巨視的量子力学の検証に向けた
鏡振動子の反磁性浮上システムの開発とその性能評価

東京工業大学理学院物理学系物理学コース宗宮研究室
20M00403 栗林 誠

2022 年 2 月 9 日

はじめに

量子力学は微視的な系における重ね合わせ状態などといった特異な物理現象を記述するために生まれた。一方、巨視的な系に関して重ね合わせ状態といった現象はいまだに観測されることがなく、巨視的な系に対しても量子力学が成り立つかは未解決な問題である。よって、この巨視的量子力学の実験的検証が求められている。物質がその量子性を失う現象をデコヒーレンスといい、それは主に2つの要因が考えられている。1つ目は、巨視的な物質は微視的な物質に比べて環境とよく相互作用するためにデコヒーレンスするという説である。2つ目は、物質が自身の重力によってデコヒーレンスするという説であり、これは特に重力デコヒーレンスと呼ばれる。重力デコヒーレンスは物質がデコヒーレンスするまでの時間の質量依存性に関して複数のモデルがあり、その検証に向けてレーザー干渉計を用いた量子計測を様々な質量スケールで行う方法が考えられている。

レーザー干渉計を用いた巨視的量子力学の検証実験に必要な条件は、鏡振動子の位置測定精度を Heisenberg の不確定性原理から導出される標準量子限界に到達させることである。従来の懸架系鏡振動子ではその位置測定精度は懸架線の熱雑音によって制限され標準量子限界に到達できない。そこで、本研究では石英が反磁性物質であることに着目し、石英鏡を浮上させる磁場を作ることで懸架線を用いない反磁性浮上システムを開発した。ただし、鏡の反磁性効果は非常に小さく、その浮上には強力な磁場と磁場勾配が必要であるため、そのような磁場を作るために本研究では永久磁石と鉄を組み合わせたものを作成した。本実験で用いた石英鏡の質量は 2.3 mg であり、シミュレーションにより求めた永久磁石と鉄が作る磁場分布から浮上可能であることを示した。そして、実際に実験を行うことで 2.3 mg の石英鏡の浮上に成功した。また、様々な圧力下において振動を励起した浮上鏡の位置をレーザーを用いて測定し、圧力変化に対する鏡の振動の減衰の関係を実験的に観測することで鏡振動子の性能を評価した。

Abstract

Quantum mechanics was created to describe unique physical phenomena such as superposition states in microscopic systems.On the other hand, phenomena such as superposition states have not yet been observed for macroscopic systems, and it is still an open question whether quantum mechanics can be applied to macroscopic systems.Therefore, there is a need for experimental verification of this macroscopic quantum mechanics.The first is that macroscopic matter decoheres because it interacts better with its environment than microscopic matter. The second theory is that matter decoheres due to its own gravity, which is specifically called gravitational decoherence. There are several models of gravitational decoherence with respect to the mass dependence of the time it takes for matter to decohere, and methods of quantum measurement using laser interferometer at various mass scales are being considered to verify these models.

A necessary condition for the verification of macroscopic quantum mechanics using a laser interferometer is that the position measurement accuracy of the mirror oscillator should reach the standard quantum limit derived from Heisenberg's uncertainty principle. In conventional suspended mirror crystals, the position measurement accuracy is limited by the thermal noise of the suspended wires, and the standard quantum limit cannot be reached. In this study, we focused on the fact that silica is an diamagnetic material, and developed an diamagnetic levitation system that does not use a suspension line by creating a magnetic field to levitate the silica mirror. However, since the diamagnetic effect of the mirror is very small and a strong magnetic field and magnetic field gradient are necessary for its levitation, a combination of permanent magnets and iron was created in this research to create such a magnetic field. The mass of the quartz mirror used in this experiment was 2.3 mg, and the simulation results The mass of the silica mirror used in this experiment was 2.3 mg, and from the magnetic field distribution created by the permanent magnet and iron obtained by simulation, it was shown that the mirror could levitate. The mass of the quartz mirror used in this experiment was 2.3 mg. The position of the levitated mirror was measured using a laser under various pressures, and the performance of the mirror oscillator was evaluated by experimentally observing the relationship between the decay of the mirror vibration and the pressure change.

目次

第 1 章

背景

1.1 巨視的量子力学

量子力学は微視的な系における重ね合わせ状態などといった特異な物理現象を記述するために生まれた。一方、巨視的な系に関して重ね合わせ状態といった現象はいまだに観測されることがなく、巨視的な系に対しても量子力学が成り立つかは未解決な問題である。よって、この巨視的量子力学の実験的検証が求められている。物質がその量子性を失う現象をデコヒーレンス [1] といい、それは主に２つの要因が考えられている。1 つ目は、巨視的な物質は微視的な物質に比べて環境とよく相互作用するためにデコヒーレンスするという説である。2 つ目は、物質が自身の重力によってデコヒーレンスするという説であり、これは特に重力デコヒーレンス [2] と呼ばれる。重力デコヒーレンスは物質がデコヒーレンスするまでの時間の質量依存性に関して複数のモデルがあり、その検証に向けてレーザー干渉計を用いた量子計測を様々な質量スケールで行う方法が考えられている。
量子力学における重ね合わせ状態は、２つの量子状態 $|\psi_1\rangle$、$|\psi_2\rangle$ を用いて、

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \tag{1.1}$$

と表せる。ここで、c_1、c_2 は複素定数である。

この重ね合わせ状態の観測実験として有名なものがヤングの干渉実験（図 1.1）である。光源で発生させた光子はスリット A、B を通ってスクリーンで干渉させ、その干渉縞をみることで重ね合わせ状態を観測できる。ただし、スリットにセンサーを置いたとき、光子を検出する状態と検出しない状態が直交するため干渉縞が見えなくなることが知られている。

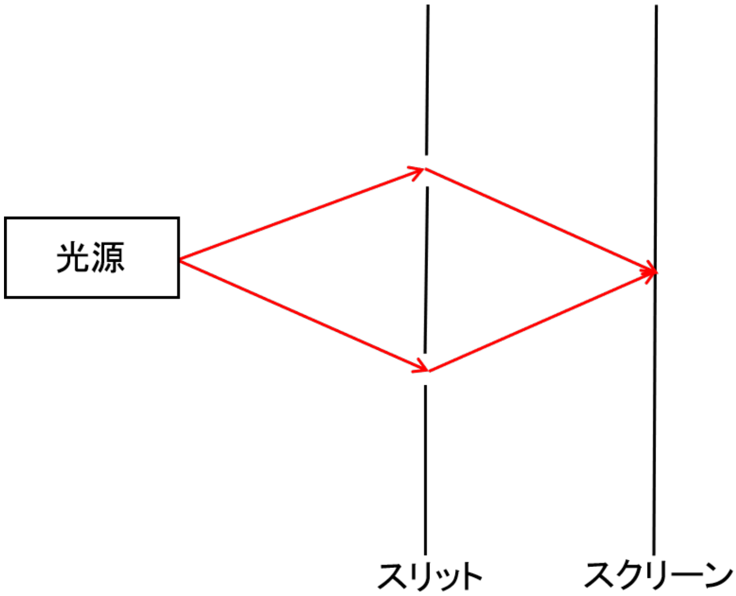

図 1.1　ヤングの干渉実験

一方、マクロな物質でこの干渉実験を行ったとき干渉縞を観測することは困難である。これはマクロな物質がスリットを通る際にスリットと相互作用して、スリットを通った状態と通らない状態が直交するためである。

1.2　標準量子限界

巨視的量子力学の検証には、その実験における位置測定精度を Heisenberg の不確定性原理から導出される標準量子限界（Standard Quantum Limit：SQL）に到達させることが必要である。

Heisenberg の不確定性原理は、位置の揺らぎを Δx、運動量の揺らぎを Δp、ディラック定数を $\hbar$ とすると、

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.2}$$

で表される。

一般的な振動子を位置測定する場合、その変位パワースペクトル密度は、

$$S_{\mathrm{SQL}}(\omega) = 2\hbar|\chi(\omega)| \tag{1.3}$$

となる。ここで、ω は角周波数、$\chi(\omega)$ は振動子の力から変位の感受率である。

1.3　雑音

巨視的量子力学の検証を行うためには、その実験における位置測定精度を標準量子限界に到達させることが必要である。つまり、実験系の古典雑音が量子雑音よりも小さくする必要がある。ここでは、そのような古典雑音が実験系に与える影響について述べる。

1.3.1 地面振動雑音

地面は常に振動しており、その振動が実験系を揺らすことで雑音となる。これは地面振動雑音と言われ、典型的な地面振動のスペクトルは、

$$\sqrt{S_{\mathrm{seis}}} = 10^{-7}\ (f < 1Hz) \tag{1.4}$$

$$\sqrt{S_{\mathrm{seis}}} = \frac{10^{-7}}{f^2}\ (f > 1Hz) \tag{1.5}$$

であることが知られている [3]。

1.3.2 振動子の熱雑音

振動子は常に熱浴とエネルギーをランダムにやり取りしている。揺動散逸定理より、振動子から熱浴へのエネルギー散逸が大きいほど熱浴から振動子への揺動も大きくなる。この揺動によって振動子の熱雑音が生まれる。この振動子の変位スペクトルを求める。

一般に振動子の運動方程式は、$F(t)$ を外力として、

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + kx = F(t) \tag{1.6}$$

とかける。ただし、m は振動子の質量、Γ は比例定数、k は機械的なばね定数で、

$$k = m\omega_m^2 \tag{1.7}$$

と書ける。ω_m は振動子の共振周波数である。

振動子の散逸 γ は、

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2m} \tag{1.8}$$

と表せるので、これを用いて式をフーリエ変換すると、

$$m(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_m^2)x(\omega) = F(\omega) \tag{1.9}$$

となる。揺動散逸定理より熱揺動力のスペクトル $S_{\mathrm{f,th}}$ は、

$$S_{\mathrm{f,th}} = 4k_{\mathrm{B}}T\gamma m \tag{1.10}$$

で表される [4]。ただし、k_{B} はボルツマン定数、T は温度である。

ここで振動子の感受率 χ は式 (1.9) より、

$$\chi(\omega) = \frac{x(\omega)}{F(\omega)} \tag{1.11}$$

$$= \frac{1}{m(\omega_m^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \tag{1.12}$$

であるから、振動子にスペクトルが $S_{\mathrm{f,th}}$ の外力が加わったときの変位スペクトル $S_{\mathrm{x,th}}$ は、

$$S_{\mathrm{x,th}}(\omega) = |\chi(\omega)|^2 S_{\mathrm{f,th}}(\omega) \tag{1.13}$$

$$= \frac{1}{m}\frac{4k_{\mathrm{B}}T\gamma}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_m^2} \tag{1.14}$$

となる。
散逸には損失角 ϕ に周波数依存性がある viscous モデルと、周波数依存性がない structure モデルの 2 種類がある。

$$\phi = \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_m Q}(\text{viscous}) \\ \frac{1}{Q}(\text{structure}) \end{cases} \tag{1.15}$$

ただし、Q は Q 値と呼ばれる無次元量であり、

$$Q = \frac{\omega_m}{2\gamma} \tag{1.16}$$

で定義される。散逸 γ に関しても同様に 2 つのモデルで分類され、

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\omega_m}{2Q}(\text{viscous}) \\ \frac{\omega_m^2}{2Q\omega}(\text{structure}) \end{cases} \tag{1.17}$$

と書ける。

1.3.3 鏡の熱雑音

鏡の熱雑音は、

$$S(\omega) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega}\left\{\frac{\phi_s}{\sqrt{\pi}\omega_{\mathrm{L}}}\frac{1-\nu_s^2}{Y_s} + \sum_c \frac{d_c\phi_c}{\pi\omega_{\mathrm{L}}^2}\frac{Y_c^2(1+\nu_s)^2(1-2\nu_s)^2 + Y_s^2(1+\nu_c)^2(1-2\nu_c)}{Y_s^2 Y_c(1-\nu_c^2)}\right\} \tag{1.18}$$

で表される [5][6]。ただし、ϕ は損失角、Y はヤング率、ν はポアソン比、d はコーティングの厚さ、ω_{L} はビーム半径である。式の第 1 項は基材の熱雑音、第 2 項はコーティングの熱雑音を表している。ここで、TiO_2-doped Ta_2O_3 が $N+1$ 層、SiO_2 が N 層の誘電体多層膜のコーティングを考える。層の厚さは各層の片道の光路長が $\lambda/4$ になるようにする。屈折率をそれぞれ n_1、n_2、鏡の反射率を r とすると、

$$N = \frac{\ln\left(\frac{n_2}{n_1^2}\frac{1+r}{1-r}\right)}{2\ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right)} \tag{1.19}$$

の関係がある。ビーム径 ω_{L} の決定方法を考える。規格化されたガウシアンビームの強度分布は、

$$P(r) = \frac{2}{\pi\omega_{\mathrm{L}}^2}\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_{\mathrm{L}}^2}\right) \tag{1.20}$$

である。ここで、鏡の半径を r_{m} とすると $r > r_{\mathrm{m}}$ のレーザーパワーは失われる。その割合は、

$$\int_{r_0}^{\infty} 2\pi r P(r)dr = \exp\left(-\frac{2r_{\mathrm{m}}^2}{\omega_{\mathrm{L}}^2}\right) \tag{1.21}$$

となる。つまり、レーザーパワーの損失量は鏡の半径とビーム半径の比 $r_{\mathrm{m}}/\omega_{\mathrm{L}}$ で決定される。共振器の場合、式で失われるレーザーパワーの量が透過によって失われるレーザーパワーの量よりも十分小さくする必要があるため、

$$\exp\left(-\frac{2r_{\mathrm{m}}^2}{\omega_{\mathrm{L}}^2}\right) \ll 1 - r^2 \tag{1.22}$$

を満たす必要がある。

1.3.4　懸架線の熱雑音

鏡を懸架する場合、その復元力は懸架線の張力だけでなく重力も含まれる。ただし、重力には散逸がないため懸架系の散逸は懸架線の素材の散逸よりも小さくなり、その懸架線の Q 値は素材の Q 値 Q_{m} を用いて、

$$Q = \frac{4l}{nr^2}\sqrt{\frac{mg}{\pi Y}}Q_{\mathrm{m}} \tag{1.23}$$

と表せる [7]。ただし、m は鏡の質量、g は重力加速度、l は懸架線の長さ、r は懸架線の半径、n は懸架線の本数、Y はヤング率である。これより、同じ素材の懸架線の場合、鏡を重くするほど、懸架線を細長くするほど Q 値は高くなる。

また、バイオリンモードという懸架線自身が弦振動することで発生する雑音もあり、これも考慮する必要がある。懸架系の共振周波数を ω_m、懸架線の質量を m_w、音速を $\nu = \sqrt{mgl/m_w}$ とすると、n 次のバイオリンモードの共振周波数が $\omega_n \simeq n\pi\omega_m\sqrt{m/m_w}$、換算質量が $\mu_n = \frac{m}{2}\{1+(\omega_n/\omega_m)^2/\cos^2(l\omega_n/\nu)\}$ であることを用いると熱雑音は、

$$S(\omega) = \sum_n \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\mu_n\omega}\frac{\omega_n^2\phi_n}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\omega_n^4\phi_n^2} \tag{1.24}$$

