\tau} - h^{\delta}{}_{\delta,}{}^{\sigma}{}_{\sigma} - h^{\mu}{}_{\mu,}{}^{\tau}{}_{\tau} + h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma}] \\
&= \frac{1}{2}[(h^{\mu}{}_{\beta,\mu\nu} - \Box h_{\nu\beta} - h_{,\beta\nu} + h^{\sigma}{}_{\nu,\beta\sigma}) - \eta_{\nu\beta}(h^{\mu\tau}{}_{,\mu\tau} - \Box h)] \qquad (1.2.6)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = {}_{,}{}^{\mu}{}_{\mu} \qquad (1.2.7)
$$

$$
h = h^{\mu}{}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \qquad (1.2.8)
$$

とする．$\Box$ はダランベルシアン．

ここで $h_{\mu\nu}$ のトレース反転テンソル (trace reverse tensor)$\bar{h}_{\mu\nu}$ を定義する．

$$
\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \qquad (1.2.9)
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{h} &= \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} \\
&= \eta^{\mu\nu}(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) \\
&= \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}h \\
&= h - \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot h = -h \qquad (1.2.10)
\end{aligned}
$$

ここから Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ について $\bar{h}$ で表すことを考える．

$$
\begin{aligned}
\bar{h}^{\delta}{}_{\beta,\nu\delta} &= \eta^{\delta\nu}\bar{h}_{\mu\beta,\nu\delta} = \eta^{\delta\nu}(h_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}h)_{,\nu\delta} \\
&= h^{\delta}{}_{\beta,\nu\delta} - \frac{1}{2}\eta^{\delta\nu}\eta_{\mu\beta}h_{,\nu\delta} \\
&= h^{\delta}{}_{\beta,\nu\delta} - \frac{1}{2}h_{,\nu\delta} \qquad (1.2.11)
\end{aligned}
$$

$$
\bar{h}^{\delta}{}_{\nu,\beta\delta} = h^{\delta}{}_{\nu,\beta\delta} - \frac{1}{2}h_{,\beta\nu} \qquad (1.2.12)
$$

$$
\Box\bar{h}_{\nu\lambda} = \Box h_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}\Box h \qquad (1.2.13)
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{\nu\delta}\bar{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} &= \eta_{\nu\lambda}(h^{\delta\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\delta\sigma}\eta^{\sigma\beta}\eta_{\sigma\beta}h)_{,\delta\sigma} \\
&= \eta_{\nu\lambda}h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}\eta^{\delta\sigma}h_{,\delta\sigma} \\
&= \eta_{\nu\lambda}h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}\Box h \qquad (1.2.14)
\end{aligned}
$$

上 4 式の辺々をまとめる．

$$
\begin{aligned}
LHS &: \bar{h}^{\delta}{}_{\beta,\nu\delta} + \bar{h}^{\delta}{}_{\nu,\beta\delta} - \Box\bar{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\delta}\bar{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} \\
RHS &: (h^{\delta}{}_{\beta,\nu\delta} - \frac{1}{2}h_{,\nu\delta}) + (h^{\delta}{}_{\nu,\beta\delta} - \frac{1}{2}h_{,\beta\nu}) - (\Box h_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}\Box h) - (\eta_{\nu\lambda}h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}\Box h) \\
&= h^{\delta}{}_{\beta,\nu\delta} + h^{\delta}{}_{\nu,\beta\delta} - h_{,\nu\delta} - \Box h_{\nu\beta} - \eta_{\nu\lambda}(h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \Box h) \\
&= 2G_{\nu\beta}
\end{aligned}
$$

従って，Einstein テンソル $G_{\nu\beta}$ は $\bar{h}_{\nu\beta}$ を用いて，

$$
G_{\nu\beta} = \frac{1}{2}(\bar{h}^{\delta}{}_{\beta,\nu\delta} + \bar{h}^{\delta}{}_{\nu,\beta\delta} + \Box\bar{h}_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\delta}\bar{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma}) \tag{1.2.15}
$$

一般相対論において，すべての座標系は等価であるためゲージ自由度を持つ．そこでゲージ変換，調和条件を用いて更に Einstein 方程式を簡略化していく．ここで次のようなゲージ変換を考える ($\xi^{\mu}(x) \ll 1$).

$$
x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \tag{1.2.16}
$$

この座標変換の下で，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は以下の様に変換される．

$$
\begin{aligned}
g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \cdot \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \\
&= \partial'_{\mu}(x'^{\alpha} - \xi^{\alpha}) \cdot \partial'_{\nu}(x'^{\beta} - \xi^{\beta}) \cdot (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
&= (\delta^{\alpha}_{\mu} - \partial'_{\mu}\xi^{\alpha}) \cdot (\delta^{\beta}_{\nu} - \partial'_{\nu}\xi^{\beta}) \cdot (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
&= (\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\mu}\partial'_{\nu}\xi^{\beta} - \delta^{\beta}_{\nu}\partial'_{\mu}\xi^{\alpha} + \partial'_{\mu}\xi^{\alpha}\partial'_{\nu}\xi^{\beta})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
&\simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial'_{\nu}\xi_{\mu} - \partial'_{\mu}\xi_{\nu}
\end{aligned} \tag{1.2.17}
$$

ここで見通しをよくするために，

$$
h'_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \partial'_{\nu}\xi_{\mu} - \partial'_{\mu}\xi_{\nu} \tag{1.2.18}
$$

とする．h' は，

$$
\begin{aligned}
h' = \eta^{\mu\nu}h'_{\mu\nu} &= h - \partial'_{\nu}\xi_{\nu} - \partial'_{\mu}\xi_{\mu} \\
&= h - 2\xi^{\delta}{}_{,\delta}
\end{aligned} \tag{1.2.19}
$$

この時トレース反転テンソル (trace reverse tensor)$\bar{h}'_{\mu\nu}$ は，

$$
\begin{aligned}
\bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' \\
&= (h_{\mu\nu} - \partial'_{\nu}\xi_{\mu} - \partial'_{\mu}\xi_{\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h - \partial'_{\alpha}\xi^{\alpha}) \\
&= (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) - \partial'_{\mu}\xi_{\nu} - \partial'_{\nu}\xi_{\nu} - \partial'_{\nu}\xi_{\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial'_{\alpha}\xi^{\alpha} \\
&= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial'_{\mu}\xi_{\nu} - \partial'_{\nu}\xi_{\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial'_{\alpha}\xi^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.2.20}
$$

続いて，

$$\begin{aligned}
\bar{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} &= \eta^{\mu\alpha}\bar{h}'{}_{\alpha\nu,\mu} \\
&= \eta^{\mu\alpha}(\bar{h}_{\alpha\nu} - \partial'_{\alpha}\xi_{\nu} - \partial'_{\nu}\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha\nu}\partial'_{\sigma}\xi^{\sigma})_{,\mu} \\
&= \bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \partial'^{\mu}\partial'_{\mu}\xi_{\nu} - \partial'_{\nu}\partial'_{\mu}\xi^{\mu} + \delta^{\mu}_{\nu}\partial'_{\sigma}\partial'_{\mu}\xi^{\sigma} \\
&= \bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \Box\xi_{\nu} - \partial'_{\nu}\partial'_{\mu}\xi^{\mu} + \partial'_{\sigma}\partial'_{\nu}\xi^{\sigma} \\
&= \bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \Box\xi_{\nu}
\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

従って $\Box\xi_{\nu} = \bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu}$ を満たすような適切なゲージ変換の項 ξ^{μ} を取れば，常に

$$\bar{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1.2.22}$$

これを de Donder ゲージ条件 (調和条件) と呼ぶ．

Einstein テンソルもゲージ条件下では変わらない．このとき，

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{h}^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + \bar{h}^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box\bar{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\bar{h}^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma})$$

上式の第 1 項と第 2 項が落ちる．Lorents ゲージ条件 $\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ も課すと，

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu}. \tag{1.2.23}$$

以上より，線形化された Einstein 方程式は，

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.2.24}$$

となる．特に真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ より，波動方程式になり

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.25}$$

この時空の 1 次摂動が重力波である．この波動方程式を解くことで重力波の伝播を表す式を得られる．

1.3　重力波の伝播

式 (1.2.25) の解として，単色平面波を考える．これは場の源から十分遠いとしているためである．

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \tag{1.3.1}$$

この解が Lorentz ゲージと Einstein 方程式. を満たすためには以下の 2 式を満たす必要がある．

$$k_{\mu}k^{\mu} = 0 \tag{1.3.2}$$

$$A_{\mu\nu}k^{\alpha} = 0 \tag{1.3.3}$$

これらを確認するためにこの解を式 (1.2.25) に代入する．

$$
\begin{aligned}
0 = \Box\bar{h}_{\mu\nu} &= \partial_\alpha\partial^\alpha A_{\mu\nu}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= A_{\mu\nu}\partial^\alpha(ik_\tau)\delta^\tau_\alpha\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= iA_{\mu\nu}k_\alpha\partial^\alpha\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= iA_{\mu\nu}k_\alpha\eta^{\alpha\gamma}\partial_\gamma\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= iA_{\mu\nu}k_\alpha\eta^{\alpha\gamma}(ik_\sigma)\delta^\sigma_\gamma\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= -A_{\mu\nu}k_\alpha k^\alpha\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&\therefore k_\alpha k^\alpha = 0
\end{aligned}
$$

ここから 4 次元ベクトル k_μ はヌルベクトルであることが分かる．次に Lorentz ゲージに解を代入する．

$$
\begin{aligned}
0 = \bar{h}^{\mu\nu}_{\ ,\nu} &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\nu\bar{h}_{\alpha\beta} \\
&= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\nu A_{\alpha\beta}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(ik_\tau)A_{\alpha\beta}\delta^\tau_\nu\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= i\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}k_\nu A_{\alpha\beta}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&= i\eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\beta}k^\beta\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\
&\therefore A_{\alpha\beta}k^\beta = 0
\end{aligned}
$$

続いて振幅の具体形を求めていく．今 Lorentz ゲージを課しているが依然座標の取り方には任意性が残っている．そこでトランスバーストレースレスゲージ (Transverse Traceless gauge) 条件を課す．

$$
\begin{cases}
A^\alpha_{\ \alpha} = 0 \\
A_{\mu\nu}\delta^\nu_0 = 0
\end{cases}
$$

重力波の進行方向を正の z 軸方向に取ると 4 元波数ベクトル k_α は $k_\alpha = (-k, 0, 0, k)$ と置くことが出来る．これより，

$$
\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha) \\
&= A_{\mu\nu}\exp(-ickt + ikz) \\
&= A_{\mu\nu}\exp(-i\omega t + ikz)
\end{aligned}
$$

$$
A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_+ & \bar{h}_x & 0 \\ 0 & \bar{h}_x & -\bar{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3.4}
$$

ここで，$A_{11} = \bar{h}_+, A_{12} = \bar{h}_x$ とした．これは重力波が 2 つの自由度 $\bar{h}_+, \bar{h}_x$ を持つことを表している．

$A_{\mu\nu}$ の各成分の導出は以下に示す通りである．$A_{\mu\nu}$ に関する条件を書き出すと，

$$
\begin{cases}
A_{\alpha\beta}k^\beta = 0 \\
A^\alpha_\alpha = 0 \\
A_{\mu\nu}\delta^\nu_0 = 0
\end{cases}
$$

これを具体的に計算すると，

$$\begin{cases} -k(A_{\mu 0}+A_{\mu 3})=0 \\ -A_{00}+A_{11}+A_{22}+A_{33}=0 \\ A_{\mu 0}=0 \end{cases} \tag{1.3.5}$$

また計量テンソルの対称性より，

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu} \\ \Leftrightarrow \bar{h}_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\nu\mu} \\ \Leftrightarrow A_{\mu\nu} &= A_{\nu\mu} \end{aligned}$$

まず式 (1.3.5) の第 1 式と第 2 式から，$A_{\mu 0}=A_{\mu 3}=0$ となり，

$$A_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & A_{01} & A_{02} & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.6}$$

次に式 (1.3.5) の第 2 式から，$A_{11}+A_{22}=0$ となり，

$$A_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & A_{01} & A_{02} & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{21} & -A_{11} & 0 \\ 0 & A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.7}$$

最後に対称性から，$A_{01}=A_{02}=A_{31}=A_{32}=0, A_{12}=A_{21}$ より，

$$A_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.8}$$

1.4　自由粒子に対する重力波の影響

重力波によって時空がどのように歪められるかを確認するために自由質点の運動を調べる．粒子 (質点) は測地線方程式に従う．τ は質点の固有時間である．

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \tag{1.4.1}$$

これを解くと下の式が得られ，質点は座標上に静止していることが分かる．

$$\frac{dx^i}{d\tau}=0 \tag{1.4.2}$$

$$\frac{dx^0}{d\tau}=0 \tag{1.4.3}$$

次に TT ゲージ条件で z 方向に伝播する h_+ 成分のみの単色平面波を考えると線素は，

$$ds^2=-c^2dt^2+1+h_+\cos(\omega t-kz)dx^2+1-h_+\cos(\omega t-kz)dy^2+dz^2 \tag{1.4.4}$$

となる．2 つの質点間の距離を考えるために $x^\mu_{(1)} = (0, 0, 0, 0)$ と $x^\mu_{(2)} = (R_0 \cos\theta, R_0 \sin\theta, 0, 0)$ を定義する．この 2 点間の距離は，

$$\int_{x^\mu_{(1)}}^{x^\mu_{(2)}} |ds| = \int_0^{R_0} [1 + h_+(\cos 2\theta \cos\omega t)]^{1/2} dr \tag{1.4.5}$$

$$\simeq R_0 \left(1 + \frac{h_+}{2} \cos 2\theta \cos\omega t\right) \tag{1.4.6}$$

となり $R_0 \frac{h_+}{2} \cos 2\theta \cos\omega t$ だけ変化していることがわかる．h_x に関しても同様である．図 1.1 はそれぞれの場合について円状に配置した自由粒子の運動を図示したものである．

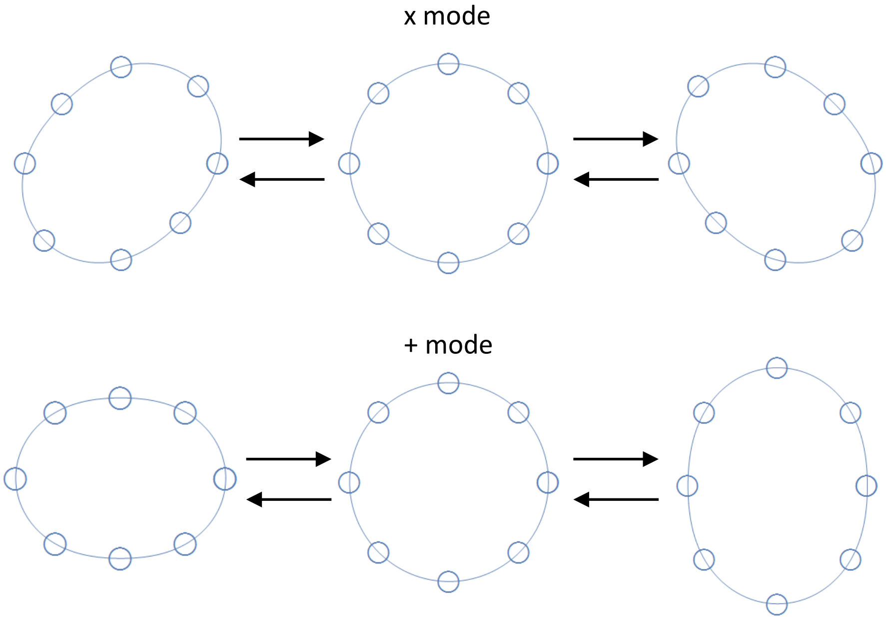

図 1.1　重力波による自由質点の変位

第 2 章

重力波の検出と検出器

2.1 Michelson 干渉計

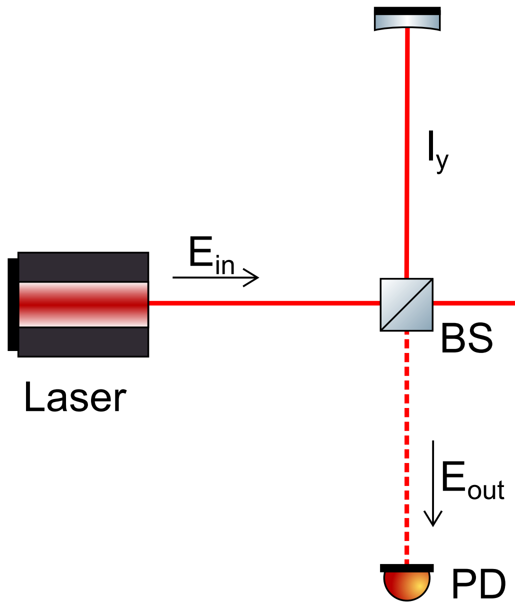

図 2.1 マイケルソン干渉計

重力波望遠鏡は時空のゆがみを測定する．現在，大型重力波望遠鏡はレーザー干渉計型のものが主流であり，日本の重力波望遠鏡 KAGRA も干渉計型の重力波検出器である．ここでは図 2.1 のようなシンプルな Michelson 干渉計を用いた検出器の原理を示す．Michelson 干渉計に入射するレーザーの電場を Ω をレーザーの周波数として以下の様に定義する．

$$E_{in} = E_0 \mathrm{e}^{i\Omega t} \tag{2.1.1}$$

2 つの光路で往復した場合に起こる電場の位相のずれを ϕ_x, ϕ_y とする．ビームスプリッターの反射では位

相が π ずれるので，Michelson 干渉計の出力電場 E_{out} は，

$$E_{out} = \frac{1}{2}E_0 \mathrm{e}^{i(\Omega t - \phi_x)} - \frac{1}{2}E_0 \mathrm{e}^{i(\Omega t - \phi_y)} \tag{2.1.2}$$

光強度を計算すると，

$$\begin{aligned} P_{out} &= |E_{out}|^2 \\ &= \frac{1}{2}|E_{in}|^2(1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

となり，Michelson 干渉計の出力強度は往復するときに生じる位相変化の差 $\phi_- = \phi_x - \phi_y$ に依存することが分かる．P_{out} は $\phi_- = \frac{\pi}{2}$ のときに最大になり，$\phi_- = 0$ のとき最小になる．

2.2　Michelson 干渉計の重力波に対する応答

z 方向から + の偏光をもつ重力波が到来することを考える．

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i(-\omega t + kz)} \tag{2.2.1}$$

Michelson 干渉計の腕を x 方向に運動する光子の測地線は，

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx\nu \\ &= -(cdt)^2 + (1 + h(t))dx^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

従って，

$$dx^2 = \frac{c^2}{1 + h(t)}dt^2 \tag{2.2.3}$$

今 $h(t) \ll 1$ より，

$$dx \sim c\left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right). \tag{2.2.4}$$

x 方向の腕を往復するのにかかる時間を Δt_x として上式を積分すると，

$$\begin{aligned} 2l_x &= c\int_{t-\Delta t_x}^{t}\left(1 - \frac{1}{2}h(t')\right)dt' \\ &= c[\Delta t_x - \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} h(t')dt'] \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\therefore \Delta t_x = \frac{2l_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} h(t')dt' \tag{2.2.6}$$

今 $h(t) \ll 1$ より，$h(t) = 0$ のとき $\Delta t = \frac{2l_x}{c}$ となるので，この値を積分の下限として用いる．

$$\begin{aligned} \Delta t_x &= \frac{2l_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2l_x}{c}}^{t} h(t')dt' \\ \therefore \phi_x &= \frac{2l_x\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2l_x}{c}}^{t} h(t')dt' \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

ϕ_y も $h(t)$ の符号が逆になることに注意して同様に計算すると，

$$\phi_y = \frac{2l_y\Omega}{c} - \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2l_y}{c}}^{t} h(t')dt' \tag{2.2.8}$$

$l \sim l_x \sim l_y$，$l_- = l_x - l_y$，$\phi_- = \phi_x - \phi_y$ とすると，

$$\phi_- = \frac{2l_-\Omega}{c} + \Omega\int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} h(t')dt' \tag{2.2.9}$$

ここで，第 2 項目を

$$\phi_{GW} \equiv \Omega\int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} h(t')dt' \tag{2.2.10}$$

とする．

次に Michelson 干渉計の周波数応答を考える．$h(t)$ をフーリエ変換すると

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega. \tag{2.2.11}$$

これを $\delta\phi_{GW}$ に代入する．

$$\begin{aligned}\phi_{GW} &= \Omega\int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} dt'\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega\\ &= \Omega\int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega)\left(\frac{-1}{i\omega}\right)\mathrm{e}^{i\omega t}(1-\mathrm{e}^{i\omega\frac{2l}{c}})\mathrm{e}^{i\omega\frac{l}{c}}(\mathrm{e}^{-i\omega\frac{l}{c}} - \mathrm{e}^{i\omega\frac{l}{c}})\\ &= \frac{2\Omega}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)\mathrm{e}^{i\frac{l\omega}{c}}d\omega\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

従って周波数応答関数 H_{MI} は，

$$H_{MI} = \frac{2\Omega}{\omega}\mathrm{e}^{i\omega t}\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)\mathrm{e}^{i\frac{l\omega}{c}}. \tag{2.2.13}$$

式 (2.2.13) は基線長の関数で，重力波の周波数が決まっているとき，$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2}$ のとき最大，つまり重力波検出器の感度が最も良くなることが分かる．例えば 1kHz の周波数の重力波にとって最適な基線長はおよそ 75km であるが，このような長基線を地上で実現するのは困難である．そのため Michelson 干渉計の腕に Fabry-Pérot 共振器を組み込み光を腕の内部で折り返す方式が採用されている．

2.3　Fabry-Pérot 共振器

光共振器は鏡を利用して内部に光をため込む装置である．光源の電場を $E_{in} = E_0\mathrm{e}^{i\Omega t}$ とする．図 refFPcav において，共振器内外の電場の関係式を書き出すと，

$$\begin{aligned}E_a &= t_F E_{in} + r_F E_b\\ E_b &= r_E E_a\mathrm{e}^{-2i\frac{l\Omega}{c}}\\ E_r &= t_F E_b - r_F E_{in}\\ E_t &= t_E E_a\mathrm{e}^{-i\frac{l\Omega}{c}}\end{aligned}$$

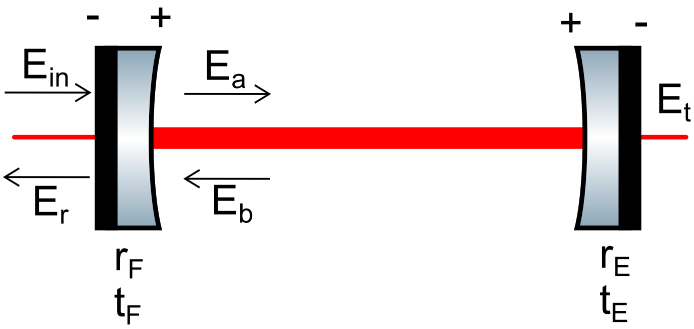

図 2.2　Fabry-Pérot 共振器

となる．$\Phi \equiv \frac{2L\Omega}{c}$ と定義し上式を整理すると，

$$
\begin{aligned}
E_a &= \frac{t_F}{1 - r_F r_E \mathrm{e}^{i\Phi}} E_{in} \\
E_b &= \frac{t_F \mathrm{e}^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E \mathrm{e}^{-i\Phi}} E_{in} \\
E_r &= \left(\frac{t_F^2 r_E \mathrm{e}^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E \mathrm{e}^{-i\Phi}} - r_F \right) E_{in} \\
E_t &= \frac{t_F t_E \mathrm{e}^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E \mathrm{e}^{-i\Phi}} E_{in}.
\end{aligned}
$$

共振器全体の反射率 r_{cav}, 透過率 t_{cav} は,

$$
r_{cav} = \frac{E_r}{E_{in}} = \left(\frac{t_F^2 r_E \mathrm{e}^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E \mathrm{e}^{-i\Phi}} - r_F \right) \tag{2.3.1}
$$

$$
t_{cav} = \frac{E_t}{E_{in}} = \frac{t_F t_E \mathrm{e}^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E \mathrm{e}^{-i\Phi}} E_{in} \tag{2.3.2}
$$

となる．また共振器全体の反射強度，透過強度が計算でき，

$$
P_r = |E_r|^2 = \frac{[(t_F^2 + r_F^2) r_E - r_F]^2 + 4 r_F r_E (t_F^2 + r_F^2) \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{(1 - r_F r_E)^2 [1 + F \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)]} |E_{in}|^2 \tag{2.3.3}
$$

$$
P_t = |E_t|^2 = \frac{(t_F t_E)^2}{(1 - r_F r_E)^2} \cdot \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)} |E_{in}|^2 \tag{2.3.4}
$$

となる．ただし

$$
F \equiv \frac{4 r_F r_E}{(1 - r_F r_E)^2} \tag{2.3.5}
$$

とした．透過光強度が最大になるとき，共振器内の光強度も最大になる．この状態のことを共振と呼び，共振条件は n を自然数とすると $\Phi = 2\pi n$ である．共振器長を固定して考えると透過光強度はレーザーの角周波数 Ω の周期関数となっており，この基本周期をフリースペクトラルレンジ (FSR) を呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{2L\Omega_{FSR}}{c} = 2\pi \\
\rightarrow f_{FSR} &= \frac{\Omega_{FSR}}{2\pi} = \frac{c}{2L}
\end{aligned} \tag{2.3.6}
$$

