

修士論文

重力波望遠鏡KAGRAにおける非一
様複屈折の影響下での光共振器の新
しい姿勢制御法の開発

東京科学大学理学院物理学系物理学コース 宗宮研究室

羽場大起

2025年4月7日

概要

重力波とは、A.Einstein の提唱した一般相対性理論の帰結より提唱された、質量を持つ物体が加速度運動をすると、その際に生じた時空の歪みが波となって空間中を伝搬する現象である。重力波は他の波と比較しても透過性が高く、それにより中性子星の内部などこれまで人類が知ることのできなかった領域の情報を得ることができるという意味で、その検出には非常に価値がある。

Einstein が予言した時から約 100 年が経過した 2015 年 9 月 14 日に、アメリカに建設された重力波望遠鏡である LIGO が GW150914 という重力波を初検出した [1]。それ以降重力波天文学の扉が開かれたと言える。

重力波による空間振動の振幅は非常に小さく検出は容易ではない。重力波が初観測されて以降も、更なる重力波検出に向けて感度向上の取り組みは常に行われている。アメリカの LIGO ヨーロッパの VIRGO、そして日本に建設された重力波望遠鏡である KAGRA では、Michelson 干渉計に光共振器を組み込んだ複合共振器が用いられており、光路長や鏡の姿勢に対して厳しい要求が課せられている。

KAGRA の特徴として、熱雑音を軽減するために鏡の温度を 20K まで冷却する低温望遠鏡であることが挙げられる。そのため鏡の素材には、熱伝導率が高く、低温での熱散逸が少ないサファイア結晶が用いられる。しかしその一方で、サファイア結晶内における非一様な複屈折によりショット雑音の増加や周波数雑音の増加、鏡の姿勢制御信号にオフセットが加わるという可能性が指摘されている [2]。また ITM 上でのビーム位置の揺らぎにより、オフセットそのものが揺らぎ鏡の姿勢制御系内に雑音として混入する。これにより将来的に KAGRA の感度が制限される可能性があると考えられている。

この問題に対し、本研究では分割フォトディテクタを用いた制御方法の開発を行った。これは、反射光に対して QPD や 16 分割 PD などの分割 PD を使用することで分割して個別の信号として入手し、それらの信号を重み付けして線形に足し合わせることで、適切な制御信号に変換するという方法である。本論文では、この手法に対する理論的な側面に関する議論を行い、シミュレーションを用いた原理検証を行うことでその有効性を確認した。

本論文の構成について述べる。1 章では、一般相対性理論と重力波についての基本的な理論について議論する。2 章では重力波の検出原理と、雑音源について述べる。3 章ではレーザーに関する一般論と、共振器の制御に関する理論について説明する。4 章では複屈折の理論と複屈折が制御系に与える影響について議論する。5 章では複屈折による制御信号のオフセット揺らぎを抑えるための新しい姿勢制御法の理論についてまとめ、6 章で理論の検証のために行ったシミュレーションの内容を述べ、7 章でまとめと結論を述べる。

Abstract

Gravitational waves are a phenomenon proposed as a consequence of the general theory of relativity proposed by A. Einstein. This phenomenon is that the space-time distortion caused by the accelerated motion of an object with mass propagates through space as a wave. Gravitational waves are more permeable than other waves, and their detection is extremely valuable in the sense that it allows us to obtain information on regions previously unknown to humankind, such as the interior of neutron stars.

On September 14, 2015, almost 100 years after Einstein's prediction, LIGO, a gravitational wave telescope built in the United States, detected the first gravitational wave, GW150914. [1] Since then, the door to gravitational wave astronomy has been opened.

The amplitude of the spatial oscillations caused by gravitational waves is very small, so detection is not easy. Even after the first observation of gravitational waves, efforts to improve sensitivity for further detection of gravitational waves are constantly being made. LIGO in the U.S., VIRGO in Europe, and KAGRA, a gravitational wave telescope built in Japan, use a composite resonator that incorporates an optical resonator with a Michelson interferometer, which imposes strict requirements on the optical path length and mirror tilt.

One of the features of KAGRA is that it is a low-temperature telescope, where the temperature of the mirror is cooled down to 20 K to reduce thermal noise. For this reason, the mirror is made of sapphire crystal, which has high thermal conductivity and low heat dissipation at low temperatures. On the other hand, non-uniform birefringence in the sapphire crystal may increase shot noise and frequency noise, and add offset to the mirror's alignment control signal. [2] In addition, due to the fluctuation of the beam position on the ITM, the offset itself is introduced as noise into the alignment control system of the fluctuating mirror. This may limit the sensitivity of KAGRA in the future.

To solve this problem, we have developed a control method using a divided photodetector. In this method, the reflected light is divided and obtained as individual signals by using a divided PD such as a QPD or a 16-divided PD, and these signals are weighted and added together linearly to convert them into an appropriate control signal. In this paper, we discuss the theoretical aspects of this method and confirm its effectiveness by verifying the principle using simulations.

Chapter 1 discusses the basic theory of general relativity and gravitational waves. Chap-

ter 2 describes the principle of gravitational wave detection and noise sources. Chapter 3 describes the general theory of lasers and the theory of resonator control. Chapter 4 discusses the theory of birefringence and its effect on control systems. Chapter 5 summarizes the theory of the new alignment control method to suppress the offset fluctuation of the control signal due to birefringence. Chapter 6 describes the simulations performed to verify the theory and chapter 7 gives a summary and conclusions.

目次

図目次	vi
表目次	x
第 1 章 一般相対性理論と重力波	1
1.1 本論文で用いる表記法	1
1.2 Einstein 方程式	1
1.3 重力波の伝搬	2
1.4 重力波の生成	5
第 2 章 重力波の検出	9
2.1 Michelson 干渉計	9
2.2 Fabry-Perot 共振器	11
2.3 Fabry-Perot 共振器の重力波に対する応答	14
2.4 Fabry-Perot Michelson 干渉計	17
2.5 KAGRA の構成	18
2.6 重力波検出器の雑音	18
第 3 章 レーザー光学	21
3.1 Gaussian ビーム	21
3.2 Hermite-Gaussian モード	22
3.3 Pound-Drever-Hall 法	27
3.4 Wave Front Sensing 法	30
第 4 章 複屈折	33
4.1 複屈折とは	33
4.2 Jones 行列による複屈折の表現	34
4.3 KAGRA における複屈折	35
4.4 複屈折の影響を考慮した反射光	37
4.5 複屈折に関する種々の研究と本研究の目的	40
第 5 章 新しい姿勢制御法の原理	41
5.1 分割 PD の信号を最適化する解決方法	41

5.2	制御系でのショット雑音の計算	44
第 6 章	FINESSE によるシミュレーション	55
6.1	FINESSE 上でのセットアップ	55
6.2	Gouy 位相の決定	56
6.3	復調位相の決定	59
6.4	各検出器からの信号	61
6.5	学習用データの取得	65
6.6	テスト用データの取得	67
6.7	複屈折が KGARA に与える雑音の推定	71
6.8	重み付け係数の決定	75
6.9	重み付け係数の検証	78
6.10	課題と考察	87
第 7 章	まとめと結論	89
付録 A	Hermite-Gaussian モード	91
A.1	Gaussian ビームの導出	91
A.2	Hermite-Gaussian モードの導出	95
付録 B	シミュレーションに使用したコマンド外のシステム	102
B.1	Match-Zhender 干渉計	102
B.2	分割 PD の再現	103
B.3	共振器の長さ制御	104
付録 C	ソースコード	106
謝辞		116
参考文献		118

図目次

1.1	重力波が質点に与える動き	5
2.1	Michelson 干渉計のイメージ図	9
2.2	Fabry-Perot 共振器のイメージ図	12
2.3	Fabry-Perot 共振器の反射光と透過光	13
2.4	Fabry-Perot Michelson 干渉計のイメージ図	17
2.5	KAGRA のセットアップイメージ図	18
3.1	Gaussian ビームパラメータのイメージ図	22
3.2	PDH 信号の例	29
4.1	複屈折イメージ	33
4.2	KAGRA の X arm におけるミラーマップ (θ)	35
4.3	KAGRA の X arm におけるミラーマップ (α)	35
4.4	KAGRA の Y arm におけるミラーマップ (θ)	36
4.5	KAGRA の Y arm におけるミラーマップ (α)	36
5.1	分割 PD のナンバリング (左 : QPD, 右 : 16 分割 PD)	41
5.2	KAGRA のパワーリサイクリングミラー手前の光学配置	45
5.3	DCQPD2 上でのビームジッタースペクトル	46
5.4	ITM 上でのビームジッタースペクトル	47
5.5	伝達関数	50
5.6	連結した伝達関数	50
5.7	フィードバック制御の伝達関数	50
5.8	本論文で使用了たフィードバックループの伝達関数	51
5.9	設計したオープンループ伝達関数 (ゲイン)	53
5.10	設計したオープンループ伝達関数 (位相)	53
6.1	図の下に現れるキャプション	55
6.2	X arm における SOFT モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD1 の信号強度 (-180° から 180°)	57

6.3	Y arm における HSOF T モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD1 の信号強度 (-180° から 180°)	57
6.4	X arm における HARD モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD2 の信号強度 (-180° から 180°)	57
6.5	Y arm における HARD モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD2 の信号強度 (-180° から 180°)	57
6.6	X arm における SOF T モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD1 の信号強度 (44° - 48°)	58
6.7	Y arm における SOF T モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD1 の信号強度 (40° - 44°)	58
6.8	X arm における HARD モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD2 の信号強度 (133.2° - 137.2°)	58
6.9	Y arm における HARD モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD2 の信号強度 (133° - 137°)	58
6.10	X arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)	59
6.11	Y arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)	59
6.12	X arm における SOF T モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)	60
6.13	Y arm における SOF T モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)	60
6.14	X arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)	60
6.15	Y arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)	60
6.16	X arm における SOF T モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)	60
6.17	Y arm における SOF T モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)	60
6.18	S 偏光の DC 成分強度分布 (X arm)	61
6.19	P 偏光の DC 成分強度分布 (X arm)	61
6.20	S 偏光の強度分布 (Y arm)	61
6.21	P 偏光の強度分布 (Y arm)	61
6.22	キャリア光の強度分布 (X arm, Split PD1)	62
6.23	キャリア光の強度分布 (X arm, Split PD2)	62
6.24	Upper サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD1)	62
6.25	Upper サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD2)	62
6.26	Lower サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD1)	62
6.27	Lower サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD2)	62
6.28	キャリア光の強度分布 (Y arm, Split PD1)	63
6.29	キャリア光の強度分布 (Y arm, Split PD2)	63
6.30	Upper サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD1)	63
6.31	Upper サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD2)	63
6.32	Lower サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD1)	63
6.33	Lower サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD2)	63
6.34	X arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD1)	64

6.35	X arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD2)	64
6.36	Y arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD1)	64
6.37	Y arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD2)	64
6.38	学習用データの測定イメージ	65
6.39	ビームジッターと QPD からの出力 (領域 1)	66
6.40	ビームジッターと QPD からの出力 (領域 2)	66
6.41	ビームジッターと QPD からの出力 (領域 3)	66
6.42	ビームジッターと QPD からの出力 (領域 2)	66
6.43	ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 1)	67
6.44	ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 2)	67
6.45	ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 5)	67
6.46	ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 6)	67
6.47	テストデータの測定イメージ	68
6.48	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 1)	69
6.49	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 2)	69
6.50	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 3)	69
6.51	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 4)	69
6.52	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 1)	70
6.53	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 2)	70
6.54	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 5)	70
6.55	300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 6)	70
6.56	X arm の QPD の各領域における復調信号 (HARD,Yaw)	71
6.57	X arm の 16PD における復調信号 (HARD,Yaw, 領域 1)	71
6.58	X arm の 16PD における復調信号 (HARD,Yaw, 領域 2)	71
6.59	X arm の 16PD における復調信号 (HARD,Yaw, 領域 5)	72
6.60	X arm の 16PD における復調信号 (HARD,Yaw, 領域 6)	72
6.61	X arm の複屈折によるショット雑音 (HARD モード)	73
6.62	X arm の複屈折によるショット雑音 (SOFT モード)	73
6.63	Y arm の複屈折によるショット雑音 (HARD モード)	73
6.64	Y arm の複屈折によるショット雑音 (SOFT モード)	73
6.65	X arm の合計のショット雑音 (HARD モード)	73
6.66	X arm の合計のショット雑音 (SOFT モード)	73
6.67	Y arm の合計のショット雑音 (HARD モード)	74
6.68	Y arm の合計のショット雑音 (SOFT モード)	74
6.69	ショット雑音と KAGRA 感度曲線の比較	75
6.70	X arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Yaw)	81
6.71	X arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Pitch)	81
6.72	X arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Yaw)	81
6.73	X arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Pitch)	81

6.74	Y arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Yaw)	81
6.75	Y arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Pitch)	81
6.76	Y arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Yaw)	82
6.77	Y arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Pitch)	82
6.78	X arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (HARD モード)	82
6.79	X arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (SOFT モード)	82
6.80	Y arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (HARD モード)	82
6.81	Y arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (SOFT モード)	82
6.82	ショット雑音と KAGRA 感度曲線の比較 (QPD 重み付け後)	84
6.83	ショット雑音と KAGRA 感度曲線の比較 (16 分割 PD 重み付け後)	84
6.84	複屈折の影響を考慮した KAGRA 感度曲線の比較	85
B.1	Triple Match-Zhender 干渉計のイメージ図	102
B.2	クリーニング前の共振器の傾きと位相の関係	105
B.3	クリーニング後の共振器の傾きと位相の関係	105

表目次

5.1	Pitch,Yaw のカップリングマトリクス	52
6.1	手順 5 番目での探索範囲	57
6.2	最適な Gouy 位相	58
6.3	S 偏光と P 偏光のレーザーパワー	64
6.4	X arm での WFS 信号マトリクス	74
6.5	QPD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (学習用データ)	77
6.6	16 分割 PD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (学習用データ)	78
6.7	係数適用前後のオフセット揺らぎの比較 (X arm)	79
6.8	係数適用前後のオフセット揺らぎの比較 (Y arm)	79
6.9	係数適用前後の制御点揺らぎの比較 (X arm)	79
6.10	係数適用前後の制御点揺らぎの比較 (Y arm)	80
6.11	QPD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (テストデータ)	80
6.12	16 分割 PD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (テストデータ)	80
6.13	インスパイラルレンジの比較 (X arm のみ変更後)	85
6.14	インスパイラルレンジの比較 (Y arm のみ変更後)	85
6.15	インスパイラルレンジの比較 (X arm,Y arm 変更後)	86
6.16	インスパイラルレンジの上昇幅と上昇率 (X arm のみ変更後)	86
6.17	インスパイラルレンジの上昇幅と上昇率 (Y arm のみ変更後)	86
6.18	インスパイラルレンジの上昇幅と上昇率 (X arm,Y arm 変更後)	86
6.19	ローパスフィルタ変更後のインスパイラルレンジの比較 (X arm のみ変更後)	87
6.20	ローパスフィルタ変更後のインスパイラルレンジの比較 (Y arm のみ変更後)	87
6.21	ローパスフィルタ変更後のインスパイラルレンジの比較 (X arm, Y arm 変更 後)	88
C.1	初期値と関数の設定 (QPD)	113
C.2	初期値と関数の設定 (16PD)	115

第 1 章

一般相対性理論と重力波

本章では一般相対性理論から導かれる重力波についての理論を述べる。

1.1 本論文で用いる表記法

本論文では、四次元時空の座標を x^μ のように表現する。なお、添え字にギリシャ文字が使われている場合、その添え字は 0 から 3 の値取り、アルファベットが使われている場合はその添え字は 1 から 3 の値を取る。 x^μ の具体的な表式は以下に示す通りである：