と書ける [8]。ただし、ϕ_n は n 次モードの損失角である。ϕ_n は次数にほとんど依存せず、ず基本の振り子モードの散逸の約 4 倍である [9]。 式 (1.24) からわかるように鏡を重くするほどバイオリンモードが高周波にシフトするため有利になる。

現状 mg スケールにおける最も Q 値の大きい振り子は直径 $1\mu m$、長さ 5 cm の石英ファイバーを用いたものである。この共振周波数は 2.2 Hz、Q 値は 2×10^6、鏡の質量は 7mg である。これと同じ振り子を用いて本修士論文で用いる約 2.3 mg の石英鏡を懸架した場合のスペクトルを図 1.2 に示した。また同時に鏡の熱雑音もプロットした。図 1.2 からわかるように、鏡の熱雑音が標準量子限界を下回る周波数帯域では懸架線の熱雑音が標準量子限界を上回っているため、結果的に古典雑音は全周波数帯域で標準量子限界より大きくなってしまう。

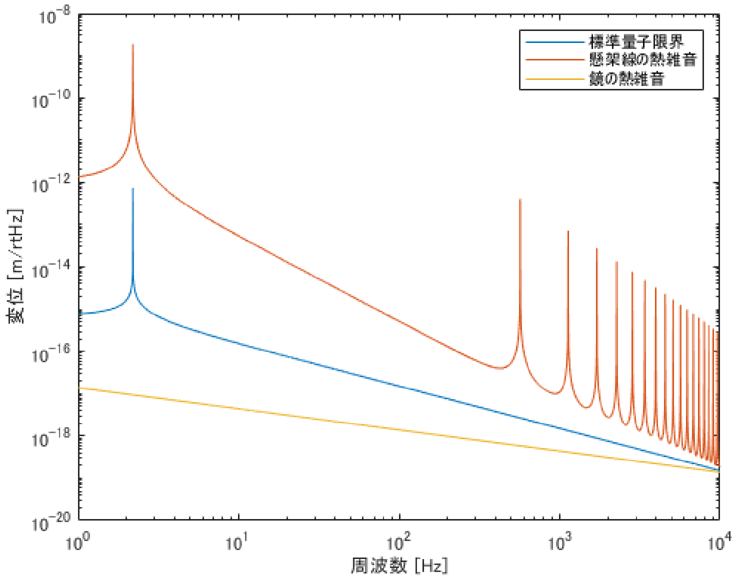

図 1.2　約 2.3 mg の石英鏡を懸架した場合の鏡の熱雑音と懸架線の熱雑音。鏡の反射率は 99% 、ビーム半径は 0.1 mm、鏡の物性値は表 1.1 を参照。

	石英（基材）	石英（コーティング）	TiO_2-doped Ta_2O_3
損失角 ϕ	1×10^{-6}	5×10^{-5}	2×10^{-4}
ポアソン比 ν	0.17	0.17	0.28
ヤング率 Y	73GPa	73GPa	140GPa
屈折率 n	1.45	1.45	2.07

表 1.1　コーティング鏡の物性値

第 2 章

反磁性体の磁気浮上

前節では機械光学系の位置測定実験における様々な雑音について述べ、mg スケールの鏡を懸架する場合、その懸架線の熱雑音が標準量子限界を上回ることが分かった。そこで、先行研究 [10] では、石英が反磁性体であることに着目し、永久磁石と鉄を適当に配置することで約 1 mg の石英を反磁性浮上させることに成功した。しかし、浮上実験に用いた 1 mg の石英は結晶を砕いて作成したものであり、形が歪であったために Q 値測定といった浮上系の性能を評価する実験を行うことが困難であった。本実験では、約 2.3 mg の石英鏡を用意し、その鏡が反磁性浮上できるように先行研究の反磁性浮上システムを改良した。本節では、まず反磁性浮上の原理について述べ、続けて反磁性浮上シミュレーションと実際に行った浮上実験について述べる。

2.1 磁性

一般に磁場中に置かれた物質は他の物質に対して引力や斥力を及ぼす。この現象を磁性という。これは電子が磁気モーメントをもっているためにあらわれるが、その磁気モーメントは電子の軌道運動と自転運動（スピン）に起因すると考えられている。

電子のスピンによって生じる磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{spin}}$ は、

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{spin}} = -2\mu_{\mathrm{B}}\boldsymbol{s} \tag{2.1}$$

と書ける。ただし、$\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/2m$ はボーア磁子、$-e$ は電子の電荷、m は電子の質量、$\hbar\boldsymbol{s}$ は電子のスピン角運動量である。

電子のスピンによって生じる磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{orbit}}$ は、

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{orbit}} = -\mu_{\mathrm{B}}\boldsymbol{l} \tag{2.2}$$

と書ける。ただし、$\hbar\boldsymbol{l}$ は電子の軌道角運動量である。

一般に単位体積当たりの磁気モーメントを磁化 $\boldsymbol{M}$ といい、

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Sigma_i \boldsymbol{\mu}_i}{V} \tag{2.3}$$

と書ける。一般に磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と外部磁場 $\boldsymbol{B}$、磁化 $\boldsymbol{B}$ の間には次のような関係がある。

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\right) \tag{2.4}$$

ただし、μ_0 は真空の透磁率である。
　磁性はその性質の種類によっていくつかに分類される。以下に主な磁性の種類をその性質とともに述べる。

強磁性

　隣り合うスピンが同じ方向を向いて整列し、全体として大きな磁気モーメントを持つ物質の磁性。

常磁性

　外部磁場がないときには各原子の磁気モーメントがばらばらな方向を向いているため全体では磁化を持たず、磁場を印加するとその方向に弱く磁化する磁性。

反強磁性

　隣り合うスピンがそれぞれ反対の方向を向いて整列し、全体として磁気モーメントを持たない物質の磁性。

フェリ磁性

　異なる大きさのスピンがそれぞれ反対の方向を向いて整列し、全体として磁気モーメントを持つ物質の磁性。

パウリ常磁性

　金属中の自由電子がもつ磁性。一般的にその磁化率は小さい。

反磁性

　外部磁場がないときには各原子は磁気モーメントも持たないため磁化を持たず、磁場を印加するとその反対方向に弱く磁化する磁性。

　磁場中に常磁性体または反磁性体が置かれたときに生じる磁化 $\boldsymbol{M}$ は、

$$\boldsymbol{M} = \frac{\chi}{\mu_0}\boldsymbol{B} \tag{2.5}$$

と書ける。ここで、χ は磁化率と呼ばれ、常磁性体の場合は $\chi > 0$、反磁性体の場合は $\chi < 0$ である。

2.2　磁気浮上の原理

　Earnshaw の定理によると、静電場中の荷電粒子は安定した平衡点を持たないことが示された [11]。しかし、W.Braunbek は電気双極子モーメントや磁気モーメントが静電場、静磁場中にのみ安定した平衡点が存在することを示した [12][13]。以下に静磁場中に磁性体が安定して浮上できる点が存在す

ることを示す。
自由空間中の静磁場 $\boldsymbol{B}$ に対して、ベクトル解析の公式より、

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{2.6}$$

が成り立つ。ここで、静的な Maxwell 方程式より、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} \tag{2.8}$$

を満たす。ただし、μ は透磁率、$\boldsymbol{j}$ は電流密度である。ここで、自由空間中の電流はゼロ（$\boldsymbol{j} = 0$）であるから、

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.9}$$

というラプラス方程式を満たすことがわかる。

静磁場 $\boldsymbol{B}$ を用いて磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の永久磁石を浮上させる場合を考える。磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ に磁場 $\boldsymbol{B}$ を印加したときのエネルギー U_{m} は、

$$U_{\mathrm{m}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{2.10}$$

となる。よって、体積 V の磁性体に磁場 $\boldsymbol{B}$ を印加したときのエネルギー U は、

$$U = -\int_0^B V d\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B} \tag{2.11}$$

$$= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \boldsymbol{B}^2 \tag{2.12}$$

となる。したがって、磁性体が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける力 $\boldsymbol{F}$ は、

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{2.13}$$

$$= \frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla \boldsymbol{B} \tag{2.14}$$

となる。

ポテンシャル U の安定条件は、

$$\nabla^2 U > 0 \tag{2.15}$$

である。ここで式を用いると

$$\nabla^2 U = -\nabla^2(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{2.16}$$

$$= 0 \tag{2.17}$$

となる。これはポテンシャル U に極大値、極小値がともに存在せず、安定した浮上点が存在しないことがわかる。

体積 V、磁化率 χ の常磁性体または反磁性体の場合、式 (2.16) は、

$$\nabla^2 U = -\frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla^2 \boldsymbol{B}^2 \tag{2.18}$$

$$= \frac{\chi V}{2\mu_0} (2(\partial_i B_j)^2 + 2\boldsymbol{B} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{B}) \tag{2.19}$$

$$= \frac{\chi V}{\mu_0} (\partial_i B_j)^2 \tag{2.20}$$

となり、$\chi < 0$ である反磁性体であればポテンシャルの安定条件 $\nabla^2 U > 0$ を満たすことがわかる。

次に密度 ρ の十分小さい反磁性体が安定して浮上可能な条件を求める。鉛直方向上を z が正の方向とした円筒座標を用いると、安定した浮上条件は、

$$\frac{\partial F_r}{\partial r} < 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} < 0 \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{F} = 0 \tag{2.23}$$

となる。式を用いると安定した浮上条件は、

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}^2}{\partial r^2} > 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}^2}{\partial z^2} > 0 \tag{2.25}$$

$$B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\mu_0 \rho g}{\chi} \tag{2.26}$$

と書き換えられる。式はそれぞれ水平方向の安定条件、垂直方向の安定条件、磁力と重力のつり合いの条件を表している。一般的に反磁性体の磁化率の絶対値は小さいため、反磁性浮上には大きな磁場と磁場勾配の積が必要であることがわかる。

2.3 磁化率

主な反磁性物質の反磁性浮上にかかわる物性値である磁化率と質量密度、またそれから求められる反磁性浮上に必要な磁場因子 $B_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$ を表 2.1 にまとめた。

	磁化率 $-\chi$ ($\times 10^{-5}$)	密度 ρ_m [g/cm^3]	磁場 $\nabla \boldsymbol{B}^2$ [-T^2/m]
熱電解グラファイト	45	2.2	60
グラファイト	16	2.2	170
ビスマス	17	9.8	710
エタノール	0.72	0.79	1400
水	0.90	1.0	1400
メタノール	6.66	0.79	1500
エチレングリコール	0.90	1.1	1500
アセトン	0.57	0.78	1700
石英	1.4	2.2	2000
ダイヤモンド	2.2	3.5	2000
アクリル	0.67	1.2	2200
テフロン	1.0	2.2	2600
酸化アルミニウム	1.8	4.0	2700
窒化ケイ素	9.0	3.2	4400
銀	2.4	10.5	5400
水銀	28	14	6200
金	3.5	19.3	6900
鉛	15.6	11	8700
シリコン	0.33	2.3	8900
銅	0.97	9.0	11000

表 2.1　主な反磁性物質 [14, 15, 16, 17]

2.4　反磁性浮上システム

先行研究では 1mg の石英の浮上に成功した [10]。当時は mg スケールの石英鏡を作成するのが困難であったために石英のかけらを用いた。しかし、石英のかけらの形が歪なためその浮上体の性能を評価するための実験を行えなかった。本修士論文では直径 1.5 mm、厚さ 0.6 mm、質量およそ 2.3 mg の円柱型の石英鏡（図 2.1）を用意し、先行研究のセットアップを一部変更することでその浮上を目指す。

まず、先行研究のセットアップについて述べる。

磁石は図 2.2 のような扇型のネオジム磁石を図のように配列することで構成されている。それぞれの扇型ネオジム磁石は図 2.3 の中心方向に磁化しており、全体としてみると磁石配列の中央部分に磁場が集中するようになっている。さらに、透磁率が高く磁場を引きつけやすい鉄で作られた鉄芯を配列した磁場の中央の穴に差し込むことでさらに磁場を中心に集中させることができる。ここまでで反磁性浮上に必要な大きな磁場 B_z を得ることができる。加えて大きな磁場勾配 $\partial B_z/\partial z$ をつくるために図 2.4 のようにこれらの上に中央に穴の開いた鉄板を配置する。鉄板の高さは鉄板を支えている 3 つのねじを回すことで調節できる。これにより鉄芯の端から鉛直上方向に向かう磁場は鉄板に引きつけられ、鉄芯で大きな磁場勾配 $\partial B_z/\partial z$ をつくることができ、この部分で反磁性浮上させる。

本修士論文で用いる石英鏡のサイズに合わせて先行研究の鉄板の穴の直径を 3mm に変更した。変更後のセットアップの横からの断面図と磁場分布を図 2.5 に示した。座標は原点を鉄芯の上端の中央とした円筒座標を用いた。また、図 2.5 を作製する際に用いたコードを Listing2.1 に示した。ネオジム磁石の残留磁束密度と保持力に関しては株式会社二六製作所のホームページ [18] に掲載されている値を用いた。また、鉄の B-H 曲線は Poisson のデフォルト値を用いた。