また特に $r_F \sim 1, r_E \sim 1$ のとき，透過光強度は f_{FSR} の間隔で鋭いピークを持つ．このピークの半値全幅を F_{FWHM} とすると，透過光強度の式より，

$$\frac{1}{1 + F\sin^2\left(\frac{\pi L f_{FWHM}}{c}\right)} = \frac{1}{2} \tag{2.3.7}$$

を満たす．ここで，$f_{FWHM} \ll f_{FSR}$ ならば上式は，

$$\begin{aligned} F\sin^2\left(\frac{\pi L f_{FWHM}}{c}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi L f_{FWHM}}{c}\right) &= \frac{1}{\sqrt{F}} \\ \Rightarrow \frac{\pi L f_{FWHM}}{c} &\simeq \frac{1}{\sqrt{F}} \\ \therefore f_{FWHM} &= \frac{1 - r_E r_F}{2\pi\sqrt{r_F r_E}} \frac{2}{2L} \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

となる．f_{FSR} と f_{FWHM} の比 $\mathcal{F}$ はフィネスと呼ばれ共振の鋭さを表す量である．

$$\mathcal{F} = \frac{f_{FSR}}{f_{FWHM}} = \frac{\pi\sqrt{r_E r_F}}{1 - r_E r_F} \tag{2.3.9}$$

この値は鏡の反射率のみで決定される量である．

2.4　Fabry-Pérot Michelson 干渉計

はじめに Fabry-Pérot 共振器の重力波に対する応答を求める．共振器内を n 回往復するのにかかる時間を Δt_n とする．

$$\Delta t_n = \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} dt' h(t') \tag{2.4.1}$$

$h(t')$ をフーリエ分解する．

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} dt' \int_{\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega \mathrm{e}^{i\omega t'} \\ &= \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega \frac{\mathrm{e}^{i\omega t'}(1 - \mathrm{e}^{-i\frac{2L}{c}n})}{i\omega} \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

入射光 $E_{in} = E_0\mathrm{e}^{i\Omega t}$ と，反射光 E_r の関係について考える．共振器内を n 回往復するとき，

$$E_r = E_0\mathrm{e}^{i\Omega t}(-r_F + t_F^2 r_E \sum_{n=1}^{\infty}(r_F r_E)^{n-1}\mathrm{e}^{-i\Omega\Delta t_n}). \tag{2.4.3}$$

上式に Δt_n を代入する．また $|h| \ll 1$ とし，$\gamma \equiv \frac{L\omega}{c}$ と定義する．共振条件 $\Phi = 2\pi n$ も考慮すると，

$$\begin{aligned} \frac{E_r}{E_{in}} &= -r_F + t_F^2 r_E \sum_{n=1}^{\infty}(r_F r_E)^{n-1}\mathrm{e}^{-i\Omega\frac{2Ln}{c}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{i\Omega}{2}\int_{\infty}^{\infty} h(\omega)d\omega\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}(1-\mathrm{e}^{-i\frac{2L}{c}n})}{i\omega}} \\ &\simeq \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E}{1 - r_E r_F}\left(1 - \frac{t_F^2 r_E}{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E} i\int_{\infty}^{\infty}\frac{\Omega}{\omega}\frac{\sin\gamma}{1 - r_F r_E - 2\mathrm{i}\gamma}\mathrm{e}^{-i\gamma}h(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega\right). \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

従って共振器の周波数応答関数 H_{FP} は,

$$H_{FP}(\omega)=\frac{\Omega}{\omega}\frac{t_F^2 r_E}{-r_F+(r_F^2+t_F^2)r_E}\frac{\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right)}{1-r_E r_F e^{-2i\frac{L\omega}{c}}}e^{i\frac{L\omega}{c}} \tag{2.4.5}$$

と求められた．Fabry-Pérot Michelson 干渉計では Fabry-Pérot 共振器が x, y の両腕に導入されており重力波は差動の変化を引き起こすので，Fabry-Pérot Michelson 干渉計の周波数応答関数 $H_{FPMI}(\omega)$ は,

$$\begin{aligned}H_{FPMI}(\omega)&=2H_{FP}(\omega)\\&=\frac{2\Omega}{\omega}\frac{t_F^2 r_E}{-r_F+(r_F^2+t_F^2)r_E}\frac{\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right)}{1-r_E r_F e^{-2i\frac{L\omega}{c}}}e^{i\frac{L\omega}{c}}.\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

ここで，鏡に光学損失が無く ($r_F^2+t_F^2\simeq 1$)，反射率が 1 に近いとし，また重力波の位相遅れが小さい ($1\gg\frac{L\omega}{c}$) とすると以下の近似ができる．

$$|H_{FPMI}(\omega)|\simeq\frac{4L\Omega}{c(1-r_F r_E)}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \tag{2.4.7}$$

$$\omega_c=\frac{1-r_F r_E}{\sqrt{r_F r_E}}\frac{c}{2L}=\frac{c}{4L\mathcal{F}} \tag{2.4.8}$$

ここでカットオフ周波数 ω_c のことをキャビティポールと呼ぶ．Michelson 干渉計の周波数応答関数 $H_{MI}(\omega)$ と比較すると,

$$|H_{FPMI}(\omega)|\simeq\frac{4}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}|H_{MI}(\omega)| \tag{2.4.9}$$

となる．ここで $T=t_F^2$ とした．式を見ると，ゲイン $\frac{4}{T}$ を持つ 1 次のローパスフィルタの挙動を示すことが分かる．ローパスフィルタの特性によって，カットオフ周波数 (キャビティポール) よりも高い周波数の信号は減衰してしまう．図 2.3 は Michelson 干渉計と Fabry-Pérot Michelson 干渉計の応答を比較した．

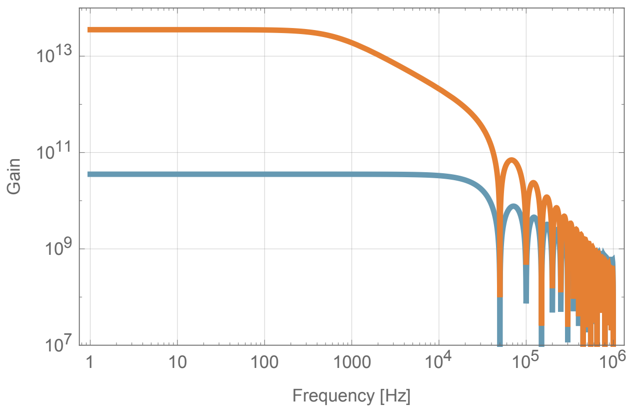

図 2.3　Michelson 干渉計 (青) と Fabry-Pérot Michelson 干渉計 (橙) の応答

2.5　重力波検出器の雑音

2.5.1　地面雑音

地面は絶えず振動しており，地面振動により干渉計ミラーの相対位置が変化すると光路長が変化し干渉計の雑音となる．地面雑音の振幅スペクトル密度は以下の通りである．

$$\delta x(f) \sim 10^{-7} \times \left(\frac{1}{f}\right)^2 \quad [\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \tag{2.5.1}$$

この雑音低減のために重力波検出器では鏡を多段振り子で吊るしている．ここで例として図 2.4 のよう

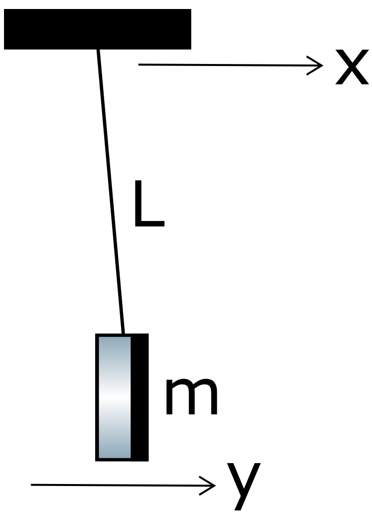

図 2.4　一段振り子

な 1 段振り子について考える．鏡を質点とし質量を m[kg], 振り子の長さを L[m], 振り子のダンピング係数を Γ_m[N/(m/s)], 振り子の固定点の変位を x[m], 質点の変位を y[m]，重力加速度を g[m/s^2] とする．
系の運動方程式は，

$$m\ddot{y} = \frac{mg}{L}(x - y) - \Gamma_m(\dot{x} - \dot{y}) \tag{2.5.2}$$

となる．この式を $\gamma_m = \frac{\Gamma_m}{2m}, \omega_m^2 = \frac{g}{L}$ として書き直すと，

$$\ddot{y} = \omega_m^2(x - y) - 2\gamma_m(\dot{x} - \dot{y}) \tag{2.5.3}$$

次に周波数空間で考えたいので上式をフーリエ変換する．

$$-\omega^2\tilde{Y}(\omega) = \omega_m^2(\tilde{X}(\omega) - \tilde{Y}(\omega)) - 2\gamma_m i\omega(\tilde{X}(\omega) - \tilde{Y}(\omega)) \tag{2.5.4}$$

これを $\tilde{Y}(\omega)$ について整理すると，

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{\omega_m^2 - 2\gamma_m i\omega}{\omega_m^2 - 2i\gamma_m\omega - \omega^2}\tilde{X}(\omega). \tag{2.5.5}$$

さらに $Q_m = \frac{\omega_m}{2\gamma_m}$ と定義すると，

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{\omega_m^2 - i\frac{\omega_m\omega}{Q_m}}{-\omega^2 - i\frac{\omega_m\omega}{Q_m} + \omega_m^2}\tilde{X}(\omega). \tag{2.5.6}$$

測定している周波数が共振より高い $(\omega \gg \omega_m)$ かつ，振り子の Q 値が十分大きい $(Q_m \gg 1)$ のとき，

$$\tilde{Y}(\omega) = -\frac{\omega_m^2}{\omega^2}\tilde{X}(\omega). \tag{2.5.7}$$

となる．よって測定周波数帯が振り子の共振周波数よりも十分高ければ振り子の効果によって周波数の二乗分の軽減効果がつく．

2.5.2　輻射圧雑音

光子は運動量を持っているため光子数が揺らぐことによって鏡が光から受ける力が変化する．これによってもたらされる雑音を輻射圧雑音という．輻射圧雑音の振幅スペクトル密度は以下の通りである．

$$\delta x_{rp}(f) = \frac{F}{\pi m f^2}\sqrt{\frac{2\hbar I}{\pi^3 c\lambda}} \ \ [\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \tag{2.5.8}$$

これよりこの式の導出を行っていく．

輻射圧雑音の導出

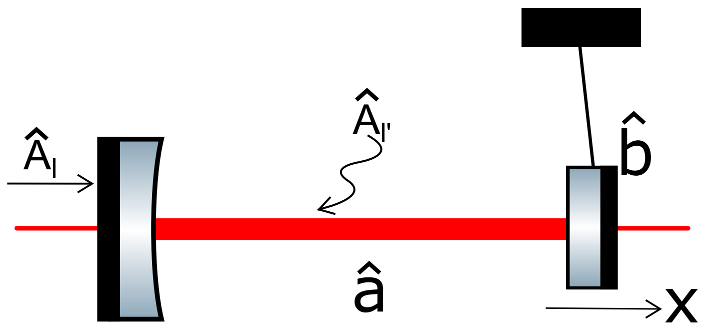

図 2.5　ファブリーペロー共振器

図 2.5 のようなオプトメカニクス系を考える [25, 14].
光共振器内の光子の生成消滅演算子を $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$
機械モードのフォノンの生成消滅演算子を $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$
とするとこのオプトメカニクス系のハミルトニアン $\hat{H}_{sys}$ は，

$$\hat{H}_{sys} = \hbar\omega_c(x)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} \tag{2.5.9}$$

ここで $\omega_c(x)$ は共振器の共振周波数，ω_m は機械振動子の共振周波数で，

$$\omega_c(x) = \omega_0 - gx \tag{2.5.10}$$

$$g = \frac{\omega_0}{L} \tag{2.5.11}$$

ω_0 は $x = 0$ の時の共振周波数，L は片道の共振器長，g は機械結合定数である．このオプトメカニクス系のハミルトニアンを用いると，光子の消滅演算子 $\hat{a}$ の時間発展は，

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}, \hat{H}_{sys}] - \kappa\hat{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\hat{A}_l \tag{2.5.12}$$

という Heisenberg 描像の確率微分方程式で書くことが出来る．なお κ は共振器全体で光子が失われていく時間スケール，κ_l は各ポートで光子が失われていく時間スケールである．つまり

$$\kappa = \sum_l \kappa_l \tag{2.5.13}$$

が成り立つ．式 (2.5.9) を式 (2.5.12) に代入する．

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}, \hbar\omega_c(x)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b}] - \kappa\hat{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\hat{A}_l \\ &= -\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega_c\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_m\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a}) - \kappa\hat{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\hat{A}_l \\ &= -\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega_c[\hat{a}, \hat{a}^\dagger])\hat{a} - \kappa\hat{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\hat{A}_l \\ &= -i\omega_c\hat{a} - \kappa\hat{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\hat{A}_l\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

また共振器内の光子の生成消滅演算子 $\hat{a}$ がレーザーの角周波数 Ω と同期している場合 ($\hat{a} \to \mathrm{e}^{-i\Omega t}\hat{a}$) を考えると上式は，

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= -i\omega_c\hat{a} - \kappa\hat{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\hat{A}_l + i\omega_L\hat{a} \\ &= -[\kappa - i(\omega_L - \omega_0 + gx)]\hat{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\hat{A}_l\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

と書き換えられる．ここで物理量を以下の様に平均と揺らぎに分ける．

$$\hat{a} = \bar{a} + \delta\hat{a} \tag{2.5.16}$$

$$x = \bar{x} + \delta x \tag{2.5.17}$$

$$\hat{A}_l = \bar{A}_l + \delta\hat{A}_l \tag{2.5.18}$$

これらを式 (2.5.15) に代入する．

$$\delta\dot{\hat{a}} = -[\kappa - i(\omega_L - \omega_0 + g(\bar{x} + \delta x))](\bar{a} + \delta\hat{a}) + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}(\bar{A}_l + \delta\hat{A}_l) \tag{2.5.19}$$

となる．この揺らぎの 1 次まで見れば，

$$(0\text{ 次})\ 0 = -(\kappa - i\Delta)\bar{a} + \sum_l \sqrt{2\kappa_{in}}\bar{A}_{in} \tag{2.5.20}$$

$$(1\text{ 次})\ \delta\dot{\hat{a}} = -(\kappa - i\Delta)\delta\hat{a} + ig\bar{a}\delta x + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}(\delta\hat{A}_l) \tag{2.5.21}$$

となる．ここで Δ はレーザー光の周波数と共振器の共振周波数との離調を表し

$$\Delta \equiv \Omega - \omega_0 + g\bar{x} \tag{2.5.22}$$

(0 次) の式より，

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{2\kappa_{in}}}{\kappa - i\Delta}\bar{A}_{in} \tag{2.5.23}$$

また図 2.6 の様に各光子場振幅及びロスを定義すると境界条件から，

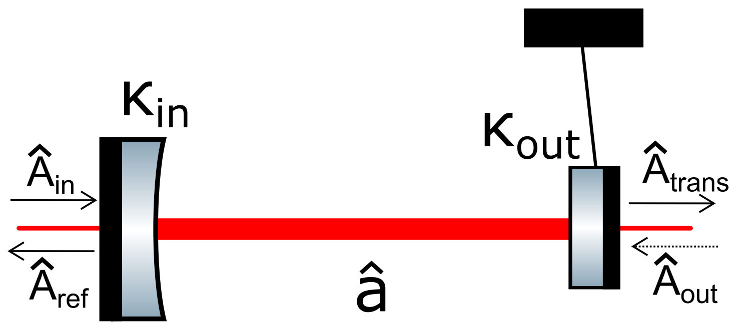

図 2.6　ファブリーペロー共振器

$$\hat{A}_{in} + \hat{A}_{ref} = \sqrt{2\kappa_{in}}\hat{a} \tag{2.5.24}$$

$$\hat{A}_{trans} + \hat{A}_{out} = \sqrt{2\kappa_{out}}\hat{a} \tag{2.5.25}$$

特にその平均値に関しては，$\bar{A}_{out} = 0$ を考慮して式 (2.5.23) を代入すると

$$\bar{A}_{ref} = \left(-1 + \frac{2\kappa_{in}}{\kappa - i\Delta}\right)\bar{A}_{in} \tag{2.5.26}$$

$$\bar{A}_{trans} = \frac{\sqrt{4\kappa_{in}\kappa_{out}}}{\kappa - i\Delta}\bar{A}_{in} \tag{2.5.27}$$

となる．よって透過光量 P_{trans} は，

$$\begin{aligned} P_{trans} &= \hbar\Omega|\bar{A}_{trans}|^2 \\ &= \frac{4\kappa_{in}\kappa_{out}}{\kappa^2 + \Delta^2}P_{in} \\ &= \frac{4\kappa_{in}\kappa_{out}}{\kappa^2} \cdot \frac{1}{1 + \delta^2}P_{in} \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

と書ける．ここで，$\delta \equiv \frac{\Delta}{\kappa}$ は規格化された離調角周波数．式 (2.5.28) を δ の関数としてみるとローレンチアンの形をしている．その半値半幅は $\frac{\kappa}{2\pi}$ である．

系に加わる輻射圧 $\hat{F}_{rad}$ を求めるには，系のハミルトニアンを位置で微分すればよい．

$$\begin{aligned}\hat{F}_{rad} &= \left|\frac{d\hat{H}_{sys}}{dx}\right| \\ &= \hbar g \hat{a}^\dagger \hat{a}\end{aligned} \tag{2.5.29}$$

このうち微小変動成分 $\delta\hat{F}_{rad}$ は，

$$\delta\hat{F}_{rad} = \hbar g(\bar{a}^*\delta\hat{a} + \bar{a}\delta\hat{a}^\dagger) \tag{2.5.30}$$

である．これを周波数空間で議論するために式 (2.5.21) をフーリエ変換する．

$$\delta\hat{a}(\omega) = \frac{1}{\kappa + i(\omega - \Delta)}(ig\bar{a}\delta x + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\delta\hat{A}_l \tag{2.5.31}$$

また光共振器の感受率として $\chi_c(\omega)$ を以下のように定義する．これは外部からの影響によって光共振器内の電場がどれだけ変化するかを表している．

$$\chi_c \equiv \frac{1}{\kappa + i(\omega - \Delta)} \tag{2.5.32}$$

以上より式 (2.5.30) は，

$$\begin{aligned}\delta\hat{F}_r ad(\omega) &= \hbar g[\bar{a}^*\chi_c(\omega)(ig\bar{a}\delta x + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\delta\hat{A}_l) + \bar{a}\chi_c^*(-\omega)(-ig\bar{a}^*\delta x + \sum_l \sqrt{2\kappa_l}\delta\hat{A}_l^\dagger)] \\ &= i\hbar g^2|\bar{a}|^2(\chi_c(\omega) - \chi_c^*(-\omega))\delta x + \hbar g\sum_l \sqrt{2\kappa_l}(\bar{a}^*\chi_c(\omega)\delta\hat{A}_l + \bar{a}\chi_c^*(-\omega)\delta\hat{A}_l^\dagger)\end{aligned} \tag{2.5.33}$$

上式の第 2 項を特に，

$$\delta\hat{F}_{qrp} = \hbar g\sum_l \sqrt{2\kappa_l}(\bar{a}^*\chi_c(\omega)\delta\hat{A}_l + \bar{a}\chi_c^*(-\omega)\delta\hat{A}_l^\dagger) \tag{2.5.34}$$

とする．

真空場が光共振器に入射すると共振器内の光子数を変動させることは式 (2.5.34) からも分かる．その変動は具体的に，

$$< \delta\hat{A}_l^\dagger(t)\, \delta\hat{A}_m(t') >= N(\omega_c) \tag{2.5.35}$$

$$< \delta\hat{A}_l(t)\, \delta\hat{A}_m^\dagger(t') >= [N(\omega_c) + 1]\delta_{lm}\delta(t - t') \tag{2.5.36}$$

である．ただし，

$$N(\omega_c) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_c}{k_B T}\right) - 1} \tag{2.5.37}$$

今 $\hbar\omega_c \gg k_B T$ なので $N(\omega_c) \sim 0$. すると式 (2.5.35),(2.5.36) は，

$$< \delta\hat{A}_l^\dagger(t)\, \delta\hat{A}_m(t') >= 0 \tag{2.5.38}$$

$$< \delta\hat{A}_l(t)\, \delta\hat{A}_m^\dagger(t') >= \delta_{lm}\delta(t - t') \tag{2.5.39}$$

となる．ここで，演算子を用いた輻射圧揺らぎの両側パワースペクトル密度は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{f,qrp} &= \frac{1}{2}[< \delta\hat{F}_{qrp}(\omega)\,\delta\hat{F}_{qrp}(-\omega) > + < \delta\hat{F}_{qrp}(-\omega)\,\delta\hat{F}_{qrp}(\omega) >] \\ &= \hbar^2 g^2 \kappa |\bar{a}|^2 (|\chi_c(\omega)|^2 + |\chi_c(-\omega)|^2) \end{aligned} \tag{2.5.40}$$

この輻射圧揺らぎのパワースペクトル密度を変位のパワースペクトル密度に直すと，

$$S^{(2)}_{x,qrp} = |\alpha_v(\omega)|^2 S^{(2)}_{f,qrp}. \tag{2.5.41}$$

ここで振動子の Q 値が十分高く ($\gamma_m \ll 1$)，観測する重力波が振動子の共振周波数よりも十分高い ($\omega_m^2 \ll \omega^2$) とする．上式は粗い近似の下で，

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{x,qrp} &= |\alpha_v(\omega)|^2 S^{(2)}_{f,qrp} \\ &= \frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{(\omega_m^2-\omega^2)^2+4\gamma_m^2\omega^2}\hbar^2 g^2\kappa|\bar{a}|^2(|\chi_c(\omega)|^2+|\chi_c(-\omega)|^2) \\ &\simeq \frac{1}{m^2\omega^4}\hbar^2 g^2\kappa|\bar{a}|^2\left(\frac{1}{\kappa^2+(\omega-\Delta)^2}+\frac{1}{\kappa^2+(\omega+\Delta)^2}\right) \\ &\simeq \frac{1}{m^2\omega^4}\hbar^2\left(\frac{\Omega^2}{L^2}\right)\kappa\frac{2\kappa_{in}}{\kappa^2+\Delta^2}\cdot\frac{P_{in}}{\hbar\Omega}\cdot\frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\kappa}-\frac{\Delta}{\kappa}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\kappa}+\frac{\Delta}{\kappa}\right)^2}\right) \\ &\simeq \frac{1}{m^2\omega^4}\hbar\frac{\Omega}{L^2}\frac{4P_{in}}{\kappa^2} \\ &= \frac{2\mathcal{F}^2}{\pi^5 m^2 f^4}\cdot\frac{\hbar P_{in}}{c\lambda} \\ &= \frac{\mathcal{F}^2}{\pi^5 m^2 f^4}\cdot\frac{\hbar I}{c\lambda}. \end{aligned} \tag{2.5.42}$$

よって輻射圧雑音の片側パワースペクトル密度は

$$S^{(1)}_{x,qrp} = 2S^{(2)}_{x,qrp} = \frac{2F^2}{\pi^5 m^2 f^4}\cdot\frac{\hbar I}{c\lambda}. \tag{2.5.43}$$

これの平方根をとれば輻射圧雑音の振幅スペクトル密度 $\delta x_{rap}(f)$ が求まり，式 (2.5.8) に一致する．

2.5.3 熱雑音

振り子や鏡は熱浴と接することで，熱浴から熱振動子が流入し振動が励起され干渉計の差動長を変動させる．これが熱雑音である．
一般的な感受率 $\alpha(\omega)$ が

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) \tag{2.5.44}$$

の様に実部と虚部に分けられるとする．すると揺動散逸定理より外部から流入する熱振動子の引き起こす両側パワースペクトル密度 $S_{f,th}$ は，

$$S^{(2)}_{f,th}(\omega) = \frac{\hbar\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \tag{2.5.45}$$

と書くことが出来る．

振動子の感受率

感受率は減衰の仕方によってさまざまな種類が存在する．ここでは減衰が速度に比例する viscous model と，減衰が速度によらず一定である structure model の 2 つを考える．

viscous model

viscous model に従う振動子の式は，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega_m^2 x - \Gamma_m \dot{x} + F(t) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x} &+ m\omega_m^2 x + \Gamma_m \dot{x} = F(t) \end{aligned} \tag{2.5.46}$$

上式をフーリエ変換する．

$$(-m\omega^2 + i\omega\Gamma_m + m\omega_m^2)\tilde{X}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \tag{2.5.47}$$

ここで散逸 $\gamma_m = \frac{\Gamma_m}{2m}$ を用いると，

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 + 2i\gamma_m\omega + \omega_m^2)\tilde{X}(\omega) &= \tilde{F}(\omega) \\ \Leftrightarrow \tilde{X}(\omega) &= \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2 + 2i\gamma_m\omega}\tilde{F}(\omega) \\ &= \alpha_v(\omega)\tilde{F}(\omega) \end{aligned} \tag{2.5.48}$$