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (1.1)$$

また、上下の添え字で同じ文字が使われている場合、その文字の範囲で和を取るという Einstein の縮約記法を適用する。すなわち、

$$A_\mu A^\mu = \sum_{\nu=0}^3 A_\nu A^\nu \quad (1.2)$$

$$A_i A^i = \sum_{j=1}^3 A_j A^j \quad (1.3)$$

となる。

また、偏微分の操作を以下のように表記する：

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\nu A_\mu = A_\mu{}^{,\nu} \quad (1.5)$$

1.2 Einstein 方程式

一般相対性理論において四次元時空における微小な距離離れた二点の時間座標も含めた距離の二乗は四次元線素と呼ばれる。これを ds^2 とすると、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.6)$$

となる。ここで $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれ、四次元時空の幾何学的な性質を決める物理量である。

真空中での計量テンソルは特に Minkowski 計量と呼ばれ、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ と表記される。Minkowski 計量は以下で与えられる:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$g_{\mu\nu}$ は以下で与えられる Einstein 方程式を満たす:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルであり、 $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソルである。Einstein テンソルは以下で与えられる:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.9)$$

$R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソルであり、 R は Ricci スカラーである。 $R_{\mu\nu}, R$ はそれぞれ以下で与えられる:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (1.10)$$

$$R = R^{\mu}_{\mu} \quad (1.11)$$

式 (1.10) における $R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$ は、Riemann の曲率テンソルであり以下で与えられる:

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} = \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \quad (1.12)$$

$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ は Christoffel 記号であり、以下で定義される:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (1.13)$$

1.3 重力波の伝搬

式 (1.8) から、伝搬する重力波を導出する。重力が弱い場合、 $g_{\mu\nu}$ は Minkowski 計量とその摂動項を表すテンソル $h_{\mu\nu}$ の線形和で近似される:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

ここで、 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ である。

これを用いて、Christoffel 記号を記述すると以下ようになる:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \simeq \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (h_{\sigma\nu,\lambda} + h_{\sigma\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (1.15)$$

なお、 $h_{\mu\nu}$ の二乗程度の大きさは微小であるとして落としている。式 (1.15) から、 $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ は $h_{\mu\nu}$ の一乗程度の大きさであることが分かる。式 (1.15) を用いて式 (1.10) を書き直すと、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(h_{\sigma\mu,\nu\alpha} + h_{\sigma\nu,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\sigma\alpha}) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(h_{\sigma\mu,\alpha\nu} + h_{\sigma\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\alpha,\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\sigma\mu,\nu}^{\cdot\sigma} + h_{\sigma\nu,\mu}^{\cdot\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma}^{\cdot\sigma}) - \frac{1}{2}(h_{\sigma\mu,\nu}^{\cdot\sigma} + h_{\sigma,\mu\nu}^{\cdot\sigma} - h_{\mu\sigma,\nu}^{\cdot\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\sigma\nu,\mu}^{\cdot\sigma} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\sigma,\nu}^{\cdot\sigma}) \end{aligned}$$

なお、 $h_\sigma^\sigma = h$, $h_{\mu\nu,\sigma}^{\cdot\sigma} = \square h_{\mu\nu}$ である。

また式 (1.11) を書き直すと、

$$\begin{aligned} R &= R^\nu_\nu \\ &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\sigma\nu,\mu}^{\cdot\sigma} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\sigma,\nu}^{\cdot\sigma}) \\ &= h_{\sigma\nu}^{\cdot\sigma\nu} - \square h \end{aligned}$$

である。以上より式 (1.9) を書き直すと、

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\sigma\nu,\mu}^{\cdot\sigma} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\sigma,\nu}^{\cdot\sigma} - \eta_{\mu\nu}(h_{\sigma\nu}^{\cdot\sigma\nu} - \square h)) \quad (1.16)$$

となる。ここで、以下で与えられる Lorentz ゲージを課す：

$$\bar{h}_{\nu,\mu}^\mu = 0 \quad (1.17)$$

このとき $G_{\mu\nu}$ は、

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

となる。したがって Einstein 方程式は、

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.19)$$

である。真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ であるから、

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.20)$$

である。

上記方程式の解として、平面波解を考える：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) \quad (1.21)$$

式 (1.20) に代入すると、

$$\begin{aligned} \square a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) &= a_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0 \quad (1.22)$$

となる。また、Lorentz ゲージより

$$\eta^{\alpha\mu} \bar{h}_{\mu\nu,\alpha} = 0 \quad (1.23)$$

$$\therefore \eta^{\alpha\mu} \partial_\alpha (a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda)) = 0 \quad (1.24)$$

$$\eta^{\alpha\mu} k_\alpha a_{\mu\nu} = 0 \quad (1.25)$$

となる。今重力波が z 軸方向に進行しているとする、 $-k_0 = k_3 = k, k_1 = k_2 = 0$ である。したがって、

$$k(a_{\mu 0} + a_{\mu 3}) = 0 \quad (1.26)$$

が成立する。

ここでトランスバース・トレースゲージ (TT ゲージ)、

$$\begin{cases} \bar{h}_{\mu 0} = 0 \\ \bar{h}_\mu^\mu = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

を課す。トレースレス条件下では以下が成立する:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (1.28)$$

これにより $a_{\mu\nu}$ の条件として、

$$a_{\mu 0} = 0 \quad (1.29)$$

$$\eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} = 0 \quad (1.30)$$

$$\therefore -a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \quad (1.31)$$

が得られる。また、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ は対称テンソルより、

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (1.32)$$

である。以上を用いると、 $a_{\mu\nu}$ の独立な成分は2つのみである。これを $h_+, h_\times$ とすると、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[i(-\omega t + kz)] \quad (1.33)$$

となる。これが、真空中の重力波を表す解である。図 1.1 は $+$ モード及び $\times$ モードの重力波が質点に与える動きのイメージである。

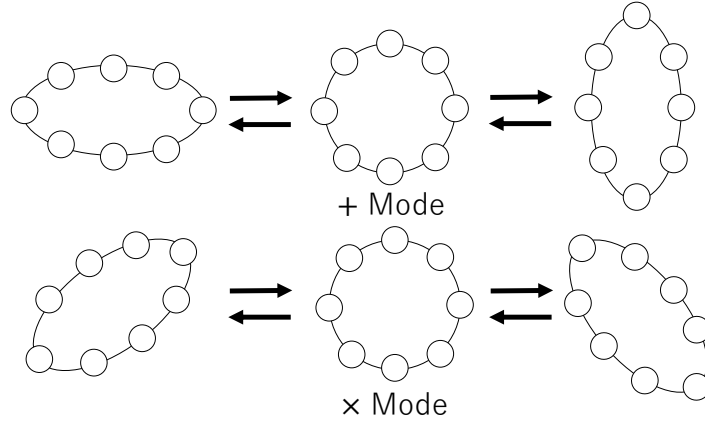


図 1.1: 重力波が質点に与える動き

1.4 重力波の生成

重力波源が存在する場合、すなわち $T_{\mu\nu} \neq 0$ の場合を考える。このとき、式 (1.19) の解を考えればよい。この解は、

$$\square G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') \quad (1.34)$$

を満たす Green 関数 $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ を用いて、

$$h_{\mu\nu} = \int \frac{16\pi G}{c^4} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (1.35)$$

である。実際、

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} &= \int \frac{16\pi G}{c^4} \square G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \\ &= -\frac{16\pi G}{c^4} \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \\ &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

となり、式 (1.19) の解であることが分かる。ここで、

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.36)$$

であるから、

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \frac{16\pi G}{c^4} \int \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \\ \therefore h_{\mu\nu} &= \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, |\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (1.37)$$

となる。

$h_{\mu\nu}$ の TT 成分を取ると、

$$h_{ij}^{\text{TT}} = P_k^i h^{kl} P_l^j - \frac{1}{2} P^{ij} P_{kl} h^{kl} \quad (1.38)$$

である。ここで、

$$P_j^i = \delta_j^i - n^i n_j, \quad n^i = \frac{x^i}{r} \quad (1.39)$$

である。このとき、

$$\therefore h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}^{\text{TT}}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, |\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (1.40)$$

である。

局所波動帯での $h_{\mu\nu}$ を考える。このとき、

$$r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'| \sim L \quad (1.41)$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 &= |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + |\mathbf{x}'|^2 \\ &= r^2 \left(1 - 2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^2} + \frac{|\mathbf{x}'|^2}{r^2} \right) \\ &= r^2 \left(1 - 2\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}'}{r} + \frac{|\mathbf{x}'|^2}{r^2} \right) \\ &\simeq r^2 \left(1 - 2\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}'}{r} \right) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &\simeq r \sqrt{1 - 2\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}'}{r}} \\ &\simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' \end{aligned}$$

である。したがって、 $T_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ を展開すると、

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{TT}}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, |\mathbf{x}'|) &\simeq T_{\mu\nu}^{\text{TT}}(t - (r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')/c, |\mathbf{x}'|) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} T_{ij}^{\text{TT}}(t - r/c, \mathbf{x}') \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right)^m d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

である。これを用いて、

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} T_{ij}^{\text{TT}}(t - r/c, \mathbf{x}') \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right)^m d\mathbf{x}' \quad (1.42)$$

となる。最低次は、 $m = 0$ の時である。このとき、

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}^{\text{TT}}(t - r/c, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1.43)$$

である。 T_{ij}^{TT} について、

$$\begin{aligned} T_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) &= T_{il}^{\text{TT}} \delta_l^j \\ &= T_{il}^{\text{TT}} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial T_{il}^{\text{TT}} x^j}{\partial x^l} - \frac{\partial T_{il}^{\text{TT}}}{\partial x^l} x^j \end{aligned}$$

である。ここで Bianchi 恒等式から、 $T_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$ であるから、

$$\frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial T_{\mu l}}{\partial x^l} = 0 \quad (1.44)$$

$$\therefore \frac{\partial T_{\mu l}}{\partial x^l} = -\frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial x^0} \quad (1.45)$$

である。今 μ を i に置き換えることにより、

$$\frac{\partial T_{il}}{\partial x^l} = -\frac{\partial T_{i0}}{\partial x^0} \quad (1.46)$$

である。となる。したがって、

$$T_{ij} = \frac{\partial T_{il} x^j}{\partial x^l} + \frac{\partial T_{i0}}{\partial t} x^j \quad (1.47)$$

である。 T_{i0}^{TT} について同様の議論を行うと、

$$\begin{aligned} T_{i0} &= T_{l0} \delta_l^i \\ &= T_{l0} \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial T_{l0} x^i}{\partial x^l} - \frac{\partial T_{l0}}{\partial x^l} x^i \\ &= \frac{\partial T_{l0} x^i}{\partial x^l} + \frac{\partial T_{00}}{\partial t} x^i \end{aligned}$$

である。これを式 (1.47) に代入すると、以下のようになる:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\partial T_{il} x^j}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T_{l0} x^i}{\partial x^l} + \frac{\partial T_{00}}{\partial t} x^i \right) x^j \\ &= \frac{\partial T_{il} x^j}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T_{l0} x^i}{\partial x^l} \right) x^j + \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j \\ &= \frac{\partial T_{il} x^j}{\partial x^l} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i \right) x^j + \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j \end{aligned}$$

ここで第二項について、以下のように変形できる:

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i \right) x^j = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i x^j \right) - \frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i \delta_l^j \quad (1.48)$$

ここで、式 (1.48) の右辺第三項を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i \delta_l^j &= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x^k} x^i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^l} (T_{lj} x^j) - T_{lj} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^l} (T_{lj} x^j) - T_{ij} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i \right) x^j &= -\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i x^j \right) + \frac{\partial T_{kj}}{\partial x^k} x^i \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i x^j \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} (T_{lj} x^j) - T_{ij} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^l} (T_{il} x^j + T_{lj} x^i) - T_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial T_{lk}}{\partial x^k} x^i x^j \right) + \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j \quad (1.49)$$

となる。式 (1.43) に式 (1.49) を適用することを考えると、式 (1.49) の第一項と第三項はガウスの定理より落とすことができるので、

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T_{00}^{\text{TT}}(t - r/c, \mathbf{x}') x'^i x'^j d\mathbf{x}' \quad (1.50)$$

となる。今完全流体を仮定すると、 $T_{00}^{\text{TT}} \simeq \rho$ である。また、質量分布に対する四重極モーメントを、

$$I_{ij}^{\text{TT}}(t) = \int \rho x'^i x'^j d\mathbf{x}' \quad (1.51)$$

とすると、

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{ij}^{\text{TT}}(t - r/c) \quad (1.52)$$

となる。ここから、重力波の最低次は四重極放射であることが分かる。

第 2 章

重力波の検出

1 章で見たように、重力波は空間の微小な歪みが波として伝わる現象である。しかしその振幅は非常に小さく検出は困難である。そこで編み出されたのが Michelson 干渉計を主体とする光干渉計を用いた方法である。以下では光干渉計の重力波に対する応答と雑音源について述べる。

2.1 Michelson 干渉計

Michelson 干渉計はレーザー光をビームスプリッタで分割し、その光を鏡で反射しビームスプリッタに戻すことにより、干渉を起こす装置である。Michelson 干渉計のイメージ図を図 2.1 に示す。

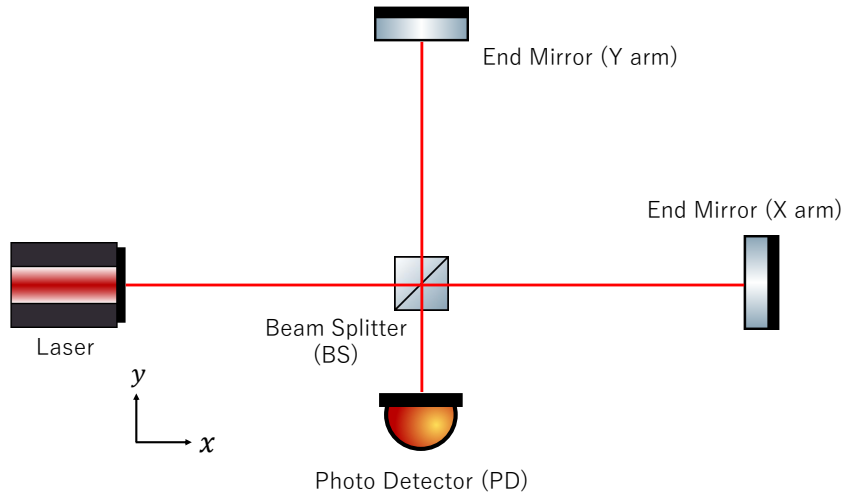


図 2.1: Michelson 干渉計のイメージ図

Michelson 干渉計の重力波に対する応答について議論する。 $h_{\times} = 0$ の時、四次元線素は、

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\
 &= -(cdt)^2 + (1 + h_+ \exp\{i(-\omega t + kz)\}) dx^2 \\
 &\quad + (1 - h_+ \exp\{i(-\omega t + kz)\}) dy^2 + dz^2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

である。以降は、 $h(t) = h_+ \exp\{i(-\omega t + kz)\}$ と置く。光が x 軸方向に進行する場合を考えると $ds = 0$ より、

$$(cdt)^2 = (1 + h(t))dx^2 \quad (2.2)$$

となる。 $dx/dt > 0$ とすると、

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1 + h(t)}} cdt \quad (2.3)$$

である。 $|h(t)| \ll 1$ であるから、

$$dx \simeq \left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) cdt \quad (2.4)$$

と近似できる。ここから、 x 軸方向のエンドミラーとビームスプリッタの間を往復する時間を求める。これを Δt_x とすると、

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_x} \left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) dt = \frac{2l_x}{c} \quad (2.5)$$

$$\therefore \Delta t_x - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_x} h(t) dt = \frac{2l_x}{c} \quad (2.6)$$

となるので、

$$\Delta t_x = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_x} h(t) dt + \frac{2l_x}{c} \quad (2.7)$$

となる。

ここで $|h(t)| \ll 1$ であるから、 $\Delta t_x \simeq 2l_x/c$ と近似できる。したがって式 (2.7) は、以下のように記述できる:

$$\Delta t_x = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l_x}{c}} h(t) dt + \frac{2l_x}{c} \quad (2.8)$$

同様の議論により y 軸方向に進む光について、往復にかかる時間を計算することができる。 dy について、

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1 - h(t)}} cdt \quad (2.9)$$