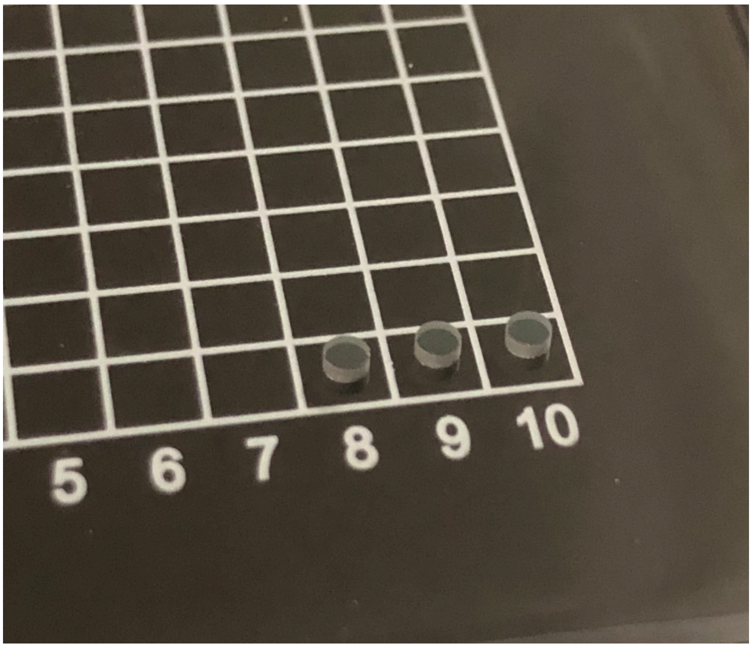

図 2.1　2mg の石英鏡

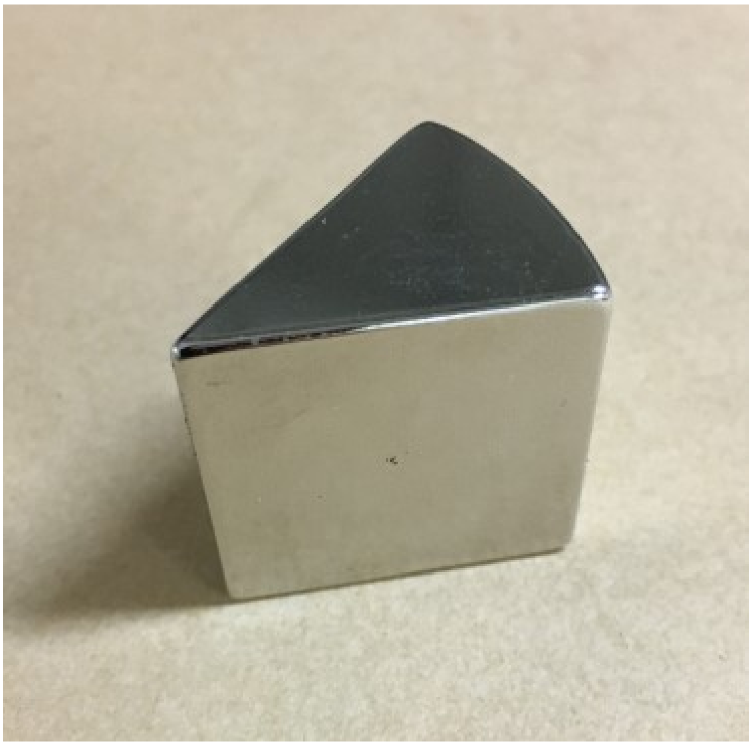

図 2.2　ネオジム磁石

図 2.3　配列されたネオジム磁石

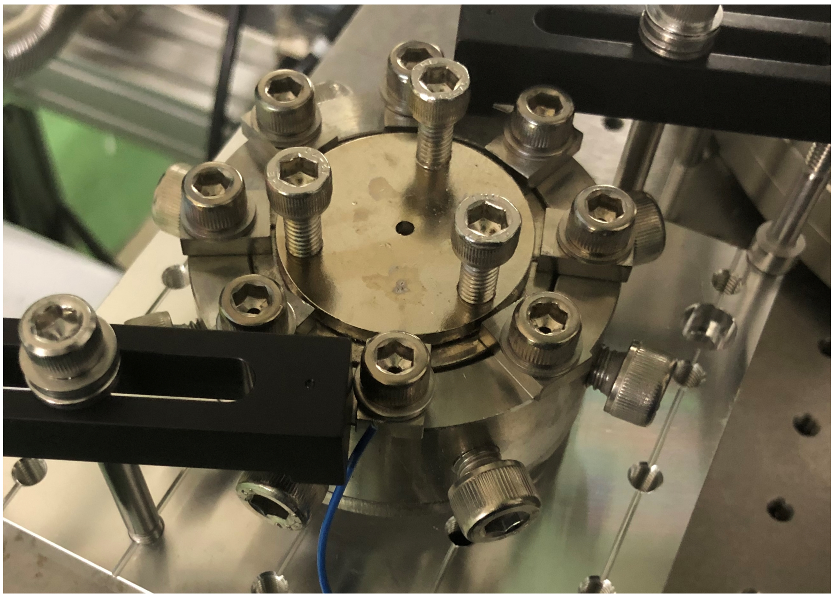

図 2.4　反磁性浮上システム

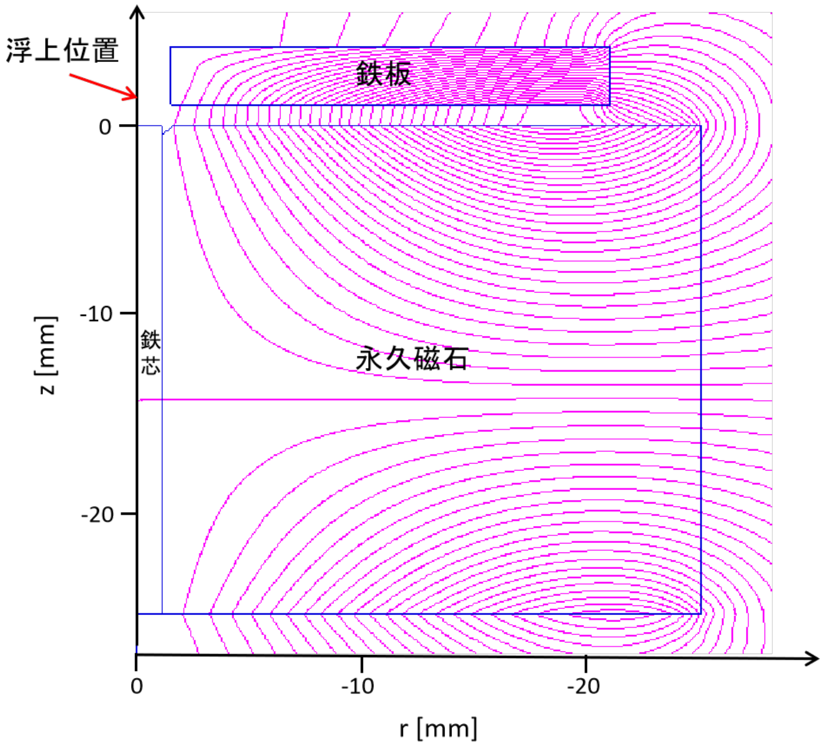

図 2.5　反磁性浮上システムの断面図と磁場分布

Listing 2.1　反磁性浮上システム

```
&reg kprob=0,
mode=0,
icylin=1,
xreg=2.5
```

```
kreg=-1,250
kmax=40
yreg=-2.5,0.5
lreg=-1,25,300
lmax=25

nbslo=0,
nbsup=0,
nbslf=0,
nbsrt=0
xminf=0,xmaxf=0
yminf=-6,ymaxf=4 &

&po x=0,y=-6 &
&po x=6,y=-6 &
&po x=6,y=4 &
&po x=0,y=4 &
&po x=0,y=-6 &

&reg mat=7,mshape=1,mtid=1 &
&po x=0.165 ,y= 0 &
&po x=2.5 ,y= 0 &
&po x=2.5 ,y=-2.5 &
&po x=0.115 ,y= -2.5 &
&po x=0.115 ,y= -0.05 &
&po x=0.165 ,y= 0 &

&reg mat=2 &
&po x=0.16 ,y= 0.1 &
&po x=2.1 ,y= 0.1 &
&po x=2.1 ,y=0.4 &
&po x=0.15 ,y= 0.4 &
&po x=0.15 ,y= 0.11 &
&po x=0.16 ,y= 0.1 &

&reg mat=3 &
&po x=0.105 ,y= 0 &
&po x=0 ,y= 0 &
&po x=0 ,y=-2.5 &
&po x=0.115 ,y= -2.5 &
&po x=0.115 ,y= -0.01 &
&po x=0.105 ,y= 0 &

&mt mtid=1
aeasy=180,
gamper=1,
```

```
hcept=-10800,bcept=12800. &
```

2.5 反磁性浮上シミュレーション

静磁場シミュレーションソフト Poisson を用いて鉄板と磁石のギャップが 1.0 mm のときの鉄芯の上付近の磁場分布のカラーマップを作製した。座標は図 2.5 と同じである。

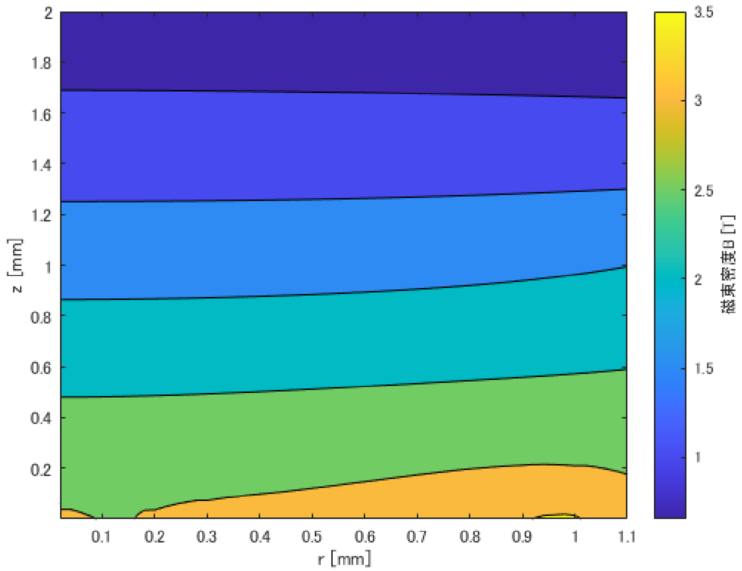

図 2.6　磁束密度

前々節の結果から安定した反磁性浮上には磁力と重力のつり合いと水平方向の安定条件、垂直方向の安定条件が必要であることがわかった。先ほどの磁場シミュレーションの結果をもとにこれらの条件を順にシミュレーションして確認していく。まず、磁力と重力のつり合いのシミュレーションをする。図 2.7 に本修士論文で用いた石英鏡の浮上力シミュレーションの結果を示した。縦軸は磁力を重力で規格化したもので、横軸は鉄芯上端から鏡の中心の高さである。縦軸の値が 1 である高さが磁力と重力がつり合う高さ、つまり反磁性浮上可能な高さとなる。シミュレーション結果から高さ約 1.2 mm で浮上可能であることがわかる。

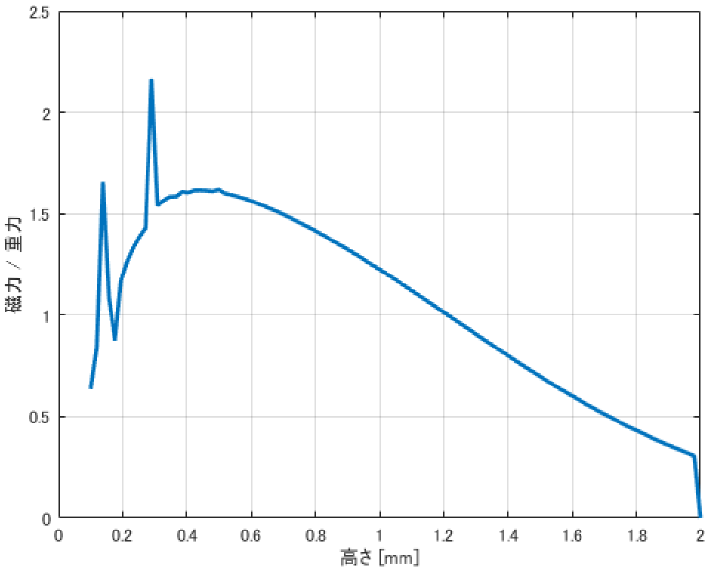

図 2.7　磁力

次に水平方向の安定条件と垂直方向の安定条件をシミュレーションする。今回行ったシミュレーションは、鏡を水平方向または垂直方向にわずかに動かしたときに鏡が受ける力を計算し、その値を用いてから動かした方向の共振周波数を計算する。この水平方向と垂直方向のミュレーション結果を図 2.8、2.9 にそれぞれ示した。縦軸は共振周波数、横軸は鏡の中心高さである。共振周波数の正負はばね定数の正負に対応しているため、共振周波数が正であるときその方向は安定しているとわかる。先ほどの浮上力シミュレーションで浮上可能な高さ 1.2 mm での値を見ると、水平方向と垂直方向のどちらの共振周波数も正であるから水平方向と垂直方向のどちらも安定して浮上できることがわかる。石英鏡の反射面に垂直な方向の振動の共振周波数は図 2.9 から約 16 Hz であることがわかる。

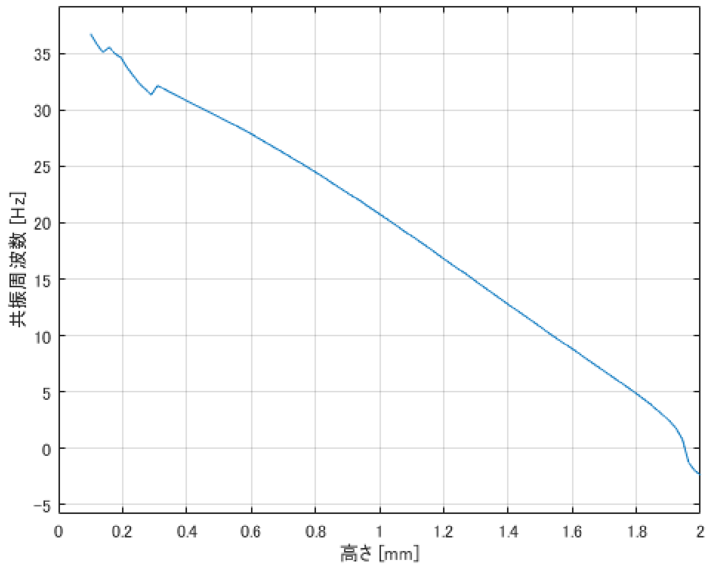

図 2.8　水平方向の共振周波数

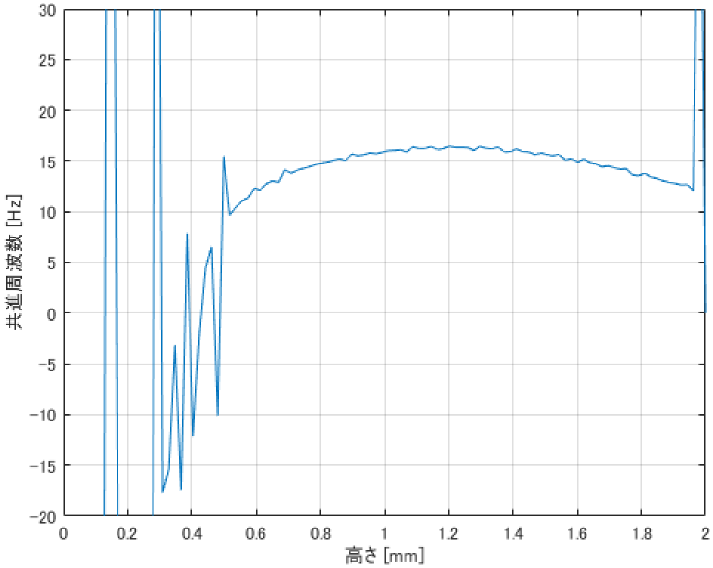

図 2.9　垂直方向の共振周波数

2.6　反磁性浮上実験

前節のシミュレーション結果より、本修士論文で用いる石英鏡は磁石と鉄板のギャップを 1 mm にしたとき安定して反磁性浮上できることがわかった。実際の浮上実験でもギャップの値を 1 mm にして行った結果、約 2.3 mg 石英鏡の浮上に成功した。浮上しているようすを上からと横から撮影

した画像を図 2.10、2.11 に示した。

図 2.10　上から撮影された浮上鏡

図 2.11　横から撮影された浮上鏡

石英鏡を浮上させる際に静電気対策のために、石英鏡を静電気を貯めにくい竹製のピンセットで掴み、イオナイザ（ER-F12SA）の風に数分間あて続けた。イオナイザからはプラスイオンとマイナスイオンが噴射されており、石英鏡がプラスに帯電している場合はマイナスイオンが、マイナスに帯電している場合はプラスイオンが吸着し徐々に中和されていく。イオナイザの風にあてた後、鉄板の穴の上から石英鏡をリリースすることで安定した浮上位置にトラップされる。