$\alpha_v(\omega)$ は viscous model に於ける感受率である．

式 (2.5.48) より，

$$\alpha_v''(\omega) = \frac{1}{m}\cdot\frac{2\gamma_m\omega}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_m^2\omega^2} \tag{2.5.49}$$

すると式 (2.5.45) より両側パワースペクトル密度は，

$$\begin{aligned} S_{f,th,v}^{(2)}(\omega) &= 2\hbar\omega\gamma_m m \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) \\ &\simeq 4k_BT\gamma_m m. \end{aligned} \tag{2.5.50}$$

よって熱雑音による変位の両側パワースペクトル密度は，

$$\begin{aligned} S_{x,th,v}^{(2)}(\omega) &= |\alpha_v(\omega)|^2 S_{f,th,v}^{(2)}(\omega) \\ &= \frac{1}{m}\cdot\frac{4k_BT\gamma_m}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_m^2\omega^2} \end{aligned} \tag{2.5.51}$$

と求まる．従って変位の振幅スペクトル密度は，

$$\begin{aligned} \delta x_{th,v} &= \sqrt{2S_{x,th,v}^{(2)}(\omega)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{m}\cdot\frac{8k_BT\gamma_m m}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_m^2\omega^2}} \end{aligned} \tag{2.5.52}$$

となる．特に観測帯域が振り子の共振周波数と比べて十分に小さい場合 ($\omega \ll \omega_m$)，

$$\begin{aligned} \delta x_{th,v} &\sim \sqrt{\frac{8k_BT}{m\omega_m^3}\cdot\frac{\gamma_m}{\omega_m}} \\ &= \sqrt{\frac{4k_BT}{m\omega_m^3 Q_m}} \end{aligned} \tag{2.5.53}$$

となり，逆の場合 ($\omega_m \ll \omega$) は，

$$\begin{aligned} \delta x_{th,v} &\sim \sqrt{\frac{8k_BT}{m\omega^4}\cdot\gamma_m} \\ &= \sqrt{\frac{4k_BT\omega_m}{m\omega^4 Q_m}}. \end{aligned} \tag{2.5.54}$$

structure model

structure model に従う振動子の式は，

$$m\ddot{x} = -m\omega_m^2(1 + i\phi_k(t))x + F(t) \tag{2.5.55}$$

$\phi_k(t)$ は複素ばね定数である．上式をフーリエ変換する．

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega) &= \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2 + i\phi_k(t)\omega_m^2}\tilde{F}(\omega) \\ &= \alpha_s(\omega)\tilde{F}(\omega) \end{aligned} \tag{2.5.56}$$

$\alpha_s(\omega)$ は structure model に於ける感受率である．

式 (2.5.55) より，

$$\alpha_s''(\omega) = \frac{1}{m}\cdot\frac{\phi_k(\omega)\gamma_m^2}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \phi_k^2(\omega)\gamma_m^4}. \tag{2.5.57}$$

すると式 (2.5.45) より両側パワースペクトル密度は，

$$\begin{aligned} S_{f,th,s}^{(2)}(\omega) &= \hbar\omega_m^2\phi_k(\omega)m\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) \\ &\simeq 2k_BT\frac{\omega_m^2}{\omega}\phi_k(\omega)m. \end{aligned} \tag{2.5.58}$$

よって熱雑音による変位の両側パワースペクトル密度は，

$$\begin{aligned} S_{x,th,s}^{(2)}(\omega) &= |\alpha_s(\omega)|^2 S_{f,th,s}^{(2)}(\omega) \\ &= \frac{1}{m}\cdot\frac{2k_BT\frac{\omega_m^2}{\omega}\phi_k(\omega)}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \phi_k^2(\omega)\gamma_m^4} \end{aligned} \tag{2.5.59}$$

と求まる．従って変位の振幅スペクトル密度は，

$$\delta x_{th,s} = \sqrt{2S^{(2)}_{x,th,s}(\omega)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{m}\cdot\frac{4k_BT\frac{\omega_m^2}{\omega}\phi_k(\omega)}{(\omega_m^2-\omega^2)^2+\phi_k^2(\omega)\gamma_m^4}} \tag{2.5.60}$$

となる．特に観測帯域が振り子の共振周波数と比べて十分に小さい場合 ($\omega \ll \omega_m$)，

$$\delta x_{th,s} \sim \sqrt{\frac{1}{m\omega_m^2\omega}\cdot\frac{4k_BT\phi_k(\omega)}{1+\phi_k^2(\omega)}}$$
$$= \sqrt{\frac{4k_BT\phi_k(\omega)}{m\omega_m^2\omega}} \tag{2.5.61}$$

となり，逆の場合 ($\omega_m \ll \omega$) は，

$$\delta x_{th,s} \sim \sqrt{\frac{4k_BT\omega_m^2\phi_k(\omega)}{m\omega^5}}. \tag{2.5.62}$$

2.5.4　ショット雑音

ショット雑音は光子の量子性から直接もたらされる雑音である．光強度を測ることは，測定時間内に検出器に到達した光子数を決定することと等しく，Heisenberg の不確定性原理より光子数は揺らぐ．輻射圧雑音とショット雑音は合わせて量子雑音と呼ばれ，これらの雑音は干渉計のダークポートに入射する真空場が起源となっている．ショット雑音は白色雑音であり，振幅スペクトル密度は以下の通りである．

$$\delta x_{shot}(f) = \sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{4\pi I}}\ \ [\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \tag{2.5.63}$$

第 3 章

次世代重力波検出器

この章では結晶挿入型の干渉計について理解するために欠かせない原理について記す．電磁場の量子化と非線形光学について記した後，光パラメトリック増幅を用いた次世代干渉計の感度や性質について考えていく．

3.1 電磁場の量子化

自由空間における Maxwell 方程式は以下のとおりである．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.1.1}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{3.1.2}$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{3.1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.1.4}$$

ここで ρ は電荷密度，$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度，μ_0 は真空の透磁率，ε_0 は真空の誘電率，c は光速を表す.
次にこれらをポテンシャルを用いて表していく．式 (3.1.4) と，ベクトル解析の式

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{3.1.5}$$

より，

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{3.1.6}$$

ここで $\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ．すると式 (3.1.1) は，ベクトルポテンシャルを用いて

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\therefore \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{3.1.7}$$

また，ベクトル解析の式

$$\nabla \times (-\nabla \phi) = 0 \tag{3.1.8}$$

より式 (3.1.7) から

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.1.9}$$

が導かれる．ここで，ϕ をスカラーポテンシャルという．以上より $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は ϕ と $\boldsymbol{A}$ で表されることがわかる．

ϕ と $\boldsymbol{A}$ は式 (3.1.2) と (3.1.3) から決定できる．式 (3.1.2) より，

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) + \boldsymbol{j}. \tag{3.1.10}$$

ベクトル解析の式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} \tag{3.1.11}$$

を用いて，

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \right) = \mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{3.1.12}$$

ここで，$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ より，

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{3.1.13}$$

式 (3.1.3) は，式 (3.1.9) を用いて書き直すと，

$$-\varepsilon_0 \Delta \phi - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \rho. \tag{3.1.14}$$

ここで，$\boldsymbol{A}_0$ と ϕ_0 が式 (3.1.13)，(3.1.14) の解であるならば，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \nabla \chi$$
$$\phi = \phi_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

もまた式 (3.1.13)，(3.1.14) の解となる．

ゲージ変換によるスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの全集合は同じ $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を与える．以降このゲージ不変性を利用して式 (3.1.13)，(3.1.14) を簡単にしていく．ここで χ を

$$\chi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\boldsymbol{r} \tag{3.1.15}$$

とする．

$$\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -4\pi \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{3.1.16}$$

という関係式より，

$$\Delta\chi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \\ = -\nabla\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}). \tag{3.1.17}$$

よってベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \nabla\boldsymbol{A}_0 + \nabla\cdot(\nabla\chi) \\ = \nabla\boldsymbol{A}_0 + \Delta\chi = 0 \tag{3.1.18}$$

を満たす． この式を満たすゲージのことをクーロンゲージという．これを用いると式 (3.1.13)，(3.1.14) は，

$$-\Delta\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{3.1.19}$$

$$-\varepsilon_0\Delta\phi = \rho \tag{3.1.20}$$

式 (3.1.20) より Poisson 方程式

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}' \tag{3.1.21}$$

が導ける．これは式 (3.1.16) から分かる．
電荷や電流が存在しないとき式 (3.1.19)，(3.1.20) は簡単になって，

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{3.1.22}$$

$$\phi = 0 \tag{3.1.23}$$

式 (3.1.22) は波動方程式の形をしている．今，空間が長さ (L_x, L_y, L_z) の箱の中に電磁場が閉じ込められていることを考える．周期境界条件を課したとき，$\boldsymbol{k}$ の i 方向成分は正の整数 n_j を用いて，$k_i(n_j) = \frac{2\pi n_j}{L_i}$ となる．つまり $\boldsymbol{k}$ は離散的に制限される．波動方程式の解の異なる波数についての重ね合わせもまた同じく解となるので，一般解は次のように表せる．

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_k[\boldsymbol{A}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} + \boldsymbol{A}_k^* e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \tag{3.1.24}$$

$\omega_k = ck$. また Maxwell eq. より，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \sum_k i\omega_k[\boldsymbol{A}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - \boldsymbol{A}_k^* e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \tag{3.1.25}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \nabla\times\boldsymbol{A} = \sum_k i\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{A}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - \boldsymbol{A}_k^* e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \tag{3.1.26}$$

次に電磁場のエネルギーを考える．電磁場の全エネルギーは，

$$H = \frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right)d\boldsymbol{r} \\ = 2\varepsilon_0 V\sum_k\omega_k^2\boldsymbol{A}_k^*\boldsymbol{A}_k \tag{3.1.27}$$

ここで，$\boldsymbol{A}_k$ の実部と虚部をそれぞれ一般化座標の Q_k と一般化運動量の P_k とみなす．

$$\boldsymbol{A}_k = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0 V\omega_k^2}}(\omega_k Q_k + iP_k)\boldsymbol{\varepsilon}_k \tag{3.1.28}$$

これをエネルギーの式に代入すると，

$$H = \frac{1}{2}\sum_k (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2). \tag{3.1.29}$$

これは $m = 1$ とした時の調和振動子と等しい．
ここで H を量子化する．一般化座標の Q_k と一般化運動量の P_k に次の交換関係を要求する．

$$[\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'}] = i\hbar\delta_{k,k'} \tag{3.1.30}$$

$$[\hat{Q}_k, \hat{Q}_{k'}] = 0 \tag{3.1.31}$$

$$[\hat{P}_k, \hat{P}_{k'}] = 0 \tag{3.1.32}$$

したがって

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_k (\hat{P}_k^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_k^2). \tag{3.1.33}$$

量子化された電磁場を理解するために生成消滅演算子を導入する．

$$\hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k \hat{Q}_k - i\hat{P}_k) \tag{3.1.34}$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k \hat{Q}_k + i\hat{P}_k) \tag{3.1.35}$$

これは調和振動子の生成消滅演算子の $m = 1$ としたものに等しい．上で要求した交換関係から，

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = i\hbar\delta_{k,k'} \tag{3.1.36}$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0 \tag{3.1.37}$$

$$[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \tag{3.1.38}$$

また $\hat{Q}$ と $\hat{P}$ は，$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて，

$$\hat{Q}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \tag{3.1.39}$$

$$\hat{P}_k = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger). \tag{3.1.40}$$

これを式 (3.1.33) に代入すると，

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k\left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}\right). \tag{3.1.41}$$

量子化された電磁場は量子化された調和振動子に等しいことがわかる．また，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_k &= \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0 V\omega_k^2}}(\omega_k Q_k + iP_k)\boldsymbol{\varepsilon}_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0 V\omega_k^2}} \cdot \sqrt{2\hbar\omega_k}\hat{a}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 V\omega_k}}\hat{a}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k \end{aligned} \tag{3.1.42}$$

$$\boldsymbol{A}_k^* = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 V\omega_k}}\hat{a}_k^\dagger\boldsymbol{\varepsilon}_k \tag{3.1.43}$$

これらを用いると，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k V}}\boldsymbol{\varepsilon}_k[\hat{a}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} + \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \tag{3.1.44}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sum_k i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{\varepsilon}_k[\hat{a}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \tag{3.1.45}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \sum_k i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k V}}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_k[\hat{a}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \tag{3.1.46}$$

系が十分大きいとき k の和は積分とみなせて，

$$\boldsymbol{E} \simeq \frac{V}{(2\pi)^3}\iiint (dk)^3 i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\boldsymbol{\varepsilon}_k[\hat{a}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}]. \tag{3.1.47}$$

今レーザーについて考えているので 1 つの波数のみ取り出す (シングルモード近似) と，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{i}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{\varepsilon}_k[\hat{a}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}]. \tag{3.1.48}$$

3.1.1　光子数状態

数演算子を

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{3.1.49}$$

と定義する．すると数演算子の固有状態は，

$$\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{3.1.50}$$

となり，$|n\rangle$ を光子数状態 (フォック状態) と呼ぶ．先に定義した光子の生成消滅演算子 $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ は光子数状態に対して以下のように作用する．

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{3.1.51}$$

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{3.1.52}$$

3.1.2　コヒーレント状態

レーザー光線の状態はコヒーレント状態というもので表わせられる．コヒーレント状態は最小不確定状態のうちの 1 つであり，振幅の不確定性以外は古典的な波と同じである．コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態として定義される．

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{3.1.53}$$

ここで α はコヒーレント状態の電場の複素振幅を表す複素数である．式 (3.1.53) より，

$$\langle\alpha|\,\hat{a}^{\dagger} = \langle\alpha|\,\alpha^{*} \tag{3.1.54}$$

となる．光子数状態は光の量子状態の正規直交基底になっているためコヒーレント状態を光子数状態の重ね合わせとして書き表すことが出来る．任意の光の量子状態は光子数状態を用いて

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle \tag{3.1.55}$$

と書ける．ここで c_n は複素数．コヒーレント状態を上の関係式を用いて光子数状態で展開したとき，

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\,|n\rangle \tag{3.1.56}$$

となるとする．コヒーレント状態の定義式 (3.1.53) より，

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\omega_n\,|n\rangle \tag{3.1.57}$$

また式 (3.1.56) に消滅演算子を作用させると，

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\,\sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{3.1.58}$$

上の 2 式を比較すると，

$$\omega_{n+1}\,\sqrt{n+1} = \alpha\omega_n \tag{3.1.59}$$

であることが分かる．従って

$$\omega_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\omega_0 \tag{3.1.60}$$

となる．$|\alpha\rangle$ の規格化の要請から，

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\alpha|\alpha\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\omega_n|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!}|\omega_0|^2 \\ &= \mathrm{e}^{|\alpha|^2}|\omega_0|^2 \end{aligned} \tag{3.1.61}$$

したがって,

$$\omega_0 = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \tag{3.1.62}$$

となる.以上からコヒーレント状態を光子数状態の重ね合わせで記述すると,

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{3.1.63}$$

コヒーレント状態において n 光子状態 $|n\rangle$ を取る確率はその係数の絶対値の 2 乗なので,

$$\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \tag{3.1.64}$$

となり,平均 $|\alpha|^2$ のポアソン分布となっている.

3.1.3 光子の直交位相分解

式 (3.1.48) を式 (3.1.34) と (3.1.35) を用いて書き直す.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}} \boldsymbol{\varepsilon}_k [\hat{a}_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \boldsymbol{\varepsilon}_k [(\omega_k \hat{Q}_k + i\hat{P}_k) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - (\omega_k \hat{Q}_k - i\hat{P}_k) e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \boldsymbol{\varepsilon}_k [i\hat{P}_k (e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} + e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}) + \omega_k \hat{Q}_k (e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)} - e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)})] \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\varepsilon}_k [\frac{\hat{P}_k}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_k t) + \frac{\omega_k \hat{Q}_k}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_k t)]
\end{aligned} \tag{3.1.65}$$

運動量に対応した物理量が cos,位置に対応した物理量が sin に比例した成分になっている.レーザー光学の分野では運動量に対応する成分を振幅成分,位置に対応する成分を位相成分と呼ぶ.運動量と位置をあらわに書くことで,振幅と位相の対応関係が分かった.

3.2 非線形光学

物質に光が入射すると,光と物質は光電場に誘起される分極を介して相互作用する [24].ところがレーザー光を絞り込んだりといったような光電場が強いときは分極の非線形性が現れてくる.非線形分極は光電場に関してベキ級数展開で表すことが出来る.展開において,電場の 2 次による現象が 2 次の非線形光学効果である.本研究でもこの 2 次の非線形光学効果を利用しており,ここでは 3 次以上については割愛する.

3.2.1 非線形分極と非線形感受率

物質に光が入射すると,物質において分極が誘起される.光の周波数において磁場の作用は電場に比べ小さいため無視できる.常誘電体の電気分極 P は,入射する光の電場を E,電気感受率を χ,真空の誘電

率を ϵ_0 として

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \tag{3.2.1}$$

と表すことが出来る．光が十分弱いときはこのように入射する電場に対して線形応答を示す．入射する光が強くなり線形応答の限界を超えると非線形の応答を無視できなくなる．このとき分極を電場のベキ級数で展開すると，

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \boldsymbol{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \boldsymbol{E}^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} \boldsymbol{E}^3 + \cdots \tag{3.2.2}$$

と表せる．電場の 2 乗に比例する第 2 項を 2 次の非線形分極，係数の $\chi^{(2)}$ を 2 次の非線形感受率という．3 次についても同様である．$\chi^{(2)}$ は $\chi^{(1)}$ の $(2 \times 10^7)^{-1}$ 程度の大きさしかなく通常の高額の範囲では現れないことが分かる．3 次の非線形分極は液体，気体問わず全ての材料に存在するが，2 次の非線形感受率は反転対称性を持たない結晶だけが 0 でない成分を持つ．そのため 2 次の非線形分極は限られた物質においてのみ観測される．ここで分極 $\boldsymbol{P}$ と光の電場 $\boldsymbol{E}$ はベクトル，$\chi^{(b)}$ はテンソルである．線形感受率 $\chi^{(1)}$ は 2 階のテンソル，非線形感受率 $\chi^{(2)}$ は 3 つの添え字を持つ 3 階のテンソルである．

3.2.2　非線形光学結晶

実験において非線形光学効果を利用する際には，主に結晶を用いて大きい非線形感受率を得る．結晶のタイプにはにはバルク型や導波路型といったものが存在し，今日までに様々な種類の組成のものが作られている．本研究ではでは疑似位相整合を施した結晶として Periodically Poled KTiOPO$_4$(ppKTP) を用いている．細かなスペックは表のとおりである．疑似位相整合については後に記述する．結晶の性能を記述する際には，非線形感受率 $\chi^{(2)}$ より縮約された感受率 d が用いられることが多い．この 2 つの関係式は，

$$d_{il} = \frac{1}{2} \chi^{(2)}_{ijk} \tag{3.2.3}$$

で，係数の 1/2 は慣習による．この縮約された感受率は，非線形感受率の 2 つ目と 3 つ目の添え字と周波数を同時に交換しても値は変わらないという真性置換対象性から来ている．添え字 (j,k) の組を表 3.1 に従って並べて番号付けすると $l = 1 \sim 6$ の 1 つの添え字で表すことが出来る．

これを用いることで例えば次に出てくる二次高調波発生の非線形分極は 3×6 の行列を用いて以下の様に書ける．

$$\begin{pmatrix} P_1(2\omega) \\ P_2(2\omega) \\ P_3(2\omega) \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^2 \\ E_2^2 \\ E_3^2 \\ 2E_2E_3 \\ 2E_3E_1 \\ 2E_1E_2 \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

これらの係数は各々の結晶の持つ対称性などから，実際にはさらに減らすことが出来る．また，入射する光の偏光状態がある一つの場合で，発生する非線形分極も特定の偏光成分のみを考える場合は，各々の振幅のみを考えることで，実効的な非線形光学係数 d_{eff} が定義できる．すると

$$P^{(2\omega)} = d_{eff} |E^{(\omega)}|^2 \tag{3.2.5}$$

の様に表すことが出来る．

表 3.1　対称テンソルの添字の縮約

jk	11	22	33	23,32	13,31	12,21
j	1	2	3	4	5	6

3.2.3　二次高調波発生

電場 $\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t)$ と書くと式 (3.3) の第 2 項は，

$$\boldsymbol{P}^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \boldsymbol{E}_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \chi^{(2)} \boldsymbol{E}_0^2 [1 - \cos(2\omega t)] \tag{3.2.6}$$

と計算できる．ここで $2\omega t$ を含む項が現れており，これは ω の光の入射によって 2 倍の周波数を持つ光が発生することを示している．このような現象を第 2 高調波発生，もしくは SHG(Second Harmonic Generation) と呼ばれている．角周波数 2ω の光を第 2 高調波もしくは単純に 2 倍波と呼び，入射した角周波数 ω の光を基本波と呼ぶ．光子描像で考えると，基本周波数の 2 つの光子から 2 倍の周波数の 1 つの光子が生成されたことになる．光子のエネルギーは周波数に比例するため，この過程はエネルギー保存則を満たす．つまり二次の非線形分極を起こす物質とはエネルギーのやり取りがなく，物質は触媒のような役割を果たしている．このような非線形分極による新しい周波数発生の時間的空間的発展は Maxwell の波動方程式によって記述される．電磁場の波動方程式は，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{3.2.7}$$

である．この式に入射する電場を $\boldsymbol{E}_1$，発生する高調波を $\boldsymbol{E}_2$，線形分極を $\boldsymbol{P}_1^L$，非線形分極を $\boldsymbol{P}^{NL}$ とし，さらに高調波に対する線形分極 $\boldsymbol{P}_2^L$ を代入する．光について考えるとき電流密度は小さく無視できるので電気伝導率 σ は $\sigma = 0$ とできる．特に第 2 高調波について考え，その周波数を ω と 2ω の項に分けると，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_1}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_1^L}{\partial t^2} \tag{3.2.8}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_2}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 (\boldsymbol{P}_2^L + \boldsymbol{P}^{NL})}{\partial t^2} \tag{3.2.9}$$

となる．これを入射する光が一定と仮定し，ω_1 を入射波の周波数，ω_2 を高調波の周波数として解くと，

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}^{(\omega_2)}}{\partial z} = \frac{i\omega_2}{2\epsilon_0 n_2 c}\boldsymbol{P}^{(\omega_1)} \mathrm{e}^{i\Delta k z} \tag{3.2.10}$$

となる．これを結晶の入射面 $z = 0$ から z まで積分し強度を求めると，

$$|\boldsymbol{E}^{(\omega_2)}|^2 = \frac{\omega_2^2}{4\epsilon_0^2 n_2^2 c^2}|\boldsymbol{P}^{(\omega_1)}|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k z}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k z}{2}\right)^2} z^2 \tag{3.2.11}$$

と表される．ここで $\Delta k = k^{(\omega_2)} - 2k^{(\omega_1)}$ である．式 (3.2.11) より SHG 光は $\Delta k \neq 0$ では周期関数となりその成長は制限され，$\Delta k = 0$ のとき z^2 に比例して成長することが分かる．この成長する条件である $\Delta k = 0$ を位相整合条件と呼ぶ．

3.2.4　位相整合条件

高調波発生のための位相整合条件は入射光を ω_1，高調波を ω_2 とすると，

$$\Delta k = k^{(\omega_2)} - 2k^{(\omega_1)} = \frac{2\omega_1}{c}[n^{\omega_2} - n^{\omega_1}] = 0 \tag{3.2.12}$$

である．ここで $k = \omega n/c$．高調波発生で高い変換効率を得るためには $n^{\omega_1} = n^{\omega_2}$ を満たす必要があるが，一般に屈折率には必ず分散がありこの条件は満たされない．この条件を満たすために結晶の複屈折性などを利用する方法がある．複屈折性とは結晶の光学的な異方性により結晶軸に対する偏光方向での屈折率が異なることである．この光学的異方性は六方晶系，正方晶系，三方晶系の結晶などの，ある方向に伝搬する光が非対称な構造と出会うように配列された原子をもっている物質の性質である．これに対し結晶構造が立方晶系など光学的に優先的な方向がない物質の屈折率は 1 つであり光学的に等方という．結晶の軸に対し垂直な光を常光線，常光線に対し垂直な光を異常光線と言い，これらに対する屈折率は n_o, n_e と書く．複屈折率を持つ物質で代表的なものとして方解石などがあるが，自然光は通常様々な偏光の光が混在しているため，このような物質を通して見た像は二重に見える．また，このような性質を利用して偏光ビームスプリッタとして用いられることもある．複屈折性は結晶の光学軸に対する入射角 θ の関数として変化する楕円としてあらわすことが出来る (図 3.1).