であることを用いて、

$$\Delta t_y = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l_y}{c}} h(t) dt + \frac{2l_y}{c} \quad (2.10)$$

と計算できる。 x, y 軸方向の光の位相差を $\delta\phi$ とすると、

$$\delta\phi = \Omega(\Delta t_x - \Delta t_y) = \frac{2\Omega}{c}(l_x - l_y) + \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l}{c}} h(t) dt \quad (2.11)$$

である。今、 $l_x \simeq l_y \simeq l$ と近似している。式 (2.11) における右辺第二項が重力波に対する位相差を示している。これを $\delta\phi_{\text{GW}}$ とすると、

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l}{c}} h(t) dt \quad (2.12)$$

である。

以下で、Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答関数を求める。 $h(t)$ をフーリエ変換した関数を $\tilde{h}(\omega)$ とすると、

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.13)$$

となる。これを用いると、

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt \quad (2.14)$$

となる。式 (式 (2.14)) 計算を進めると以下ようになる:

$$\begin{aligned} \delta\phi_{\text{GW}} &= \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) \left(\frac{1}{i\omega} \right) \left(e^{i\omega(t_0 + \frac{2l}{c})} - e^{i\omega t_0} \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) e^{i\frac{\omega l}{c}} \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \end{aligned} \quad (2.15)$$

重力波を検出した時刻を原点とするには、 $t_0 \rightarrow t_0 - 2l/c$ とすればよく、

$$\phi_{\text{GW}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) e^{-i\frac{\omega l}{c}} \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \quad (2.16)$$

となる。以上より、Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答関数を H_{MI} とすると、

$$H_{\text{MI}} = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) e^{-i\frac{\omega l}{c}} \quad (2.17)$$

式 (2.17) を見ると分かるように、

$$\frac{\omega l}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (2.18)$$

を満たす基線長で最も感度が良くなる。

2.2 Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot 共振器は、二枚の鏡を向かい合わせ多重反射させることで内部に光をため込む装置である。Fabry-Perot 共振器のシステムを図 2.2 に示す。ここで r_1, r_2 はそれぞれフロントミラー、エンドミラーの反射率であり、 t_1, t_2 はそれぞれフロントミラー、エンドミラーの透過率である。光の反射、透過でエネルギーロスが無いとすると、

$$r_i^2 + t_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2) \quad (2.19)$$

となる。以下の計算では式 (2.19) を仮定する。

Fabry-Perot 共振器の反射光、透過光、及び共振器内の光を計算する。それぞれを

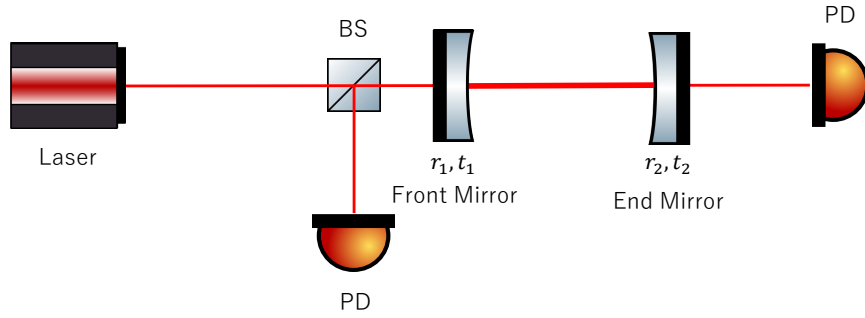


図 2.2: Fabry-Perot 共振器のイメージ図

E_r, E_t, E_{cav} とすると、以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} E_r &= -r_1 E_0 + t_1 r_2 t_1 e^{-i\phi} E_0 + t_1 r_2 r_1 r_2 t_1 e^{-2i\phi} E_0 + \dots \\ &= -r_1 E_0 + t_1^2 r_2 e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-i\phi})^n E_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$= -r_1 E_0 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} E_0 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} E_t &= t_1 t_2 e^{-i\phi/2} E_0 + t_1 r_2 r_1 t_1 e^{-3i\phi/2} E_0 + \dots \\ &= t_1 t_2 e^{-i\phi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-i\phi})^n E_0 \\ &= \frac{t_1 t_2 e^{-i\phi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} E_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{cav}} &= t_1 E_0 + t_1 r_2 r_1 e^{-i\phi} E_0 + t_1 r_2 r_1 r_2 r_1 e^{-2i\phi} E_0 + \dots \\ &= t_1 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-i\phi})^n E_0 \\ &= \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} E_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで $\phi = 2\Omega L/c$ である。 Ω はレーザーの角周波数、 L は Fabry-Perot 共振器の共振器長であり、 ϕ は共振器内を一往復する際の位相変化を示す。これを用いて各光の強度を計算する。

これらを P_r, P_t, P_{cav} とすると、以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 \\ &= \frac{(r_2 - r_1)^2 + 4r_1r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})}{(1 - r_1r_2)^2 + 4r_1r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} P_t &= |E_t|^2 \\ &= \frac{(t_1t_2)^2}{(1 - r_1r_2)^2 + 4r_1r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{cav}} &= |E_{\text{cav}}|^2 \\ &= \frac{t_1^2}{(1 - r_1r_2)^2 + 4r_1r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \\ &= \frac{t_1^2}{(1 - r_1r_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4r_1r_2}{(1 - r_1r_2)^2} \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

ここから、 $P_r + P_t = |E_0|^2$ と計算でき、エネルギー保存則を満たすことが分かる。また自然数 n を用いて、

$$\phi = 2n\pi \quad (2.27)$$

の時 P_t, P_{cav} は最大値を取ることが分かる。これは共振器内で行きと帰りの光が共振し合っている状態であり、この状態を Fabry-Perot 共振器の共振状態と呼ぶ。図 2.3 に ϕ に応じた反射光及び透過光の様子を示す。ここでは、 $r_1 = \sqrt{0.95}, r_2 = \sqrt{0.99}$ として、ロスはないとして計算している。図 2.3 を見ると、透過光と反射光の総和が一定であり、エネルギー保存則を満た

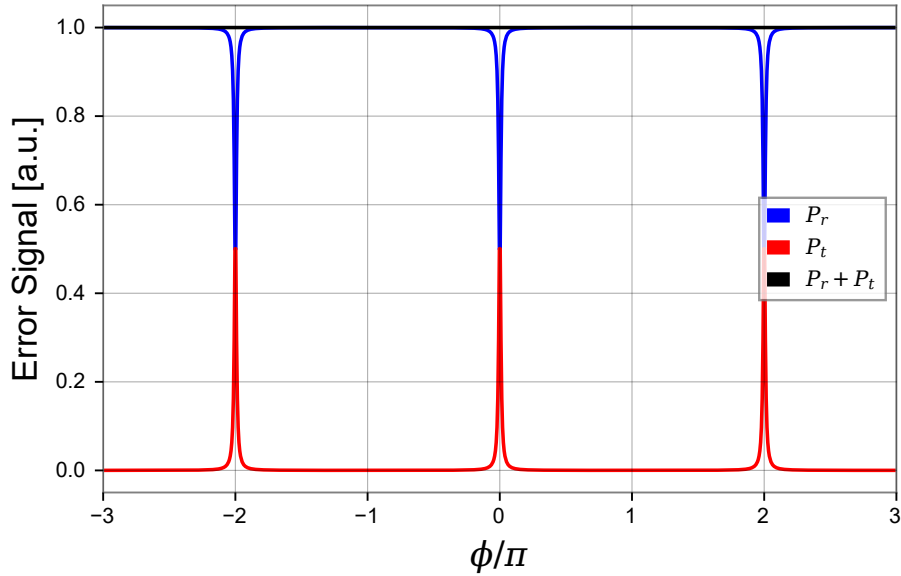


図 2.3: Fabry-Perot 共振器の反射光と透過光

していることが分かる。また、共振状態は ϕ の変化に対して周期的に現れている。 ϕ は Ω に比例する関数であるから、2つの共振状態における角周波数の差を $\Delta\Omega$ とすると、

$$\Delta\Omega = \frac{\pi L}{c} \quad (2.28)$$

となる。2つの共振状態における周波数の差をフリースペクトラルレンジ (FSR) と呼び、これを f_{FSR} とすると、

$$f_{\text{FSR}} = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = \frac{c}{2L} \quad (2.29)$$

である。

共振状態において、 P_t, P_{cav} は鋭いピークを持つ。このピークにおける半値半幅 (HWHM) を求める。これを f_{HWHM} とすると式 (2.26) より、

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi f_{\text{HWHM}}}{f_{\text{FSR}}}\right)} = \frac{1}{2}$$

となる。ここで $f_{\text{HWHM}} \ll f_{\text{FSR}}$ であるから、

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \left(\frac{\pi f_{\text{HWHM}}}{f_{\text{FSR}}}\right)^2} \simeq \frac{1}{2}$$

である。ここから、 f_{HWHM} と f_{FSR} の関係式を導出できる:

$$f_{\text{HWHM}} = \frac{1 - r_1 r_2}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} f_{\text{FSR}} \quad (2.30)$$

f_{FSR} と f_{HWHM} の比はフィネスと呼ばれ、これを $\mathcal{F}$ とすると以下のように表される:

$$\mathcal{F} = \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{HWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (2.31)$$

フィネスは共振ピークの鋭さを示しており、共振器の性能の指標である。また後述するように共振器の平均折り返し数に比例する。

2.3 Fabry-Perot 共振器の重力波に対する応答

ここでは、Fabry-Perot 共振器の重力波に対する応答について議論する。今 Fabry-Perot 共振器内の光が x 軸方向に進行すると仮定する。共振器内を n 回往復するのにかかる時間を Δt_n とすると式 (2.8) より、

$$\Delta t_n \simeq \frac{2l}{c} n + \frac{1}{2} \int_{t_0 - \frac{2l}{c}}^{t_0} h(t) dt \quad (2.32)$$

となる。なお重力波の発生時点を原点としている。 $\tilde{h}(\omega)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta t_n &\simeq \frac{2l}{c} n + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_0 - \frac{2l}{c}}^{t_0} \tilde{h}(\omega) dt d\omega \\ &= \frac{2l}{c} n + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) \frac{1}{i\omega} \left(1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n}\right) e^{i\omega t_0} d\omega \end{aligned} \quad (2.33)$$

共振器内を n 往復した際の位相のずれは $\Omega\Delta t_n$ であるから、共振器からの反射光を計算すると、式 (2.20) より、

$$E_r = E_0 e^{i\Omega t} \left(-r_1 + t_1^2 r_2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{-i\Omega\Delta t_n} \right) \quad (2.34)$$

である。式 (2.33) を代入すると、

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \left(-r_1 + t_1^2 r_2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ -i\Omega \left(\frac{2l}{c}n + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t_0} d\omega \right) \right\} \Bigg) \\ &= E_0 \left(-r_1 + t_1^2 r_2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{-i\phi} \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ -i\frac{\Omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t_0} d\omega \right\} \Bigg) \end{aligned}$$

となる。ここで $|h(t)| \ll 1$ とすると、

$$\exp \left\{ -i\frac{\Omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t_0} d\omega \right\} \simeq 1 - i\frac{\Omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t_0} d\omega \quad (2.35)$$

であるから、

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \left(-r_1 + t_1^2 r_2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{-in\phi} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 1 - i\frac{\Omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t_0} d\omega \right\} \right) \end{aligned}$$

となる。これを計算すると、

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\omega} \tilde{h}(\omega) e^{-i\phi} e^{i\omega t_0} \sum_{n=1}^{\infty} t_1^2 r_2 (r_1 r_2)^{n-1} \left(1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n} \right) d\omega \right) \end{aligned}$$

となる。ここで積分の中身について計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} t_1^2 r_2 (r_1 r_2)^{n-1} \left(1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}n} \right) &= \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} - \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi} e^{-2i\frac{l\omega}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi} e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} \\ &= \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \left(1 - \frac{(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}) e^{-2i\frac{l\omega}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi} e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} \right) \\ &= \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi} e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} \end{aligned}$$

である。式 (2.27) で与えられる共振状態を仮定すると、

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{-r_1 + (t_1^2 + r_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} - \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\omega} \tilde{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi} e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} e^{i\omega t_0} d\omega \quad (2.36)$$

となる。整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{E_r}{E_0} &= \frac{-r_1 + r_2}{1 - r_1 r_2} \left(1 - \frac{t_1^2 r_2}{-r_1 + r_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\omega} \tilde{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{l\omega}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} e^{i\omega t_0} d\omega \right) \\ &= \frac{-r_1 + r_2}{1 - r_1 r_2} \left(1 - \frac{it_1^2 r_2}{-r_1 + r_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{\omega} \tilde{h}(\omega) \frac{\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) e^{-i\frac{l\omega}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} e^{i\omega t_0} d\omega \right) \end{aligned}$$

となる。したがって Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数を $H_{\text{FP}}(\omega)$ とすると、

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{-r_1 + r_2}{1 - r_1 r_2} \left(1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{FP}} e^{i\omega t_0} d\omega \right) \quad (2.37)$$

となる。ただし、

$$H_{\text{FP}}(\omega) = \frac{\Omega}{\omega} \frac{t_1^2 r_2}{-r_1 + r_2} \frac{\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} \tilde{h}(\omega) e^{-i\frac{l\omega}{c}} \quad (2.38)$$

である。 $|H_{\text{FP}}(\omega)|$ を計算すると、 $L\omega/c \ll 1$ であるから、

$$\begin{aligned} |H_{\text{FP}}(\omega)| &\simeq \frac{\Omega}{\omega} \frac{t_1^2 r_2}{-r_1 + r_2} \frac{l\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{1 - 2r_1 r_2 \cos\left(\frac{2l\omega}{c}\right) + (r_1 r_2)^2}} \\ &\simeq \frac{2\Omega l}{c(1 - r_1 r_2)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \left(\frac{l\omega}{c}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

である。途中の近似では $r_1 \ll r_2, r_1 \simeq 1, r_2 \simeq 1$ となることを用いている。式 (2.39) を書き換えると、

$$|H_{\text{FP}}(\omega)| \simeq \frac{2\Omega L}{c(1 - r_1 r_2)} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad (2.40)$$

となる。ここで、

$$\tau = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \frac{L}{c} \quad (2.41)$$

である。このとき τ はレーザー光の共振器内での平均滞在時間を示している。 τ を $\mathcal{F}$ を用いて記述すると、

$$\tau = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{L}{c} \quad (2.42)$$

である。 L/c 共振器内の片道を通ずるのにかかる時間であるため、式 (2.42) を見ると、この通貨にかかる時間が $2\mathcal{F}/\pi$ 倍されていることが分かる。すなわち、Fabry-Perot 共振器は実効的な伝搬距離をフィネス倍程度増やすことができる。

2.4 Fabry-Perot Michelson 干渉計

Fabry-Perot-Michelson 干渉計とは、Michelson 干渉計の各腕に Fabry-Perot 共振器を組み込んだ干渉計である。図 2.4 に Fabry-Perot-Michelson 干渉計のイメージ図を示す。図の x 軸方向伸びる Fabry-Perot 共振器を X arm と呼び、 y 軸方向伸びる共振器を Y arm と呼ぶ。それぞれの共振器のフロントミラーは Input Test Mass(ITM) と呼ばれ、エンドミラーは End Test Mass(ETM) と呼ばれる。