図 2.11 から浮上中心高さを見積もると 0.9 mm と前節のシミュレーション結果の値よりも低い位置となった。この原因として、石英鏡が完全に中和していない可能性や実際に磁石や鉄でつくられる磁場分布がシミュレーション結果と異なる可能性などが挙げられる。後者に関しては、実際に使っている磁石や鉄に傷や汚れ、ごみなどが付着してるためなどが考えられる。実際のセットアップの浮上位置付近の磁場の測定は鉄板の穴が小さいため困難であり、今回は見送った。

第 3 章

残留ガス雑音

本修士論文の反磁性浮上システムの浮上鏡を振動子として用いた場合、主要な雑音として残留ガス雑音が考えられる。残留ガス雑音とは、完全に真空でないため真空槽内の残留ガス分子が浮上鏡に衝突することで発生する雑音である。この章では残留ガス雑音を理論的に求め、またシャドーセンシング法で反磁性浮上システムの浮上鏡の Q 値を実際に測定し、その性能を評価する。

3.1 ガスダンピング

気体分子が振動子に衝突することで振動子のエネルギーが散逸することをガスダンピングという。ガスダンピングは viscous damping の一種である。この節ではガスダンピングの減衰率を評価する [19]。

分子数密度 n のガス（圧力 $P = nk_BT$）中に共振周波数 $\omega_\mathrm{m}/2\pi$ の振動子がある場合を考える。大気の粘性を無視できると仮定すると、分子速度の標準偏差を v_mol としたときの単位時間あたりの振動子と分子の平均衝突回数 $\bar{N}$ は、

$$\bar{N} \simeq n v_\mathrm{mol} S \tag{3.1}$$

である。ここで、分子 1 つの質量を m_mol とし、熱平衡状態を仮定した場合、

$$v_\mathrm{mol} \simeq \sqrt{\frac{k_BT}{m_\mathrm{mol}}} \tag{3.2}$$

と表せる。よって式 (6.55) と式 () より、

$$\bar{N} = nS\sqrt{\frac{k_BT}{m_\mathrm{mol}}} \tag{3.3}$$

となる。振動子と分子の衝突を弾性衝突と仮定すると、振動子の片側から τ 秒間に N_τ 個の分子が衝突することによって振動子に加わる力 F は、

$$F = 2m_\mathrm{mol}v_\mathrm{mol}\frac{N_\tau}{\tau} \tag{3.4}$$

となる。

ここで、分子数密度 n が小さく、振動子と分子の衝突確率がポアソン分布に従うと仮定する。このとき、τ 秒間に振動子と分子が衝突する平均回数 $\bar{N}_\tau$ は、

$$\bar{N}_\tau = \bar{N}\tau \tag{3.5}$$

であるから、その標準偏差 σ_N は、

$$\sigma_N = \sqrt{\bar{N}_\tau} = \sqrt{\bar{N}\tau} \tag{3.6}$$

となる。分子が衝突することによって振動子に加わる力の分散 σ_F^2 は、

$$\sigma_F^2 = 2\left(2m_{\mathrm{mol}}v_{\mathrm{mol}}\frac{\sqrt{\bar{N}\tau}}{\tau}\right)^2 \tag{3.7}$$

$$\simeq 8k_BTnSm_{\mathrm{mol}}v_{\mathrm{mol}}\Delta f \tag{3.8}$$

となる。ここで、振動子の両面における分子の衝突は無相関であるとして、分散を 2 倍した。また、$\Delta f \equiv 1/\tau$ は測定帯域幅である。

衝突による力のパワースペクトル密度 S_F が定数であることから、測定時間内における分散 σ_F^2 は、

$$\sigma_F^2 = 2\int_0^{\Delta f} S_F df = 2S_F\Delta f \tag{3.9}$$

となる。よって、式 (3.8) と式 (3.9) より、

$$S_F \simeq 4k_{\mathrm{B}}TnSm_{\mathrm{mol}}v_{\mathrm{mol}} \tag{3.10}$$

となる。

ところで、揺動散逸定理より熱平衡状態にある機械振動子には散逸 γ に比例した揺動力 S_F が働く。

$$S_F = 4k_{\mathrm{B}}T\mathrm{Re}\{Z\} = 4k_{\mathrm{B}}T\gamma m \tag{3.11}$$

ここで、Z は振動子のインピーダンス、m は振動子の質量である。

ガスダンピングの散逸 γ_{gas} は式 (3.10) と式 (3.11) を比較することで、

$$\gamma_{\mathrm{gas}} = \frac{nSm_{\mathrm{mol}}v_{\mathrm{mol}}}{m} \tag{3.12}$$

$$= \frac{nS\sqrt{k_{\mathrm{B}}Tm_{\mathrm{mol}}}}{m} \tag{3.13}$$

となる。さらに、理想気体の状態方程式 $P = nk_BT$ を用いることで、

$$\gamma_{\mathrm{gas}} = \frac{PS\sqrt{m_{\mathrm{mol}}}}{m\sqrt{k_{\mathrm{B}}T}} \tag{3.14}$$

となる。このとき、Q 値は、

$$Q_{\mathrm{gas}} = \frac{m\omega_m\sqrt{k_{\mathrm{B}}T}}{2PS\sqrt{m_{\mathrm{mol}}}} \tag{3.15}$$

となる。

本修士論文における各パラメーター（$m = 2.33$ mg、$T = 293$ K、$S = 1.77$ mm^2、$m_{\mathrm{mol}} = 3\times10^{-26}$ kg）を代入すると、ガスダンピングによる Q 値は、

$$Q_{\mathrm{gas}} \sim 1.5\times10^2\left(\frac{f_{\mathrm{m}}}{1\ \mathrm{Hz}}\right)\left(\frac{1\ \mathrm{Pa}}{P}\right) \tag{3.16}$$

となる。ただし、f_{m} は振動子の共振周波数、残留ガスとして水分子を仮定した。

3.2 スクイーズフィルムダンピング

本実験では浮上鏡と鉄芯の距離がおよそ 0.6 mm と近くなっている。このように振動子と壁が近い場合、振動子が振動することで振動子と壁の間のガスが押しつぶされ、分子密度が変化する。この効果を考慮したガスダンピングをスクイーズフィルムダンピングという [26]。このとき、分子密度 n は次の円筒座標の拡散方程式を満たす。

$$\mathrm{D}\left(\frac{d^2n}{dr^2}+\frac{dn}{rdr}\right)=\frac{dn}{dt} \tag{3.17}$$

ここで、D は拡散定数であり、

$$\mathrm{D}=hv_{\mathrm{mol}}\simeq h\sqrt{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m_{\mathrm{mol}}}} \tag{3.18}$$

である。ここで、h は振動子と壁面とのギャップ、v_{mol} は分子速度の 2 乗平均平方根、m_{mol} は 1 つの分子の質量である。

拡散方程式 (3.17) 式の解は半径 r 方向の関数と時間 t の関数の積に分離可能である。このとき、時間 t の解は、時定数 $\tau=a^2/hv_{\mathrm{mol}}=a^2/\mathrm{D}$ を用いた指数関数となる。ガス流量と振動子の駆動インピーダンスを推定するために有用な変数はある時間におけるギャップ内の平均分子数密度と時定数である。これらの変数は機械的インピーダンスのアプローチでは、ばねと速度に比例して働くダンパーを直列に接続した場合で表現できる。このとき、ばねは振動子と壁面との間のガス圧縮を、ダンパーはギャップ内へのガス流入、流出をモデル化している。

ダンパーのインピーダンスは実数値

$$Z_{\mathrm{dp}}(f)=\beta \tag{3.19}$$

であり、ばねのインピーダンスは純虚数

$$Z_{\mathrm{sp}}(f)=-i\frac{k_{\mathrm{sp}}}{\omega} \tag{3.20}$$

と書ける。ここで、k_{sp} はギャップが変化したときに振動子へ加わる力の変化のばね定数であり、

$$k_{\mathrm{sp}}=\frac{nk_{\mathrm{B}}T\pi a^2}{h} \tag{3.21}$$

と書ける。このモデルにおける時定数 τ は拡散方程式と同じものであり、

$$\tau=\frac{\beta}{k_{\mathrm{sp}}} \tag{3.22}$$

で表される。

振動子の全インピーダンス $Z_{\mathrm{total}}(f)$ は、各々のインピーダンスを並列に足し合わせることで計算できる。

$$\frac{1}{Z_{\mathrm{total}}}=\frac{1}{Z_{\mathrm{sp}}}+\frac{1}{Z_{\mathrm{dp}}} \tag{3.23}$$

(3.23) 式から全インピーダンス Z_{total} は、

$$Z_{\mathrm{total}} = \frac{Z_{\mathrm{sp}} Z_{\mathrm{dp}}}{Z_{\mathrm{sp}} + Z_{\mathrm{dp}}} \tag{3.24}$$

$$= \frac{-i\frac{k_{\mathrm{sp}}}{\omega}\beta}{-i\frac{k_{\mathrm{sp}}}{\omega} + \beta} \tag{3.25}$$

$$= \frac{-i\beta}{-i + \frac{\beta\omega}{k_{\mathrm{sp}}}} \tag{3.26}$$

$$= \frac{-i\beta}{-i + \omega\tau} \tag{3.27}$$

$$= \frac{\beta(1 - i\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2} \tag{3.28}$$

となる。よって、振動子のインピーダンスの実部は、

$$\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{total}}(f)\} = \frac{\beta}{1 + (\omega\tau)^2} \tag{3.29}$$

$$= \frac{k_{\mathrm{sp}}\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \tag{3.30}$$

$$= \frac{\pi a^4 n \sqrt{m_{\mathrm{mol}} k_{\mathrm{B}} T}}{h^2\{1 + (\omega\tau)^2\}} \tag{3.31}$$

となる。

よって、(??) 式と (3.31) 式を比較することにより、スクイーズフィルムダンピングによる散逸 γ_{SFD} は、

$$\gamma_{\mathrm{SFD}} = \frac{\pi a^4 n \sqrt{m_{\mathrm{mol}} k_{\mathrm{B}} T}}{m h^2\{1 + (\omega\tau)^2\}} \tag{3.32}$$

$$= \frac{a^2 P S \sqrt{m_{\mathrm{mol}}}}{m h^2 \sqrt{k_{\mathrm{B}} T}\{1 + (\omega\tau)^2\}} \tag{3.33}$$

$$= \frac{a^2}{h^2\{1 + (\omega\tau)^2\}}\gamma_{\mathrm{gas}} \tag{3.34}$$

となる。したがって、スクイーズフィルムダンピングによる Q 値は、

$$Q_{\mathrm{SFD}} = \frac{m\omega_{\mathrm{m}} h^2 \sqrt{k_{\mathrm{B}} T}\{1 + (\omega\tau)^2\}}{2a^2 P S \sqrt{m_{\mathrm{mol}}}} \tag{3.35}$$

$$= \frac{h^2\{1 + (\omega\tau)^2\}}{a^2} Q_{\mathrm{gas}} \tag{3.36}$$

となる。

ここで本修士論文における各パラメーター（$a = 0.75$ mm、$m_{\mathrm{mol}} = 3 \times 10^{-26}$ kg、$h = 0.6$ mm、$T = 293$ K）を代入して τ を計算すると、

$$\tau = \frac{a^2 \sqrt{m_{\mathrm{mol}}}}{h\sqrt{k_{\mathrm{B}} T}} \tag{3.37}$$

$$\sim 2.5 \times 10^{-6}\ \mathrm{s} \tag{3.38}$$

となる。浮上鏡の共振周波数は 100 Hz 以下であるので $\omega\tau$ は 1 に比べて非常に小さくなる。よって $\{1+(\omega\tau)^2\}$ の項を無視すると、散逸 γ_{SFD} は、

$$\gamma_{\mathrm{SFD}} \sim \frac{a^2 PS\sqrt{m_{\mathrm{mol}}}}{mh^2\sqrt{k_{\mathrm{B}}T}} \tag{3.39}$$

$$= \frac{a^2}{h^2}\gamma_{\mathrm{gas}} \tag{3.40}$$

となる。同様に Q 値は、

$$Q_{\mathrm{SFD}} = \frac{m\omega_{\mathrm{m}}h^2\sqrt{k_{\mathrm{B}}T}}{2a^2 PS\sqrt{m_{\mathrm{mol}}}} \tag{3.41}$$

$$= \frac{h^2}{a^2}Q_{\mathrm{gas}} \tag{3.42}$$

となる。

本修士論文の場合、浮上鏡の上面と壁の距離は下面と壁の距離に比べてはるかに大きい。よって、上面には通常のガスダンピングを考えることにすると、本修士論文におけるスクイーズフィルムダンピングを考慮した散逸 γ_{SFD} は、

$$\gamma_{\mathrm{SFD}} = \frac{PS\sqrt{m_{\mathrm{mol}}}}{2m\sqrt{k_{\mathrm{B}}T}} + \frac{a^2 PS\sqrt{m_{\mathrm{mol}}}}{mh^2\sqrt{k_{\mathrm{B}}T}} \tag{3.43}$$

$$\sim 4.2\times 10^{-3}\left(\frac{P}{1\ \mathrm{Pa}}\right) \tag{3.44}$$

となる。これより、修士論文におけるスクイーズフィルムダンピングを考慮した Q 値 Q_{SFD} は、

$$Q_{\mathrm{SFD}} = \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{2\gamma_{\mathrm{SFD}}} \tag{3.45}$$

$$\sim 7.4\times 10^{3}\left(\frac{f_{\mathrm{m}}}{1\ \mathrm{Hz}}\right)\left(\frac{1\ \mathrm{Pa}}{P}\right) \tag{3.46}$$

となる。

3.3 Q 値測定実験

実際に反磁性浮上システムの Q 値測定を行った。測定方法としてシャドーセンシング法を用いた。シャドーセンシング法とは、図 3.1 のように振動する鏡の横からレーザーを当てることで光検出器に入る光量が変化し、その光量の変化から鏡の振動を測定する方法である。

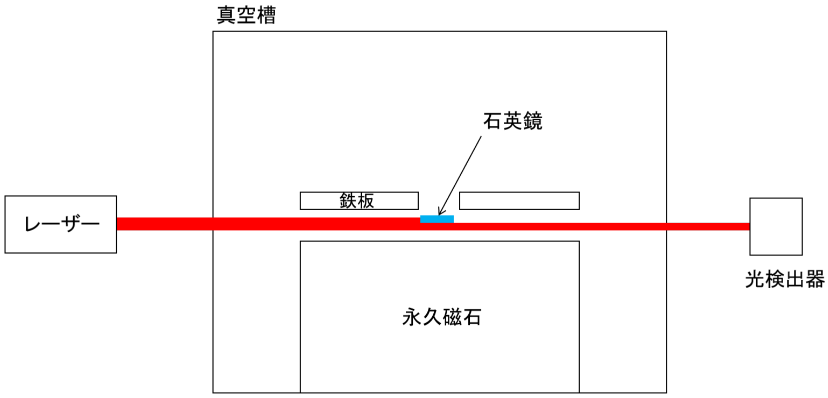

図 3.1　シャドーセンシング法

本修士論文の Q 値測定実験のセットアップの概念図を図 3.2 に示した。実際のセットアップの写真を図 3.3、3.4 に示した。真空引きは、ドライポンプで 1 Pa 程度まで行い、ターボ分子ポンプで 10^{-3} Pa 程度まで行った。その後リボンヒーターで真空槽をベーキングし、最終的に 10^{-4} Pa 程度まで到達した。ただし、本研究のベーキングは磁石の減磁が不可逆になる約 80 ℃を超えないようにするために約 50 ℃の低温で行い、その代わりに通常より長い約 3 日間行った。また、図 3.3 の青い線は反磁性浮上システムをアースするためのものである。