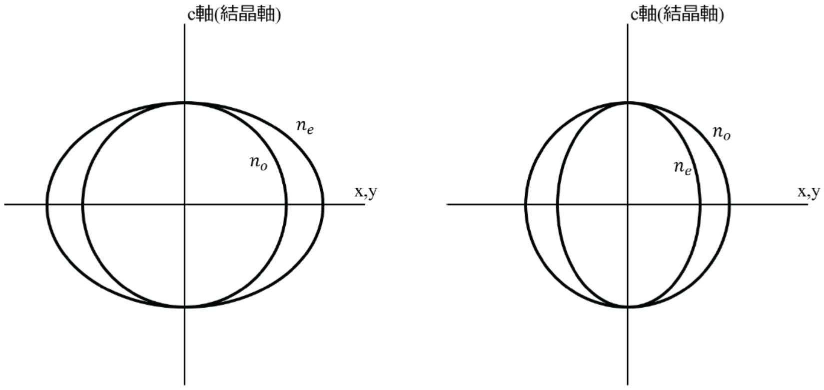

図 3.1　正の一軸結晶 (左) と負の一軸結晶 (右)

異なる周波数 ω_1，ω_2 への屈折率を同一平面上に表すと図 3.2 のようになる．この図において $n_e(\omega_1)n_o(\omega_2)$ が交点をもっていることが分かる．このとき異常光線の入射と常光線の高調波として位相整合条件が成り立つ．同様にして考えることで常光線の入射と異常光線の高調波という位相整合もある．これらは (e,e,o)，(o,o,e) などと表し，type-I の位相整合と呼ぶ．また，入射光の一方が常光線，他方が異常光線の場合は (e,o,o) あるいは (e,o,e) の type-II の位相整合と呼ぶ.

3.2.5　疑似位相整合

前節で示したように位相整合条件 $\Delta k = 0$ は結晶の複屈折性を利用することにより満たすことができる．しかしこの方法は結晶の特性に大きく依存するため波長変換に利用できる波長が限られたり，結晶の異方

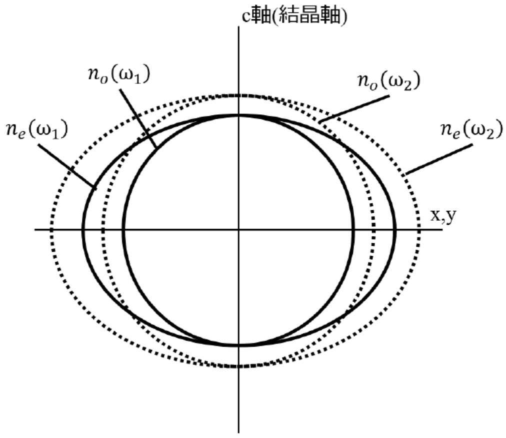

図 3.2　ω_1, ω_2 それぞれに対する複屈折率

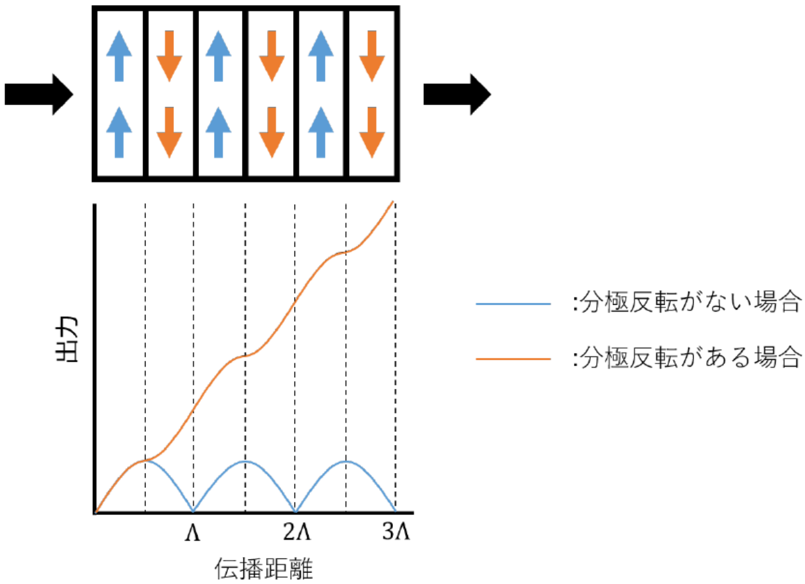

図 3.3　分極反転構造の模式図

性により入射光と変換光の進行方向にずれが生じてしまうという欠点がある．そもそも位相整合条件を満たさない場合というのは入射光である ω_1 が結晶内を $2k^{(\omega_1)}$ で進む一方，変換光 ω_2 が $k^{(\omega_2)}$ で進むことに由来する．これらが一致しない，つまり $\Delta k \neq 0$ のときは進行方向に進むにつれ両者の間には位相のずれが生じてくる．$l_c = \pi/\Delta k$(コヒーレンス長) だけ進むと位相差は π となり，弱め合う作用が最も働くようになる．l_c ごとに位相が逆転し変換光が成長することがないため，結果として出射される光は非常に弱いものとなる．ここで l_c ごとに非線形感受率の符号を変え分極を反転させることができれば，変換光は打ち消すことなく強度を増幅させ続けることができる (図 3.3)．このように周期的な分極反転により位相整合を満たすことを擬似位相整合という．このときの位相整合条件は，

$$\Delta k \pm k_{QPM} = 0 \tag{3.2.13}$$

となる．波数 k_{QPM} は分極周期を用いて $k_{QPM} = 2\pi/\Lambda$ と与えられる．疑似位相整合は複屈折性結晶の特性への依存性は低いため，使用できる結晶材料の幅が大きく広がる．

3.2.6　3 光波混合

物質に入射する光が 2 つの周波数成分からなる時を考える．入射波

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{A}_1 \sin(\omega_1 t) + \boldsymbol{A}_2 \sin(\omega_2 t) \tag{3.2.14}$$

に対し，2 次の非線形分極は

$$\boldsymbol{P}^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} [\boldsymbol{A}_1 \sin(\omega_1 t) + \boldsymbol{A}_2 \sin(\omega_2 t)]^2 \tag{3.2.15}$$

となる．この中には ω_1 波と ω_2 波それぞれの第 2 高調波のほかに，2 つの周波数成分の積の項である

$$2\epsilon_0 \chi^{(2)} \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 [\cos(\omega_1 + \omega_2) t + \cos(\omega_1 - \omega_2) t] \tag{3.2.16}$$

が含まれる．この分極は 2 つの周波数の和と差の周波数の光も放出する．これをそれぞれ和周波発生 (Sum Frequency Generation[SFG])，差周波発生 (Difference Frequency Generation[DFG]) と呼ぶ．ω_1 と ω_2 の和周波数を $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ とする．この 3 周波数成分は非線形分極を介し相互作用をしながら物質中を伝わっていく．このような現象をまとめて 3 光波混合 (three wave mixing) と呼ぶ．二次高調波発生は 2 つの周波数が一致した状況なので 3 光波混合の縮退型と考えることが出来る．

3.2.7　光パラメトリック過程

和周波発生の逆過程として，高い周波数の ω_3 の光子を，$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ の関係にある 2 つの周波数の光子に分解して発生する過程を光パラメトリック過程という．強い ω_3 の光をポンプ光として入射させた状態でさらに ω_1 の振動をパラメータとして加えると $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ の周波数の光が発生し, ω_1, ω_2 は増幅される．ω_1 の光がシグナルとして増幅されるときに，ω_2 も増幅器内で遊び車のようにして増幅するためこれをアイドラーと呼ぶ [20]．シグナル光とアイドラー光の成長が小さく入射光があまり減衰していないときは，$E^{(\omega_3)} = |E^{(\omega_3)}| \mathrm{e}^{i\phi_3} = const.$ として考えることが出来，シグナルとアイドラーの空間発展の式は以下のようになる．

$$E^{(\omega_1)}(z) = E^{(\omega_1)}(0) \cosh\left(\frac{gz}{2}\right) + i\mathrm{e}^{i\phi_3} \sqrt{\frac{n_2 \omega_1}{n_1 \omega_2}} E^{(\omega_2)*}(0) \sinh\left(\frac{gz}{2}\right) \tag{3.2.17}$$

$$E^{(\omega_2)}(z) = E^{(\omega_2)}(0) \cosh\left(\frac{gz}{2}\right) + i\mathrm{e}^{i\phi_3} \sqrt{\frac{n_1 \omega_2}{n_2 \omega_1}} E^{(\omega_1)*}(0) \sinh\left(\frac{gz}{2}\right) \tag{3.2.18}$$

また，ϕ_3 は pump 光の位相，z は結晶長，g は非線形光学効果の大きさを表し，

$$g \equiv \frac{\omega_0}{cn} |\chi^{(2)} E^{(\omega_3)}|. \tag{3.2.19}$$

入力として $E^{(\omega_2)}(0) = 0$ でも，$E^{(\omega_1)}(0) \neq 0$ であれば出力として両方の波が出る．この過程を光パラメトリック増幅 (Optical Parametric Amplification[OPA]) と呼ぶ．

自然放出があるとき，入射光を入れなくても $E^{(\omega_1)}(0) \neq 0$，$E^{(\omega_2)}(0) \neq 0$ となるため，これが増幅される．これをパラメトリック蛍光という．このときポンプ光が低い周波数の 2 つの光に変換されるのでパラメトリック下方変換器をいう．分解された 2 つの光子は同時に放出され，周波数，波長，波数ベクトル，偏光に相関がある．これらの理由によりこの双子の光子はスクイーズド状態の発生などに用いることが出来る．

3.2.8 スクイーズド状態

スクイーズとは圧搾するという意味で，揺らぎをある方向に圧縮することから来ている．スクイーズド状態とはコヒーレント状態と同じ最小不確定状態の 1 つで，コヒーレント状態の不確定性を保ちつつ直交成分の間で揺らぎの再分配をしている．縮退したパラメトリック増幅器を使うことで直交成分をそれぞれ e^{-r}，e^{r} 倍することが可能である．ここで $r(r > 0)$ はスクイーズの度合いを示す量としてスクイージングパラメータである．入射光 $\hat{a}$ と放射光 $\hat{b}$ の間で，

$$\hat{b} = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{i\phi}\sinh r \tag{3.2.20}$$

という変換を考える．ϕ はポンプ光との位相である．変換光も交換関係 $[\hat{b}, \hat{b}^{\dagger}] = 1$ を満足する．期待値をコヒーレント状態についてとると，

$$\langle\alpha|\hat{b}|\alpha\rangle = \alpha\cosh r - \alpha^{*}\mathrm{e}^{i\phi}\sinh r \tag{3.2.21}$$

となる．例えば $\phi = 0$ のときは，

$$\langle\alpha|\hat{b}|\alpha\rangle = x_1\mathrm{e}^{-r} + ix_2\mathrm{e}^{r} \tag{3.2.22}$$

のようになる．従って揺らぎの大きさは

$$\Delta(x_1\mathrm{e}^{-r}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r},\ \Delta(x_2\mathrm{e}^{r}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{r} \tag{3.2.23}$$

となる．変換を受けたコヒーレント光の直交位相振幅の一方は増幅し，反対にもう一方は減衰する．

3.3 量子雑音

光の量子性に由来する感度限界である標準量子限界に触れた後，レーザー干渉計型重力波検出器の量子雑音を具体的に計算し，また標準量子限界を突破する方法について記す．

3.3.1 標準量子限界

輻射圧雑音とショット雑音は共に光の量子性，すなわちレーザーの光子数揺らぎに由来する雑音である．そのため Hisenberg の不確定性理論から相反する関係となっており，ショット雑音は光強度に反比例し，輻射圧雑音は光強度に比例する．この 2 つの雑音の和，

$$S_{total} = S_{shot} + S_{rad} \tag{3.3.1}$$

はある光強度で最小値を与え，その最小値の軌跡は感度曲線において f^{-1} の直線となる．光の量子性が与える感度限界で，標準量子限界 (Standard Quantum Limit) と呼ぶ．標準量子限界 S_{SQL} は，

$$S_{SQL}(f) = \frac{\sqrt{2}\hbar}{m\pi f}[\mathrm{m}^2/\mathrm{Hz}] \tag{3.3.2}$$

で与えられる．これは自由質点で構成されたレーザー干渉計型重力波検出器の原理的な感度限界と考えることが出来る．

3.3.2　光ばねと標準量子限界

光ばねとは光共振器を共振点から少しずらす (離調する) ことによって，レーザー光のモードと機械的な復元力がカップリングすることで生じるオプトメカニクス的な効果のことである [7]．図 3.4 のように単純な Fabry-Pérot 共振器を考え，共振点から少しずれたところで，光の輻射圧と復元力が吊り合ってるとする．この状態のまま，鏡が共振器長が伸びる方向に移動すると，共振から更に離れることになるので輻射圧は弱まり，復元力は増すため，復元力が優位となる．また逆に，鏡が共振器長が縮む方向に移動すると輻射圧が優位となる．このように鏡が光によってあたかもばねに繋がれているかのような挙動を示すため光ばねと呼ばれる．

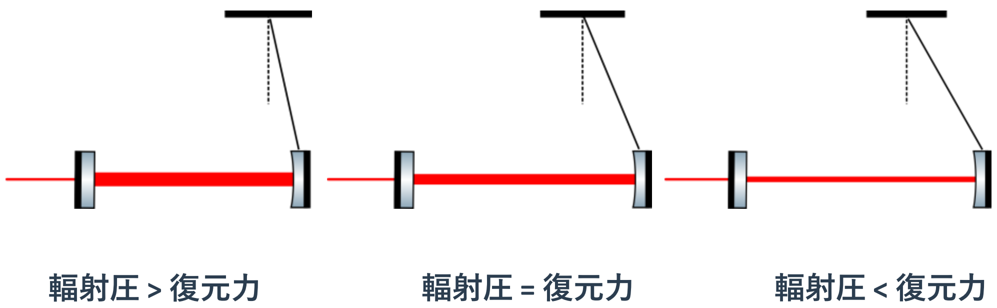

図 3.4　光ばねの定性的な図

干渉計を離調することによって，SRM で反射された位相信号の一部が，SR 共振器を往復する間に振幅信号に変換されるため，キャリアのパワーに変調を与える．キャリアのパワーが変化し，鏡を押す輻射圧が変化すると，キャリアに対する位相信号が生成される．この輻射圧を経由したループが光のばねを形成し，SR 共振器の共振状態だけでなく鏡の質量やレーザーパワーに依存した共振周波数で信号が増幅される．光ばねにより，干渉計のダイナミクスが変わり，標準量子限界 (SQL) を超えることができる．次項よりこれを計算して追っていく．

3.3.3　シグナルリサイクリング干渉計の感度

図 3.5 にシグナルリサイクリング干渉計の図を示した．干渉計の基線長を L [m] とおき，エンド鏡と折り返し鏡の質量を m [kg] とした．干渉計の出力ポート側にはシグナルリサイクリング鏡 (SRM) を設置

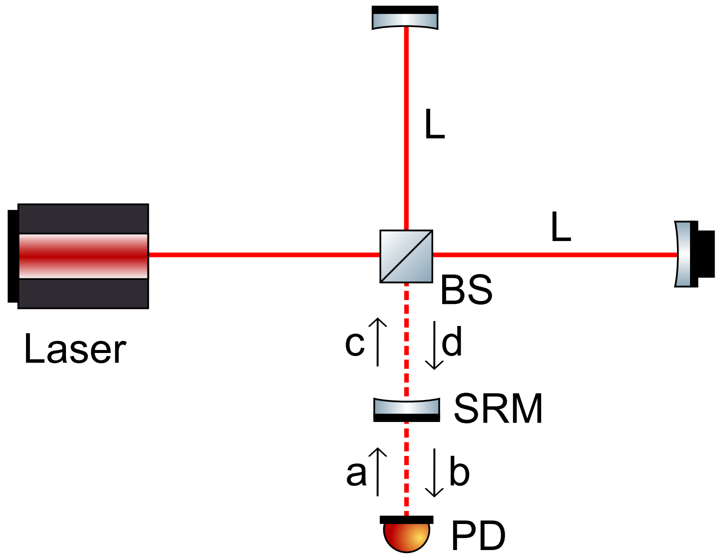

図 3.5　シグナルリサイクリング干渉計の模式図

し，その反射率を r_s とおいた．アルファベットは各場所における真空場の電場振幅の大きさを示している．また干渉計のエンド鏡と折り返し鏡は自由質点であると仮定した．

干渉計はダークフリンジに制御されている．このため量子雑音を計算するためには図 3.5 において $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の関係を求めればよい．まず次のように記号を定義する．

$$h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{20\hbar}{m\omega^2 L^2}} \tag{3.3.3}$$

$$\mathcal{K} = \frac{20\Omega P}{mc^2\omega^2} \tag{3.3.4}$$

$$\alpha = \frac{\omega l_s}{c} \tag{3.3.5}$$

$$\beta = \frac{\omega L}{c} \tag{3.3.6}$$

$\hbar$ はプランク定数，Ω はレーザー周波数，P はレーザー強度，m は鏡の質量，ω は重力波信号の周波数，l_s はビームスプリッタからシグナルリサイクリング鏡までの距離，L は干渉計の基線長を表す．また $h(\omega)$ は重力波によって引き起こされる差動変位の大きさを示し，$\boldsymbol{e}_{\mathrm{phase}}$ は位相成分の単位ベクトルを表す．

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{phase}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

これらを用いると各場所における真空場の境界条件は次式でまとめられる [8][9][10][12].

$$\boldsymbol{d} = e^{2i\beta} K \boldsymbol{c} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\mathrm{SQL}}} e^{i\beta} h(\omega)\, \boldsymbol{e}_{\mathrm{phase}} \tag{3.3.8}$$

$$\boldsymbol{b} = t_{\mathrm{s}} e^{i\alpha} R(\theta)\, \boldsymbol{d} - r_{\mathrm{s}} \boldsymbol{a} \tag{3.3.9}$$

$$\boldsymbol{c} = r_{\mathrm{s}} e^{2i\alpha} R(2\theta)\, \boldsymbol{d} + t_{\mathrm{s}} e^{i\alpha} R(\theta)\, \boldsymbol{a} \tag{3.3.10}$$

ここで干渉計のオプトメカニカルな相互作用は行列

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.11}$$

によって決まり，離調に伴う干渉計のダイナミクスの変化具合は行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.3.12}$$

によって決まる．これらを解き $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の関係を得ると，

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{M} \left\{ e^{2i(\alpha+\beta)} A \boldsymbol{a} + \sqrt{2\mathcal{K}}\, t_{\mathrm{s}} e^{i(\alpha+\beta)} \boldsymbol{H} \frac{h(\omega)}{h_{\mathrm{SQL}}} \right\}. \tag{3.3.13}$$

ここで，

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.14}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{3.3.15}$$

であり，

$$M = 1 + r_{\mathrm{s}}^2 e^{4i(\alpha+\beta)} - 2e^{2i(\alpha+\beta)} r_{\mathrm{s}} \left(\cos 2\theta + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\theta \right). \tag{3.3.16}$$

$A, \boldsymbol{H}$ は真空場 $\boldsymbol{a}$ と信号 h の伝達関数行列である．伝達関数行列の各成分は以下の通りである．

$$A_{11} = A_{22} = -2r_{\mathrm{s}} \cos 2(\alpha + \beta) + (1 + r_{\mathrm{s}}^2) \left(\cos 2\theta + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\theta \right) \tag{3.3.17}$$

$$A_{12} = -t_{\mathrm{s}}^2 (\sin 2\theta + \mathcal{K} \sin^2 \theta) \tag{3.3.18}$$

$$A_{21} = t_{\mathrm{s}}^2 (\sin 2\theta - \mathcal{K} \cos^2 \theta) \tag{3.3.19}$$

$$H_1 = -(1 + r_{\mathrm{s}} e^{2i(\alpha+\beta)}) \sin\theta \tag{3.3.20}$$

$$H_2 = (1 - r_{\mathrm{s}} e^{2i(\alpha+\beta)}) \cos\theta \tag{3.3.21}$$

このとき干渉計の感度曲線は,

$$\sqrt{S_h} = \sqrt{\frac{|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2}{2T_{\mathrm{s}} |H_2|^2 \mathcal{K}}}\, h_{\mathrm{SQL}} \tag{3.3.22}$$

で計算される．簡単のためにシンプルな Michelson 干渉計 ($\theta = r_s = 0$) を考えると

$$\sqrt{S_h} = \sqrt{\frac{\mathcal{K}^2 + 1^2}{2 \cdot 1^2 \mathcal{K}}} h_{\rm SQL} \geq h_{\rm SQL} \tag{3.3.23}$$

となり Michelson 干渉計では量子雑音の大きさは標準量子限界以下にはならない．またシグナルリサイクリング干渉計であっても離調をおこなわない ($\theta = 0$) ときは標準量子限界を超えられない (図 3.6).

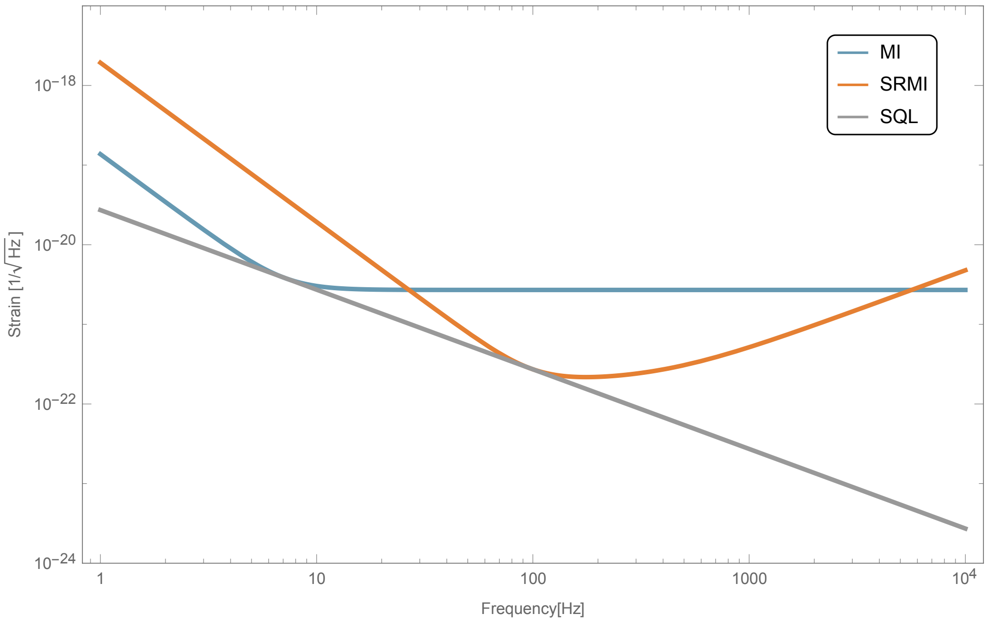

図 3.6　Michelson 干渉計とシグナルリサイクリング干渉計の感度の比較

一方，シグナルリサイクリング共振器を離調すると干渉計の感度は標準量子限界を超えられる (図 3.7). これは離調によって干渉計のダイナミクスが変わり，ある周波数においては量子雑音が小さくなるためである．実際に式 (3.3.17) と式 (3.3.19) において，$\theta \neq 0$ であるためにある周波数では $|A_{22}| = 0$ や $|A_{21}| = 0$ が成立する．ただし位相方向のみを測定した場合，$|A_{22}| = 0$ となる周波数と $|A_{21}| = 0$ となる周波数は一致しないためホモダイン測定を行わない限り，最良な感度までは到達しない．

また式 (3.3.13) に注目するとある周波数では $M = 0$ となり重力波によって出力ポート側に漏れ出てくる電場の複素振幅と，真空場の複素振幅が同時に発散する．これはシグナルリサイクリング共振器を離調に伴うオプトメカニカルな効果で，物理的には光ばねの共振と考えることが出来る [11].