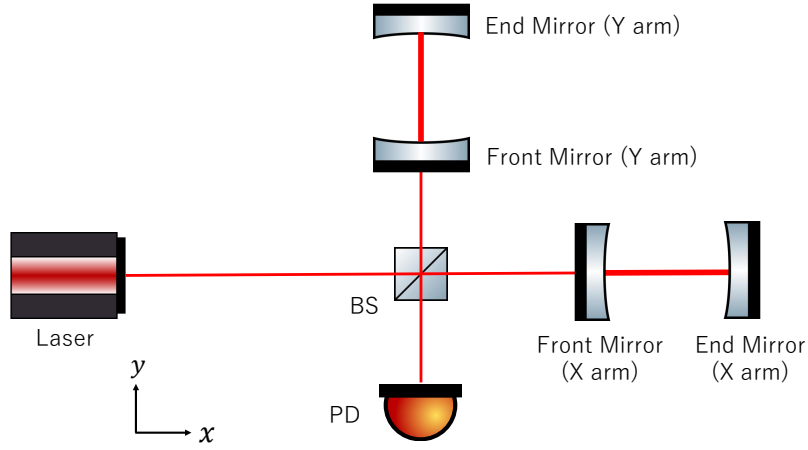


図 2.4: Fabry-Perot Michelson 干渉計のイメージ図

Fabry-Perot Michelson 干渉計の重力波に対する応答について考える。一つ一つの腕は Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数 H_{FP} に従う。Michelson 干渉計を考えると、 x, y 軸方向に差動で空間が変位するため、 H_{FP} を 2 倍すればよい。したがって、求める周波数応答関数を H_{FPMI} とすると、

$$H_{\text{FPMI}}(\omega) = 2H_{\text{FP}} = \frac{2\Omega}{\omega} \frac{t_1^2 r_2}{-r_1 + r_2} \frac{\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{l\omega}{c}}} \tilde{h}(\omega) e^{-i\frac{l\omega}{c}} \quad (2.43)$$

となる。ここで $l\omega/c \ll 1$ とすると、

$$\begin{aligned} |H_{\text{FPMI}}(\omega)| &= 2|H_{\text{FP}}(\omega)| \\ &\simeq \frac{4\Omega l}{c(1 - r_1 r_2)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \left(\frac{l\omega}{c}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

と計算できる。カットオフ周波数 f_c を

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{2l} \frac{1 - r_1 r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} \quad (2.45)$$

と定義すると、

$$|H_{\text{FPMI}}| = \frac{4\Omega l}{c(1 - r_1 r_2)} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} \quad (2.46)$$

となる。式 (2.17) より、

$$|H_{\text{MI}}| \simeq \frac{2\Omega}{\omega} \frac{l\omega}{c} = \frac{2\Omega l}{c} \quad (2.47)$$

であるから、

$$\begin{aligned} |H_{\text{FPMI}}| &= \frac{2}{1 - r_1 r_2} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} |H_{\text{MI}}| \\ &\simeq \frac{4}{T_1} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} |H_{\text{MI}}| \end{aligned} \quad (2.48)$$

となり、 f_c をカットオフ周波数とする 1 次のローパス特性を示す。

2.5 KAGRA の構成

日本に建設された重力波検出器である KAGRA のセットアップを図 2.5 に示す。図を見る

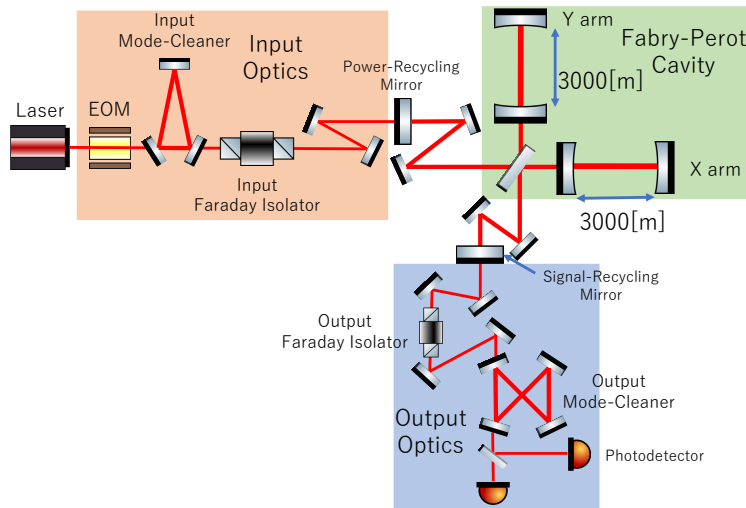


図 2.5: KAGRA のセットアップイメージ図

と前節で議論した Fabry-Perot Michelson 干渉計の構成に加えて、パワーリサイクリングミラーとシグナルリサイクリングミラーが導入されていることが分かる。このような干渉計を Resonant Sideband Extraction 干渉計と呼ぶ。

2.6 重力波検出器の雑音

2.6.1 熱雑音

鏡とその懸架系は常に熱浴と接触しており、それらの系と熱浴のエネルギーのやり取りによって鏡や懸架系の振動が励起される。これにより鏡が揺らされることにより雑音となる。この雑音が熱雑音である。

熱雑音のモデル化を考える。一般に機械的な振動は一つの調和振動子と考えることができる。一般的な損失を持つ、右辺に熱雑音力が加わった調和振動子の運動方程式は周波数領域で、

$$M \{-\omega^2 + \omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]\} x(\omega) = F(\omega) \quad (2.49)$$

である [3]。揺動散逸定理 [4] よりこのときのスペクトル $\delta x_{\text{thermal}}^2$ は、

$$\delta x_{\text{thermal}}^2 = \frac{4k_B T}{\omega} \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{M|-\omega^2 + \omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]|^2} \quad (2.50)$$

となる。 M は観測しているモードの換算質量である。 $\omega_0^2 = k/M$ であり、調和振動子の共振周波数である。 k は調和振動子のばね定数であり、 $k[1 + i\phi(\omega)]$ でこの系の複素バネ定数となる。 $\delta x_{\text{thermal}}$ について、 $\phi(\omega) = \gamma\omega/k$ というモデルと、 $\phi(\omega) = \phi_0$ という ϕ が定数となる二つのモデルを考えることができる。 $\gamma = m\omega_0/Q$ であり、 Q は熱振動の Q 値である。 $\phi(\omega) = \gamma\omega/k$ のとき、

$$\delta x_{\text{thermal}} \simeq \sqrt{\frac{4k_B T}{M\omega_0^3 Q}} (\omega \ll \omega_0) \quad (2.51)$$

$$\simeq \sqrt{\frac{4\omega_0 k_B T}{M\omega^4 Q}} (\omega \gg \omega_0) \quad (2.52)$$

となる。また $\phi(\omega) = \phi_0$ のとき、

$$\delta x_{\text{thermal}} \simeq \sqrt{\frac{4k_B T \phi(\omega)}{M\omega_0^2 \omega}} (\omega \ll \omega_0) \quad (2.53)$$

$$\simeq \sqrt{\frac{4\omega_0^2 k_B T \phi(\omega)}{M\omega^5}} (\omega \gg \omega_0) \quad (2.54)$$

となる。 $\phi(\omega) = \gamma\omega/k$ となるモデルを Viscous Model、 $\phi(\omega) = \phi_0$ となるモデルを)Structure Model と呼ぶ。

熱雑音はブラウン雑音、熱弾性雑音、熱屈折雑音の三種類に大別される。ブラウン雑音は熱浴のブラウン運動が鏡や懸架系の表面を変形することで光路長が変化し発生する雑音である。熱弾性雑音は熱浴のブラウン運動がする仕事が鏡や懸架系の温度分布を変化させ、熱膨張率が変化することで発生する雑音である。熱屈折雑音は、ブラウン運動による鏡の温度分布変化から屈折率変化を引き起こすことで発生する雑音である。KAGRA では鏡と懸架系を冷却することでブラウン雑音を抑えており、鏡の素材として低温での熱的性質が良いサファイアを使用している。

2.6.2 地面振動雑音

地面の振動により鏡が揺らされることで、共振器の長さが変わり雑音となる。地面振動の典型的なスペクトルを δx_{seis} とすると、

$$\delta x_{\text{seis}} = 10^{-7} \times \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right)^2 [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (2.55)$$

で表される [5]。しかし、実際の測定ではこのスペクトルよりも 2 桁程小さいことが分かっている。KAGRA では地面振動の影響が少ない地中に建設し、更に多段振り子を用いた懸架系を使用することで、地面振動の雑音を防いでいる。

2.6.3 Newtonian 雑音

Newtonian 雑音は鏡周辺の物体の動きにより重力場が変化し、その重力場の変化が鏡を揺らすことにより発生する雑音である。KAGRA では地面振動由来の Newtonian 雑音の影響は少なく、感度には影響を及ぼさないと考えられているが、KAGRA の地下に存在する地下水の流れにより発生する重力勾配雑音が、KAGRA の感度を制限する可能性がある指摘されている [6]。

2.6.4 輻射圧雑音

光が鏡を反射する際に、鏡は光の運動量変化に伴う力を受ける。この力の変化により鏡が動かされる。光の量子性により光子数が増減することで、鏡が受ける力が変化し揺らされる。これにより発生する雑音が輻射圧雑音である。輻射圧雑音のスペクトルを δx_{rad} とすると、

$$\delta x_{\text{rad}} = \frac{1}{Mf^2} \sqrt{\frac{\hbar P}{c\pi^2 \lambda}} \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (2.56)$$

となる。ここで、 M は鏡の質量、 P は鏡に当たるレーザーパワー、 λ はレーザーの波長である。式を見ると、輻射圧雑音はレーザーパワーが大きくなるにつれて増加し、鏡の質量が大きくなるにつれて増加する。この雑音は光の量子性に起因する量子雑音に分類される。100[Hz] 付近での感度を制限する雑音である。

2.6.5 ショット雑音

ショット雑音は輻射圧雑音と同じく量子雑音に分類される。ショット雑音の場合光検出器に入る光子数が量子的に揺らぐことによりそれが直接雑音となる。雑音は周波数依存しないホワイトノイズであり、高周波数帯での感度を制限する要因である。ショット雑音は、レーザーパワーが大きくなるにつれて減少する雑音であり、輻射圧雑音とトレードオフの関係にある。これらから決まる雑音の限界値を標準量子限界と呼ぶ。

2.6.6 制御系のショット雑音

鏡の制御を行う際にも光検出器を使用しており、入る光子数が量子的に揺らぐショット雑音が発生する。制御系内で発生するショット雑音は、それにより制御点のずれが発生し鏡が揺らされることにより雑音となる。本論文ではこの雑音に注目している。制御系におけるショット雑音は 5 章にて詳しく議論する。

第 3 章

レーザー光学

3.1 Gaussian ビーム

Gaussian ビームの表式は、付録 A より以下で与えられる:

$$E(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[- \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + \eta(z) \right] \quad (3.1)$$

ここで、各パラメータは以下で与えられる:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} \quad (3.2)$$

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

$$\eta(z) = \arctan \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right) \quad (3.4)$$

Gaussian ビーム及び各パラメータの導出は付録 A を参照。Gaussian ビーム及び、パラメータのイメージ図を図 3.1 に示す。上下の曲線がビーム径を示しており、内側の曲線がその地点での等位相面を示す。

式 (3.2) はビーム半径を示す。ビーム半径の最小値は $z = z_0$ の時であり、この地点をビームウエストと呼ぶ。式 (3.2) を見ると分かるように、ビームウエストでのビーム半径が w_0 となる。

z_R は Rayleigh レンジである。これは、ビーム半径が w_0 の $\sqrt{2}$ 倍となる位置であり、 k をレーザーの波数として以下で与えられる:

$$z_R = \frac{k w_0^2}{2} \quad (3.5)$$

式 (3.3) はレーザー波面の曲率半径である。ここで、波面とはレーザーの位相が等しい場所を繋いだ面である。式 (3.3) を見ると分かるように、 $z = z_0$ の時に曲率半径が無限大になる。

式 (3.4) は Gouy 位相である。Gouy 位相は次数が 1 つ異なる Hermite-Gaussian モード間の位相差を示している。

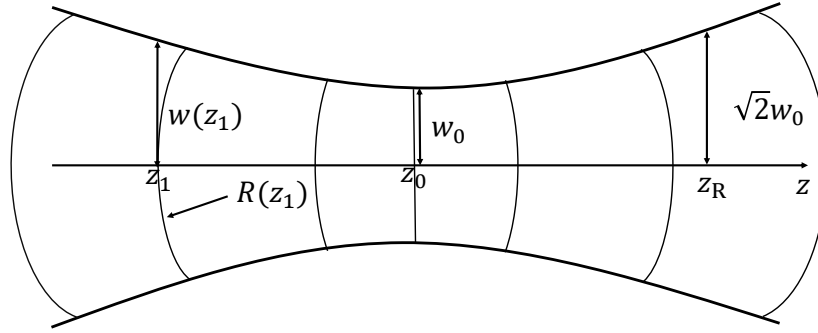


図 3.1: Gaussian ビームパラメータのイメージ図

3.2 Hermite-Gaussian モード

3.2.1 Hermite-Gaussian モードの表式

付録 A より、Hermite-Gaussian モードは以下の表式で与えられる:

$$U_{mn}(x, y, z) = U_m(x, z)U_n(y, z) \exp[-ik(z - z_0) + i(m + n + 1)\eta(z)] \quad (3.6)$$

ここで、 $E_0(x, y, z) = U_{mn}(x, y, z)$ と置き換えた。また、

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left[- \left(\frac{x}{w(z)} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R(z)} \right] \quad (3.7)$$

である。ここで、各パラメータの定義は Gaussian ビームの場合と同義である。Hermite-Gaussian モードの導出は付録 A を参照。

また、 $H_l(x)$ は Hermite 多項式であり、以下で定義される:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (3.8)$$

Hermite 多項式は直交性を持ち、その直交性は以下で与えられる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^l l! \delta_{lm} \quad (3.9)$$

これを用いると、 U_{mn} の直交性が以下のように導かれる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_m(x, z) U_n(x, z) dx = \delta_{mn} \quad (3.10)$$

3.2.2 ビームの平行移動

平行移動した Hermite-Gaussian モードを元の Hermite-Gaussian モード基底で表現することを考える。入射光の座標系を (x, y, z) として、 x 軸方向に δx だけ平行移動した座標系を (x', y', z') とする。この時、 $U_{00}(x, y, z)$ を (x', y', z') の座標系で展開すると以下のようになる。

$$U_{00}(x, y, z) = U_{00}(x' - \delta x, y, z) \quad (3.11)$$

今、 x 方向にのみ平行移動しているため、 $y = y', z = z'$ である。ここで、 $z' = z_0$ として $U_{00}(x' - \delta x, y, z)$ について δx の一次の項まで展開すると、以下のように計算できる：

$$\begin{aligned} U_{00}(x, y, z) |_{z'=z_0} &= \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[-\frac{((x' - \delta x)^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \\ &\simeq \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[-\frac{(x'^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \left(1 + \frac{2x'\delta x}{w_0^2} \right) \\ &= U_{00}(x', y', z_0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', z_0) \end{aligned}$$

同様に、10 モードについても、平行移動に対する応答を計算すると以下ようになる：

$$\begin{aligned} U_{10}(x, y, z) |_{z'=z_0} &= U_{10}(x' - \delta x, y, 0) \\ &= 2 \left(\frac{x' - \delta x}{w_0^3} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[-\frac{((x' - \delta x)^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \\ &\simeq 2 \left(\frac{x' - \delta x}{w_0} \right) \left(1 + \frac{2x'\delta x}{w_0^2} \right) U_{00}(x', y', 0) \\ &= U_{10}(x', y', z_0) - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y', z_0) + \sqrt{2} \frac{\delta x}{w_0} U_{20}(x', y', z_0) \\ &\simeq U_{10}(x', y', z_0) - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y', z_0) \end{aligned}$$

ここで、 U_{20} に比例する項は δx^2 程度の大きさであるから無視している。以上をまとめると、平行移動した 00 モードと 10 モードの表式は以下ようになる：

$$U_{00}(x, y, z) |_{z'=z_0} = U_{00}(x', y', z_0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', z_0) \quad (3.12)$$

$$U_{10}(x, y, z) |_{z'=z_0} = U_{10}(x', y', z_0) - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y', z_0) \quad (3.13)$$

3.2.3 ビームの回転移動

平行移動の場合と同様に、回転移動した Hermite-Gaussian モードを元の Hermite-Gaussian モード基底で表現することを考える。元の座標系 (x, y, z) に対し、 $(x, z) = (0, 0)$ を通り、 y 軸に平行な直線周りに $\delta\theta$ だけ回転させた座標系 (x', y', z') を考える。これらの座標系間について以下の等式が成立する：

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta\theta) & \sin(\delta\theta) \\ -\sin(\delta\theta) & \cos(\delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' - z_0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