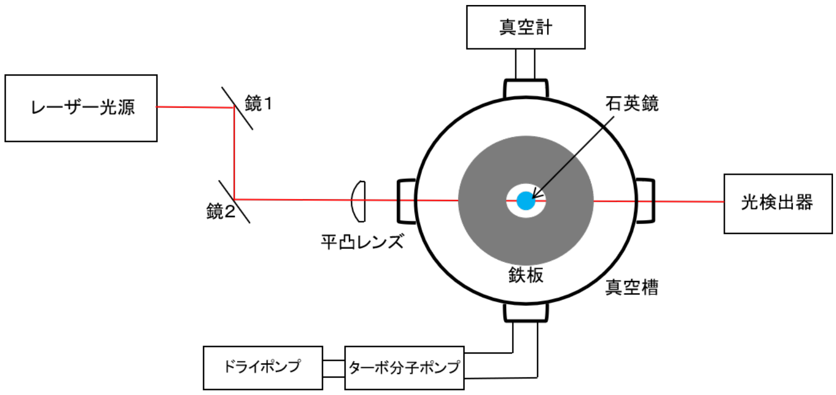

図 3.2　Q 値測定実験のセットアップの概念図

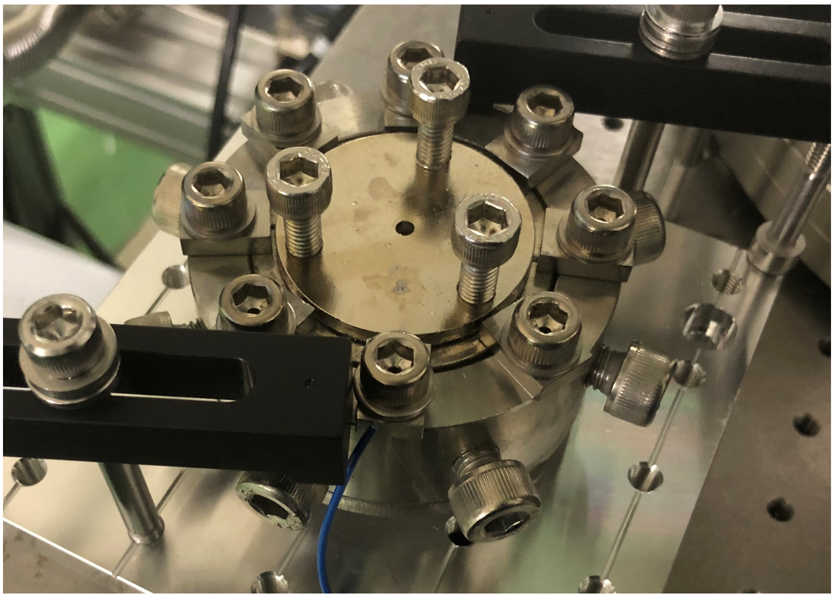

図 3.3　Q 値測定実験のセットアップ（反磁性浮上システム）

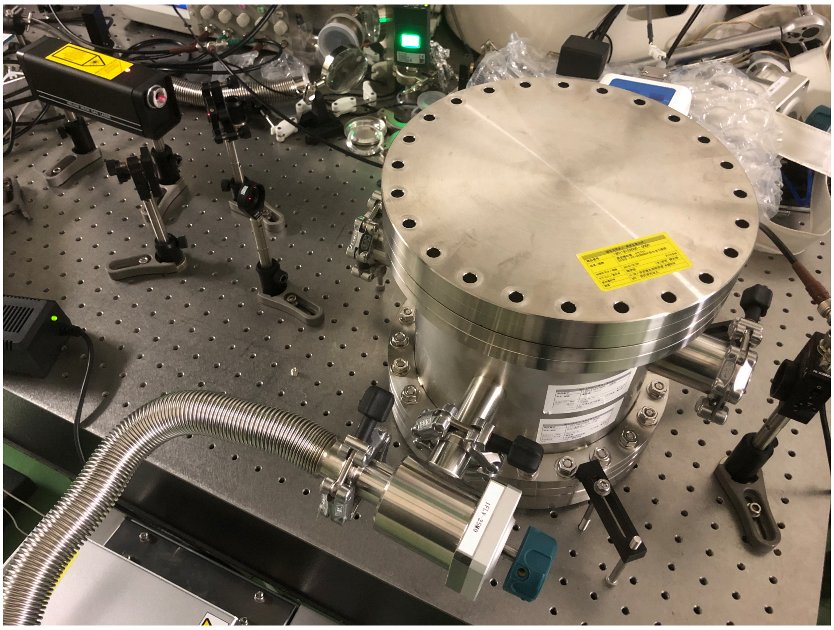

図 3.4　Q 値測定実験のセットアップ（全体写真）

本修士論文の Q 値測定は、真空槽をたたくことで浮上鏡の振動を励起し、その減衰を測定することを様々な圧力帯域で行った。データの取得は光検出器で得られるシグナルを A/D 変換をし、デジタル処理をすることで行った [36]。サンプリング周波数は 10^4 Hz とした。

圧力 1.6×10^{-3} Pa で測定された浮上鏡の振動減衰の様子の時系列データを図 3.5 に示した。振動の振幅が指数関数的に減少しているのがわかる。

ここで、得られたデータを高速フーリエ変換（FFT）したものを図 3.6 に、鏡がない場合のデータを FFT したものを図 3.7 に示した。図 3.6 と図 3.7 を比較すると 20 Hz 以下の 5 つのピークが浮上鏡のものであることがわかる。この 5 つのピークは、1 つの鉛直方向の振動モード、2 つの水平方向

の振動モード、2 つの鏡の反射面の軸の向きが回転振動するモードであると考えられる。以降、この 5 つのピークを周波数が低いものから sig1、sig2、sig3、sig4、sig5 と呼ぶことにする。反磁性浮上システムが回転対象であることを考えると sig5 が鉛直方向の振動モードであると考えられる。

また、図 3.5 の縦軸の絶対値を取り、片対数でプロットしたものを図 3.8 と図 3.9 に示した。図 3.8 の減衰の包絡線の傾きの大きさは散逸 γ を表しており、図中の直線は傾き $-\gamma$ の直線である。これにより散逸 γ を得ることができ、さらにその Q 値を得ることができる。図 3.8 と図 3.9 からわかるように振動を励起した直後と時間が経った時の散逸の大きさが異なるが、前者は浮上鏡以外の散逸と考え、以降は後者の散逸が浮上鏡の散逸であると考える。

圧力 1.0×10^5 Pa, 7.0×10^2 Pa, 6.3×10^{-1} Pa, 1.6×10^{-3} Pa, 1.6×10^{-4} Pa での振動減衰のデータから得られた Q 値を縦軸として横軸を周波数または圧力でプロットしたものを図 3.10 と図 3.11 に示した。図 3.11 には測定データに加えて式 (3.46) により求められる残留ガスのダンピングの共振周波数 16 Hz における Q 値も同時にプロットした。

図 3.11 から 1.0×10^5 Pa から 7.0×10^2Pa では Q 値に圧力依存性がないことがわかる。これは気体分子の平均自由行程の方が浮上鏡と壁面との距離より短く、気体分子同士の衝突が気体分子と浮上鏡との衝突より優勢である粘性流領域であることが原因であると考えられる。粘性流領域では圧力が減少し、気体分子数が減少しても浮上鏡に衝突する気体分子数がほとんど変わらないために Q 値は変わらず、結果的に Q 値は圧力に依存せず一定となる。また、7.0×10^2Pa 以降圧力が低下するにつれて Q 値が上昇しているのがわかる。これは、先ほどとは反対に気体分子の平均自由行程の方が浮上鏡と壁面との距離より長く、気体分子と浮上鏡との衝突が気体分子同士の衝突より優勢である分子流領域であることが原因であると考えられる。

図 3.11 において、測定で得られた Q 値が計算で求められた Q 値よりも小さくなっている。それは特に圧力の低い 1.6×10^{-3} Pa, 1.6×10^{-4} Pa において顕著にみられる。この原因として、1.6×10^{-3} Pa, 1.6×10^{-4} Pa での測定において、ターボ分子ポンプとドライポンプが稼働中または完全に停止していないために、その振動がフレキチューブを介して反磁性浮上システム全体を揺らしていたことが考えられる。ただし、今回は加速度計などを用意できなかったためその影響を測定できなかった。

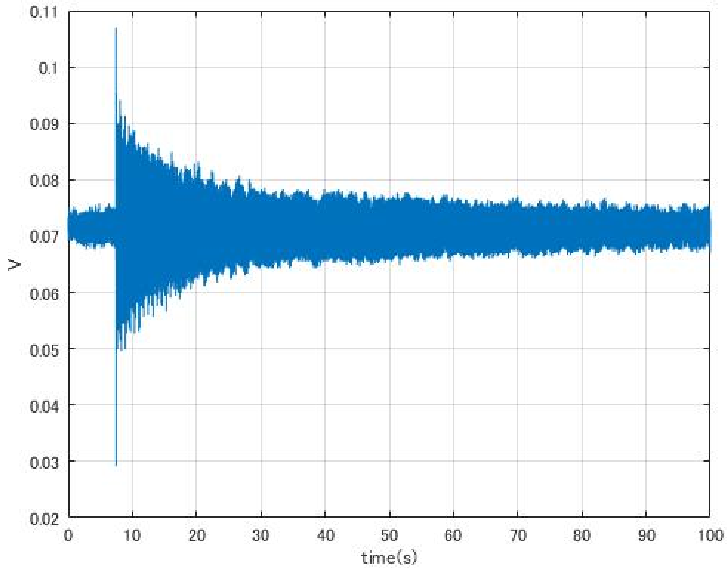

図 3.5　測定された浮上鏡の振動減衰のようす。$P = 1.6 \times 10^{-3}$ Pa。

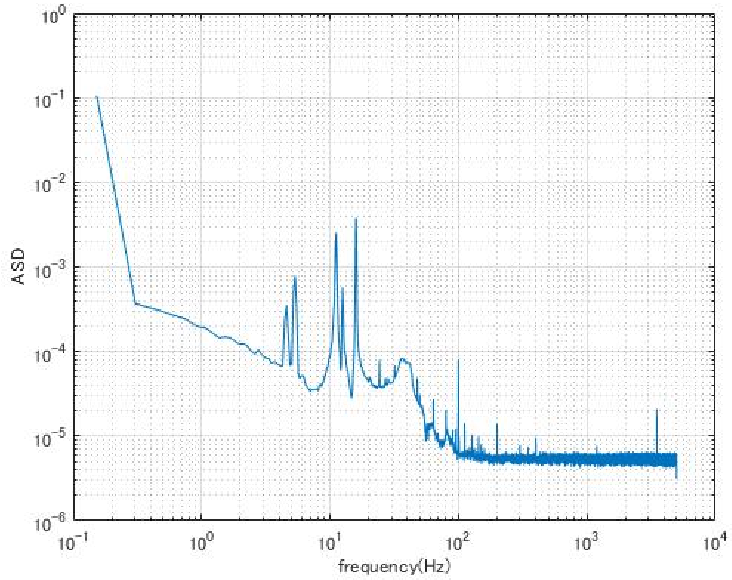

図 3.6　測定された浮上鏡の振動減衰の FFT 処理後。$P = 1.6 \times 10^{-3}$ Pa。

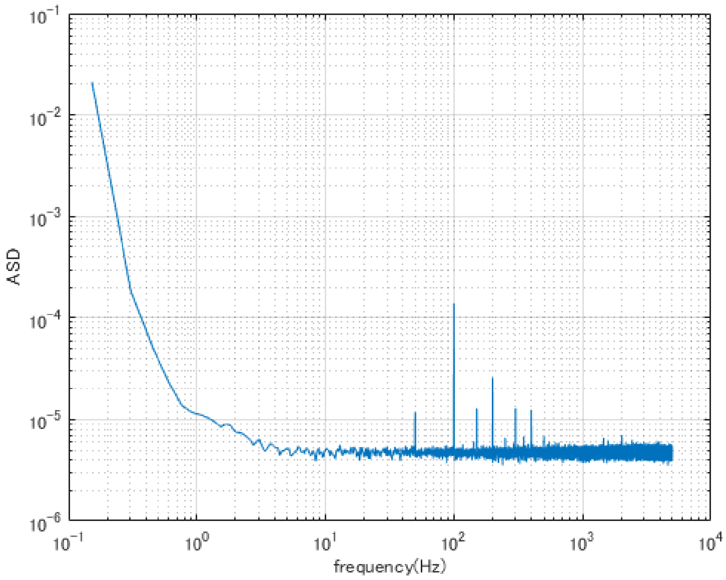

図 3.7　鏡がない場合のデータの FFT 処理後。$P = 1.6 \times 10^{-3}$ Pa。

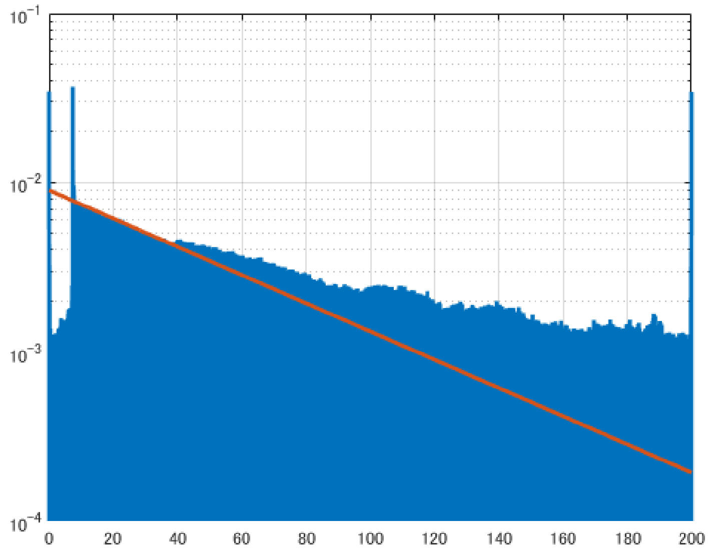

図 3.8　測定された浮上鏡の振動減衰の片対数プロット。縦軸は電圧 [V] の絶対値、横軸は時間 [s]。$P = 1.6 \times 10^{-3}$ Pa。$\gamma = 2.6 \times 10^{3}$