光ばねの共振周波数 $f_{\rm OS}$ は

$$f_{\rm OS} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10\Omega P}{mc^2}} \sqrt{\frac{2 \sin 2\theta}{(r_s + 1/r_s) - 2\cos 2\theta}} \tag{3.3.24}$$

で与えられる．

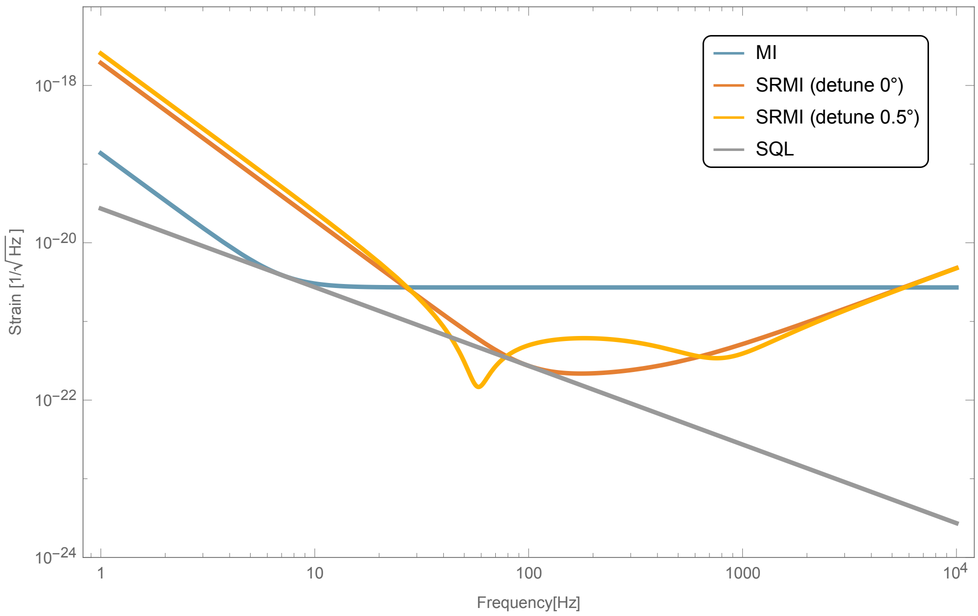

図 3.7　離調したシグナルリサイクリング干渉計の感度の比較

3.3.4　結晶挿入型シグナルリサイクリング干渉計の感度

先行研究 [12] に従って，弊研究室で提案された結晶挿入型シグナルリサイクリング干渉計について考える．図 3.8 は結晶挿入型シグナルリサイクリング干渉計の模式図である．

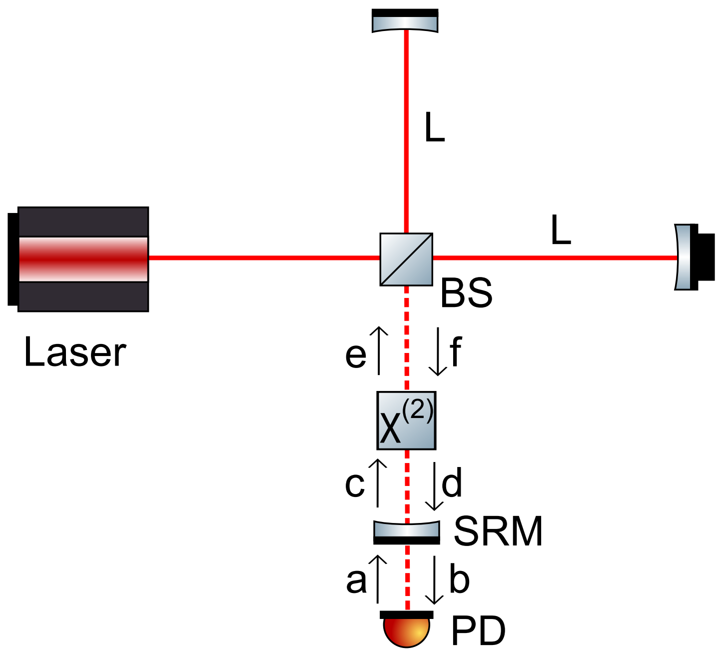

図 3.8　結晶挿入型シグナルリサイクリング干渉計の模式図

非線型光学結晶を透過した後では電場の複素振幅が増幅される．増幅効果はスクイージングファクター r で記述され，

$$r \propto |\chi^{(2)} E_{pump}| \tag{3.3.25}$$

で与えられる．そのためポンプ光の強度を大きくすることで増幅効果を高めることが出来る．非線形光学結晶によるスクイージング行列 $S(r,\phi)$ の定義は，

$$S(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cosh r + \sinh r \cos 2\phi & \sinh r \sin 2\phi \\ \sinh r \sin 2\phi & \cosh r - \sinh r \cos 2\phi \end{pmatrix} \tag{3.3.26}$$

ϕ はスクイージングアングルを表す．スクイージング行列において，スクイージングアングル $\phi = 0$ とすると，

$$S(r,0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{r} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-r} \end{pmatrix} \tag{3.3.27}$$

となる．次にスクイージングファクターを $\mathrm{e}^{r} = s$ と置くと，$S(r,0) = S(s)$ として，

$$S(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \tag{3.3.28}$$

と書き換えられる．したがって，

$$\boldsymbol{d} = S\boldsymbol{f}. \tag{3.3.29}$$

非線型光学結晶はエネルギーを供給するポンプ光と同じ方向に進む電場のみを増幅するので，

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{c}. \tag{3.3.30}$$

前節と同様に連立方程式を解くと次式を得る．

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{M}\left\{ e^{2i(\alpha+\beta)} A\boldsymbol{a} + \sqrt{2\mathcal{K}}\, t_{\mathrm{s}} e^{i(\alpha+\beta)} \boldsymbol{H} \frac{h(\omega)}{h_{\mathrm{SQL}}} \right\} \tag{3.3.31}$$

ここで

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.32}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{3.3.33}$$

であり，

$$M = s + s r_{\mathrm{s}}^2 e^{4i(\alpha+\beta)} - e^{2i(\alpha+\beta)} r_{\mathrm{s}} \left((1+s^2)\cos 2\theta + \mathcal{K} \sin 2\theta \right). \tag{3.3.34}$$

前節と同様に，$A, \boldsymbol{H}$ は真空場 $\boldsymbol{a}$ と信号 h の伝達関数行列であり，これらの各成分は以下の通りである．

$$A_{11} = (1 + r_s^2)\left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\theta + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\theta \right) - 2 s r_s \cos 2(\alpha+\beta) - \frac{1-s^2}{2} t_s^2 \tag{3.3.35}$$

$$A_{12} = -t_s^2 \left(\frac{1+s^2}{2} \sin 2\theta + \mathcal{K} \sin^2\theta \right) \tag{3.3.36}$$

$$A_{21}=t_s^2\left(\frac{1+s^2}{2}\sin 2\theta-\mathcal{K}\cos^2\theta\right) \tag{3.3.37}$$

$$A_{22}=(1+r_s^2)\left(\frac{1+s^2}{2}\cos 2\theta+\frac{\mathcal{K}}{2}\sin 2\theta\right)-2sr_s\cos 2(\alpha+\beta)+\frac{1-s^2}{2}t_s^2 \tag{3.3.38}$$

$$H_1=-(1+sr_se^{2i(\alpha+\beta)})\sin\theta \tag{3.3.39}$$

$$H_2=-(-1+sr_se^{2i(\alpha+\beta)})\cos\theta \tag{3.3.40}$$

ここから量子雑音が小さくなる周波数と光ばねの共振周波数を求めると

$$f_{|A_{21}|=0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}}\sqrt{\frac{\cos\theta}{(1+s^2)\sin\theta}} \tag{3.3.41}$$

$$f_{|A_{22}|=0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}}\sqrt{\frac{(1+r_\mathrm{s}^2)\sin 2\theta}{(1-r_\mathrm{s}^2)(s^2-1)-(1+r_\mathrm{s}^2)(1+s^2)\cos 2\theta+4sr_\mathrm{s}}} \tag{3.3.42}$$

$$f_\mathrm{OS}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}}\sqrt{\frac{\sin 2\theta}{s(r_\mathrm{s}+1/r_\mathrm{s})-(1+s^2)\cos 2\theta}} \tag{3.3.43}$$

式 (3.3.41) と式 (3.3.42) から非線型光学結晶の増幅効果による最良感度の周波数のシフトが示された．また式 (3.3.43) から，レーザーパワーが P から P/s に変わったと解釈することが出来る．今 $s\leq 1$ なので，実効的なパワーが上昇している．これによって非線型光学結晶による光ばねの共振周波数のシフトが示された．最良感度周波数は式 (3.3.41) と式 (3.3.42) によって決まる．ただし両者は値が異なるため最良感度は $|A_{21}|$ と $|A_{22}|$ のうち値の大きい方によって制限される．

このとき干渉計の感度曲線は，

$$\sqrt{S_h}=\sqrt{\frac{|A_{21}|^2+|A_{22}|^2}{2T_\mathrm{s}|H_2|^2\mathcal{K}}}h_\mathrm{SQL} \tag{3.3.44}$$

で計算される．スクイージングファクターと離調を変えたときの感度曲線を図 3.9 に示す．ここではスクイージングの大きさについて，

$$g=-20\log 10s[\mathrm{dB}] \tag{3.3.45}$$

と記述した．前節を含めて，以上は干渉計内において光学損失がない場合の計算である．光学損失を含めた計算については先行研究 [13] で行われており，Lossy な状況下でも高周波帯で SQL を 2 桁程度突破できることが示されている．また非線形結晶挿入型重力波検出器は，雑音減少によって感度向上を目指している Squeezed Input 干渉計[*1] に対して，信号増幅によって感度向上を目指した干渉計として考案された．しかし本干渉計は，非線形光学効果を用いた光ばねの硬化によって各雑音を強くスクイージングし向きを

[*1] Squeezed Input 干渉計とは，出力の信号雑音比が最良になるようにあらかじめ干渉計の AS ポートから入射する真空場 $\boldsymbol{a}$ をスクイーズする手法である．

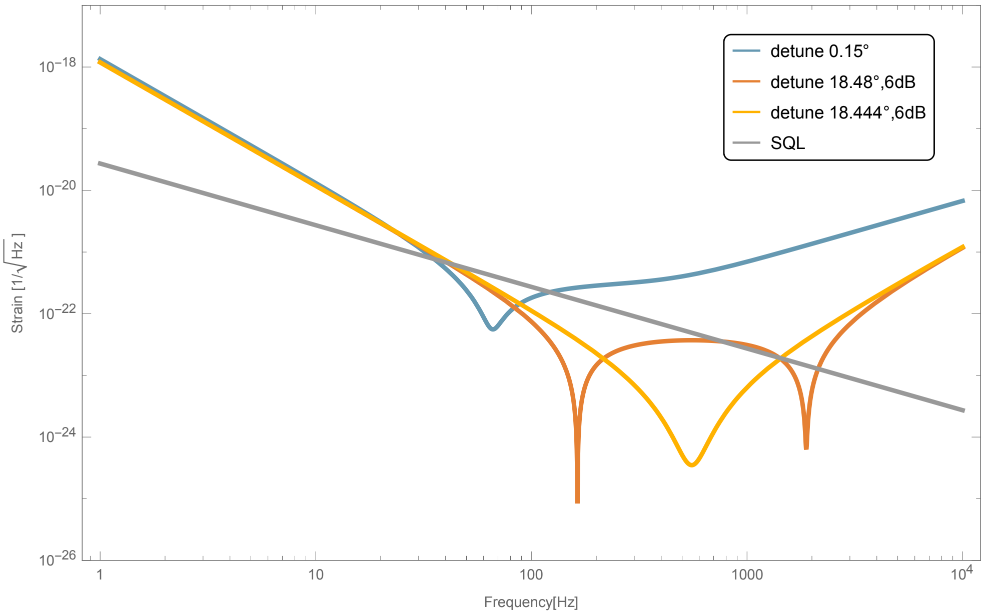

図 3.9 非線形結晶挿入型干渉計の感度の比較

固定することで，検出軸方向の雑音を減少させていることが本質であり，Squeezed Input 干渉計と同様に雑音減少によって感度が向上する [12][13].

最後に図 3.10 に今回のテーブルトップ実験においての予想伝達関数を示す．離調することで光ばねの共振周波数にピークが生じ，また光パラメトリック増幅によってピークの位置が高周波側に移動する．

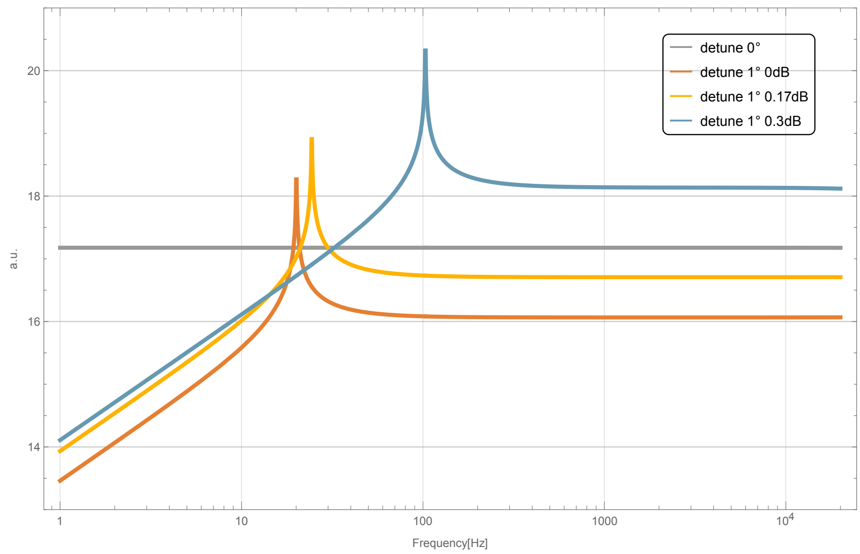

図 3.10 予想伝達関数

第 4 章

光パラメトリック増幅を用いた次世代干渉計の実験的検証

光パラメトリック増幅 (OPA) を利用した次世代干渉計は，シグナルリサイクリング共振器の内部に非線形光学結晶を挿入することで，干渉計内部で電場を選択的に増幅することが可能であった．本章では次世代干渉計の直接的な理論検証のための道筋について述べる．具体的に行った実験については次章以降に記す．

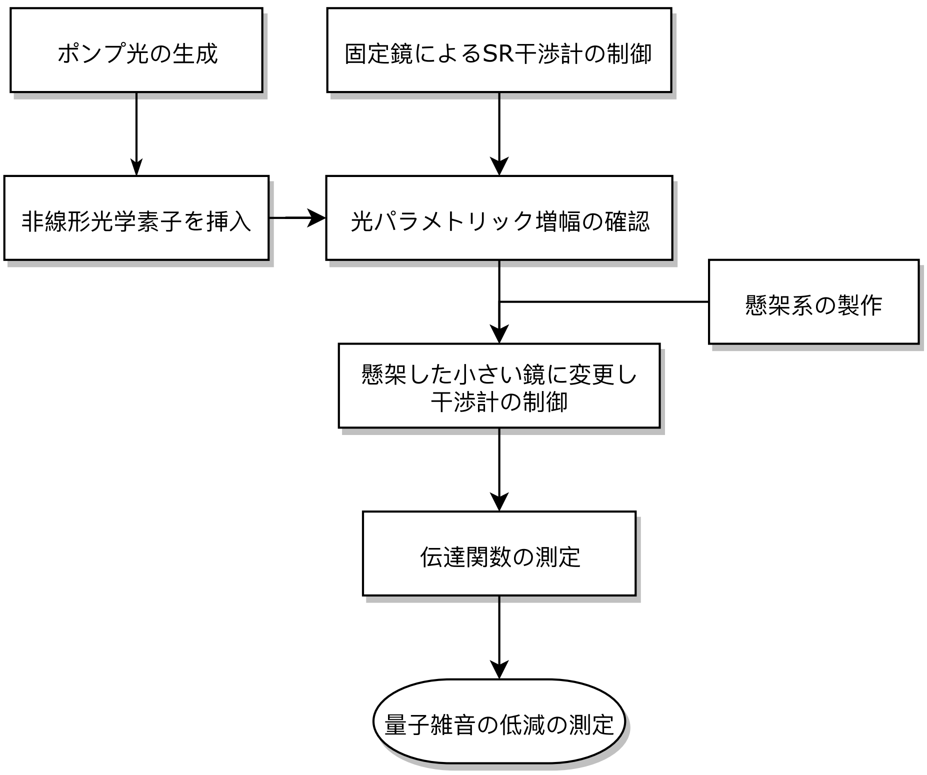

図 4.1　理論検証までのフロー

4.1　実験概略

次世代干渉計の理論を直接検証するために図 4.1 のステップが必要であった．光ばねは古典的な効果で，干渉計の伝達関数測定をすることでその効果を確認できる．光パラメトリック増幅によって光ばねのピークがシフトすることを確かめることで理論を検証することが出来る．

先行研究 [12] では図における，固定鏡での制御実験とポンプ光の生成，非線形光学結晶を挿入した状態での制御まで成功していた．ただし非線形光学結晶を挿入した状態での制御実験では，光パラメトリック増幅の発生は確認されていなかった．そこで本研究では先行研究からのステップを踏まえ，残された課題であった光パラメトリック増幅による信号増幅器の開発とその制御をメインに実験を行った．また固定鏡で組まれていた干渉計を，懸架した微小鏡に変更し制御実験を行った．

4.2　実験系

光学系の全体は図 4.2 のとおりである．赤い線がキャリアを表し，オレンジの線が AOM によって周波数シフトしたサブキャリア，緑の線が二次高調波発生で生成されたポンプ光である．また使用した光学素子は表 4.2 の通りである．また構築した干渉計の詳細は表 4.1 の通りである．

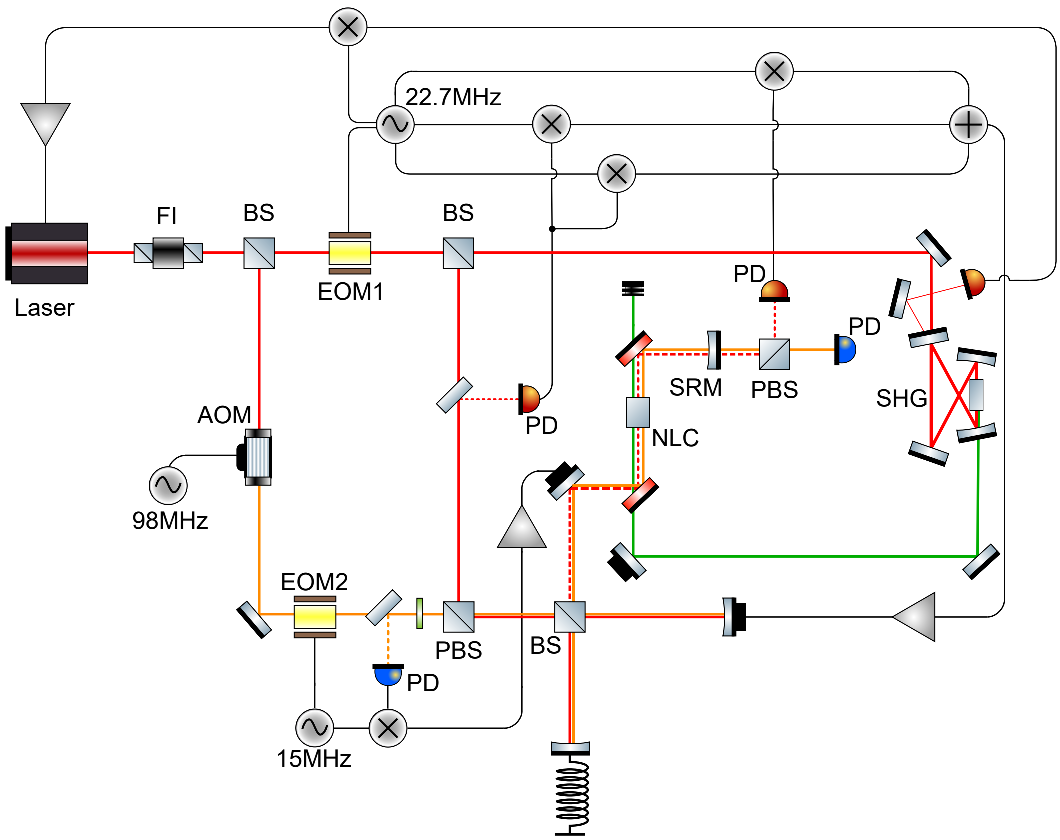

図 4.2　光学系の全体図

パラメータ名	略称	値
AOM 周波数	f_{aom}	92[MHz]
変調周波数 1	$f_{m,1}$	22.7[MHz]
変調周波数 2	$f_{m,2}$	15[MHz]
差動長	d	0.11[m]
同相長	l	0.84[m]
SR 長	l_s	1.814[m]
SR 鏡の反射率	R_s	0.98

表 4.1　SR 干渉計の基本パラメタ

光学素子名	呼称・略称	メーカー	補足
レーザー	Laser		最大出力 600mW
非線形光学結晶	NLC	raicol crystal	ppKTP(size:1$mm \times 2mm \times 10mm$)
AOM	AOM	ISOMET	
EOM	EOM	Thorlabs/qubig	15Mz：Thorlabs，22.7MHz：qubig 製
鏡	M	LayerTech/LEO/Thorlabs	場面に応じて使用
1/4 波長板	QWP	Thorlabs	
1/2 波長板	HWP	Thorlabs	
ビームスプリッタ	BS	LayerTech	偏光による反射率差は 10% 以下
偏光 BS	PBS	Thorlabs	
ビームサンプラ	SAMP	Thorlabs	反射率 10% 程度の鏡
フォトディテクタ	PD	Thorlabs	モニタ用
共振型フォトディテクタ	RFPD	片岡氏作成	制御信号取得用
CCD カメラ	CCD	Mintron Enterprise	モニタ用
温調 (OPA)	oven	covesion	結晶加熱用
温調 (SHG)	oven	raicol	結晶加熱用

表 4.2　光学関連機器一覧

今回実験で使用した測定機器は表 4.3 の通りである．

4.3　干渉計の制御

この節では実験を行ううえで必須である，干渉計や光共振器の長さ制御について記す．

測定機器名	呼称・略称	型番	メーカー	補足
パワーメータ	パワーメータ	PM100D	Thorlabs	
ビームプロファイラ	BP	AFG3022C	Tektronix	
発振器	発振器	AFG3022C	Tektronix	22.7MHz の変調用
発振器	発振器	AFG31	Sony	15MHz の変調用
発振器	発振器	AFG-2025	GW INSTEK	PZT 加振用
オシロスコープ	オシロスコープ	DSO-X-2004A	Agilient Technologies	SHG,OPA 実験で使用
オシロスコープ	オシロスコープ	Tektronix	TBS1064	干渉計のモニタ
ミキサ	ミキサ	ZEM-2B+	Mini Circuits	復調用
パワーディバイダ	パワーディバイダ	ZFRSC-2075+	Mini Circuits	信号分岐用
プリアンプ	SR560	SR560	Stanford Reserch	可変フィルタ
ピエゾドライバ	PZT Driver	SVR 500/3	Piezomechanik	SHG, OPA 用
ピエゾドライバ	PZT Driver	SPD-410		干渉計用
FFT アナライザ	FFT アナライザ	CF350Z	小野測器	伝達関数測定用
FFT アナライザ	FFT アナライザ	CF5200	小野測器	時間掃引機能を使用

表 4.3　測定装置一覧

4.3.1　フィードバック制御

一般に制御方式には，開ループ制御と閉ループ制御という 2 つの方式があり，後者のことをフィードバック制御と呼ぶ．図 4.3 にフィードバック制御系を示す．フィードバック制御では，出力を測定し，測定値と希望の設定値を比較しその差に基づいて制御信号が生成される．またフィードバック制御系は制御結果をみて制御信号を修正するプロセスを含むため，制御不可能な外部信号が存在する場合でも制御系として機能を果たすことが出来るが系の応答時間によって安定性が損なわれ不安定になる場合がある．H

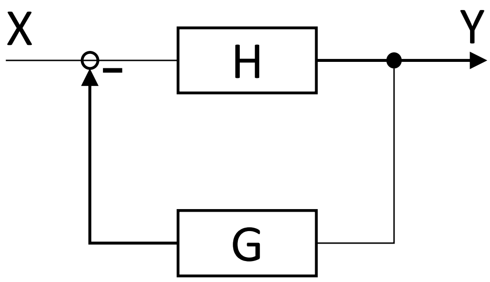

図 4.3　フィードバック制御系

は干渉計の伝達関数，G はフィルターの伝達関数である．この図で入力 X に対する出力 Y を求めると，

$$Y = \frac{H}{1+GH}X \tag{4.3.1}$$

となる．このとき GH のことをオープンループゲイン (OLG) と呼ぶ．オープンループゲインが十分に大きいとき，つまり制御下のときは実効的な入力 X_a は，

$$X_a = \frac{1}{1+GH}X \tag{4.3.2}$$

$$simeq\frac{1}{GH}X \quad (|GH| \gg 1) \tag{4.3.3}$$

となる．つまり適切なフィルターを用い十分なオープンループゲインをもつフィードバック制御系を構築することで，干渉計に混入する雑音等をオープンループゲインだけ抑制できる．

4.3.2　制御の安定性

制御系の周波数応答関数はゲインと位相特性によって表される．周波数の常用対数を横軸にとり，縦軸にゲイン特性と位相特性をとりゲイン曲線と位相曲線を 1 組で表したものをボード線図と呼ぶ (図 4.4)．フィードバック系の安定余裕を表す古典的な指標として，ゲイン余裕と位相余裕が用いられる．ボード線図において位相が-180 度まで回ったときの周波数において，そのときのゲインを 1 にするまで必要な増減量のことを指す．またボード線図において周波数応答のゲインが 1(0[dB]) になる点をユニティゲイン周波数と呼び，この周波数における位相と-180 度との差のことを位相余裕と呼ぶ．．ゲイン余裕や位相余裕は周波数応答が安定限界に達するまでどの程度余裕があるかを示す量である．両者とも大きいほど安定度は高いが，大きすぎると過渡応答の速応性が悪化する．

4.3.3　PDH 法

共振器や干渉計の長さ制御をするとき，制御ポイントの周りで線形な制御信号を取得する必要がある．線形な制御信号を取得する方法として，レーザー光に電気光学変調機 (EOM) を用い位相変調させ発生させたサイドバンドを用いて制御する Pound-Drever-Hall 法 (PDH 法) がある [18]．本実験では Michelson 干渉計，シグナルリサイクリング共振器，SHG 共振器の長さ制御においてこの方法を用いた．図に PDH 法の基本的なセットアップを示した．Local Oscillator は変調信号のことを指す．ここでは Fabry-Pérot 共振器の長さを制御することを考える．レーザー光の電場を $E_0\mathrm{E}^{i\omega t}$ とすると EOM で位相変調を受け，共振器に入射する電場は，

$$\begin{aligned}
E_{inc} &= E_0\mathrm{E}^{i[\omega t+\beta\sin\Omega t]} \\
&\simeq E_0[J_0(\beta) + 2iJ_1(\beta)\sin\Omega t]\mathrm{E}^{i\omega t} \\
&= E_0[J_0(\beta) + J_1(\beta)\mathrm{E}^{i|\omega+\Omega|t} - J_1(\beta)\mathrm{E}^{i|\omega+\Omega|t}]\mathrm{E}^{i\omega t}.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