したがって、以下の関係式が成立する:

$$x = \cos(\delta\theta)x' + \sin(\delta\theta)(z' - z_0) \quad (3.15)$$

$$z = -\sin(\delta\theta)x' + \cos(\delta\theta)(z' - z_0) \quad (3.16)$$

以下では、ビームウエストの位置 ($z' = z_0$) で考えることにする。はじめに $U_0(x, z)$ について、

$$\begin{aligned} U_0(x, z) \big|_{z'=z_0} &\simeq \left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\left(\frac{\cos(\delta\theta)x'}{w_0}\right)^2\right] \\ &\simeq \left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\left(\frac{x'}{w_0}\right)^2\right] \\ &= U_0(x', z_0) \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。ここで、 $\cos^2(\delta\theta) \simeq 1$ であるとして近似している。また位相項について考えると、

$$\begin{aligned} \exp[-ikz + i\eta(z)] \big|_{z'=z_0} &= \exp[ik \sin(\delta\theta)x' + i\eta(-\sin(\delta\theta)x')] \\ &\simeq 1 + \left(k - \frac{1}{z_0}\right) \delta\theta x' \\ &\simeq 1 + ik\delta\theta x' \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで、最後の近似では $\lambda \ll z_0$ であることを用いている。以上より、回転移動した 00 モードは以下のように展開できる:

$$\begin{aligned} U_{00}(x, y, z) \big|_{z'=z_0} &= U_0(x', z_0)U_0(y', z_0)(1 + ik\delta\theta x') \\ &= U_{00}(x', y', z_0) + \frac{ik\delta\theta}{2}w_0 U_{10}(x', y', z_0) \end{aligned}$$

次に 10 モードについて考える。まず、 U_{00} の場合と同様に考えると、 $z' = z_0$ での $U_1(x, z)$ は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} U_1(x, z) \big|_{z'=z_0} &\simeq \left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2}} H_1\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\delta\theta)x'}{w_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{\cos(\delta\theta)x'}{w_0}\right)^2\right] \\ &\simeq U_1(x', z_0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

また、位相項において 00 モードとの違いは Gouy 位相の部分のみであるため、位相項は式 (3.18) と同一である。以上より、回転移動した 10 モードは以下のように展開できる:

$$\begin{aligned} U_{10}(x, y, z) \big|_{z'=z_0} &= U_1(x', z_0)U_0(y', z_0)(1 + ik\delta\theta x') \\ &= U_{10}(x', y', z_0) + \frac{ikw_0}{2}\delta\theta U_{00}(x', y', z_0) + \sqrt{2}\frac{ikw_0}{2}\delta\theta U_{20}(x', y', z_0) \\ &\simeq U_{10}(x', y', z_0) + \frac{ikw_0}{2}\delta\theta U_{00}(x', y', z_0) \end{aligned}$$

最後の行における近似では、平行移動の時と同様の考察により U_{20} に比例する項を無視している。

以上をまとめると、回転移動した 00 モードと 10 モードは以下のように展開できる:

$$U_{00}(x, y, z) \big|_{z'=z_0} = U_{00}(x', y', z_0) + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} U_{10}(x', y', z_0) \quad (3.20)$$

$$U_{10}(x, y, z) \big|_{z'=z_0} = U_{10}(x', y', z_0) + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} U_{00}(x', y', z_0) \quad (3.21)$$

ここで、

$$\alpha_0 = \frac{2}{kw_0} \quad (3.22)$$

と定義している。

3.2.4 行列表現

Gaussian ビームを 00 モードと 10 モードの線形和で近似する。この時の 00 モードと 10 モードの係数をそれぞれ a_0, a_1 とすると、ビームは以下ようになる：

$$E = (U_{00} \ U_{10}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.23)$$

ここで a_0, a_1 に対し、ビームを移動した際の係数をそれぞれ a'_0, a'_1 とする。初めに平行移動の場合、式 (3.12) および式 (3.13) より、

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

となる。同様にして回転移動を考えると、式 (3.20) および、式 (3.21) より、

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

となる。平行移動と回転移動が同時に起こる場合の行列表現について考える。これら二つの移動が同時に起こる時、

$$\begin{pmatrix} x - \delta x \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta\theta)(x' - \delta x) + \sin(\delta\theta)(z' - z_0) \\ -\sin(\delta\theta)(x' - \delta x) + \cos(\delta\theta)(z' - z_0) \end{pmatrix}$$

を考えればよい。ここで、 $z = z_0$ であり、かつ $\delta x, \delta\theta$ が微小であるとする、

$$\begin{pmatrix} x - \delta x \\ z - z_0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x' - \delta x \\ -\delta\theta x' \end{pmatrix}$$

となる。したがって両方の移動がかかる時、二つの行列をかけ合わせればよい、以下のよう計算できる：

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

計算においては、 $\delta x, \delta\theta$ の二乗程度の大きさに当たる項は無視している。ここで、

$$\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \quad (3.27)$$

を導入することにより、式 (3.26) は、

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

となる。ここで、

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

と置くことで、これが、ビームの移動の行列表現となる。なお、逆行するビームについては、 z 軸を逆行するビームを $U'_{lm}(x, y, z)$ とした時に、

$$\begin{aligned} U'_{lm}(x, y, z) &= U_{lm}(x, y, -z) \\ &= U_l^*(x, z) U_m^*(y, z) \exp[ikz - i(l+n+1)\eta(z)] \\ &= U_{lm}^*(x, y, z) \end{aligned}$$

となることから、複素共役を取ることで表現できることが分かる。

3.2.5 変形を受けた Hermite-Gaussian モード

結合振幅

異なる振幅分布を持った2つのビーム $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$ がある時、 f_1 に対する f_2 の係数を $\langle f_2 | f_1 \rangle$ と表記する。 $\langle f_2 | f_1 \rangle$ は以下で定義される:

$$\langle f_2 | f_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f_2^*(x, y, z) f_1(x, y, z) \quad (3.30)$$

である。

Hermite-Gaussian モード基底での展開

式 (3.30) を用いて任意の変形を含む近軸ビームを、Hermite-Gaussian モード基底として展開することを考える。今展開する近軸ビームを $U(x, y, z)$ として、 U_{mn} をもちいて以下のように展開する:

$$U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} U_{mn}(x, y, z) \quad (3.31)$$

両辺に、 $U_{mn}^*(x, y, z)$ をかけて x, y で積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy U_{mn}^*(x, y, z) U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy a_{kl} U_{mn}^*(x, y, z) U_{kl}(x, y, z) \quad (3.32)$$

となる。式 (3.30) と式 (3.10) より、

$$\langle U_{mn} | U \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \delta_{mk} \delta_{nl} \quad (3.33)$$

$$\therefore a_{mn} = \langle U_{mn} | U \rangle \quad (3.34)$$

となる。したがって、変形を受けた Hermite-Gaussian モードを展開した式は以下で与えられる:

$$U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} U_{mn}(x, y, z) \langle U_{mn} | U \rangle \quad (3.35)$$

3.3 Pound-Drever-Hall 法

共振器の長さ制御を行うためには、共振器を共振状態となる長さに制御しなければならないため、鏡の変位に対する情報が必要となる。しかし式 (2.24) 見ると分かるように、共振器からの反射光を取るだけでは P_r が ϕ についての偶関数であるため、鏡の変位方向を読み取ることができない。その変位方向を求める方法の一つとして、Pound-Drever-Hall 法 (PDH 法) がある。以下ではその原理について説明する。

PDH 法ではレーザー光に位相変調を加えることで変位の情報を取り出す。位相変調器としては、EOM(Electro Optical Modulator) 結晶を用いることが多い。EOM 結晶は印加電圧により屈折率が変化する光学素子である。これにより EOM 結晶を通過した光は、光路長が変わり位相変調が起こる。今 EOM の光路長が $x = X_0 \sin \omega_m t$ だけ変化したとすると、位相変調後の電場は、

$$E(t) = E_0 e^{i(\Omega t + \frac{\Omega X_0}{c} \sin \omega_m t)} = E_0 e^{i(\Omega t + m \sin \omega_m t)} \quad (3.36)$$

となる。ここで m は変調指数と呼ばれ、EOM の性能を示す指標の一つである。また、 ω_m は変調周波数と呼ばれ、KAGRA では 16.881 [MHz] など Radio Frequency (RF) 帯の信号が用いられる。この式を変形すると、

$$\begin{aligned} E(t) &= e^{i\Omega t} e^{im \sin \omega_m t} \\ &= e^{i\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{in\omega_m t} \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる。ここで、 $J_n(x)$ はベッセル関数である。ベッセル関数は以下で定義される関数である：

$$\exp \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) x^n \quad (3.38)$$

今、 $x = e^{i\omega_m t}$ とすれば式 (3.37) と一致する。ベッセル関数について以下の式が成立する：

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m) \quad (3.39)$$

$$J_n(m) \simeq \frac{1}{n!} \left(\frac{m}{2} \right)^n \quad (m \ll 1) \quad (3.40)$$

これらの式を用いて、ベッセル関数の m の二次以降の係数を無視すると、式 (3.37) は以下のように書き直せる：

$$E(t) = E_0 J_0(m) + E_0 J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m t)} - E_0 J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m t)} \quad (3.41)$$

ここで、共振器の反射率 r を E_r/E_0 で定義する。すなわち式 (2.20) より、

$$r(\Omega) = \frac{E_r}{E_0} = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \quad (3.42)$$

である。したがって、共振器からの反射光は以下のように計算できる：

$$E_r(t) = E_0 r(\Omega) J_0(m) e^{i\Omega t} + E_0 r(\Omega + \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m t)} - E_0 r(\Omega - \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m t)} \quad (3.43)$$

ここで $e^{i\Omega t}$ に比例する項はキャリア光、 $e^{i(\Omega+\omega_m)t}$ に比例する項は Upper サイドバンド、 $e^{i(\Omega-\omega_m)t}$ に比例する項は Lower サイドバンドと呼ばれる。ここから反射光強度を計算すると、以下ようになる:

$$P_r = |E_r|^2 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} &= |E_0|^2 (J_0^2 |r(\Omega)|^2 + J_1^2 |r(\Omega + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r(\Omega - \omega_m)|^2) \\ &\quad + |E_0|^2 \{ 2J_0 J_1 (\text{Re} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r^*(\Omega) r(\Omega - \omega_m)] \cos \omega_m t \\ &\quad + \text{Im} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r(\Omega)^* r(\Omega - \omega_m)] \sin \omega_m t) \} + f(e^{2i\omega_m t}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで第一項は時間に依存しない DC 成分であり、 $f(e^{2i\omega_m t})$ は $e^{2i\omega_m t}$ に比例する項をまとめたものである。

得られた反射光に対し、 $\sin(\omega_m t + \alpha)$ を掛け高周波で振動している項を落とすことにより復調を行う。 α は復調位相である。したがって、求める PDH 信号は以下ようになる。

$$\begin{aligned} V_{\text{PDH}} &= J_0 J_1 \text{Re} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r^*(\Omega) r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2 \sin \alpha \\ &\quad + J_0 J_1 \text{Im} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r^*(\Omega) r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.46)$$

$\alpha = 0$ の場合を I Phase と呼び、 $\alpha = \pi/2$ の場合を Q Phase と呼ぶ。以下では簡単のため、I Phase で復調した場合の PDH 信号を用いて議論していく:

$$V_{\text{PDH}} = J_0 J_1 \text{Im} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r^*(\Omega) r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2 \quad (3.47)$$

ここでキャリア光が共振点付近にあるとき、すなわち $\phi = 2\pi n + \delta\phi$ ($\delta\phi \ll 2L\omega_m/c$) であるとき、

$$\exp \left[-i \left(\frac{2L\Omega}{c} + \frac{2L\omega_m}{c} \right) \right] \simeq \exp \left[i \left(\frac{2L\Omega}{c} - \frac{2L\omega_m}{c} \right) \right] \quad (3.48)$$

であることを用いると、各反射率 ($r_i, t_i (i = 1, 2)$) は実数になるため、

$$r(\Omega + \omega_m) \simeq r^*(\Omega - \omega_m) \quad (3.49)$$

であることが分かる。またキャリア光が共振点付近にあるとき、サイドバンド光は共振器内で共振できず、ほとんどが反射されてしまう。したがって、式 (3.42) の最右辺における第二項を無視することができ、

$$r(\Omega + \omega_m) \simeq r^*(\Omega - \omega_m) \simeq -r_1$$

となる。したがって、 V_{PDH} は、

$$V_{\text{PDH}} \simeq -2J_0 J_1 |E_0|^2 r_1 \text{Im}[r(\Omega)] \quad (3.50)$$

となる。ここで、 $\text{Im}[r(\Omega)]$ について、式 (2.21) より、

$$\begin{aligned} \text{Im}[r(\Omega)] &= \text{Im} \left[-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \right] \\ &= \text{Im} \left[\frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi} \right] \\ &= -\frac{t_1^2 r_2 \sin \phi}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\phi = 2n\pi + \delta\phi$ であったため、 $\text{Im}[r(\Omega)]$ は以下のように近似できる:

$$\begin{aligned}\text{Im}[r(\Omega)] &= -\frac{t_1^2 r_2 \sin \delta\phi}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \delta\phi} \\ &\simeq -\frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta\phi\end{aligned}\quad (3.51)$$

以上より、最終的な PDH 信号は以下のようになる:

$$V_{\text{PDH}} = \frac{4\pi J_0 J_1 |E_0|^2 t_1^2 r_1 r_2}{\lambda(1 - r_1 r_2)^2} \delta\phi \quad (3.52)$$

ここで、 λ はレーザーの波長である。このように、復調後の信号は、共振点付近では共振器長やレーザーの周波数変化に対して線形応答することが分かる。実際に式 (3.46) で与えられるような PDH 信号のグラフを表示すると図 3.2 のようになる。ここでは、サイドバンドの位相

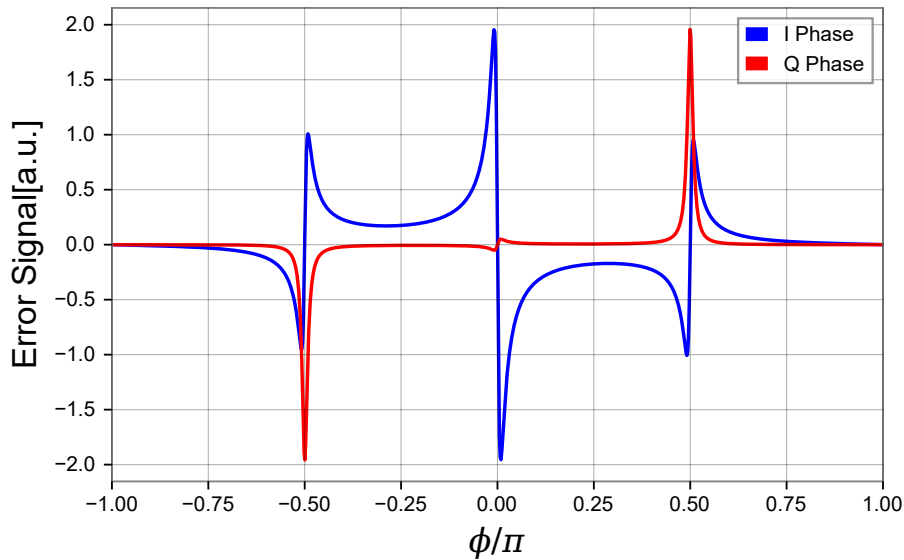


図 3.2: PDH 信号の例

が $\pm\pi/2$ に来るように設定している。中央の信号はキャリアの線形信号であり、その左右に存在する信号はサイドバンドの線形信号である。I Phase と Q phase では信号の大きさが異なることが分かる。ここから制御にあたり、適切な復調位相の選択が重要となる。

なお FINESSE3 での計算では変調、復調に $\cos \omega_m t$ を使用しており、反射光の表式が変化する。この場合、式 (3.43) は

$$E_r(t) = E_0 r(\Omega) J_0(m) e^{i\Omega t} + E_0 i r(\Omega + \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m)t} + E_0 i r(\Omega - \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m)t} \quad (3.53)$$