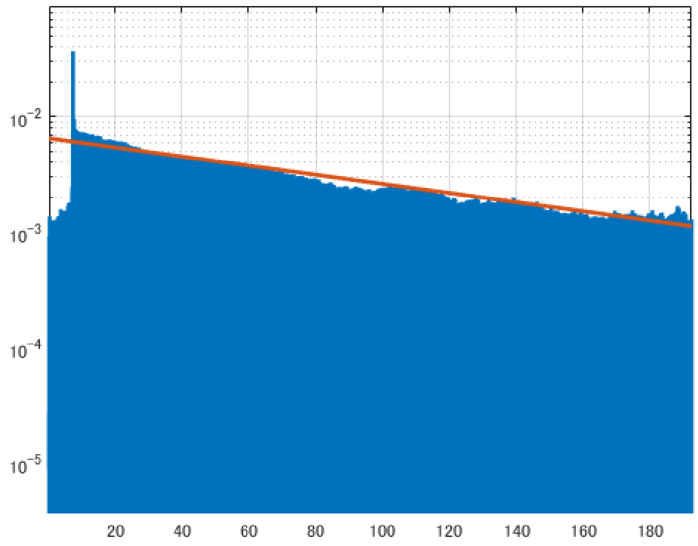

図 3.9　測定された浮上鏡の振動減衰の片対数プロット。縦軸は電圧 [V] の絶対値、横軸は時間 [s]。$P = 1.6 \times 10^{-3}$ Pa。$\gamma = 5.5 \times 10^{3}$

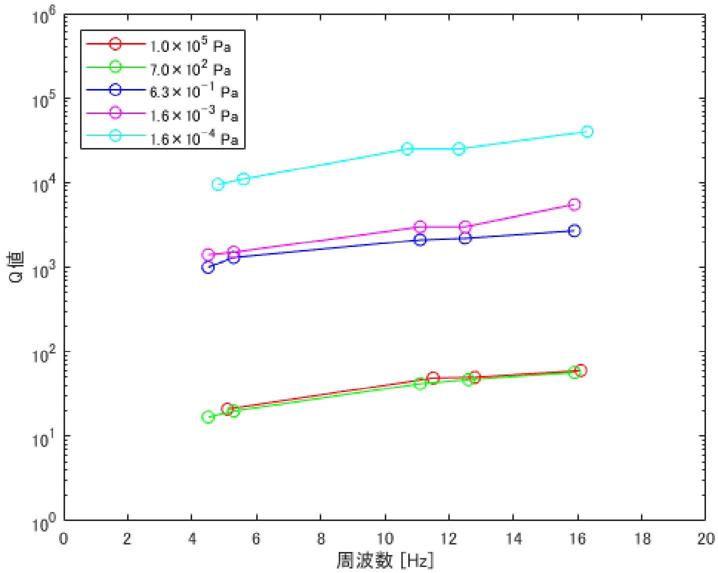

図 3.10　測定された浮上鏡の Q 値と周波数の関係。$P = 1.0 \times 10^{5}$ Pa, 7.0×10^{2} Pa, 6.3×10^{-1} Pa, 1.6×10^{-3} Pa, 1.6×10^{-4} Pa。

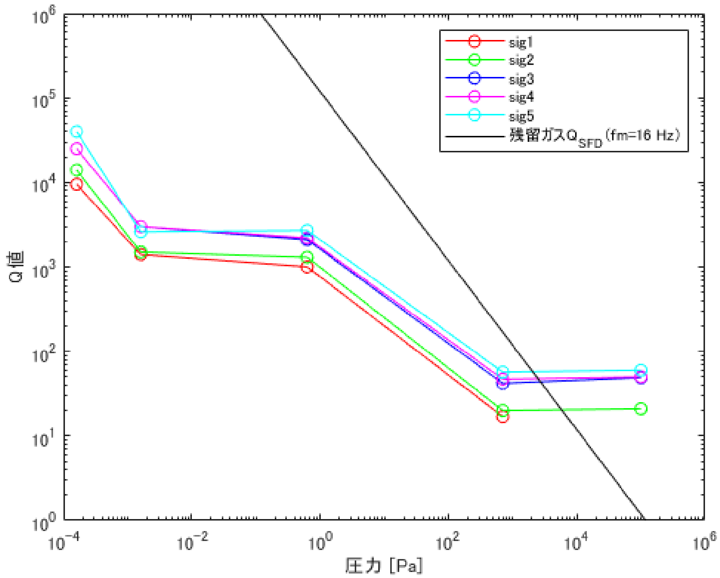

図 3.11　測定された浮上鏡の Q 値と圧力の関係。$P = 1.0 \times 10^5$ Pa, 7.0×10^2 Pa, 6.3×10^{-1} Pa, 1.6×10^{-3} Pa, 1.6×10^{-4} Pa。

図 3.11 より、圧力が 1.6×10^{-4} Pa 以降減少するにつれ、圧力に反比例して Q 値が上昇すると予想できる。これを仮定した場合の sig5 の残留ガス雑音の変位スペクトルについて標準量子限界と比較したものを図 3.12 に示した。また残留ガス雑音の変位スペクトルが標準量子限界を下回る部分の拡大を図 3.13 に示した。図 3.13 より, 残留ガス雑音が標準量子限界を下回る周波数は Q 値が低いものからそれぞれ 50 kHz、16 kHz、5 kHz、1.6 kHz、500 Hz、160 Hz となった。鏡の熱雑音が標準量子限界を上回る周波数は図 3.13 より 50 kHz であるから、標準量子限界を目指すには少なくとも真空槽内の圧力を 10^{-5} Pa 程度まで下げることが必要である。

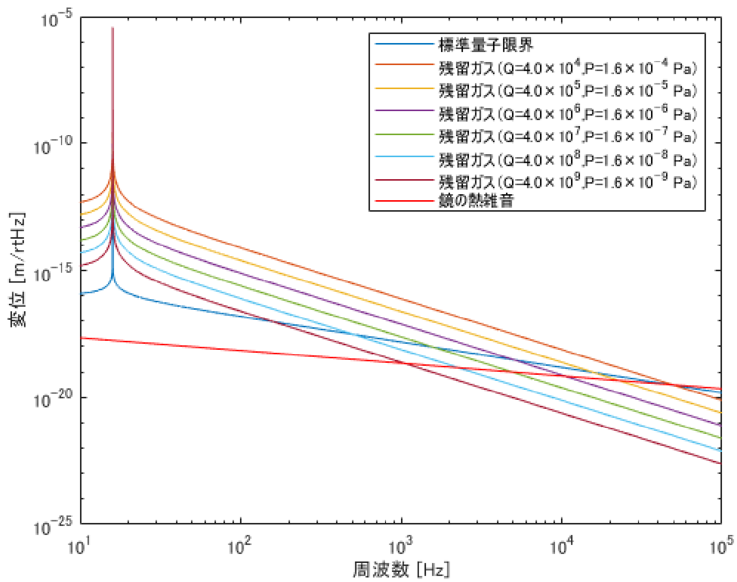

図 3.12　sig5 の残留ガス雑音の変位スペクトル。$P = 1.6 \times 10^{-4}$ Pa の Q 値は実測値。

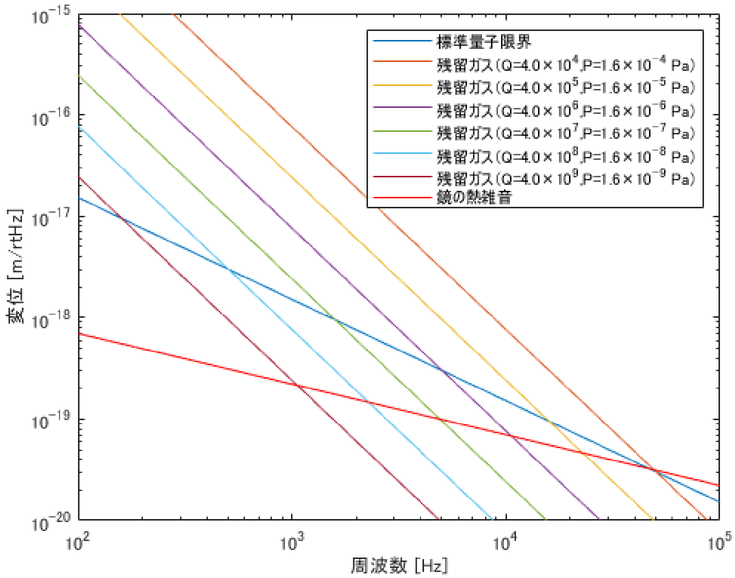

図 3.13　sig5 の残留ガス雑音の変位スペクトルの拡大図。$P = 1.6 \times 10^{-4}$ Pa の Q 値は実測値。

第 4 章

環境磁場雑音

環境磁場によって浮上鏡が受ける力が変化することで雑音となる。これを環境磁場雑音という。本節では本実験における環境磁場雑音の影響について述べる。

磁石が作る磁場を $\boldsymbol{B}_{\mathrm{mag}}$、環境磁場を $\boldsymbol{B}_{\mathrm{env}}$ とすると、鏡が受ける力は式より、

$$F_z = \frac{\chi V}{\mu_0}(B_{\mathrm{mag,z}} + B_{\mathrm{env,z}})(\partial_z B_{\mathrm{mag,z}} + \partial_z B_{\mathrm{env,z}}) \tag{4.1}$$

となる。ただし、$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ とした。ここで磁場と磁場勾配、鏡が受ける力をそれぞれ平均値と揺らぎの和として、

$$B_{\mathrm{mag,z}} = \overline{B}_{\mathrm{mag,z}} + \Delta B_{\mathrm{mag,z}} \tag{4.2}$$

$$\partial_z B_{\mathrm{mag,z}} = \overline{\partial_z B}_{\mathrm{mag,z}} + \Delta(\partial_z B_{\mathrm{mag,z}}) \tag{4.3}$$

$$B_{\mathrm{env,z}} = \overline{B}_{\mathrm{env,z}} + \Delta B_{\mathrm{env,z}} \tag{4.4}$$

$$\partial_z B_{\mathrm{env,z}} = \overline{\partial_z B}_{\mathrm{env,z}} + \Delta(\partial_z B_{\mathrm{env,z}}) \tag{4.5}$$

$$F_z = \overline{F}_z + \Delta F_z \tag{4.6}$$

と書くことにして、式の揺らぎの成分は、

$$\Delta F_z \sim \frac{\chi V}{\mu_0}\left(\overline{B}_{\mathrm{mag,z}}\Delta(\partial_z B_{\mathrm{mag,z}}) + \overline{\partial_z B}_{\mathrm{mag,z}}\Delta B_{\mathrm{mag,z}} + \overline{B}_{\mathrm{mag,z}}\Delta(\partial_z B_{\mathrm{env,z}}) + \overline{\partial_z B}_{\mathrm{mag,z}}\Delta B_{\mathrm{env,z}}\right) \tag{4.7}$$

となる。第 1 項と第 2 項は磁石の磁場変動によるものであり、第 3 項と第 4 項が環境磁場雑音である。

環境磁場変動 $\Delta B_{\mathrm{env,z}}$ に起因する鏡の変位スペクトルは式より、

$$\sqrt{S(\omega)} = |\chi(\omega)|\Delta F_z \tag{4.8}$$

$$= |\chi(\omega)|\frac{\chi V}{\mu_0}\overline{\partial_z B}_{\mathrm{mag,z}}\Delta B_{\mathrm{env,z}} \tag{4.9}$$

である。先行研究より、本実験と同じ真空槽の内部の環境磁場変動由来の雑音が実験的に求められている [10]。磁石の磁場勾配の平均 $\overline{\partial_z B}_{\mathrm{mag,z}}$ を 1400 T/m としたときの環境磁場変動 $\Delta B_{\mathrm{env,z}}$ に起因する環境磁場雑音はおよそ 150 Hz 以上で標準量子限界を下回ることが分かっている。

第 5 章

渦電流熱雑音

物質を貫く磁場が変化したとき、ファラデーの電磁誘導の法則に従って磁場の変化を打ち消すような渦電流が流れる。この渦電流により発生するジュール熱が散逸の原因となって雑音となる。この雑音を渦電流熱雑音という。この散逸は viscous モデルに従う。この章では渦電流熱雑音の導出と本実験で用いる反磁性浮上システムにおける渦電流雑音について述べる。

5.1 渦電流によるエネルギー散逸

本節では渦電流によって生じるジュール熱から散逸を求める [10]。

まず、渦電流によって発生するジュール熱を求める。円筒座標（r, z, ϕ）に対して ϕ 方向に渦電流が流れる場合を考える。(r, z) を通るループを考えると、発生する起電力 $V(r, z)$ はそのループ面を貫く磁束 Φ を用いて、

$$V(r,z) = -\frac{\partial \Phi(r,z)}{\partial t} \tag{5.1}$$

と書ける。ここで、(r, z) における磁束密度の z 成分を $B_z(r, z)$、電場の ϕ 成分を E_ϕ、電流密度の ϕ 成分を j_ϕ、電気抵抗率を ρ とすると、$\Phi(r, z)$、$V(r, z)$、$E_\phi(r, z)$ はそれぞれ、

$$\Phi(r,z) = 2\pi \int_0^r B_z(r',z) r' dr' \tag{5.2}$$

$$V(r,z) = 2\pi r E_\phi(r,z) \tag{5.3}$$

$$E_\phi(r,z) = \rho j_\phi(r,z) \tag{5.4}$$

となる。これらより、渦電流 j_ϕ は、

$$j_\phi(r,z) = -\frac{1}{\rho r} \int_0^r \frac{\partial B_z(r',z)}{\partial t} r' dr' \tag{5.5}$$

となる。よって、渦電流により発生するジュール熱 P は、

$$P = 2\pi r \int\int r j_\phi^2(r,z) dr dz \tag{5.6}$$

となる。

次にジュール熱 P を散逸 γ に変換する。感受率を逆ラプラス変換することにより鏡のインパルス

応答がわかる。鏡のインパルス応答 $x(t)$ は、

$$x(t) \propto e^{-\gamma t} \sin(\omega_m t) \tag{5.7}$$

となる。よって速度はこれを時間微分することにより、

$$v(t) \propto -\gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega_m t) + \omega_m e^{-\gamma t} \cos(\omega_m t) \tag{5.8}$$

となる。ここで、$\sin(\omega_m t) = 0$ となるような時刻を考えると $v(t) = v_0 e^{-\gamma t}$ とおける。このとき、弾性エネルギーの時間微分を考えると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \propto ke^{-\gamma t} \sin(\omega_m t) v(t) = 0 \tag{5.9}$$

であるから、エネルギー散逸はすべて運動エネルギーの散逸となる。よって、

$$P = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2(t)\right) \tag{5.10}$$

$$= m\gamma v^2(t) \tag{5.11}$$

となる。

よって、(5.5) 式、(5.6) 式、(5.11) 式から磁場の変化が分かると渦電流によって発生するジュール熱の散逸が求められる。

5.2 本実験における渦電流熱雑音

先行研究により、鏡の内部の渦電流熱雑音よりも鏡以外の物質内部の渦電流熱雑音の方が支配的であることがわかっている [10]。またその渦電流による散逸は最大でも $\gamma = 3.7 \times 10^{-8}$Hz と求められている。これより、渦電流熱雑音と標準量子限界を比較したものを図 5.1 に示した。図 5.1 より、270Hz 以上で渦電流熱雑音が標準量子限界を下回ることがわかる。