ここで β は変調指数，Ω は変調周波数，$J_n(\beta)$ はベッセル関数であり，キャリアの周波数に対して，変調周波数の分だけずれたサイドバンドが生じていることが分かる．P_0 を入射光強度としたとき，キャリア

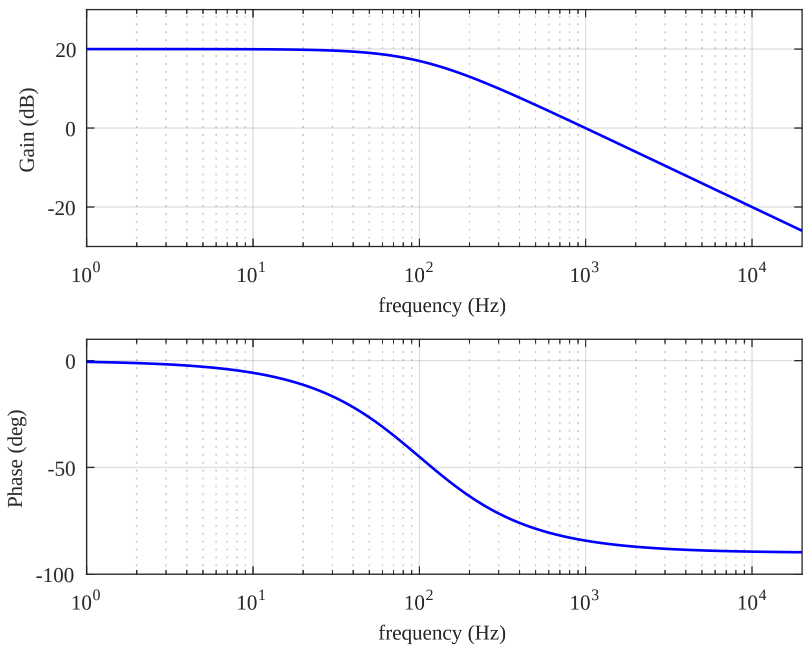

図 4.4　ボード線図の一例

とサイドバンドの光強度は，

$$P_c = J_0^2(\beta)P_0$$
$$P_s = J_1^2(\beta)P_0$$

で，変調指数が小さい ($\beta \ll 2$) ときは，ほとんどの光強度がキャリアと 1 次のサイドバンドなので，

$$P_0 \simeq P_c + 2P_s \tag{4.3.5}$$

となる．ロスが無いときの Fabry-Pérot 共振器の反射率は，共振器長を L，フロント鏡の反射率を r_F，エンド鏡の反射率を r_E とすると，

$$r_{cav}(\omega) = \frac{-r_F + r_E \mathrm{e}^{\frac{2\omega L}{c}}}{1 - r_F r_E \mathrm{e}^{\frac{2\omega L}{c}}} \tag{4.3.6}$$

と表せる．したがって Fabry-Pérot 共振器の反射光の電場 E_{ref} は，

$$E_{ref} = E_0[r_{cav}(\omega)J_0(\beta) + r_{cav}(\omega+\Omega)J_1(\beta)\mathrm{E}^{i|\omega+\Omega|t} - r_{cav}(\omega-\Omega)J_1(\beta)\mathrm{E}^{i|\omega+\Omega|t}]\mathrm{E}^{i\omega t}. \tag{4.3.7}$$

実際に PD で検出するのは光強度なので，

$$\begin{aligned}
P_{ref} &= |E_{ref}|^2 \\
&= P_c|r_{cav}(\omega)|^2 + P_s[|r_{cav}(\omega+\Omega)|^2 + |r_{cav}(\omega-\Omega)|^2] \\
&+ 2\sqrt{P_c P_s}[Re[r_{cav}(\omega)r^*_{cav}(\omega+\Omega) - r^*_{cav}(\omega)r_{cav}(\omega-\Omega)]\cos\Omega t \\
&+ Im[r_{cav}(\omega)r^*_{cav}(\omega+\Omega) - r^*_{cav}(\omega)r_{cav}(\omega-\Omega)]\sin\Omega t] \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

となる．これをミキサーによって I phase($\sin \Omega t$) で復調すると，$\sin \Omega t$ が掛かっている項が引き出されるのでエラー信号は，

$$\varepsilon = 2\sqrt{P_c P_s} Im[r_{cav}(\omega) r^*_{cav}(\omega + \Omega) - r^*_{cav}(\omega) r_{cav}(\omega - \Omega)] \tag{4.3.8}$$

となる．図 4.5 は PDH 法によるエラー信号をプロットしたものである．

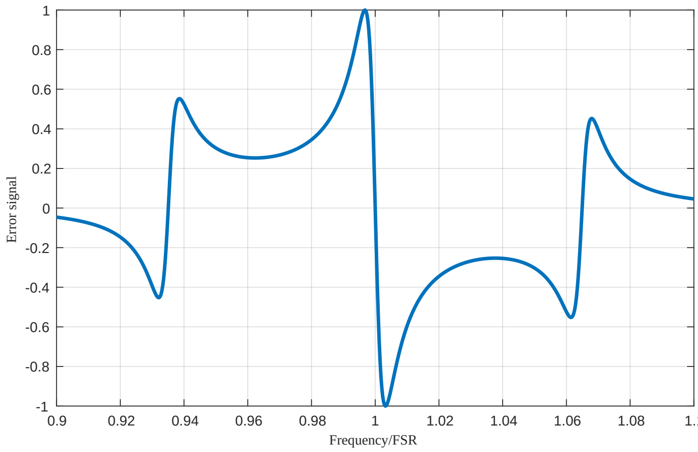

図 4.5　Fabry-Pérot 共振器のエラー信号

4.4　伝達関数測定

干渉計の挙動や安定性を評価するために伝達関数を測定を行う．図 4.6 は伝達関数測定の模式図で，H は干渉計の伝達関数，G はフィルターの伝達関数である．加算器を用いて制御系に信号として s を入力し

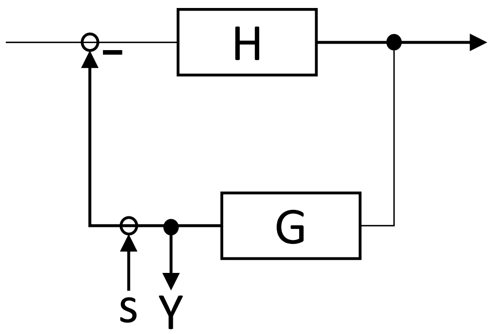

図 4.6　伝達関数測定

たとする．これを Y の位置で測定すると，

$$Y = -\frac{GH}{1+GH}s \tag{4.4.1}$$

となる．ここで，

$$C = \frac{GH}{1 + GH} \tag{4.4.2}$$

のことをクローズドループゲインと呼ぶ．クローズドループゲインとオープンループゲインは，

$$GH = \frac{1}{1 - C} \tag{4.4.3}$$

の関係があるので，クローズドループゲインを測定することで系のオープンループゲインを測ることができる．本実験では小野測器の CF-350z を使用して伝達関数を測定した．CF-350z は発信機が備わっており，また装置の中で 2 入力を演算する．測定器で生成された信号を制御系と測定器の ch.1 に入力し，Y の位置で測定した信号を測定器の ch.2 に入力した．図 4.7 は伝達関数測定の例として Michelson 干渉計の伝達関数を測定する際の模式図である．

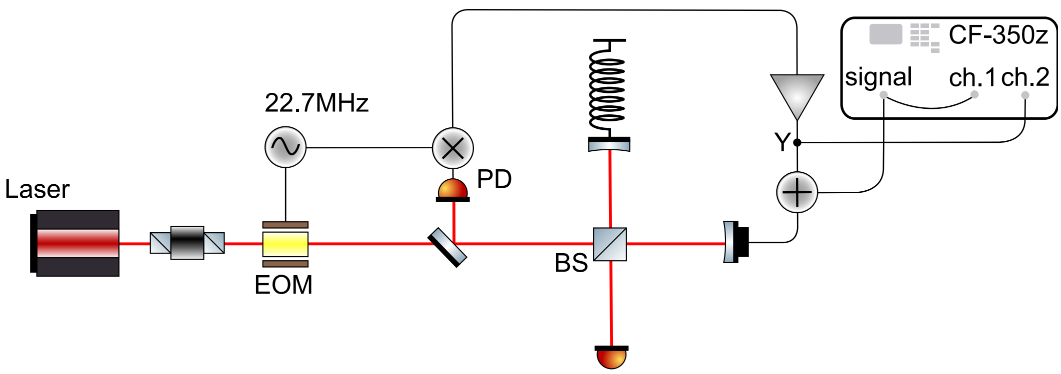

図 4.7　Michelson 干渉計の伝達関数測定

第 5 章

光パラメトリック増幅実験

本章では光パラメトリック増幅を用いた次世代干渉計の要である信号増幅実験について述べる．

5.1 ポンプ光の生成

光パラメトリック増幅に用いるポンプ光をメインレーザーの光を基本波として二次高調波発生 (SHG) を用いて生成した．SHG は光強度が高いほど変換効率が上がるため，光共振器を用いて基本波を溜め込むことで効率を上げることができる．SHG 共振器の構成は図の通りで，先行研究 [12] の設計より大きく変えていない．使用した非線形光学結晶は OPA で使用するものと同じである ppKTP を使用した．

5.1.1 SHG 共振器

SHG 共振器の構成は図 5.1 のように bow-tie 型の共振器となっている．共振器は PDH 法を用いてエラー信号をレーザーのピエゾに返すことで制御している．フロント鏡の反射率は 95% で，曲率鏡は 1064nm に対しての反射率は 99.9% 以上，532nm に対しての反射率は 5% 以下である．フィネスを測定したところ $\mathcal{F} = 128$ であった．

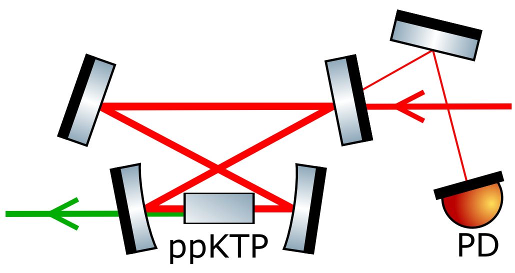

図 5.1　SHG 共振器

5.1.2　結晶温度決定実験

ppKTP などの擬似位相整合を用いた結晶は，結晶の温度を変えることで位相整合させる．結晶を共振器の中に設置した後に結晶温度を決定する実験を行った．結果を下に示す．図 5.2 は，基本波として

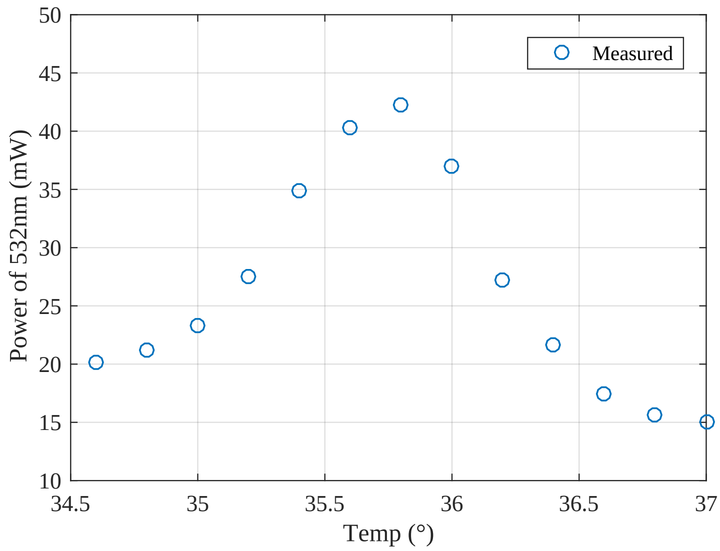

図 5.2　結晶の温度依存性

SHG 共振器に 200mW の 1064nm のレーザーを入射させ，SHG 共振器の後ろでパワーメーターを用いて 532nm の光の強度を，結晶の温度を 0.2 度ずつ変化させて測定したグラフである．グラフより 35.8 度を結晶温度として決定した．

5.1.3　二次高調波の強度の測定

共振器に入射する基本波の強度を変化させて，二次高調波の強度と変換効率を測定した．また，前節で見積もったロスから二次高調波の強度の理論曲線を計算し比較した．図 5.3 がその結果である．使用しているレーザーの最大強度が 500mW で，最大で 170mW のポンプ光を得ることが出来た．.

5.2　OPA 機構

光パラメトリック増幅は本研究において最も重要なシステムである．先行研究 [12] で光パラメトリック増幅が確認できなかった理由としてポンプ光とシグナル光のアライメントが不十分であったことが上げられていた．そこでこの問題について考えていく．

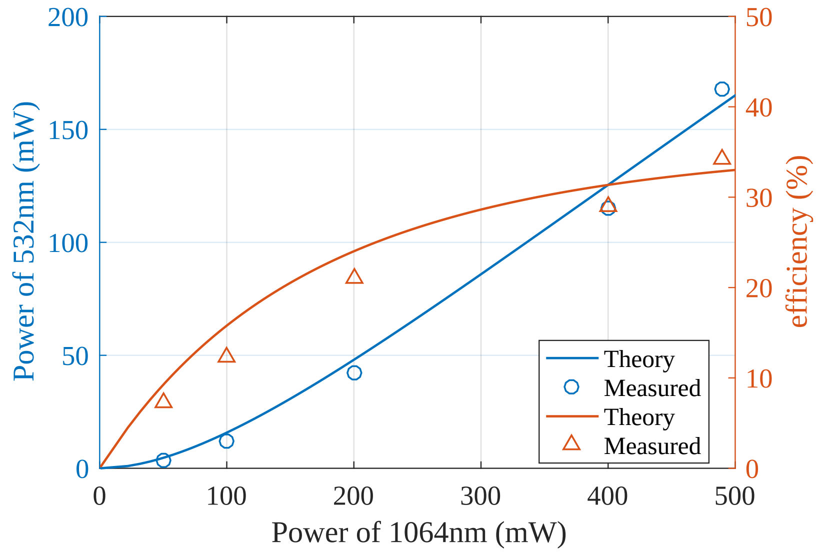

図 5.3　二次高調波の強度と変換効率

5.2.1　シグナル光とポンプ光のアライメント

使用している結晶は擬似位相整合を用いて位相整合させているためポンプ光とシグナル光は完全な同軸上で入射することが好ましい．OPA の結晶を設置する位置に，結晶を設置する前に図 5.4 のようなスライダーと CCD カメラから成る装置を組み立て，完全に 2 つのビームが結晶の中で重なるようにした．これはスライダー上を何度も往復させながら 2 つのビームの位置をモニタリングし，これをステアリング鏡で調整することで 2 つのビームを一致させることが出来る．その後この装置を取り除き結晶を設置した．

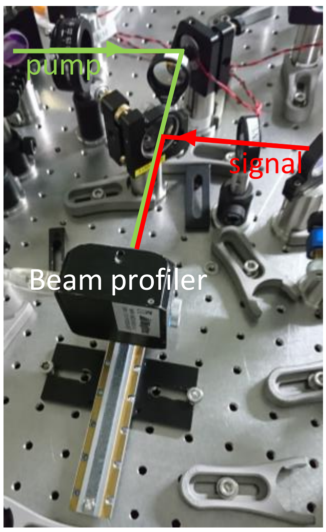

図 5.4　シグナル光とポンプ光のアライメント

5.2.2　結晶温度決定実験

二次高調波発生のときと同様に OPA で用いる結晶の最適な結晶温度を決定する実験を行った．結果を下に示す．図 5.5 は，基本波として OPA 結晶に 1064nm のレーザーを入射させ，結晶の後ろで光学フィ

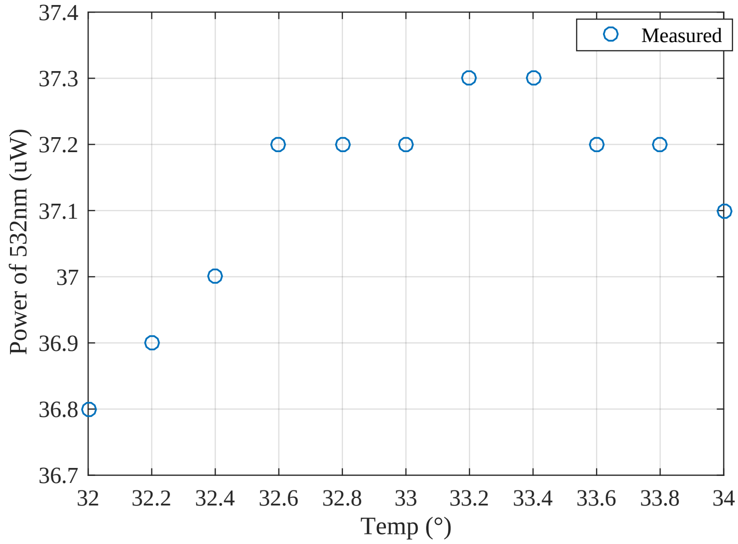

図 5.5　結晶の温度依存性

ルタを使い 532nm の光だけ取り出しパワーメーターを用いて測定したグラフである．グラフより 33.3 度を結晶温度として決定した．

5.2.3　結晶挿入によるロス

OPA の効率を計算値と比較するために測定結果から結晶挿入によるロスを見積もった．結晶の前後でパワーメータを用いてシグナルの光強度を測定し，結晶の吸収やオーブンでのクリッピングロスを求めた．測定において基本波であるシグナルが二次高調波になってしまうのを防ぐために，結晶は加熱せずまた基本波の強度を小さくし非線形光学効果を無視できるようにした．結晶の前後でそれぞれ 10 回光強度を測定し平均を求めると，結晶前の強度は 0.3156[mW]，結晶後の強度は 0.3119[mW] であった．これらから求められるロスは，

$$L = \frac{0.3156 - 0.33119}{0.3156} = 1.2 \times 10^{-2} \tag{5.2.1}$$

となった．先行研究 [12] において，SHG に用いている結晶のクリッピングロスは 2% であったが，SHG とは結晶は同じだがオーブンの形が異なり，また類似研究などにおいては PPKTP のロスを 1% 程度と仮定しているためこの測定値は妥当だと考えられる．

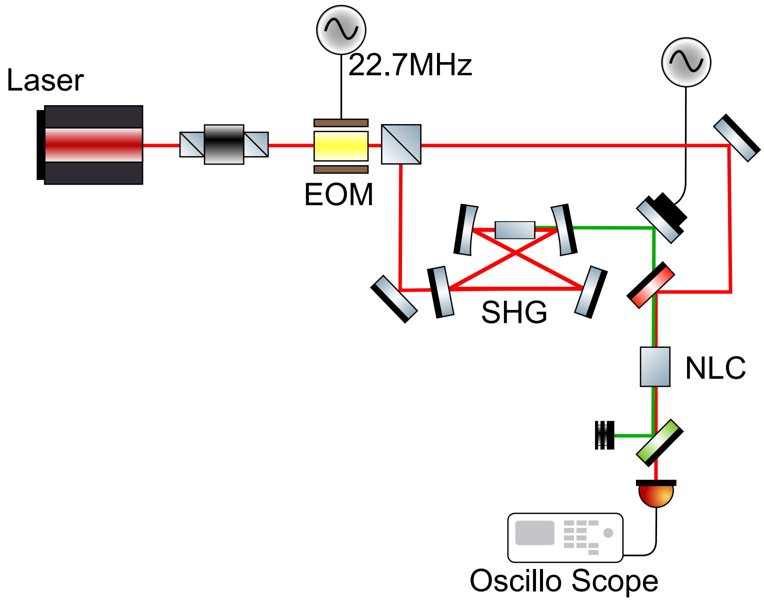

図 5.6　single pass OPA

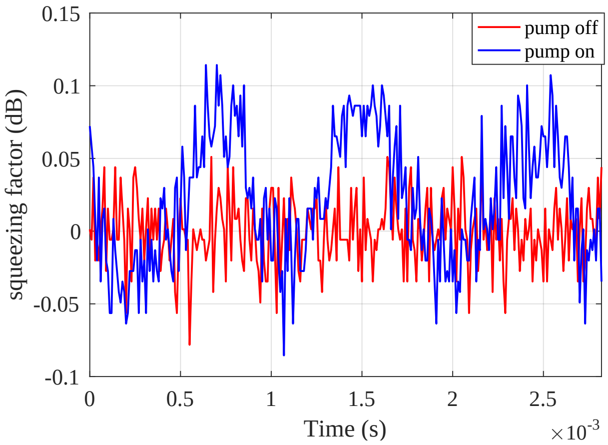

図 5.7　single pass OPA

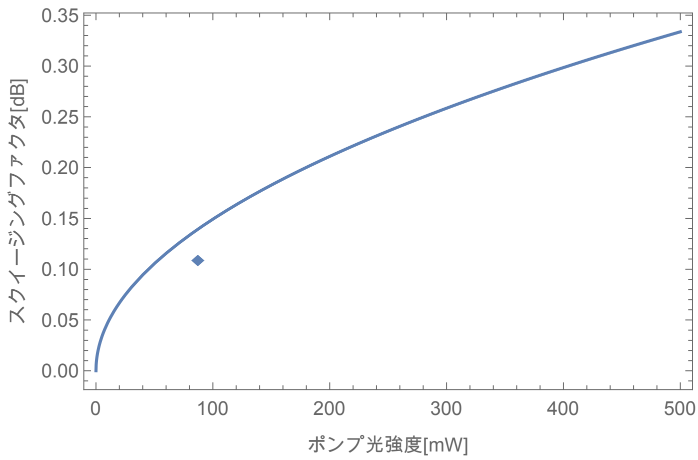

図 5.8　求めたスクイージングファクタと理論曲線

5.3　single pass OPA

OPA の効果を確認するために図 5.6 のようなシンプルな光学系を構築した．前節の方法を用い OPA のアライメントをとり，ポンプ光 86.8mW, シグナル光 6.21mW を結晶に入射させ結晶直後のシグナル光の光強度変化を PD で測定したところ図 5.7 のようになった．ここではポンプ光の光路上にあるピエゾ素子を揺らすことで，ポンプ光とシグナル光の相対位相を変化させている．またポンプ光の光路上にあるアイリスをシャッターのように使うことで，ポンプ光を結晶に入射させたりダンプさせることが出来るようになっている．図 5.8 は求めたスクイージングファクタと理論曲線を重ねたものである．

5.4 Michelson 干渉計の信号増幅

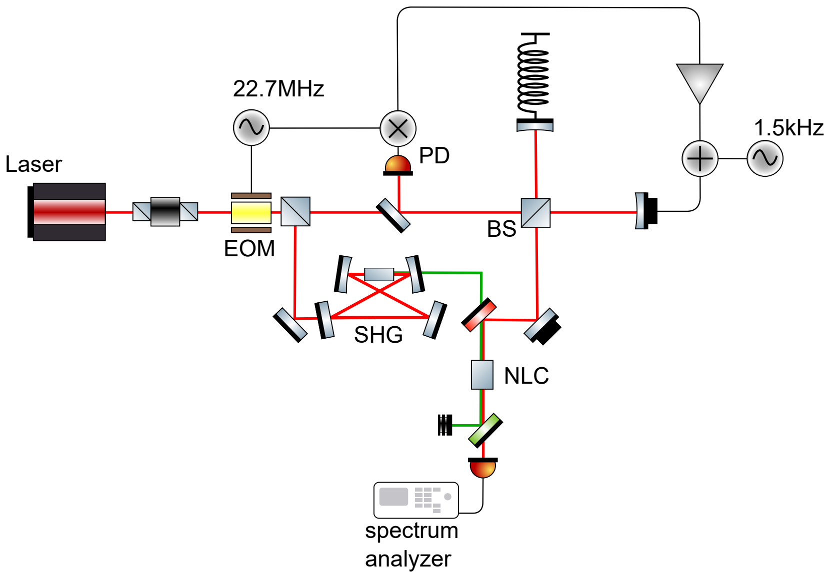

図 5.9　MI OPA

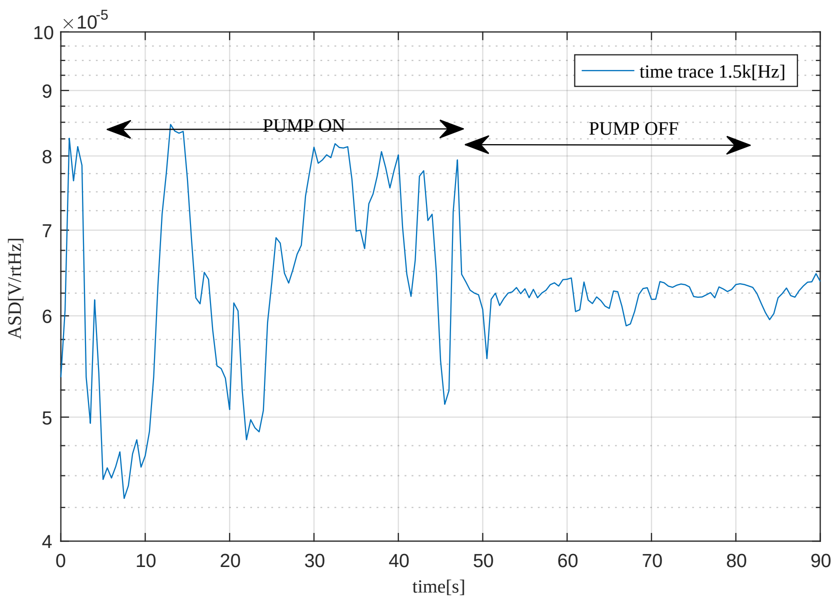

図 5.10　1.5kHz のシグナルの時間掃引

single pass OPA では振幅の増減から OPA の確認を行った．そこで次に信号の増減を確認するために Michelson 干渉計の AS ポートに非線形光学結晶を置き，Michelson 干渉計の腕にあるピエゾ素子をある周波数で振ることで，Michelson 干渉計からの信号が増減するかを確かめた．光学系は図 5.9 の通りである．Michelson 干渉計を制御した状態で腕にあるピエゾ素子を 1.5kHz 振り，結晶後のシグナルを PD