となり、対応する PDH 信号は

$$\begin{aligned}V_{\text{PDH}} &= J_0 J_1 \text{Re} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r^*(\Omega) r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2 \sin \alpha \\ &\quad - J_0 J_1 \text{Im} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r^*(\Omega) r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2 \cos \alpha\end{aligned}\quad (3.54)$$

となる。

3.4 Wave Front Sensing 法

共振器がミスアライメントされている場合、共振器内の光はそれに合わせて移動する。この時共振器内の光軸から見た入射光は、前述したように 00 モードと 10 モードの線形和で表現される。共振器の反射率は Hermite-Gaussian モードの次数のよって異なるため、共振器軸で展開された 00 モード、10 モードに対してそれぞれ反射率を掛け合わせる。そうして得られた反射光を、反射光軸の座標系に変換することで、QPD に入射する光を表現することができる。

3.4.1 反射行列

00 モードの共振器の反射率は式 (3.42) で与えられた。この反射率を $r_{00}(\Omega)$ と書き換える。すなわち

$$r_{00}(\Omega) = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \quad (3.55)$$

である。これに対し、10 モード反射率を $r_{10}(\Omega)$ とすると、前述したように Gouy 位相の分だけ位相がずれることを考慮する必要がある。共振器の片道での位相の差を η_{FP} とすると、

$$r_{10}(\Omega) = -r_1 E_0 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i(\phi-2\eta_{FP})}}{1 - r_1 r_2 e^{-i(\phi-2\eta_{FP})}} \quad (3.56)$$

となる。これにより反射行列なるものを考えることができる。フロントミラーでの Gouy 位相を η_f として、反射行列を R_{FP}^{align} とすると、

$$R_{FP}^{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{00} & 0 \\ 0 & r_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\eta_f} & 0 \\ 0 & e^{2i\eta_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_f} & 0 \\ 0 & r_{10} e^{2i\eta_f} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

となる。これをビームにかけることにより、反射光を考えることができる。

ここで、入射光の座標系のずれを γ で表現し、反射光の座標系が共振器の座標系に対し $\gamma_r = \delta x_r/w_0 + \delta\theta_r/\alpha_0$ だけずれるとする。QPD は反射光の座標系沿いに存在するので、この方向に対して共振器からの反射光を展開する必要がある。これらを考慮した、最終的な反射光の反射行列は以下で表現できる:

$$\begin{aligned} M^*(\gamma_r) \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_f} & 0 \\ 0 & r_{10} e^{2i\eta_f} \end{pmatrix} M(\gamma) &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma_r^* \\ -\gamma_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_f} & r_{00} \gamma \\ -r_{10} \gamma^* & r_{10} e^{2i\eta_f} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_f} - r_{10} e^{2i\eta_f} \gamma^* \gamma_r^* & r_{00} e^{i\eta_f} \gamma + r_{10} e^{2i\eta_f} \gamma_r^* \\ -\gamma_r r_{00} e^{i\eta_f} - r_{10} e^{2i\eta_f} \gamma^* & r_{10} e^{2i\eta_f} - r_{10} e^{2i\eta_f} \gamma \gamma_r \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} r_{00} e^{i\eta_f} & r_{00} e^{i\eta_f} \gamma + r_{10} e^{2i\eta_f} \gamma_r^* \\ -\gamma_r r_{00} e^{i\eta_f} - r_{10} e^{2i\eta_f} \gamma^* & r_{10} e^{2i\eta_f} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。なお、 γ, γ_r は $\delta x, \delta\theta$ 程度の大きさであるため、二つの積は十分小さいとして無視している。ここで、入射光に 00 モードしか存在しない、すなわち $a_0 = 1, a_1 = 0$ であるとする、ミスアライメントされた際の反射光は E_r^{miss} として、

$$E_r^{\text{miss}} = [U_{00} r_{00} - U_{10} (r_{00} \gamma_r e^{i\eta_f} + r_{10} \gamma^* e^{2i\eta_f})] E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.58)$$

となる。したがって、ミスアライメントされた際の共振器の反射率を $r^{\text{miss}}(\Omega)$ とすると、

$$r^{\text{miss}}(\Omega) = U_{00}r_{00}(\Omega) - U_{10}(r_{00}(\Omega)\gamma_r e^{i\eta_r} + r_{10}(\Omega)\gamma^* e^{2i\eta_r}) \quad (3.59)$$

となる。ここでキャリア光とサイドバンド光の反射率に対してそれぞれ別の文字を定義する:

$$r_{00}(\Omega) = r_{c0} \quad (3.60)$$

$$r_{10}(\Omega) = r_{c1} \quad (3.61)$$

$$r_{00}(\Omega \pm \omega_m) = r_{\pm s0} \quad (3.62)$$

$$r_{10}(\Omega \pm \omega_m) = r_{\pm s1} \quad (3.63)$$

$$r^{\text{miss}}(\Omega \pm \omega_m) = r_{\pm s}^{\text{miss}} \quad (3.64)$$

$$r^{\text{miss}}(\Omega) = r_c^{\text{miss}} \quad (3.65)$$

$$r^{\text{miss}}(\Omega \pm \omega_m) = r_{\pm s}^{\text{miss}} \quad (3.66)$$

この表式を以降の計算では用いる。

3.4.2 Wave Front Sensing 信号の表式

PDH 信号の表式から WFS 信号の表式を導出する。式 (3.47) より復調した RF 信号の表式は

$$V_{\text{RF}} = J_0 J_1 \text{Im} [r(\Omega)r^*(\Omega + \omega_m) - r^*(\Omega)r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2$$

であった。WFS 信号を考える場合、 $r \rightarrow r^{\text{miss}}$ と置き換えればよい。ここで計算に際して、

$$C \equiv r_{c0}\gamma_r e^{i\eta_r} + r_{c1}\gamma^* e^{2i\eta_r} \quad (3.67)$$

$$S_{\pm} \equiv r_{\pm s0}\gamma_r e^{i\eta_r} + r_{\pm s1}\gamma^* e^{2i\eta_r} \quad (3.68)$$

と定義する。式 (3.47) における虚部の内部を置き換えると、

$$\begin{aligned} V_{\text{RF}} &= J_0 J_1 \text{Im} \left[r_c^{\text{miss}} r_{+s}^{\text{miss}*} - r_c^{\text{miss}*} r_{-s}^{\text{miss}} \right] \\ &= J_0 J_1 \text{Im} \left[[U_{00}r_{c0} - U_{10}C] [U_{00}r_{+s0} - U_{10}S_+]^* \right. \\ &\quad \left. - [U_{00}r_{c0} - U_{10}C]^* [U_{00}r_{-s0} - U_{10}S_-] \right] \end{aligned}$$

となる。ここで WFS 信号を取得する際に、共振器の長さを制御しているため $r_c^{\text{miss}}, r_{\pm s}^{\text{miss}}$ は実数になる。加えて $r_{+s} = r_{-s}$ となる。そこで、 $r_{+s} = r_{-s} = r_s$, $S_+ = S_- = S$ と置く。したがって、

$$\begin{aligned} V_{\text{RF}} &= J_0 J_1 \text{Im} \left[[U_{00}r_{c0} - U_{10}C] [U_{00}r_{s0} - U_{10}S]^* \right. \\ &\quad \left. - [U_{00}r_{c0} - U_{10}C]^* [U_{00}r_{s0} - U_{10}S] \right] \end{aligned}$$

となる。Im の内部を W とすると、

$$\begin{aligned}
 W &= U_{00}U_{10}^* [r_{c0}(r_{s0}\gamma_r^* e^{-i\eta_f} + r_{s1}\gamma e^{-2i\eta_f}) - r_{s0}(r_{c0}\gamma_r^* e^{-i\eta_f} + r_{c1}\gamma e^{-2i\eta_f})] \\
 &\quad + U_{00}^*U_{10} [r_{s0}(r_{c0}\gamma_r e^{i\eta_f} + r_{c1}\gamma^* e^{2i\eta_f}) - r_{c0}(r_{s0}\gamma_r e^{i\eta_f} + r_{s1}\gamma^* e^{2i\eta_f})] \\
 &= U_{00}U_{10}^*(r_{c0}r_{s1} - r_{s0}r_{c1})\gamma e^{-2i\eta_f} + U_{00}^*U_{10}(r_{s0}r_{c1} - r_{c0}r_{s1})\gamma^* e^{2i\eta_f} \\
 &= (r_{c0}r_{s1} - r_{s0}r_{c1})(U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\eta_f} - U_{00}^*U_{10}\gamma^* e^{2i\eta_f})
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

となる。ここで、

$$U = U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\eta_f} - U_{00}^*U_{10}\gamma^* e^{2i\eta_f} \tag{3.70}$$

と置く。さらに QPD での Gouy 位相を η_{QPD} とすると、QPD での信号の表式は

$$\begin{aligned}
 U &= 2i\text{Im} [U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\eta_f}] \\
 &= 2i\text{Im} \left[U_0U_0e^{i\eta_{\text{QPD}}}U_0^*U_1^*e^{-2i\eta_{\text{QPD}}} \left(\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) e^{2i\eta_f} \right] \\
 &= -2iU_0U_0U_0^*U_1^* \left[\frac{\delta x}{w_0} \sin(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) - \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \cos(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) \right]
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

となる。したがって、求める WFS 信号を V_{WFS} とすると、

$$V_{\text{WFS}} = -2J_0J_1U_0U_0U_0^*U_1^* \left[\frac{\delta x}{w_0} \sin(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) - \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \cos(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) \right] \tag{3.72}$$

となる。

3.4.3 QPD での検出

式 (3.72) は奇関数であるから、通常の PD で検出した場合信号は 0 となってしまう、 $\delta x, \delta\theta$ に関する情報が取り出せない。そこで、受光面が 4 つに分解された QPD を使用することでこの反対称性を破ることができる。QPD で検出する場合、左右の領域で積分をすることに等しいので、 $U_0(x, z)U_0(y, z)U_1^*(x, z)U_0^*(y, z)$ を計算すると

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy U_0U_0U_1^*U_0^* - \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^\infty dy U_0U_0U_1^*U_0^* \\
 &= 2 \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy U_0(x, z)U_0(y, z)U_1^*(x, z)U_0^*(y, z) \\
 &= 2 \int_0^\infty dx U_0(x, z)U_1^*(x, z) \\
 &= 2 \int_0^\infty dx \left(\frac{2}{\pi w^2(z)} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left\{ \left[-\frac{2x^2}{w^2(z)} \right] \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{8}{\pi}}
 \end{aligned}$$

となる。

以上より、QPD で検出した WFS 信号を P_{WFS} とすると、

$$P_{\text{WFS}} = -2J_0J_1\sqrt{\frac{8}{\pi}} \left[\frac{\delta x}{w_0} \sin(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) - \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \cos(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f) \right] \tag{3.73}$$

となり、 $\delta x, \delta\theta$ に関する情報が取り出せる。

第 4 章

複屈折

複屈折とは、物質が異なる偏光に対して異なる屈折率を持つ物質を通過することにより、入射前とは異なる偏光状態が現れる現象である。この現象が将来的に KAGRA の感度を制限するのではないかと考えられている。本章では複屈折に関する基本的性質に加えて、KAGRA における複屈折とその影響について述べる。

4.1 複屈折とは

以下では複屈折における基本的な性質を数式等を用いて述べる。複屈折を議論する際には、複屈折楕円体を用いる。これは光の入射方向とその方向での屈折率の対応を示したものであり、原点との距離が複屈折の大きさを示している。KAGRA においては、ITM の素材としてサファイアを使用している。サファイアは一軸性結晶であり、 n_e, n_o の二つのパラメータのみで記述される。一軸性結晶の持つ軸を C 軸と呼ぶ。サファイアの複屈折楕円体は図 4.1 のようになっている。この場合 C 軸方向に振動する光が感じる屈折率は n_e であり、C 軸方向と垂直な方向に振動する光が感じる屈折率は n_o である。複屈折楕円体より C 軸と平行に入射した光

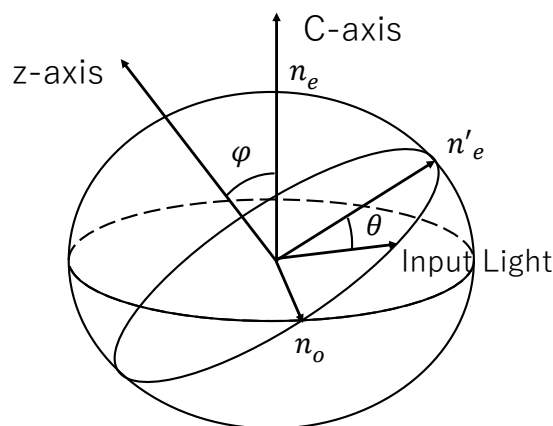


図 4.1: 複屈折イメージ

は複屈折性を持たないことが分かる。

サファイアに、C 軸と平行ではない方向から光が入射した場合を考える。図 4.1 は C 軸に対して φ だけずれた方向から入射した場合である。この時光が感じる屈折率は、 n'_e を短軸、 n_o を長軸とする楕円で与えられる。なお図 4.1 のような楕円体を考える場合、どのような面で切断しても C 軸に垂直な面と交わるため長軸は n_o となる。 n'_e は以下の式で与えられる：

$$\frac{1}{n'^2_e} = \frac{\cos^2 \varphi}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{n_o^2} \quad (4.1)$$

光線における長軸と短軸の位相差を R とすると、

$$R = \frac{2\pi d(n'_e - n_o)}{\lambda} \quad (4.2)$$

となる。ここで d は結晶の厚さである。 $\Delta n = n'_e - n_o$ とすると、

$$R = \frac{2\pi d\Delta n}{\lambda} \quad (4.3)$$

となる。

4.2 Jones 行列による複屈折の表現

複屈折の議論を行う上で、Jones 計算法を使用する。この手法は電場の複素振幅の x 成分および y 成分を二次元ベクトル及び 2×2 で表現される Jones 行列を使用して表現する方法である。厚さ d 、複屈折の大きさが Δn で与えられる結晶の Jones 行列を $M(\Delta n)$ とすると、

$$M(\Delta n) = \begin{pmatrix} \exp(i\frac{2\pi d\Delta n}{\lambda}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left(i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}\right) \begin{pmatrix} \exp(i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

となる。以降は定数倍である $\exp(i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda})$ は無視して考える。

一般には、 x, y 軸と高速軸、低速軸にずれが存在する。今これらの軸が θ だけずれている場合を考える。この場合計算にあたり、 x, y の座標系で表現されている偏光を結晶軸の座標系に変形した状態で複屈折の影響を計算し、再び x, y の座標系に戻す必要がある。座標系の変換には回転行列を使用する。このずれを踏まえた Jones 行列を $M(\theta, \Delta n)$ とすると、

$$\begin{aligned} M(\theta, \Delta n) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta e^{i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}} + \sin^2 \theta e^{-i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}} & i \sin 2\theta \sin(i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}) \\ i \sin 2\theta \sin(i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}) & \sin^2 \theta e^{i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}} + \cos^2 \theta e^{-i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (4.5) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\alpha = \exp\left(i\frac{\pi d\Delta n}{\lambda}\right) \quad (4.6)$$

とすると、最終的な複屈折の表式は以下ようになる：

$$M(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta e^{i\alpha} + \sin^2 \theta e^{-i\alpha} & i \sin 2\theta \sin \alpha \\ i \sin 2\theta \sin \alpha & \sin^2 \theta e^{i\alpha} + \cos^2 \theta e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

4.3 KAGRA における複屈折

4.3.1 KAGRA での鏡の作成と研磨

前述したように KAGRA の ITM の素材には、低温での熱的性質の良いサファイアを使用している。鏡に使用するサファイア結晶は信光社が作成し、ZYGO 社が鏡の研磨を行った。鏡の研磨には鏡表面の研磨と、裏面の Ion Beam Figuring (IBF) 研磨の二種類が存在する。IBF 研磨は、各点での透過位相誤差を相殺するように裏面に凹凸をつける研磨である。IBF 研磨を行う際に使用した光は円偏光であり、研磨の結果 ITMX の透過位相誤差が 3.47nm、ITMY の透過位相誤差が 4.07nm であると報告された。しかし S 偏光を使用して透過位相誤差を測定した際に ITMX の透過位相誤差が 25.9nm、ITMY の透過位相誤差が 30.1nm であることが分かった。これは複屈折の影響により、円偏光を用いて IBF 研磨を行っても S 偏光での透過位相誤差が改善しなかったためであると考えられる。