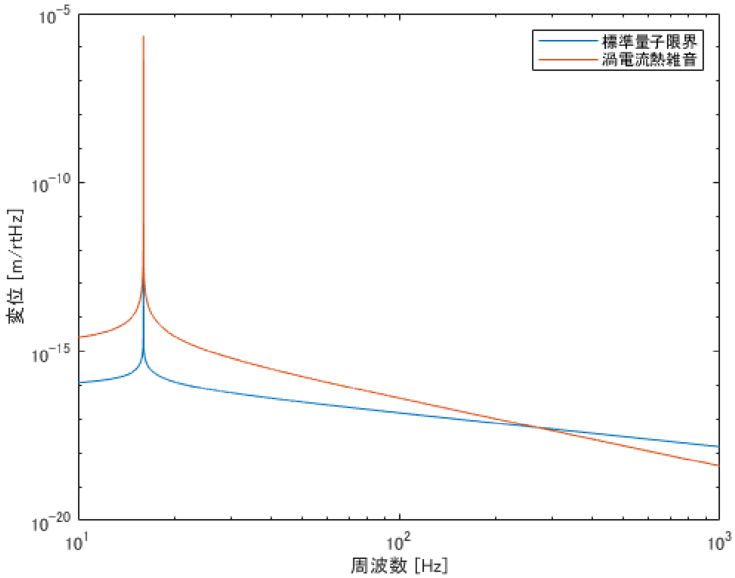

図 5.1　渦電流熱雑音の変位スペクトル

第 6 章

磁石の熱雑音

磁石の磁気モーメントは常に熱浴とランダムな熱エネルギーのやり取りをしており、それによって向きが変化する。これにより生じる雑音を磁石の熱雑音とする。この章では、この磁石の熱雑音を理論的に求める [10]。

6.1 磁石の温度揺らぎ

磁石の温度 T が平衡に達したときに熱浴とランダムに熱エネルギーを交換することによって生じる平均温度の揺らぎ δT を計算する。まず、エネルギーの揺らぎ

$$\delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} \tag{6.1}$$

を求める。ただし、$\langle E \rangle$ はエネルギーの期待値である。磁石の状態がカノニカル分布に従うとすると、逆温度を $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$、分配関数を $Z(\beta)$ としてエネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} && (6.2) \\ &= -\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i e^{-\beta E_i} && (6.3) \\ &= -\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} && (6.4) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta) && (6.5) \end{aligned}$$

となる。エネルギーの 2 乗の期待値 $\langle E^2 \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i E_i^2 e^{-\beta E_i} && (6.6) \\ &= -\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_i e^{-\beta E_i} && (6.7) \\ &= -\frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} && (6.8) \end{aligned}$$

となる。よって、式 (6.5) と式 (6.8) より、

$$(\delta E)^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 \tag{6.9}$$
$$= \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} - \left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}\right)^2 \tag{6.10}$$
$$= \left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}\right)' \tag{6.11}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\log Z(\beta) \tag{6.12}$$

と書き換えられる。ここで、定積熱容量 C_V は、式 (6.5) より

$$C_V = \frac{d\langle E\rangle}{dT} \tag{6.13}$$
$$= \frac{d\beta}{dT}\frac{d\langle E\rangle}{d\beta} \tag{6.14}$$
$$= \left\{\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\right\}\left\{\frac{d}{d\beta}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z(\beta)\right)\right\} \tag{6.15}$$
$$= \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{d^2}{d\beta^2}\log Z(\beta) \tag{6.16}$$
$$= \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}(\delta E)^2 \tag{6.17}$$

と書ける。よって、

$$(\delta E)^2 = k_{\mathrm{B}}T^2 C_V \tag{6.18}$$

となる。ここで、エネルギーと温度の関係式

$$E = C_V T \tag{6.19}$$

と式より温度揺らぎを δT として、

$$(\delta T)^2 = \frac{k_{\mathrm{B}}T^2}{C_V} \tag{6.20}$$

となることがわかる。

6.2 磁石の温度揺らぎスペクトル

前節では、磁石の温度 T が平衡に達したときに熱浴とランダムに熱エネルギーを交換することによって生じる平均温度の揺らぎ δT を導出した。本節では、磁石の温度揺らぎスペクトルをランジュバンアプローチにより導出する。

マクロな温度勾配がない場合を考える。磁石は 1 辺の長さが $2L$、体積が V の立方体で、$-L \leq x \leq L$、$-L \leq y \leq L$、$-L \leq z \leq L$ の領域にあるとする。磁石内部の熱浴の温度からのずれを $u(\boldsymbol{r}, t)$、局所的な熱揺動項を $F(\boldsymbol{r}, t)$ とすると、熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} - a^2\Delta u(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{r}, t) \tag{6.21}$$

となる。ただし、$a^2 = \lambda/\rho C$ とし、λ は熱伝導率、ρ は密度、C は比熱容量である。これをフーリエ変換して解くと、

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\boldsymbol{k}d\omega}{(2\pi)^4}\frac{F(\boldsymbol{k},\omega)}{a^2\boldsymbol{k}^2+i\omega}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\omega t} \tag{6.22}$$

$$F(\boldsymbol{k},\omega) = \int_V d\boldsymbol{r}\int_{-\inf}^{\inf} dtF(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t} \tag{6.23}$$

となる。磁石の温度揺らぎの片側パワースペクトル密度 $S_T(\omega)$ は、Wiener-Khinchin の定理より磁石の平均温度の熱浴の温度からのずれ $\bar{u}(t)$

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{V}\int_V u(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} \tag{6.24}$$

の自己相関関数をフーリエ変換することにより求められる。これより、片側パワースペクトル密度 $S_T(\omega)$ は、

$$S_T(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau}\langle\bar{u}(t)\bar{u}^*(t+\tau)\rangle \tag{6.25}$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\cos(\omega\tau)\langle\bar{u}(t)\bar{u}^*(t+\tau)\rangle \tag{6.26}$$

$$= 4\int_{0}^{\infty} d\tau\cos(\omega\tau)\langle\bar{u}(t)\bar{u}^*(t+\tau)\rangle \tag{6.27}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}&\bar{u}(t)\bar{u}^*(t+\tau)\\ &= \frac{1}{V^2}\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}'d\omega d\omega'}{(2\pi)^8}\frac{F(\boldsymbol{k},\omega)F^*(\boldsymbol{k}',\omega)}{(a^2k^2+i\omega)(a^2k'^2-i\omega')}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\omega t-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-i\omega'(t+\tau)}\end{aligned} \tag{6.28}$$

であり、確率的な値をとるのは F と F^* であるから、$\bar{u}(t)$ の自己相関関数は、

$$\begin{aligned}&\langle\bar{u}(t)\bar{u}^*(t+\tau)\rangle\\ &= \frac{1}{V^2}\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}'d\omega d\omega'}{(2\pi)^8}\frac{\langle F(\boldsymbol{k},\omega)F^*(\boldsymbol{k}',\omega)\rangle}{(a^2k^2+i\omega)(a^2k'^2-i\omega')}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\omega t-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-i\omega'(t+\tau)}\end{aligned} \tag{6.29}$$

となる。ここで、熱揺動項 $F(\boldsymbol{k},\omega)$ の自己相関関数は、

$$\langle F(\boldsymbol{k},\omega)F^*(\boldsymbol{k}',\omega)\rangle = (2\pi)^4F_0^2\boldsymbol{k}^2\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta(\omega-\omega') \tag{6.30}$$

である。ただし、F_0 は規格化定数である。式 (6.29) と式 (6.30) より、

$$\langle\bar{u}(t)\bar{u}^*(t+\tau)\rangle \tag{6.31}$$

$$= \frac{1}{V^2}\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}'d\omega d\omega'}{(2\pi)^8}\frac{(2\pi)^4F_0^2\boldsymbol{k}^2\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta(\omega-\omega')}{(a^2k^2+i\omega)(a^2k'^2-i\omega')}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\omega t-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-i\omega'(t+\tau)} \tag{6.32}$$

$$= \frac{F_0^2}{V^2}\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\boldsymbol{k}d\omega}{(2\pi)^4}\frac{\boldsymbol{k}^2}{a^4k^4+\omega^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-i\omega\tau} \tag{6.33}$$

$$= \frac{F_0^2}{V^2}\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^4}\frac{\pi}{a^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-ia^2\boldsymbol{k}^2|\tau|} \tag{6.34}$$

$$= \frac{F_0^2}{V^2}\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\pi}{a^2}\left(\frac{\pi}{a^2|\tau|}\right)^{\frac{3}{2}}\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'e^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4a^2|\tau|}} \tag{6.35}$$

となる。ここで、最後の積分は

$$\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' e^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4a^2|\tau|}} = \prod_{s=x,y,z} \int_{-L}^{L} ds \int_{-L}^{L} ds' e^{-\frac{(s-s')^2}{4a^2|\tau|}} \tag{6.36}$$

$$= \left(\int_{-L}^{L} ds \int_{-L}^{L} ds' e^{-\frac{(s-s')^2}{4a^2|\tau|}} \right)^3 \tag{6.37}$$

と書ける。ここで、誤差関数

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{6.38}$$

を用いると、

$$\int\int_V d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' e^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4a^2|\tau|}} = \left\{ \int_{-L}^{L} ds \sqrt{a^2\pi|\tau|} \left(\mathrm{Erf}\left(\frac{x+L}{2a\sqrt{|\tau|}} \right) - \mathrm{Erf}\left(\frac{x-L}{2a\sqrt{|\tau|}} \right) \right) \right\}^3 \tag{6.39}$$

$$= \left[4aL\sqrt{\pi|\tau|} \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\} \right]^3 \tag{6.40}$$

よって、$\bar{u}(t)$ の自己相関関数は、

$$\langle \bar{u}(t)\bar{u}^*(t+\tau) \rangle = \frac{F_0^2}{V^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\pi}{a^2} \left(\frac{\pi}{a^2|\tau|} \right)^{\frac{3}{2}} \left[4aL\sqrt{\pi|\tau|} \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\} \right]^3 \tag{6.41}$$

$$= \frac{F_0^2}{2Va^2} \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \tag{6.42}$$

となる。ただし、磁石は 1 辺 $2L$ の立方体であるから、$V = (2L)^3$ であることを用いた。よって温度揺らぎのパワースペクトル密度 $S_T(\omega)$ は、

$$S_T(\omega) = \frac{2F_0^2}{Va^2} \int_0^\infty d\tau \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega\tau) \tag{6.43}$$

となる。ここで、式において $\tau = 0$ のときの値が等しくなるように F_0 を決定すると、

$$(\delta T)^2 = \langle \bar{u}(t)\bar{u}^*(t) \rangle \tag{6.44}$$

$$\therefore \frac{k_\mathrm{B}T^2}{C_V} = \frac{F_0^2}{2Va^2} \tag{6.45}$$

となり、F_0 は、

$$F_0^2 = \frac{2Va^2 k_\mathrm{B}T^2}{C_V} \tag{6.46}$$

と決定する。よって、式 (6.43) に式 (6.46) を代入することにより、

$$S_T(\omega) = \frac{4k_\mathrm{B}T^2}{C_V} \int_0^\infty d\tau \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega\tau) \tag{6.47}$$

となる。この積分を解析的に解くことは難しいため、積分区間 $\int_0^\infty$ を $\int_0^{\tau_0}$ と $\int_{\tau_0}^\infty$ に分割し、$\int_0^{\tau_0}$ では数値積分、$\int_{\tau_0}^\infty$ では次の近似を用いて計算する。

τ_0 は L^2/a^2 より十分大きいとすると、

$$\int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega\tau) \tag{6.48}$$

$$\sim \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{L}{a\sqrt{\tau}} + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} (1-1) \right\}^3 \cos(\omega\tau) \tag{6.49}$$

$$= \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-\frac{3}{2}} \cos(\omega\tau) d\tau \tag{6.50}$$

$$= \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \left\{ 2\sqrt{2\pi\omega} \left(S\left(\sqrt{\frac{2\omega\tau_0}{\pi}} \right) - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\cos(\omega\tau_0)}{\sqrt{\tau_0}} \right\} \tag{6.51}$$

と近似できる。ただし $S(x)$ は、

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2} \right) dt \tag{6.52}$$

で定義されるフレネル積分である。以上より、温度揺らぎのパワースペクトル密度 $S_T(\omega)$ は、

$$\begin{aligned} S_T(\omega) \sim \frac{4k_\mathrm{B}T^2}{C_V} & \left[\int_0^{\tau_0} d\tau \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{|\tau|}} \right) + \frac{a}{L}\sqrt{\frac{|\tau|}{\pi}} \left(e^{-\frac{L^2}{a^2|\tau|}} - 1 \right) \right\}^3 \cos(\omega\tau) \right. \\ & \left. + \left(\frac{L}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \left\{ 2\sqrt{2\pi\omega} \left(S\left(\sqrt{\frac{2\omega\tau_0}{\pi}} \right) - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\cos(\omega\tau_0)}{\sqrt{\tau_0}} \right\} \right] \end{aligned} \tag{6.53}$$

で計算できる。

本研究における各パラメーター（$\tau_0 = 10^4$、$d\tau = 10^{-6}$、$V = 4.91 \times 10^{-5}[\mathrm{m}^3]$、$L = (V/8)^{1/3}$、$\rho = 7500[\mathrm{kg/m^3}]$、$C = 500[\mathrm{J/kg{\cdot}K}]$、$\lambda^* = 9[\mathrm{W/m{\cdot}K}]$）を代入して $\sqrt{S_T}$ を数値積分した結果、10^{-2}Hz より大きいの周波数では $\sqrt{S_T}$ は $f^{-3/4}$ に比例して減衰する [10]。よって、以降の計算では、

$$\sqrt{S_T} = 1.24 \times 10^{-11} f^{-\frac{3}{4}} \quad (f > 10^{-2}\mathrm{Hz}) \tag{6.54}$$

とする。比例係数はグラフから読み取った値を用いた。

6.3 本研究における磁石の熱雑音

磁石の熱雑音による鏡の変位スペクトルは、鏡が受ける磁力の時間平均が重力と等しいことを用いて求めると、

$$S(\omega) = mg\alpha|\chi(\omega)|\sqrt{S_T(\omega)} \tag{6.55}$$

となる。ただし α は温度変化に対する磁力の変化率である。

6.3.1 反磁性浮上システムが作る磁力の温度依存性

20 ℃と 21 ℃のときのネオジム磁石の磁力をシミュレーションをして比較することで温度変化に対する磁力の変化率 α を求める。

ネオジム磁石の保持力 H_c と残留磁束密度 B_r の温度依存性を BH 曲線 [18] から読み取ると、それぞれ 0.88 %/K、-0.13 %/K である。よって、20 ℃と 21 ℃のときの保持力 H_c と残留磁束密度 B_r は表 6.1 のようになる。
表 6.1 を用いて Poisson により 20 ℃と 21 ℃のときの磁力をそれぞれシミュレーションし、それぞれの値を比較した結果を図 6.1 に示した。鏡が浮上する位置 $z = 1.2$ mm における磁力の変化率 α はおよそ -0.77 %/K となった。