で検出し FFT アナライザーのタイムトレース機能を用いて 1.5kHz の信号の増減を測定した．ポンプ光 121.7mW, シグナル光 13.5mW を結晶に入射させた．single pass OPA の測定と同じように，ポンプ光の光路上にあるピエゾ素子は揺らしており，ポンプ光とシグナル光の相対位相を変化させている．pump on とは結晶にポンプ光を入射させている状態で，pump off とは結晶の直前でポンプ光をダンプし結晶には入射させてない状態である．図 5.10 より pump on と pump off では有意な差が現れている．ただ使用した FFT アナライザのタイムトレース機能はデータの取得が 2s 毎であるため，pump on のときの増減が正確にサンプリングできているとは言えない．そこでこの測定からはスクイージングファクターを求めない．

5.5　シグナルリサイクリング共振器内における OPA

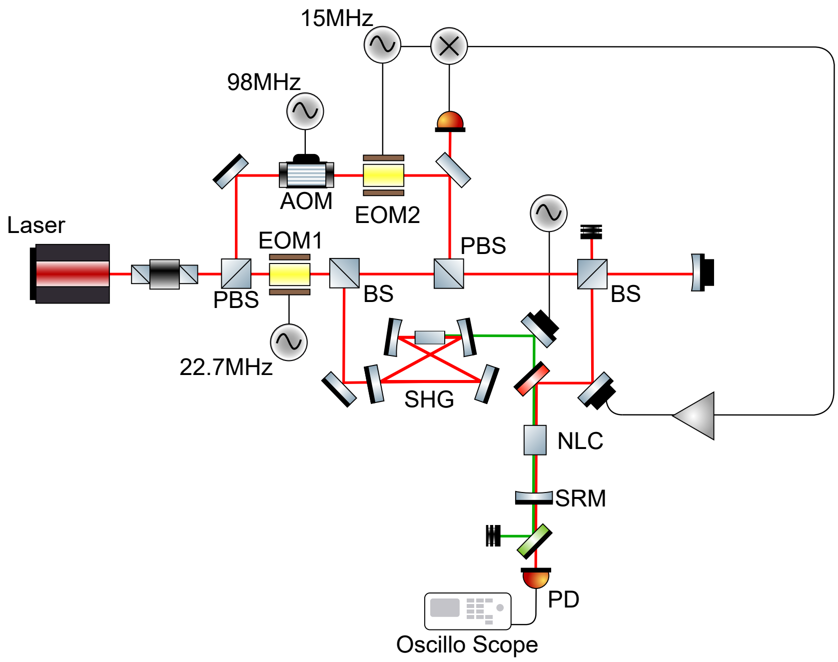

図 5.11　OPA in SRC cavity

これまでの 2 つの測定より single pass での OPA は確認できたため，共振器に入れた状態で OPA の確認を試みた．新しく共振器を作成するのはスペースの制約上難しかったため，シグナルリサイクリング干渉計のシグナルリサイクリング共振器を用いることにした．図 5.11 の光学系のように制御を簡単にするためにシグナルリサイクリング干渉計の片腕をブロックし，片腕のみのシグナルリサイクリング共振器を用いた．この共振器の特徴は，BS があるために入射光の 25 パーセントしかエンド鏡に行かずかなりロスの多い共振器である．共振器の光路にあるピエゾ素子を揺らし共振器のフィネスを測定したところ $\mathcal{F}$ = 3.35 であった．フィネス分だけ信号の増幅が大きくなれば共振器での OPA が確認できたことになる．sigle pass OPA のときと同様にポンプ光 88.3mW, シグナル光 43.5mW を結晶に入射させ共振器のエンド鏡直後のシグナル光の光強度変化を PD で測定したところ図 5.12 のようになった．ここでもポンプ光の光路上にあるピエゾ素子を揺らすことで，ポンプ光とシグナル光の相対位相を変化させている．図

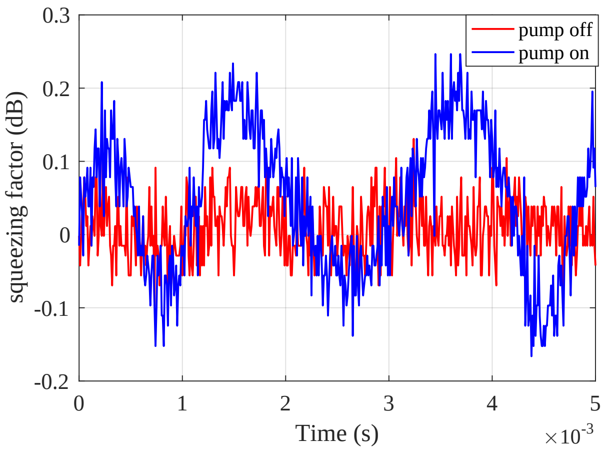

図 5.12　SR cavity OPA

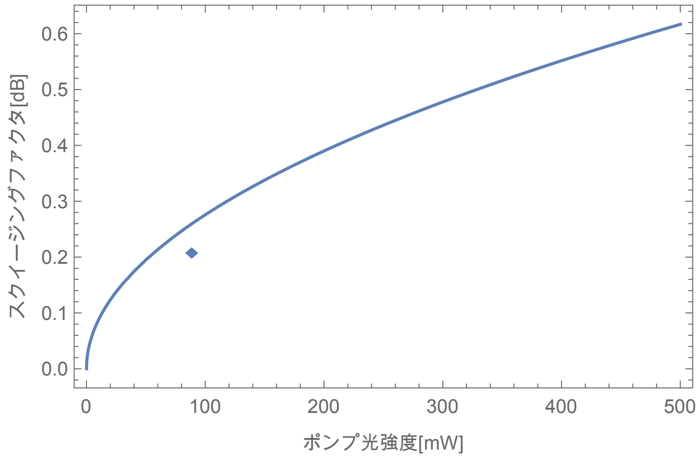

図 5.13　求めたスクイージングファクタと理論曲線

5.13 は求めたスクイージングファクタと理論曲線を重ねたものである．

5.6　OPA の位相 (スクイージング角) 制御

光パラメトリック増幅器は古典的にはシグナルとポンプ光の間の位相に敏感な増幅器として考えることが出来る．そのため干渉計の中で信号増幅器として使用するためには，常に信号を増幅させるような位相に制御する必要がある．特に縮退したシグナルとアイドラー光の場合，非線形光学効果の空間発展の式を $\omega_1 = \omega_2$ としてまとめると，

$$E^{(\omega_1)}(z) = E^{(\omega_1)}(0)\cosh\left(\frac{gz}{2}\right) + ie^{i\phi_3}E^{(\omega_1)*}(0)\sinh\left(\frac{gz}{2}\right) \tag{5.6.1}$$

となる．シグナル光の位相を ϕ_1 として，$E^{(\omega_1)} = |E^{(\omega_1)}|\mathrm{e}^{i\phi_1}$ と置くと，

$$|E^{(\omega_1)}(z)| = |E^{(\omega_1)}(0)||\cosh\left(\frac{gz}{2}\right) + ie^{i(\phi_3-2\phi_1)}\sinh\left(\frac{gz}{2}\right)| \tag{5.6.2}$$

となる．これは $\phi_3 - 2\phi_1 = \mp\frac{\pi}{2}$ のとき

$$|E^{(\omega_1)}(z)| = |E^{(\omega_1)}(0)|\exp\left(\pm\frac{gz}{2}\right) \tag{5.6.3}$$

つまり $\phi_3 - 2\phi_1 = \mp\frac{\pi}{2}$ の周りで線形なエラーシグナルを取得できれば OPA を制御することができる．

5.6.1　エラー信号の取得

位相変調法を用いた OPA 位相の線形信号取得を考える．レーザーに対し位相変調器 (EOM) もしくはピエゾを用いて位相変調をかける．この時電場は以下のように表わせられる．β は変調指数である．

$$E = E_0e^{i\omega_0 t} + \frac{\beta E_0}{2}e^{i(\omega_0+\Omega)t} - \frac{\beta E_0}{2}e^{i(\omega_0-\Omega)t} \tag{5.6.4}$$

非線形結晶には上式のようにサイドバンドを含む電場が入射したとする．非線形効果の空間発展の式を用いて各々の項ごとに計算すると以下のようになる．$\varepsilon = \frac{\beta E_0}{2}$ とした．

$$\begin{aligned} E_{out}^{(\omega_0+\Omega)} &= \varepsilon e^{i(\omega_0+\Omega)t}\cosh\left(\frac{gz}{2}\right) + ie^{i\phi_3}(-\varepsilon e^{-i(\omega_0-\Omega)t})\sinh\left(\frac{gz}{2}\right) \\ &= \varepsilon\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i(\omega_0+\Omega)t} - i\varepsilon\sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i[\phi_3-(\omega_0-\Omega)t]} \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

$$E_{out}^{(\omega_0-\Omega)} = -\varepsilon\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i(\omega_0-\Omega)t} + i\varepsilon\sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i[\phi_3-(\omega_0+\Omega)t]} \tag{5.6.6}$$

$$E_{out}^{(\omega_0)} = E_0\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i\omega_0 t} + iE_0\sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i(\phi_3-\omega_0 t)} \tag{5.6.7}$$

これらをまとめると，

$$\begin{aligned} E_{out}^{all} &= \varepsilon\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)(e^{i(\omega_0+\Omega)t} - e^{i(\omega_0-\Omega)t}) + E_0\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i\omega_0 t} \\ &\quad + i\left[-\varepsilon\sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i[\phi_3-(\omega_0-\Omega)t]} + \varepsilon\sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i[\phi_3-(\omega_0+\Omega)t]} + E_0\sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i(\phi_3-\omega_0 t)}\right] \\ &= E_0\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i\omega_0 t} + i\left[2\varepsilon\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i\omega_0 t}\sin\Omega t + \sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{i(\phi_3-\omega_0 t)}(2\varepsilon\cos\Omega t + E_0)\right]. \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

すると E_{out}^{all} の複素共役は，

$$E_{out}^{all\,*} = E_0\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{-i\omega_0 t} - i\left[2\varepsilon\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{-i\omega_0 t}\sin\Omega t + \sinh\left(\frac{gz}{2}\right)e^{-i(\phi_3-\omega_0 t)}(2\varepsilon\cos\Omega t + E_0)\right] \tag{5.6.9}$$

なので，検出される光強度 P_{det} を計算すると以下の通りである．

$$\begin{aligned} P_{det} &= |E_{out}^{all}|^2 \\ &= \left|E_0\cosh\left(\frac{gz}{2}\right)\right|^2 + 4\varepsilon^2\cosh^2\left(\frac{gz}{2}\right)\sin^2\Omega t + \sinh^2\left(\frac{gz}{2}\right)(2\varepsilon\cos\Omega t + E_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}E_0{}^2\sin(\phi_3 - 2\omega_0 t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sinh(gz)\cos(\phi_3 - 2\omega_0 t)\sin 2\Omega t \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon E_0\sinh(gz)[\sin(\phi_3 - 2\omega_0 t)\cdot\cos\Omega t + \cos(\phi_3 - 2\omega_0 t)\cdot\sin\Omega t] \end{aligned} \tag{5.6.10}$$

これを in phase(レーザーの位相変調と同じ $\sin\Omega t$) で復調したのがエラーシグナルなので $\sin\Omega t$ の項だけ取り出す．また，結晶に入射した時の signal の位相を $\omega_0 t = \phi_1$ とする．すると，

$$P_{demod}^{I} = \frac{\beta E_0{}^2}{8}\sinh(gz)\cos(\phi_3 - 2\phi_1) \tag{5.6.11}$$

となり，signal と pump の位相差によるエラーシグナルが得られる．

5.6.2 エラー信号取得実験

実験の性質上スクイージングファクターが大きいほどエラー信号の取得が容易なため，SR 共振器を用いた OPA の光学系を用いて実験を行った．図 5.14 のように位相変調機 (EOM) を用いてシグナルに 22.7MHz のサイドバンドを発生させ，共振器のエンド鏡の後ろにある PD で取得した信号を 22.7MHz の in phase で復調しその信号をオシロスコープで測定した．測定したエラー信号は図 5.15 の通りで，OPA による光強度の増減にあわせ信号が取れていることが分かる．信号強度は適当に規格化した．エラー信号

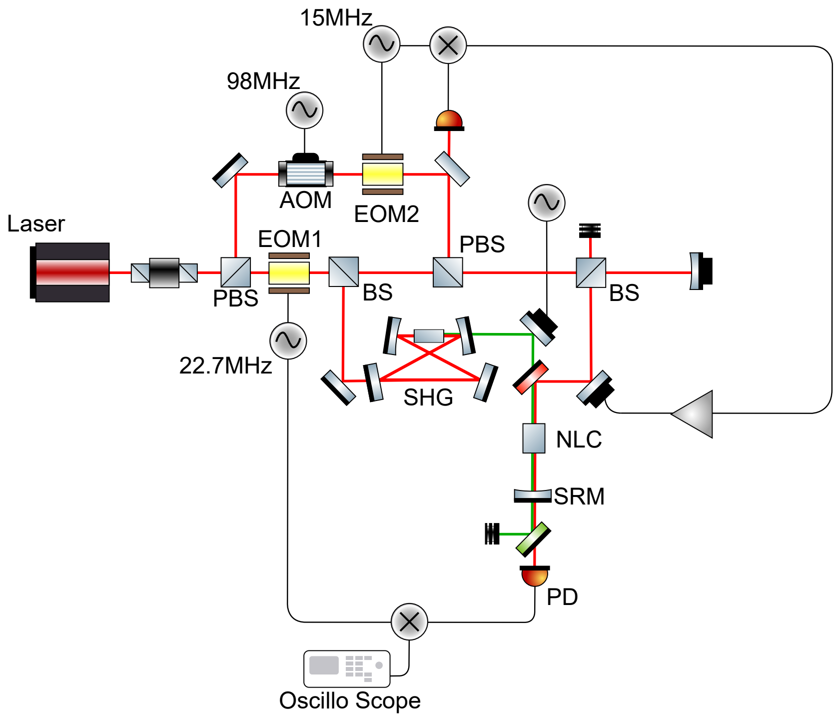

図 5.14　OPA の位相制御

を取得することが出来たが，実験系の他の部分で発生するノイズによって OPA の位相制御まで至ることが出来なかった．

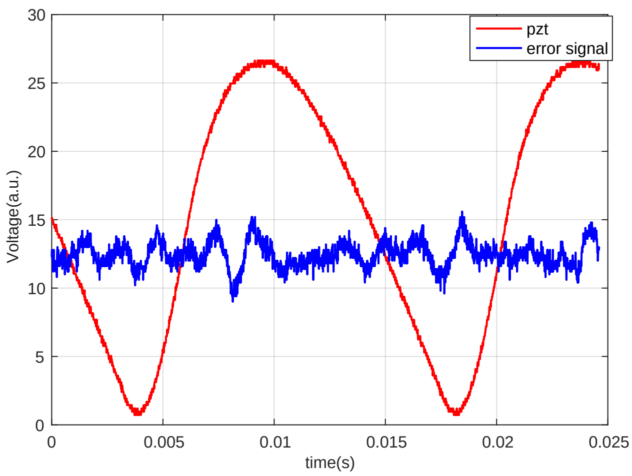

図 5.15　得られたエラー信号

第 6 章

懸架型干渉計の制御実験

前章に続いて次世代干渉計の直接的な原理検証に必要な実験について述べる．

6.1　微小鏡の懸架

共振器を離調し光ばねの効果を確認するには，低い機械復元力が要求されるので共振周波数が測定帯域よりも低い振り子などで懸架することが必要である．干渉計で使用しているすべての鏡を懸架して制御するのは難しいため，干渉計の片腕の折り返し鏡のうちの 1 つを懸架した微小鏡に変更した．折り返し鏡で使用すると輻射圧の効果は，折りたたみの入射角を θ とすれば，垂直に入射したときと比べ角度の分だけ損し，光の行きかえりの往復の分だけ得するため $2\cos\theta$ 倍になる．鏡は 200mg のものを使用した．本実験の懸架系として 2016 年に久富正博氏が開発を行ったサスペンション [15] を使用した．懸架系の外観と詳細は図 6.1，6.2 の通りである．これはこの実験で使用することを目的として開発されたもので，Longitudinal 方向の共振周波数はおよそ 11Hz で，Pitch と Yaw 方向に対しては硬いばねとなっている．そのため角度方向の制御をすることなく安定した共振器，干渉計を作ることが出来る．懸架系の外観や大きさは図の通りで，材質は PET で OHP シートを用いて作られている．

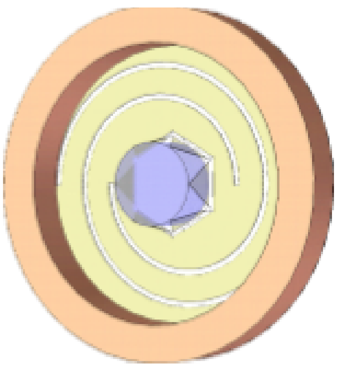

図 6.1　懸架系の外観

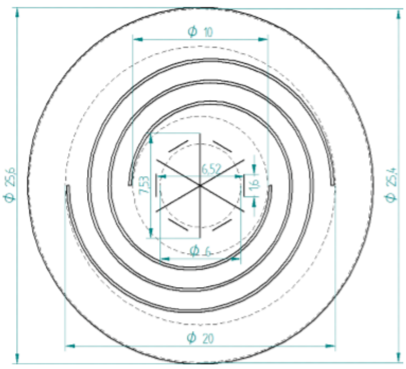

図 6.2　懸架系の詳細

6.2　懸架型 Michelson 干渉計の制御

Michelson 干渉計の腕にある折り返し鏡の 1 つを微小鏡に取替え，前節のサスペンションを用いて懸架した．光線の折り返しの角度は約 30 度に設定した．懸架型 Michelson 干渉計の光学系は図 6.3 の通りで

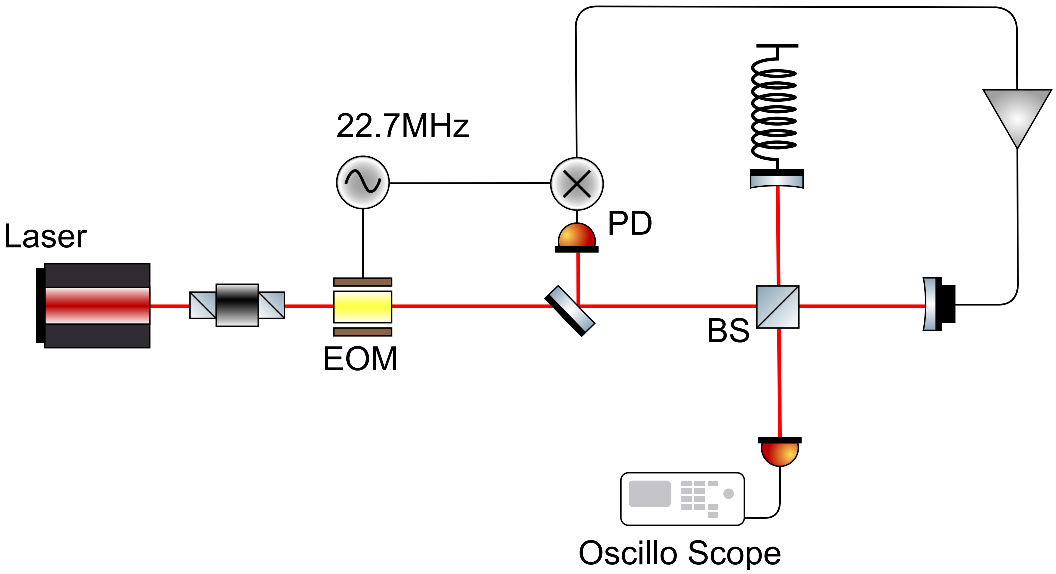

図 6.3　懸架型 Michelson 干渉計

ある．Michelson 干渉計の性能を評価する指標としてコントラストというものがある．これは干渉計の出力の最大強度 I_{max} と最小強度 I_{min} を用いて下のように書ける．

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{6.2.1}$$

今回構成した Michelson 干渉計のコントラストは 99.3% で懸架型においても十分なアライメントを得ることが出来た．

6.2.1　制御系

エラー信号は PDH 法を用いて取得し，refl ポートのフォトディテクターで干渉計の反射光を測定し，Q phase で復調した信号を干渉計の腕にあるピエゾ素子つきの鏡に返すことで制御を行った．EOM によってキャリアには 22.7Mhz の位相変調をかけた．使用しているピエゾ素子は約 2kHz に共振周波数を持っているため，ピエゾドライバの前に設置した SR560 でローパスフィルタを構成した．干渉計の制御中の refl ポートと AS ポートの光強度をモニターした結果が図の通りである．この図より懸架型の Michelson 干渉計が安定に制御できていることが分かる．また制御は 1 時間以上安定に継続することを確認した．

6.2.2　伝達関数測定

FFT アナライザ (CF-350z) を用いてフィルタ回路とピエゾドライバの間から swept sin 波を注入し，PDH 法で制御されたマイケルソン干渉計の周波数応答伝達関数を測定した．フィルタ回路には SR560

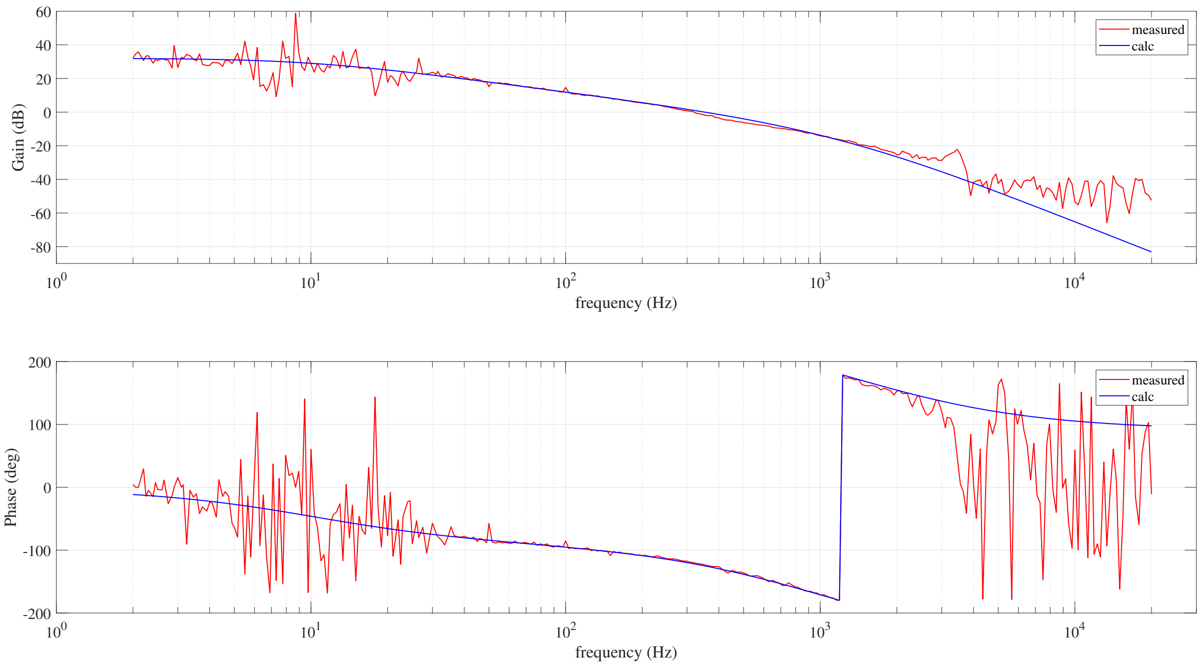

図 6.4　Michelson 干渉計の周波数応答伝達関数

を使用し，ゲインを 1×10^4 倍カットオフ周波数を 10Hz とした. 図 6.4 に測定結果を図示した．図から 300Hz 付近にユニティゲイン周波数があり位相余裕は 60 度で安定した制御が可能である．10Hz 付近のゲインは 30dB 程度である．20Hz 以下の低周波数帯域については，懸架系の共振周波数以下であって地面振動や音響雑音などの外乱が大きい帯域であり，また測定にも長時間かかるため正しくゲインと位相が測れていない．