4.3.2 非一様複屈折がもたらす影響

KAGRA の ITM における複屈折の分布は図 4.2 -4.5 の通りである。非一様複屈折の影響

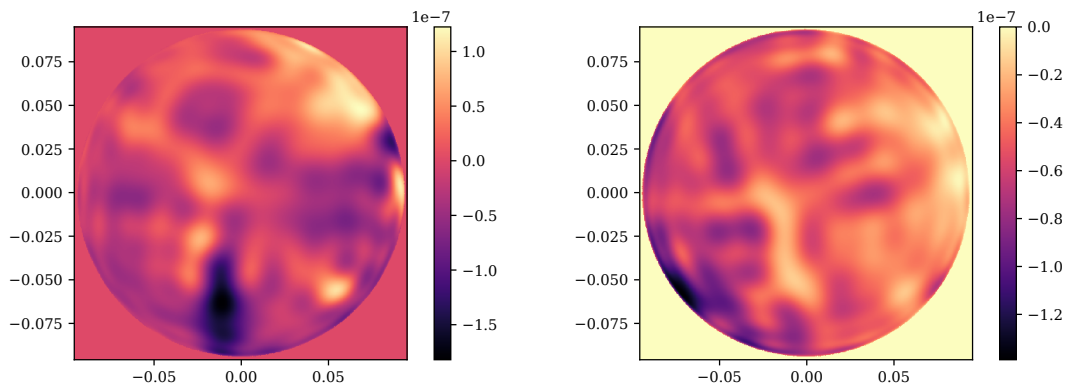
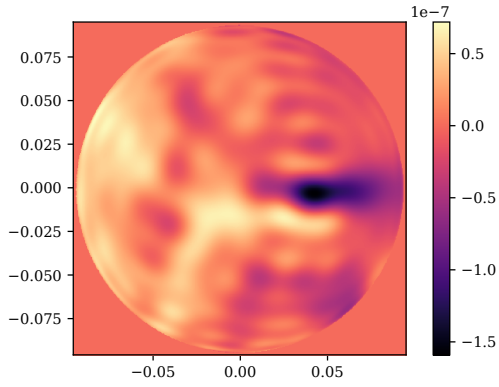
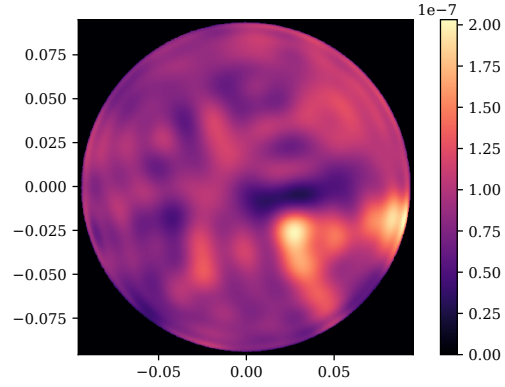


図 4.2: KAGRA の X arm におけるミラー マップ (θ) 図 4.3: KAGRA の X arm におけるミラー マップ (α)

により、干渉計に様々な影響をもたらすことが指摘されている。[2] 以下にその影響について列挙する。

- 複屈折により、AS ポートに高次モードが混入する可能性がある。実際シミュレーションでは 16 倍以上の高次モードの混入が確認されているが、これは参照光として使用する基本モードと比較して 40ppm 程度である。
- 高次モードの混入により、ショット雑音が低周波数領域では 7.1%、高周波数領域では 16% 悪化する。
- レーザーの周波数雑音が増加する可能性がある。実際に、シミュレーションでは観測帯域での周波数雑音が一桁悪化することが確認されている。

図 4.4: KAGRA の Y arm におけるミラーマップ (θ)図 4.5: KAGRA の Y arm におけるミラーマップ (α)

- Main Interferometer の姿勢制御にオフセットが加わることがシミュレーションにおいて確認されている。姿勢制御を行う際には信号が 0W となる点で制御がかかるが、オフセットが加わることで制御点がずれる。
- アウトプットモードクリーナー (Output Mode-Cleaner: OMC) の姿勢制御において各自由度の信号の混入が確認されている。信号の混入における雑音の増加は 5 章にて議論する。

OMC とは図 2.5 における Output Optics に配置される、重力波検出器の出力信号に含まれる雑音を取り除く装置である。干渉計からの出力には主に、キャリア光の基本モード、重力波信号、キャリア光の高次モード、RF サイドバンドの四種類が存在する。そのうちキャリア光の基本モードと重力波信号のみが共振し、その他の信号が反射されるようにすることで、必要な信号の身を取り出す装置である。

本論文では Main Interferometer における共振器の姿勢制御について注目している。次節ではこの影響について定性的に議論する。

4.3.3 非一様複屈折が姿勢制御に与える影響

ITM の非一様な複屈折により、ITM を透過した光は S 偏光と P 偏光に分かれる。制御の為に使用する QPD の前には Polarization Beam Splitter (PBS) が存在し、これにより S 偏光のみが取り出される。すなわち発生した P 偏光の分だけ光量が減少することになり、反射光の波面が変形を受けることになる。この影響で QPD の信号から WFS 信号を作成する際に、オフセットが加わってしまう。この現象の数式的な議論は次節で述べる。オフセットが存在するということは、鏡の制御点がズレてしまうことを意味する。また複屈折の非一様より、ITM にレーザー光が当たる場所に応じてオフセットが揺らいでしまう。この揺らぎは鏡の角度の揺らぎに直結し、ビームジッター量に応じて共振器の長さ方向の揺らぎにカップリングする。これが雑音として将来的に KAGRA の感度を制限すると考えられる。

4.4 複屈折の影響を考慮した反射光

前述したように、複屈折性を持つ物質を透過することにより式 (4.7) のような変換がなされる。この影響を考慮した上で再度反射光の計算を行う。簡単のため、式 (4.7) を以下のように書き換える：

$$M(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} f_{ss}(\theta, \alpha) & f_{ps}(\theta, \alpha) \\ f_{sp}(\theta, \alpha) & f_{pp}(\theta, \alpha) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

純粋な S 偏光が入射すると仮定する。この時複屈折の影響を受けた光は、図 2.2 におけるフロントミラー地点で

$$E_{\text{bir}} = \begin{pmatrix} f_{ss}U_{00}(x, y, z) \\ f_{sp}U_{00}(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となる。最終的な反射光は S 偏光成分は、S 偏光がそのまま共振器内に入り、反射光の S 偏光として表れるパターンと、S 偏光が P 偏光に変化した後に P 偏光から S 偏光に変化するパターンに分けられる。それぞれの信号を $E_r^{\text{ss}}(\Omega)$, $E_r^{\text{ps}}(\Omega)$ とすると、複屈折の影響を受けた反射光 E_r は以下ようになる：

$$E_r(\Omega) = E_r^{\text{ss}}(\Omega) + E_r^{\text{ps}}(\Omega)$$

ここではキャリア光のみが入射していると仮定している。ここで、 $f_{ps} \ll f_{ss}$ であることを仮定すると、 $E_r^{\text{ps}} \ll E_r^{\text{ss}}$ であるから、

$$E_r(\Omega) \simeq E_r^{\text{ss}}(\Omega) \quad (4.10)$$

と近似できる。以降では、S 偏光がそのまま共振器内に入り、反射光の S 偏光として表れるパターンに注目して計算を進める。

4.4.1 フロントミラーでの反射光

S 偏光としてキャビティに入射する光は $f_{ss}U_{00}$ である。その光は、共振器内に入らずフロントミラーで反射される光と、キャビティ内で共振後出射される光に分けられる。フロントミラーで反射される光は、

$$-r_1 f_{ss}U_{00} \quad (4.11)$$

である。この光が再度複屈折性を持った鏡を通過するため、最終的な反射光における S 偏光成分の表式は

$$-r_1 f_{ss}^2 U_{00} \quad (4.12)$$

となる。次に共振器内に入る光を考える。共振器に入射した直後の光の表式は

$$t_1 f_{ss}U_{00} \quad (4.13)$$

となる。複屈折の影響を受けた光は共振器内で往復するが、共振器の設計上 00 モードのみが共振する。したがって、式 (4.13) における 00 モードの成分のみを取り出す必要がある。よって、共振後の出射光は以下ようになる：

$$\frac{At_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} U_{00} \quad (4.14)$$

ここで、 A は共振器に入射した光における 00 モードの展開係数であり、

$$A = \langle t_1 f_{ss}^* | U_{00} \rangle \quad (4.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy t_1 f_{ss} U_{00} U_{00}^* \quad (4.16)$$

と計算される。その後再度複屈折性を持った鏡を透過するため、最終的な反射光の表式は

$$\frac{At_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} f_{ss} U_{00} \quad (4.17)$$

である。以上より、最終的な S 偏光として入射した光の反射光における S 偏光の成分を $E_r^{\text{ss}}(\Omega)$ とすると、

$$E_r^{\text{ss}}(\Omega) = -r_1 f_{ss}^2 U_{00} + \frac{At_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} f_{ss} U_{00} \quad (4.18)$$

となる。

ここで、キャリア光の複屈折の影響を議論する。式 (4.18) において、複屈折の影響が小さいとすれば、 $f_{ss} \simeq 1 + \delta f_{ss}$ 、 $A \simeq 1$ のような形で近似できる。すなわち共振状態では、

$$\begin{aligned} E_r^{\text{ss}}(\Omega) &\simeq -r_1(1 + 2\delta f_{ss})U_{00} + \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2}(1 + \delta f_{ss})U_{00} \\ &\simeq U_{00} \end{aligned}$$

となり、複屈折の影響が打ち消される。このような効果をローレンス効果と呼ぶ。すなわち共振状態では、サイドバンド光からの複屈折の影響が支配的に現れる。

4.4.2 フロントミラーでの反射光の表式と近似

これまでの議論から、最終的なキャリア光での反射光の表式は

$$E_r^{\text{ss}}(\Omega) = -r_1 f_{ss}^2 U_{00} + \frac{At_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} f_{ss} U_{00} \equiv f_1(x, y) U_{00} \quad (4.19)$$

となる。また、サイドバンドについても同様に考えることができ、最終的な反射光の表式は

$$E_r^{\text{ss}}(\Omega + \omega_m) = -r_1 f_{ss}^2 U_{00} + \frac{At_1^2 r_2 e^{-i\phi(\Omega + \omega_m)}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi(\Omega + \omega_m)}} f_{ss} U_{00} \equiv g_1(x, y) U_{00} \quad (4.20)$$

及び、

$$E_r^{\text{ss}}(\Omega - \omega_m) = -r_1 f_{ss}^2 U_{00} + \frac{At_1^2 r_2 e^{-i\phi(\Omega - \omega_m)}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi(\Omega - \omega_m)}} f_{ss} U_{00} \equiv h_1(x, y) U_{00} \quad (4.21)$$

となる。したがってこれらを合わせた、フロントミラー地点での反射光は

$$E_r^{\text{front}} = J_0 f_1(x, y) U_{00} e^{i\Omega t} + J_1 g_1(x, y) U_{00} e^{i(\Omega + \omega_m)t} - J_1 h_1(x, y) U_{00} e^{i(\Omega - \omega_m)t} \quad (4.22)$$

となる。ここから、QPD に入射した際の反射光について考える。この反射光には 00 モード以外の HG モードも発生しており、まず E_r^{front} を HG 基底で分解した上で、それぞれの HG

モードに対して Gouy 位相分の位相差を考慮する必要がある。簡単のため、キャリア光についてのみ考える。まず、

$$f_1(x, y)U_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} U_{nm} \quad (4.23)$$

$$a_{nm} = \langle f_1^*(x, y) U_{nm} | U_{00} \rangle \quad (4.24)$$

のように表記する。これを用いると、フロントミラー地点での変形を受けた Hermite-Gaussian モードは

$$f_1(x, y)U_{00}(x, y, z_f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \sqrt{\frac{1}{2^{n+m} n! m!}} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z_f)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z_f)} \right) \\ \times \exp[i(n+m+1)\eta_f] U_{00}(x, y, z_f)$$

となる。この光が QPD に到達すると、

$$f_1(x, y)U_{00}(x, y, z_{\text{QPD}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \sqrt{\frac{1}{2^{n+m} n! m!}} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z_{\text{QPD}})} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z_{\text{QPD}})} \right) \\ \times \exp[i(n+m+1)\eta_{\text{QPD}}] U_{00}(x, y, z_{\text{QPD}}) \\ \equiv f_2(x, y)U_{00}(x, y, z_{\text{QPD}})$$

となる。同様の議論をサイドバンドで行うことができるため、 $g_1(x, y) \rightarrow g_2(x, y)$, $h_1(x, y) \rightarrow h_2(x, y)$ と変換すればよい。したがって、QPD での反射光は

$$E_r^{\text{QPD}} = J_0 f_2(x, y) U_{00} e^{i\Omega t} + J_1 g_2(x, y) U_{00} e^{i(\Omega + \omega_m)t} - J_1 h_2(x, y) U_{00} e^{i(\Omega - \omega_m)t} \quad (4.25)$$

となる。

4.4.3 QPD での信号

QPD から検出される光は、変調周波数で復調された信号である。表式は PDH 信号と同じであるため、式 (3.47) より、

$$V_{\text{PDH}} = J_0 J_1 \text{Im}[f_2(x, y) g_2^*(x, y) - f_2^*(x, y) h_2(x, y)] |U_{00}|^2 \equiv f(x, y) |U_{00}|^2 \quad (4.26)$$

となる。WFS の信号は、この信号を左右または上下の領域で積分したものであるから、この信号を P_{WFS} とすると、

$$P_{\text{WFS}} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) |U_{00}|^2 dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(x, y) |U_{00}|^2 dx dy \quad (4.27)$$

となる。複屈折が存在しない場合、 $f(x, y) = 1$ となるため、アライメントが整っている場合、 $P_{\text{WFS}} = 0$ となる。しかし複屈折の影響で $f(x, y) \neq 1$ となった場合に、アライメントが整っていても $P_{\text{WFS}} \neq 0$ となり、信号にオフセットが乗ってしまうことが分かる。

4.5 複屈折に関する種々の研究と本研究の目的

KAGRA における複屈折について、複屈折分布の推定とその抑制という観点で研究が進められている。複屈折分布推定については、透過位相誤差の分布を用いて複屈折分布を計算する手法が提案されており、測定データとの良い一致が示されている [7]。複屈折の影響を抑制するという側面では、液晶を使用して偏光の回転を相殺する手法が提案されており、原理検証においてはサンプルの複屈折を 10^5 分の 1 まで抑制することに成功している [8]。

本研究では非一様複屈折が与える姿勢制御信号のオフセット揺らぎに注目しその低減方法の開発を行う。前述したように、非一様な複屈折が生み出す雑音は将来的に KAGRA の感度を制限する可能性がある。また感度が大幅に上がる次世代重力波検出器においてはこのような複屈折の影響は存在し得るため、この揺らぎの影響を低減させる方法を開発することには大きな意味がある。この問題に対し先行研究では、機械学習を使用した方法と 16 分割 PD といった QPD よりもより多重分割された PD を使用した方法が開発されている。機械学習を使用した手法は、QPD や 16 分割 PD からの信号を用いて鏡の角度を直接予測する手法である。[9] 16 分割 PD を使用した手法では、分割 PD からの信号を線形に組み合わせることで複屈折の影響を抑える取り組みが行われ、オフセット揺らぎを 10^{-5} 程度抑制することに成功している。[10] 本論文でもこの手法を使用しているが、先行研究よりも KAGRA の光学系と複屈折の分布に近づけた状態での手法開発に取り組んでいる。さらに本論文では 16 分割 PD を使用した方法に加え、現状 KAGRA で使用している QPD を用いた新しい鏡の制御方法の開発も行いそれらの手法の比較を行った。またオフセットの揺らぎを KAGRA の雑音として計算することで開発した手法のメリット、デメリットを明確にすることを目標としている。次章では、具体的な新しい制御方法について説明する。