	20 ℃	21 ℃
保持力 H_c[Oe]	-10800	-10705
残留磁束密度 B_r[G]	12800	12783

表 6.1　ネオジム磁石の 20 ℃と 21 ℃のときの保持力 H_c と残留磁束密度 B_r

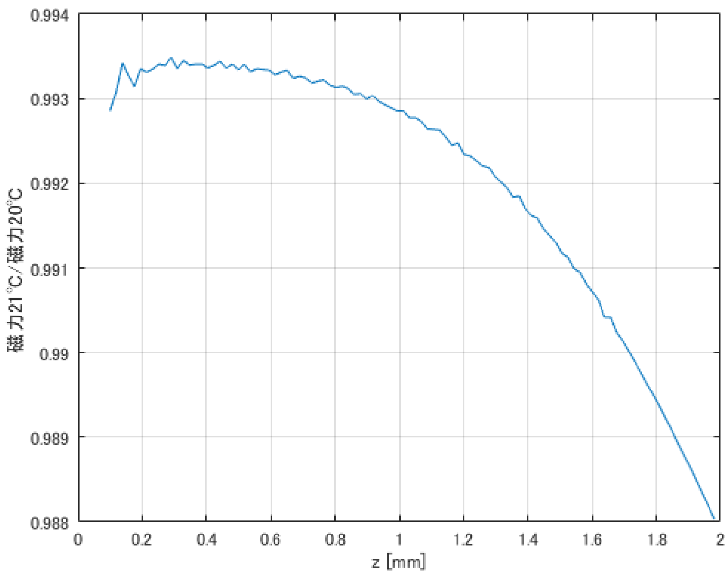

図 6.1　磁束密度

6.3.2　磁石の熱雑音による鏡の変位スペクトル

前節の結果を踏まえて式 (6.55) から磁石の熱雑音による鏡の変位スペクトルを求め、標準量子限界と比較した結果を図 6.2 に示した。図 6.2 より 68 Hz 付近で磁石の熱雑音が標準量子限界を下回ることがわかる。

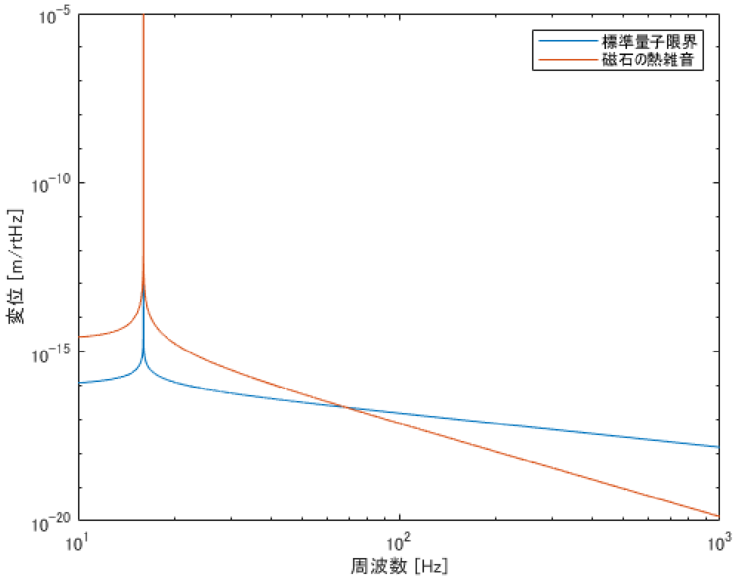

図 6.2　磁束密度

第 7 章

まとめと今後の課題

本修士論文のまとめと今後の課題を述べる。

本修士論文は巨視的量子力学の検証に向けた鏡振動子の作成を目標とした。巨視的量子力学の検証には位置測定精度が標準量子限界を下回ることが必要であるが、約 2 mg の振動子に対して従来のワイヤー懸架型ではワイヤーの熱雑音に制限され位置測定精度が標準量子限界に到達するのは不可能であることがわかった。

本修士論文では先行研究の石英の反磁性浮上システムに変更を加え、約 2 mg の石英鏡の浮上に成功した。シミュレーションでは浮上高さが 1.2 mm であったが、実際の実験では浮上高さは 0.9 mm であった。また、シミュレーションで得られた鏡の反射面に垂直な方向の共振周波数は 16 Hz であった。

次に浮上鏡の性能評価としてシャドーセンシング法による Q 値測定を行った。本研究で用いた反磁性浮上システムの場合、残留ガス雑音が一番影響が大きいと考え、様々な圧力下で実験を行った。実験結果として 5 つの振動モードのピークが見られたが、反磁性浮上システムが円対称であることを考えると一番高周波側の sig5 が鉛直方向の並進振動モードであると考えられる。正確な振動モードの特定は浮上鏡で干渉計を組むことで可能であると思われる。また、実験により得られた Q 値に圧力依存性が見られたため、雑音としては残留ガス雑音が支配的であることがわかった。得られた Q 値で最も大きいものは 1.6×10^{-4} Pa のときの 4.0×10^{4} であった。

得られた Q 値はスクイーズフィルムダンピングを考慮して理論的に導出した Q 値よりも小さく、圧力の低い 1.6×10^{-3} Pa と 1.6×10^{-4} Pa で特に理論値と実験値の乖離が見られた。これは、2 つのポンプが完全に停止していないことによる振動が原因だと考えられる。この対策として、2 つのポンプの振動が真空槽に伝わらないようにすることやイオンポンプなどの振動がないポンプを使うことなどが挙げられる。また、1.6×10^{-3} Pa から 1.6×10^{-4} Pa までに Q 値が圧力に反比例して大きくなることがわかった。さらに圧力を下げてもこの反比例の関係があると仮定して Q 値を見積もり、標準量子限界と比較した結果、鏡の熱雑音が 50 kHz 以降で標準量子限界を上回ることを考慮すると、少なくとも真空槽内の圧力を 10^{-5} Pa 程度まで下げなければならないことがわかった。　また、残留ガス雑音、渦電流熱雑音、磁石の熱雑音、鏡の熱雑音による浮上鏡の変位スペクトルを標準量子限界と比較した結果を図 7.1 に示した。ただし、残留ガス雑音は Q 値が 4×10^{7}、圧力が 1.6×10^{-7} Pa の場合を用いた。図 7.1 の雑音の合計を見ると、2.4 kHz から 42 kHz あたりで標準量子限界に到達できる。

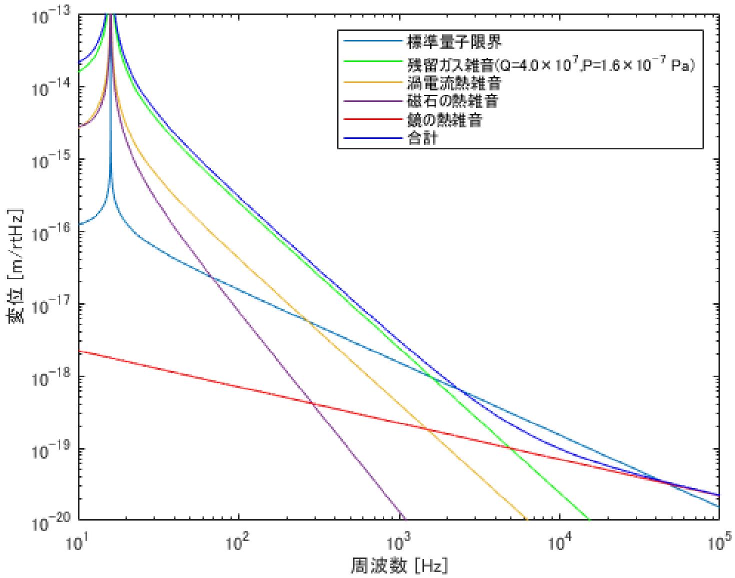

図 7.1　様々な雑音の変位スペクトル

参考文献

[1] Juan Pablo Paz and Wojciech Hubert Zurek. Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical. In Fundamentals of Quantum Information, 2002.

[2] Roger Penrose. On gravity's role in quantum state reduction. General relativity and gravitation, Vol.28, No.5, pp.581-600, 1996.

[3] D. Shoemaker, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Maischberger and A. Rüdiger. Noise behavior of the Garching 30 meter prototype gravitational-wave detector. Physical Review D 38, 1988.

[4] Peter R Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. Physical Review D, Vol. 42, No. 8, p. 2437, 1990.

[5] Gregory M Harry, Andri M Gretarsson, Peter R Saulson, Scott E Kittelberger, Steven D Penn, William J Startin, Sheila Rowan, Martin M Fejer, DRM Crooks, Gianpietro Cagnoli, et al. Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings. Classical and Quantum Gravity, Vol. 19, No. 5, p. 897, 2002.

[6] Yu Levin. Internal thermal noise in the ligo test masses: A direct approach. Physical Review D, Vol. 57, No. 2, p. 659, 1998.

[7] 小森健太郎. 巨視的振動子の遠隔光冷却. 修士論文, 東京大学, 2016.

[8] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健編著. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会.

[9] Gabriela I González and Peter R Saulson. Brownian motion of a mass suspended by an anelastic wire. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.96, No.1,pp.207-212, 1994.

[10] 中島良介, 巨視的量子力学の検証に向けた鏡の磁石懸架システムの開発, 修士論文, 東京工業大学, 2020.

[11] Trans Earnshaw. Cambridge philos. Soc, Vol. 7, No. 97, p. 1824, 1842.

[12] Werner Braunbek. Freischwebende körper im elektrischen und magnetischen feld. Zeitschrift für Physik, Vol.112, No.11, pp.753-763, Nov 1939.

[13] Werner Braunbek. Freischwebende körper im elektrischen und magnetischen feld. Zeitschrift für Physik, Vol.112, No.11, pp.764-769, Nov 1939.

[14] William M. Haynes. CRC Handbook of Chemistry and Physics, 97th Edition. CRC Press, 2016.

[15] M. D. Simon and A. K. Geim. Diamagnetic levitation: Flying frogs and floating magnets (invited). Journal of Applied Physics,Vol.87, No.6, pp.3607-3612, 2003.

[16] William M. Haynes. CRC Handbook of Chemistry and Physics, 97th Edition. CRC Press,

2016.
[17] Matthias C Wapler, Jochen Leupold, Iulius Dragonu, Dominik von Elverfeld, Maxim Zaitsev, and Ulrike Wallrabe. Magnetic properties of materials for mr engineering, micro-mr and beyond. Journal of Magnetic Resonance, Vol. 242, pp.233-242, 2014.
[18] 株式会社二六製作所 HP. https://www.26magnet.co.jp/database/ associated-data/no3.html.
[19] 松本伸之, 物理学実験 2・3 テキスト テーマ：光計測. 学習院大学, 2021.
[20] 曽根良夫, 分子気体力学（新装版）, 朝倉書店, 2020.
[21] リープマン・ロシェコ, 気体力学, 吉岡書店, 2000.
[22] 野村昭一郎, 振動・波動入門, コロナ社, 1977.
[23] 熊谷寛夫, 真空の物理と応用, 裳華房, 1970.
[24] 小川潤, 巨視的な系における量子力学の検証に向けた磁気浮上による鏡の支持方法の開発, 東京工業大学, 2021.
[25] Peter R. Saulson, Thermal noise in mechanical experiments, PHYSICAL REVIEW D, 1990.
[26] R. Weiss, Gas Damping of the Final Stage in the Advanced LIGO Suspensions, 2009.
[27] Feixia Pan, Joel Kubby, Eric Peeters, Alex T Tran and Subrata Mukherjee, Squeeze film damping effect on the dynamic response of a MEMS torsion mirror, Journal of Micromechanics and Microengineering, 1998.
[28] L.A. Rocha, L. Mol, E. Cretu and R.F. Wolffenbuttel, EXPERIMENTAL VERIFICATION OF SQUEEZED-FILM DAMPING MODELS FOR MEMS.
[29] Zheng Wei, Jing Liu, Xiaoting Zheng, Yan Sun, Ruihua Wei, Influence of squeeze film damping on quality factor in tapping mode atomic force microscope, Journal of Sound and Vibration, 2021.
[30] P.G. ROLL, R. KROTKOV and R.H. DICKE, The Equivalence of inertial and Passive Gravitational Mass, ANNALS OF PHYSICS: 26, 442-517, 1964.
[31] 浅見敏彦, 水川凱斗, 山田啓介, ヒステリシス減衰型動吸振器の最適設計, ばね論文集　第 65 号, 2020.
[32] V.B. Braginsky, A.B. Manukin, and William O. Hamilton, Measurement of Weak Forces in Physics Experiments, American Institute of Physics, 1978.
[33] J. T. Houghton and Hans A. Panofsky, The Physics of Atmospheres, American Institute of Physics, 1978.
[34] 古池紀之, 石川毅彦, パラディ・ポールフランソワ, 富岡浩, 渡邊勇基, 依田眞一, 茂木徹一, 静電浮遊法を用いた粘性係数測定における試料サイズの影響, 日本マイクログラビティ応用学会誌 Vol.24 No.2, 2007.
[35] 理科年表　平成 30 年, 丸善出版, 2017.
[36] 中島良介, IIR フィルタを用いた光干渉計の制御, 卒業論文, 東京工業大学, 2018.

謝辞

本修士論文を完成させるにあたり、様々な方にお世話になりました。ここで感謝申し上げます。

指導教員の宗宮先生は 3 年間大変お世話になりました。理論面でも実験面でも特に多くのことを学びました。私が研究で困ったときにはいつもアドバイスやアイデアを提案していただき大変助かりました。宗宮研究室の自由な雰囲気は自分がやりたいことをさせていただける素晴らしい環境でした。改めてお世話になりました。

特任講師の原田先生は他分野の研究をされているにもかかわらず、質問や相談に乗っていただきました。大変助かりました。　博士 2 年の小田部さんには何度も研究について質問させていただきました。いつも的確な返答をいただき大変助かりました。また実験に関しても、声をかけるとすぐに手伝ってくださりありがとうございました。

同期の阿部君は修士から宗宮研究室に入りましたがすぐに仲良くなり、直接会えないながらも日頃から SNS などを通じてよくコミュニケーションをとって、精神面で支えになっていました。

同期の立原君とは研究に関してだけでなく、就活など同期ならではの様々な話を普段からしていました。お互い大変な時期はよく支えあっていたと思います。困ったらとりあえず話せる存在だったのでとても助けになりました。

修士 1 年の鈴木海堂君、鈴木孝典君とは新型コロナウイルスの影響で直接会うことはほとんどなかったですが、オンラインで就活やプライベートの話をしたりとほかの方よりもオンラインでの交流が多くできたと思います。

修士 1 年の Yilun 君、学部 4 年の笹岡君、竹口朗君も新型コロナウイルスの影響で直接会うことはほとんどなかったですが、オンラインのゼミなどで質問や意見を頂きました。

OB の中島さんは私の修士研究の先行研究をされていたこともあり、ご卒業された後も何度も質問させていただきました。今思えばとても迷惑だったかもしれませんが、その都度丁寧に答えてくださり大変助かりました。

そして何より家族に感謝しています。私が大学院生活を送れたのは家族の支えのおかげです。

最後に改めて感謝いたします。ありがとうございました。