6.3　懸架型シグナルリサイクリング干渉計の制御

前節の Michelson 干渉計の AS ポートに曲率つき鏡とシグナルリサイクリング鏡を追加しシグナルリサイクリング干渉計を構築した．曲率つき鏡の曲率やシグナルリサイクリング鏡の位置は先行研究 [12] と同様の位置に設置した．懸架型 Michelson 干渉計の光学系は図 6.5 の通りである．

6.3.1　シグナルリサイクリング共振器のエラー信号の取得

Michelson 干渉計は出力側 (AS ポート) に光が漏れでない (ダークフリンジ) ように制御するため，キャリア光にとって干渉計の反射率は 1 である．そのためシグナルリサイクリング共振器はアンダーカップリングとなり，共振器内にキャリアが入り込めずそのままだと共振器長が制御できない．これの解決策とし

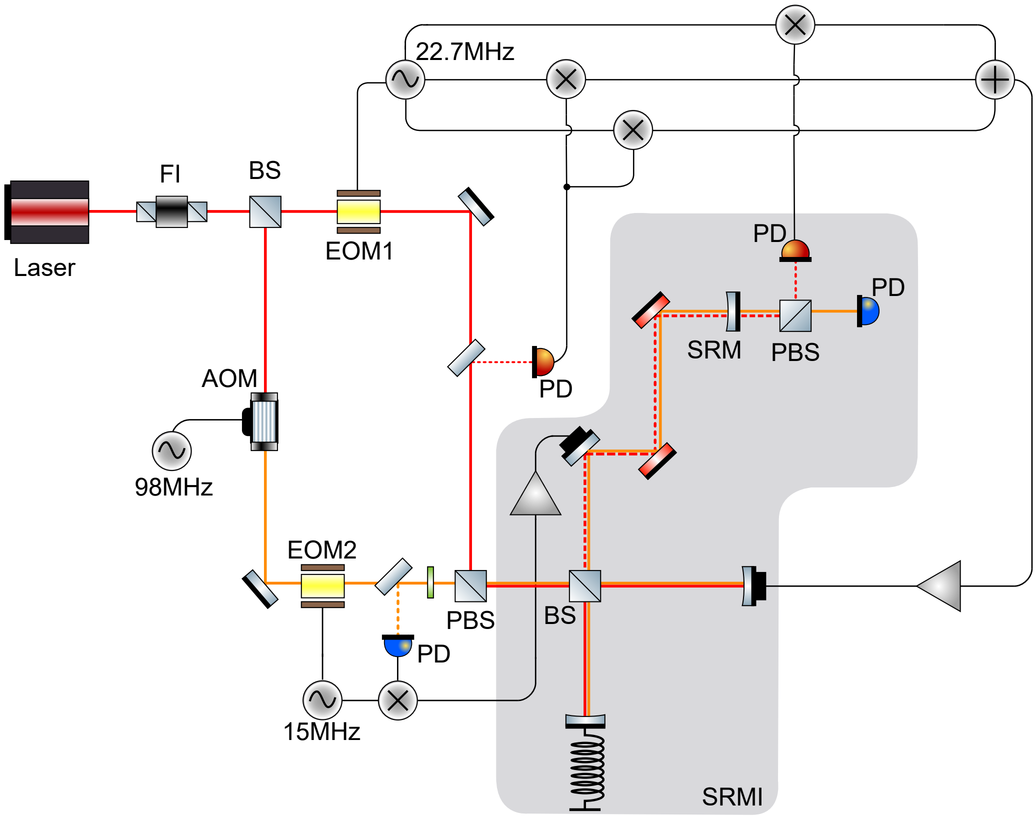

図 6.5　懸架型シグナルリサイクリング干渉計

て位相変調で発生させたサイドバンドを共振させる方法と，AOM を用いてサブキャリアを生成し，サブキャリアを共振させて制御する方法がある．サイドバンドを共振させる方法では，変調数波数を共振器のフリースペクトラルレンジに一致させればよい．共振器長を 1.814[m] とすると，必要な変調周波数はおよそ 82.69[MHz] となるが，高周波の光検出器の作成が難しい．またシグナルリサイクリング共振器の共振器長を長くすることでフリースペクトラルレンジを下げることが出来るが，共振器長が 10[m] と長くなってしまいテーブルトップ実験には不向きである．そこで本実験では AOM を用いたサブキャリアによって共振器長を制御する [12]．干渉計の腕の長さに差をつける (アシンメトリ) ことによって ω_{AOM} だけ周波数が異なる光に対する干渉計の反射率は式 (6.3.1) となる．

$$r_{MI} = \exp\left(i\frac{\Omega + \omega_{AOM}}{c}l\right)\cos\left(\frac{\omega_{AOM}}{c}d\right) \tag{6.3.1}$$

したがってサブキャリアはシグナルリサイクリング共振器内に進入することが出来るため，共振器長の情報を得ることが出来る．サブキャリアの偏光をキャリアと変え，AOM の変調周波数を 92[MHz] とすることで，キャリアとサブキャリアをシグナルリサイクリング共振器で同時共振させた．エラー信号はサブキャリアに EOM を用い 15[MHz] の位相変調をかけ，PDH 法で取得した．取得したエラー信号をシグナルリサイクリング共振器内のピエゾ素子つきの鏡に返すことで共振器長の制御を行った．

6.3.2　Michelson 干渉計の差動変位信号の取得

SR 共振器の共振状態によっては，Michelson 干渉計のダークフリンジ周りよりブライトフリンジ周りの信号の方が大きくなる．そのためダークフリンジでは安定な制御でもブライトフリンジでは位相余裕がなくなり不安定になるため制御への引き込みが難しい．この問題を解決するために先行研究 [12] では，Refl ポートで取得したエラー信号と AS ポートで取得したエラー信号を式**??**のように足し合わせ, 鏡にフィードバックすることで回避していた．今回の懸架型シグナルリサイクリング干渉計においてもこの方法を採用した．

$$\varepsilon = 100\varepsilon_{I,AS} + \varepsilon_{I,Refl} + \varepsilon_{Q,Refl} \tag{6.3.2}$$

6.3.3　伝達関数測定

FFT アナライザ (CF-350z) を用いてフィルタ回路とピエゾドライバの間から swept. sin 波を注入し，PDH 法で制御された SR 干渉計の周波数応答伝達関数を測定した．フィルタ回路には SR560 を使用し，

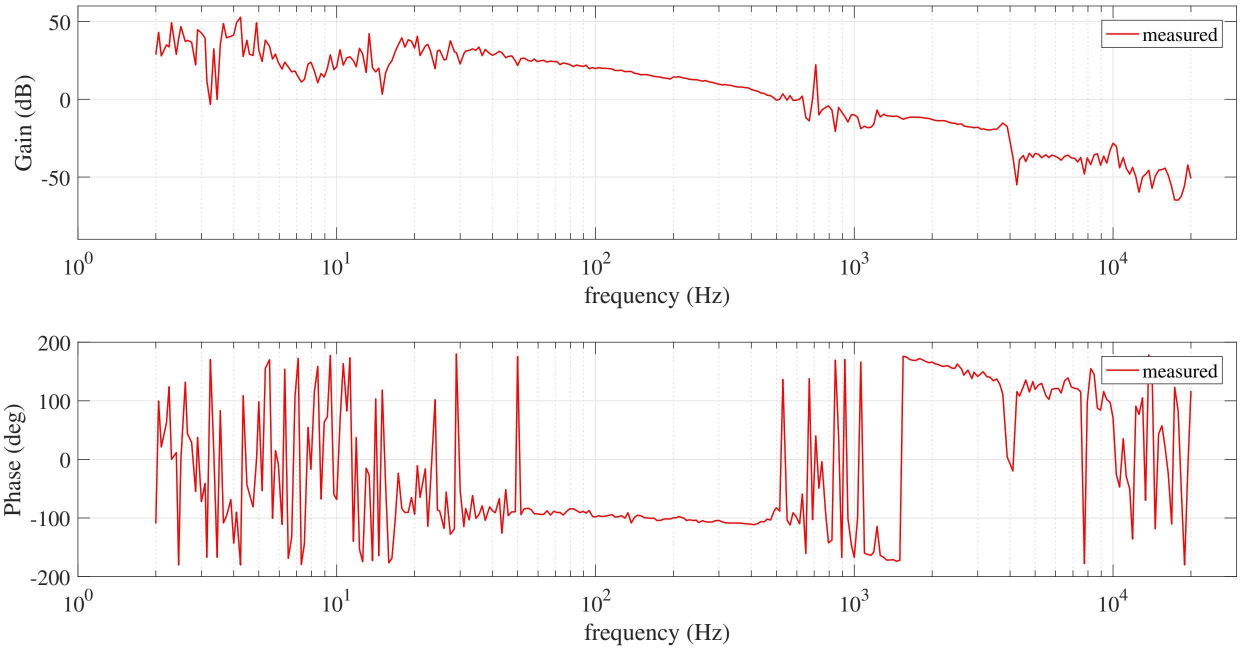

図 6.6　シグナルリサイクリング干渉計の周波数応答伝達関数

ゲインを 2×10^2 倍カットオフ周波数を 3Hz とした. 図 6.6 に測定結果を図示した．図から 600Hz 付近にユニティゲイン周波数があり位相余裕は 80 度で安定した制御が可能である．2Hz 付近のゲインは 40dB 程度である．20Hz 以下の低周波数帯域については，懸架系の共振周波数以下であって地面振動や音響雑音などの外乱が大きい帯域であり，また測定にも長時間かかるため正しくゲインと位相が測れていない．

6.3.4　光学ゲイン

シグナルリサイクリング干渉計のオープンループ伝達関数とマイケルソン干渉計のオープンループ伝達関数の比を光学ゲインと呼ぶ．測定結果から Michelson 干渉計とシグナルリサイクリング干渉計の伝達関数を比較した．Michelson 干渉計とシグナルリサイクリング干渉計では制御信号の取得方法が異なるので実際に比較するべき Michelson 干渉計の伝達関数は以下の式となる [12].

$$H_{MI}(f) = H_{MI} \cdot F(f) \cdot \tan\left(\frac{2\pi f_m l}{c}\right) \cdot 50\nu_{AS,I} \tag{6.3.3}$$

この式を用い比較したところ図 6.7 となり，シグナルリサイクリング干渉計のゲインが Michelson 干渉計に比べて上昇しており，測定結果から 10 から 20dB 程度と分かった．

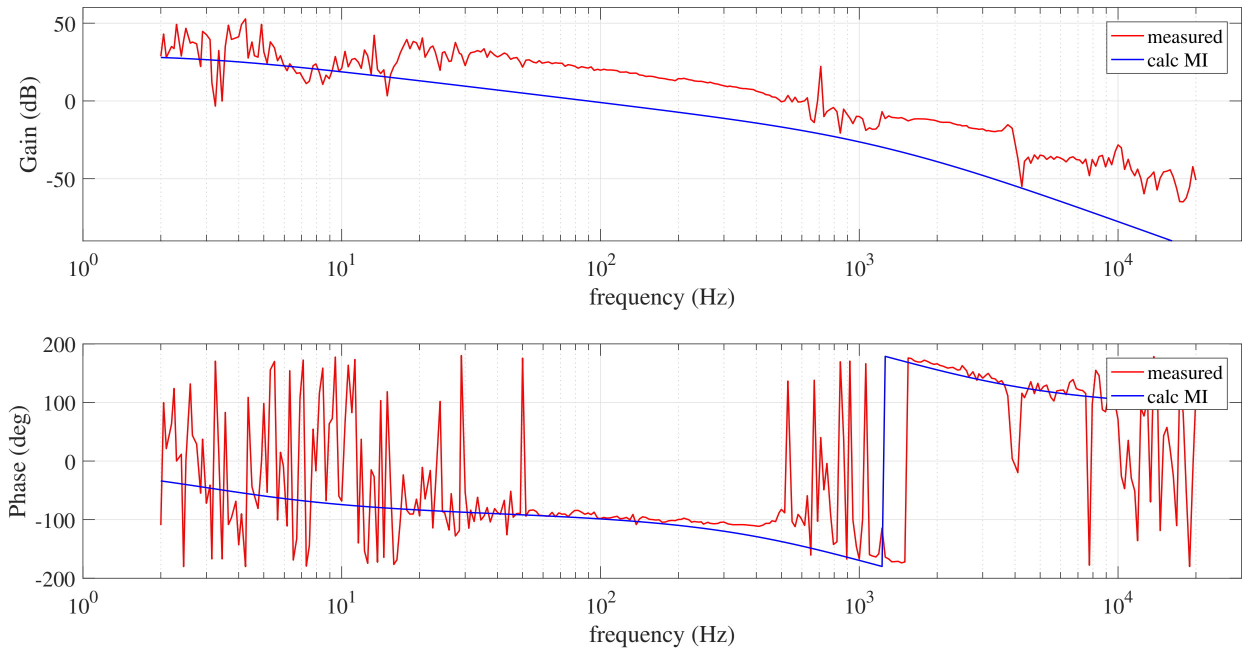

図 6.7　SR 干渉計の光学ゲイン

第 7 章

議論

7.1　OPA の位相ロック

OPA の位相制御実験においてエラー信号は取得できたが，実際に制御までもっていくことはできなかった．これは，エラー信号に 800mHz 周辺のノイズが含まれてしまっていたことが原因に挙げられる．このノイズの発生源を調べたところ，SHG で用いている結晶の温調だと分かった．SHG 共振器の長さ制御をレーザーの内部のピエゾ素子に直接返しているため，この温調由来のノイズがレーザーの周波数ノイズとなり OPA の位相制御のエラー信号に混入していた (図 7.1)．これを解消するためには共振器の長さ制御をレーザーに直接返すのではなく，共振器の鏡にピエゾなどのアクチュエータを取り付け制御することで混入を防げる．

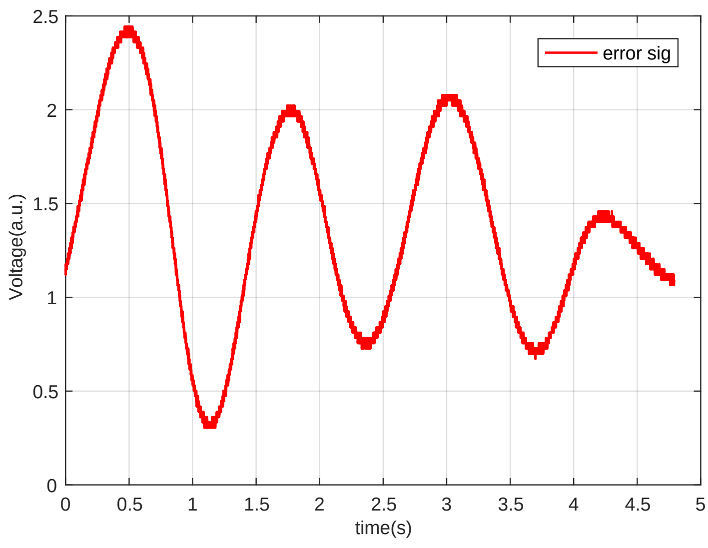

図 7.1　レーザーのピエゾに返されている SHG 共振器のエラー信号

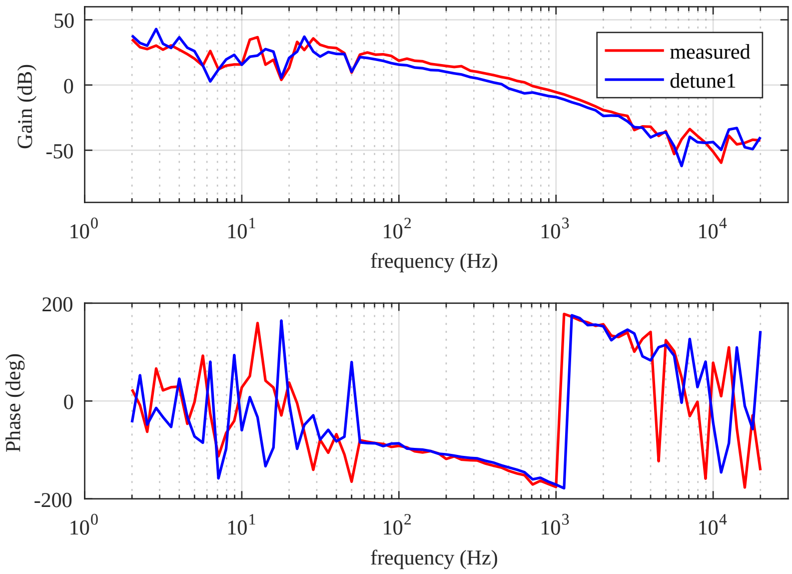

図 7.2　離調を変えた時のシグナルリサイクリング干渉計の伝達関数

7.2　SR 共振器の離調

シグナルリサイクリング共振器を離調した状態でシグナルリサイクリング干渉計の伝達関数を測定した結果が図 7.2 の通りである．離調の度合いを変化させ複数の状態で測定した．共振器を離調することで干渉計には光ばねが発生し，離調の度合いによって光ばねによるピークがシフトする．光ばねのピークが現れる 20-30Hz の周波数帯で離調したときと離調していないときを比べると，この区間のゲインにそれぞれ小さいピークがある．若干の差が生じているが，低周波において位相を上手く測ることは難しく今回の実験ではこれが光ばねのピークなのかは断定にまで至れなかった．この系において光ばねを観測することが出来れば，光パラメトリック増幅による信号の増幅は本研究で確認できているので，次世代干渉計の直接的な理論検証の完了となる．

7.3　参考実験:三角共振器の光ばね実験

今回構築したシグナルリサイクリング干渉計では，光ばねの効果を確認することが出来なかったが，宗宮研究室で行われている三角共振器を用いた光ばね実験ではこの効果を確認できている [16],[17]．この実験では今回使用したものと同じ懸架系が使われており，2 枚の平面鏡と 1 枚の曲率付きの微小鏡で構成されている．共振器長の制御は本実験とは異なり Hansch-Couillaud 法によって行われており，鏡の後ろにあるコイルにフィードバックしている．この結果から今回光ばねが観測できなかった理由として懸架系に起因するものではないことが分かった．

第 8 章

結論

光パラメトリック増幅を利用した次世代干渉計は，シグナルリサイクリング共振器の内部に非線形光学結晶を挿入することで，干渉計内部で電場を選択的に増幅することが可能であった．先行研究 [12] では，固定鏡でのシグナルリサイクリング干渉計の制御実験とポンプ光の生成，干渉計に非線形光学結晶を挿入した状態での制御まで成功していた．ただし非線形光学結晶を挿入した状態での制御実験では，光パラメトリック増幅の発生は確認されていなかった．本研究では先行研究からのステップを踏まえ，残された課題であった光パラメトリック増幅による信号増幅器の開発とその制御をメインに実験を行った．

非線形光学結晶として擬似位相整合素子である ppKTP を用いて，干渉計内における光パラメトリック増幅実験を行い，single pass では 0.13dB の増幅，共振器では 0.21dB の増幅を確認した．これらは理論値と比べて妥当な値だった．先行研究 [12] で課題であった非線形光学効果の自由度の 1 つである OPA の位相 (スクイージング角) の制御方法を考案し，エラー信号の取得まで成功したが制御までにはいたらなかった．

また，固定鏡で組まれていたシグナルリサイクリング干渉計の 1 つの鏡を懸架した微小鏡に変え制御を試みた．シグナルリサイクリング干渉計におけるシグナルリサイクリング共振器とマイケルソン干渉計の同時制御に成功し，固定鏡の干渉計と同様に制御のゲインは検証実験を進めていくのに十分なものを作成できた．シグナルリサイクリング共振器を離調し干渉計の伝達関数を測定したが，光ばねの効果を確認したと断言できるまでにはいたらなかった．

本研究室で行われている，同じ懸架系を使用した三角共振器の実験では光ばねの効果が確認できている．レーザーのハイパワー化や鏡の質量を軽くし，光の輻射圧による効果を高めることで近いうちに本実験系で [10] の理論を直接，実験的に検証することが可能だと考えている．

参考文献

[1] A.Einstein.Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. 1, 688 (1916).

[2] J.H.Taylor and J.M.Wesberg. Astrophys. J, 345 (1989).

[3] B.P.Abbott et al.Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016).

[4] B.P.Abbott et al.GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, Phys. Rev. Lett. 119, 161101 (2017).

[5] B.P.Abbott et al.Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger, Astrophys. J.848 (2017).

[6] K.Hotokezaka et al.Remnant massive neutron stars of binary neutron star mergers: Evolution process and gravitational waveform, Phys. Rev. D 88, 044026 (2013).

[7] B. S. Sheard et al.Observation and characterization of an optical spring,Phys.Rev. A 69, 051801 (2004).

[8] H.J.Kimble et al.Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics, Phys. Rev. D 65, 022002 (2001).

[9] J.Harms et al.Squeezed-input, optical-spring, signal-recycled gravitational-wave detectors, Phys. Rev. D 68, 042001 (2003).

[10] K. Somiya et al.Parametric signal amplification to create a stiff optical bar, Phys. Lett. A. 380,4,(2016).

[11] 加藤準平. 重力波望遠鏡における光ばねと非線形結晶を用いた信号増幅器のデザインとその検証 (修士論文).

[12] 片岡優. 非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発 (修士論文).

[13] 非線形光学結晶設置型重力波検出器の原理と光学損失の振る舞い (修士論文).

[14] 小森健太郎. 巨視的振動子の遠隔光冷却 (修士論文).

[15] 久富正博. 光ばね実験における懸架系の開発及びその性能評価 (卒業論文).

[16] 小田部荘達. personal communication.

[17] Mélodie Ribes. Prototype experiment for a next-generation gravitational wave detector.

[18] R.W.P.Drever et al.Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator, Appl. Phys. B 31, 97 (1983).

[19] B. シュッツ「相対論入門」丸善出版 (2010).

[20] 松岡正浩「量子光学」裳華房 (2000).

[21] M. フォックス「量子光学」丸善出版 (2012).
[22] 古澤明「量子光学の基礎」内田老鶴圃 (2013).
[23] A. ヤリーヴ，P. イェー「光エレクトロニクス」丸善出版 (2014).
[24] 黒田和男「非線形光学」コロナ社 (2008).
[25] D.F.Walls, G.J.Milburn「Quantum Optics 2nd Edition」Springer(2008).

謝辞

本修士論文は周りの方の多くの助けによって完成することが出来ました．改めてこの場で感謝の意を記したいと思います．

まず始めに大学院進学について理解をしめし，また学費などといった経済的な援助をして私が研究に打ち込むことが出来る環境を作ってくれた両親に感謝したいです．父は人に会うたびに自分のことを「大学院でわけのわからないことをやっている」などと面白半分で話していましたが，好きなことをやらせてくれまた温かく見守ってくれました．

指導教員である宗宮健太郎准教授からは，本研究テーマを与えていただいたほか，私の修士課程における研究生活の様々なことについて大変お世話になりました．修士から宗宮研究室に入った私がこうして重力波検出器に関する研究で修士論文を書くまでに成長することが出来たのは先生の指導のおかげです．また藤本眞克先生には研究室のゼミに参加頂き，そこでの議論や質問などで様々なことを学ばせていただきました．ありがとうございました．

研究室の方々にも大変恵まれました．去年卒業された粕谷順子さんとは KAGRA 用 OMC のアセンブリ作業を行い，そのときに自分の持っている知識や技術を総結集させトラブルを乗り越える姿勢を学ばせていただきました．また同じく去年卒業された柳沼拓哉さんとともに自分の実験について質問や相談に乗っていただきました．同期の久富君は修士から東工大に来た私に親切に東工大や研究室，授業などについて教えてくれたほか，研究室での様々な雑談に付き合ってくれました．修士 1 年の小田部君と中島君は私が宗宮研究室に入ったのと同じ時期に，学部 4 年生で入りましたが 2 人の実験力の高さや，ゼミなどでの鋭い質問は大変刺激になりました．また同じく修士 1 年の佐々木君とは KAGRA 用 OMC のアセンブリ作業の続きを東工大で一緒に行いました．神岡に持っていくまでのタイムリミットがある中様々なトラブルが発生し大変でしたが無事完成させることが出来ました．神岡でのインストール作業は私は 1 週間だけ参加しましたが，宗宮先生，小田部君，佐々木君との作業はものすごく濃密で忘れることが出来ない経験を積むことが出来ました．学部 4 年の井上君や留学生の Shaun 君，Mélodie さん，Liu 君とはゼミやミーティング，普段の研究室で有意義な議論をさせていただきました．技術支援員の前川さんには基礎事務のときから様々なことでお世話になりました．ありがとうございました．

最後に一昨年卒業された片岡優さんへの感謝を欠かすことは出来ません．私が 4 年生の後期から研究室ののゼミに参加させていただいた頃からお世話になり，自分がこの実験を進めることが出来たのは氏から引き継いだもののおかげです．使った光学系や電気回路などの多くは氏が組み立てたもので，スムーズに実験を行うことが出来ました．ありがとうございました．

本論文は，ここにお礼を述べた方々を含め，多くの人に支えられて完成しました．ここに深くお礼申し

上げます.