第 5 章

新しい姿勢制御法の原理

本章では、複屈折による制御信号のオフセット揺らぎを抑えるための新しい姿勢制御法の理論をまとめる。具体的には、分割 PD を使用した複屈折による信号揺らぎの低減方法の理論について議論した後に、ショット雑音や KAGRA 感度への変換方法についてまとめ、それらを踏まえた上での評価関数に定義について議論した。

5.1 分割 PD の信号を最適化する解決方法

前述したような複屈折の影響を低減させるための、分割 PD を利用した解決方法について述べる。分割 PD とは受光面が複数に分割された PD である。今回使用した PD は QPD(Quadrant Photodetector) と 16 分割 PD である。以下の議論で用いる QPD と 16 分割 PD の各領域でのナンバリングを図 5.1 に示す。これを使用することで入射した光を分割し、それぞれの受光面から個別に信号を取り出すことができるため、通常の PD で測定する場合に比べて情報量が増加する。これを利用した手法の定性的及び数式的な原理について、具体例を交えて説明する。

1	3
2	4

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

図 5.1: 分割 PD のナンバリング (左 : QPD, 右 : 16 分割 PD)

5.1.1 原理

提案する解決方法は、ビームスポットの揺らぎに伴う複屈折の揺らぎを分割 PD の各領域の信号揺らぎとしてとらえ、その揺らぎを打ち消すように各領域での信号を線形に組み合わせる手法である。組み合わせず際には重み付け係数と呼ばれる、分割 PD の各領域から得られた信号に掛け合わせる係数を使用する。

重み付け係数の定義

重み付け係数を定義する前に QPD からの出力を記述すると、

$$P_{\text{WFS}} = \int_0^\infty \int_0^\infty V_{\text{WFS}} dx dy + \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 V_{\text{WFS}} dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty V_{\text{WFS}} dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 V_{\text{WFS}} dx dy \quad (5.1)$$

となる。ここでは、Yaw 方向の出力を検出するための式を示している。各項が各 QPD の出力に対応している。ここで QPD における重み付け係数を a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) と置く。このとき、QPD からの出力は以下ようになる:

$$P_{\text{WFS}} = a_1 \int_0^\infty \int_0^\infty V_{\text{WFS}} dx dy + a_2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 V_{\text{WFS}} dx dy - a_3 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty V_{\text{WFS}} dx dy - a_4 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 V_{\text{WFS}} dx dy \quad (5.2)$$

式 (5.2) を見ると分かるように、各領域の信号に a_i が掛け合わされていることが分かる。例えば、Yaw 方向の WFS 信号を取得する場合は、通常 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 1, 1)$ のように設定する。

上記の例では QPD での信号を考えているが、16 分割 PD における重み付け後の出力は以下のようになる:

$$P_{\text{WFS}} = \sum_{k=1}^8 a_k \int_{C_k} V_{\text{WFS}} dx dy - \sum_{k=9}^{16} a_k \int_{C_k} V_{\text{WFS}} dx dy \quad (5.3)$$

ここでは、Yaw 方向の信号を考えており C_k は分割 PD における k 番目の領域である。

提案する解決方法では、このような設定から値を適切に変更することで、複屈折による揺らぎを打ち消していく。

重み付け係数の効果

重み付け係数の変更により信号にどのような影響を与えるのかについて議論する。Fabry-Perot 共振器の場合、複屈折による変形を受けた PDH 信号は式 (4.26) より以下で与えられた:

$$V_{\text{PDH}} = f(x, y) |U_{00}|^2$$

この式を用いて、ビームスポットの揺らぎによって複屈折の分布が変化する影響を考える。これを議論するため、式 (4.26) にビームスポットの位置を変数として導入する。すなわち、

$f(x, y) \rightarrow f(x, y, x_c, y_c)$ のように定義しなおす。ここで、 x_c, y_c は ITM 上でのビームスポットの座標である。このとき式 (4.26) は、

$$V_{\text{PDH}} = f(x, y, x_c, y_c) |U_{00}(x, y)|^2 \quad (5.4)$$

となる。ここでビームスポットの揺らぎが起こるということは、 x_c, y_c に対するビームスポット揺らぎの量をそれぞれ $\delta x, \delta y$ としたときに、

$$f(x, y, x_c, y_c) |U_{00}(x, y)|^2 \rightarrow f(x, y, x_c + \delta x, y_c + \delta y) |U_{00}(x, y)|^2$$

のように変化するということである。これを $\delta x, \delta y$ が微小であると仮定してテイラー展開をすると以下ようになる:

$$\begin{aligned} V_{\text{PDH}} &= f(x, y, x_c + \delta x, y_c + \delta y) |U_{00}(x, y)|^2 \\ &= \left(f + \delta x \frac{\partial f}{\partial x_c} + \delta y \frac{\partial f}{\partial y_c} + O(\delta x^2, \delta y^2) \right) |U_{00}(x, y)|^2 \end{aligned}$$

これから、式 (4.27) は以下ようになる:

$$\begin{aligned} P_{\text{WFS}} &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f |U_{00}|^2 dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f |U_{00}|^2 dx dy \\ &\quad + \delta x \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x_c} |U_{00}|^2 dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x_c} |U_{00}|^2 dx dy \right) \\ &\quad + \delta y \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial y_c} |U_{00}|^2 dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial y_c} |U_{00}|^2 dx dy \right) \\ &\quad + O(\delta x^2, \delta y^2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

式 (5.5) における $\delta x, \delta y$ に比例する項が複屈折の揺らぎによる復調信号への影響である。式 (5.5) に注目すると、 $\delta x, \delta y$ の比例係数である、

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x_c} |U_{00}|^2 dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x_c} |U_{00}|^2 dx dy \\ &\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial y_c} |U_{00}|^2 dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial y_c} |U_{00}|^2 dx dy \end{aligned}$$

などを打ち消すことができれば、複屈折の揺らぎによる影響を低減させることができる。つまり、先ほど導入した重み付け係数を用いた場合、 $\delta x^n, \delta y^n$ の揺らぎは、

$$\begin{aligned} &a_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^n f}{\partial x_c^n} |U_{00}|^2 dx dy + a_2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^n f}{\partial x_c^n} |U_{00}|^2 dx dy \\ &- a_3 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \frac{\partial^n f}{\partial x_c^n} |U_{00}|^2 dx dy - a_4 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^n f}{\partial x_c^n} |U_{00}|^2 dx dy \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} &a_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^n f}{\partial y_c^n} |U_{00}|^2 dx dy + a_2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^n f}{\partial y_c^n} |U_{00}|^2 dx dy \\ &- a_3 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \frac{\partial^n f}{\partial y_c^n} |U_{00}|^2 dx dy - a_4 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^n f}{\partial y_c^n} |U_{00}|^2 dx dy \end{aligned} \quad (5.7)$$

となり、これらを打ち消すような重み付け係数を決定すればよいことが分かる。

重み付け係数決定に使用する複屈折による信号揺らぎの定義

シミュレーションにおいて係数の最適化を行う際には、式 (5.5) の第三項や第四項に相当する複屈折の揺らぎを測定する必要がある。ここでは揺らぎの測定方法について議論する。測定方法の候補としては、平面分布の測定と標準偏差の測定の2通りがある。

平面分布の測定では、 $\delta x, \delta y$ に対応する信号の値の関係を直接測定し、 $\delta x, \delta y$ に対する係数を求める。平面分布を用いて複屈折の影響を打ち消す場合には、微分係数に対する連立方程式を解けばよい。そのため、解析的な手法ではほぼ確実に係数を決定することができる。一方で、実際の運用を想定した場合正確な平面分布の測定が求められるという点で課題がある。

標準偏差を求める方法は、重み付け後の WFS 信号データを定義し、このデータに対する標準偏差を揺らぎとする方法である。例として ITM 上のビームスポットの座標を (x_c^i, y_c^i) ($i = 1, \dots, N$) のように N 点取る。各点上での QPD からの信号 $P_1^i, P_2^i, P_3^i, P_4^i$ に対し WFS 信号データ S^i は、

$$S^i = P_1^i a_1 + P_2^i a_2 - P_3^i a_3 - P_4^i a_4 \quad (5.8)$$

となる。なお 16 分割 PD の場合は、PD からの信号 P_k^i ($k = 1, \dots, 16$) に対し、

$$S^i = \sum_{k=1}^8 P_k^i a_k - \sum_{k=9}^{16} P_k^i a_k \quad (5.9)$$

となる。これらのデータに対する標準偏差を取ることで揺らぎを測定する。複屈折の影響を打ち消す際には、式 (5.8) の標準偏差を評価関数として、これを最小化するように数値計算プログラムを組む。この方法では正確な平面分布は必要なく、実際の実験においても実装しやすいという利点がある。また、複屈折以外の雑音の影響を加えることも容易である。一方で、数値計算を行う際に条件によっては値が収束しない可能性があり、係数決定の段階に課題がある。

本論文では標準偏差を求める方法で信号揺らぎを定義し重み付け係数を決定した。なお複屈折による雑音を見積もる際には、より正確な推定を行う為平面分布を測定して揺らぎを評価した。

5.2 制御系でのショット雑音の計算

5.2.1 ショット雑音の計算

非一様な複屈折によって生じた WFS 信号のオフセット揺らぎによる雑音の大きさを算出する。本論文では、オフセットの揺らぎをショット雑音として計算していく。そのために、鏡の制御を行う際に発生するショット雑音を計算する。非一様な複屈折が存在しない場合でも、分割 PD に入射する光の光子数の量子的な揺らぎがショット雑音として混入する。 N 分割 PD の各領域に入射する光の強度を P_i [W] ($i = 1, \dots, N$) であるとする、 i 番目の領域でのショット雑音 Δn_{shot}^i は [11] より以下で与えられる:

$$\Delta n_{\text{shot}}^i = \sqrt{2h\nu P_i} [\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.10)$$

ここで、 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ [Js] はプランク定数、 $\nu = 2.817 \times 10^{14}$ [Hz] は 1064[nm] の光の周波数である。

ここで得られたショット雑音は分割 PD の各領域でのショット雑音である。ここから分割 PD 全体のショット雑音を考えると、各領域のショット雑音は無相関であるから各領域のショット雑音の二乗和の平方根を求めればよい。信号の計算においては左右または上下の引き算を行うが、ショット雑音の無相関性よりいずれの場合でも二乗和を取ればよい。したがって、分割 PD 合計のショット雑音を $\Delta n_{\text{shot}} [\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}]$ とすると、

$$\begin{aligned}\Delta n_{\text{shot}} &= \sqrt{\sum_{n=1}^N (n_{\text{shot}}^i)^2} \\ &= \sqrt{2h\nu \sum_{n=1}^N P_i [\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}]}\end{aligned}$$

となる。ここで PD 全体に入射する光のパワーを P [W] とすると、

$$\sum_{n=1}^N P_i = P [\text{W}] \quad (5.11)$$

であるから、

$$\Delta n_{\text{shot}} = \sqrt{2h\nu P} [\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.12)$$

となる。

ビームジッターの大きさに対応する、オフセットの揺らぎを $\Delta P_{\text{bir}} [\text{W}/\text{m}]$ と定義する。ITM 上でのビームジッターがどの程度であるかを算出することで、オフセットの揺らぎをショットノイズに換算できる。

図 5.2 は KAGRA におけるパワーリサイクリングミラーの手前での光学素子の配置である。本論文では、図中の STM の角度揺らぎが ITM 上でのビームジッターを引き起こして

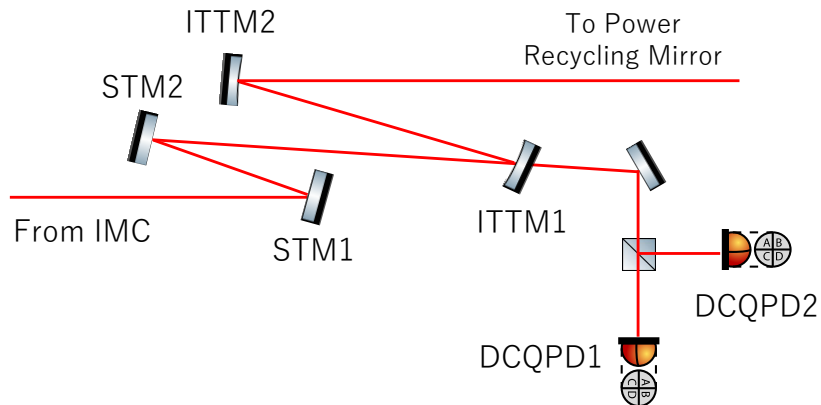


図 5.2: KAGRA のパワーリサイクリングミラー手前の光学配置

いると考え計算を行う。そのために、まず STM の角度揺らぎスペクトルを導出する。図 5.3

は、DCQPD2 上でのビームジッターのスペクトルである。赤線が水平方向、青線が垂直方向

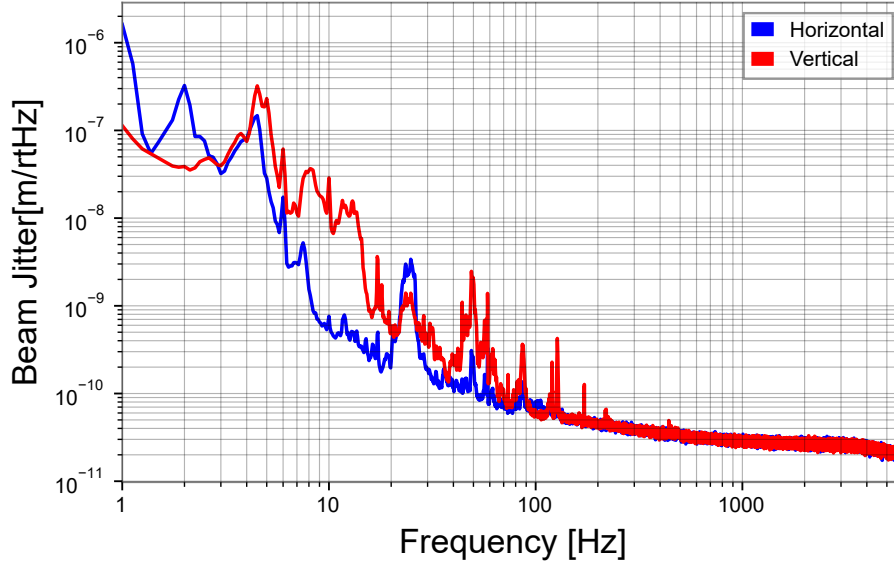


図 5.3: DCQPD2 上でのビームジッタースペクトル

のビームジッターである。このスペクトルが図 5.2 の STM の角度揺らぎによって発生したものであると仮定する。STM から QPD までの距離は約 6[m] であるから、QPD 上でのビームジッターのスペクトルを $Q(\omega)$ [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$]、STM の角度揺らぎスペクトルを $S(\omega)$ [1/ $\sqrt{\text{Hz}}$] としたときに、

$$S(\omega) = Q(\omega)/6 \text{ [1}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.13)$$

となる。ここで STM から ITMX までの距離は 78.3[m] である。ここから ITM 上でのビームジッタースペクトルを $B(\omega)$ [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$] とすると、

$$B(\omega) = 78.3 \times S(\omega) \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.14)$$

となる。実際にビームジッターを計算した結果を図 5.4 に示す。グラフを見ると分かるように、低周波数側の影響が大きなスペクトル分布であることが分かる。以上よりビームジッターに対応した制御信号のオフセット揺らぎを ΔP_{bir} [W/m]、複屈折により生じたショット雑音を $\Delta n_{\text{shot}}^{\text{bir}}$ [W/ $\sqrt{\text{Hz}}$] とすると、

$$\Delta n_{\text{shot}}^{\text{bir}} = B(\omega) \Delta P_{\text{bir}} \text{ [W}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.15)$$

となる。これを用いると、合計のショット雑音を $\Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}}$ [W/ $\sqrt{\text{Hz}}$] としたときに、

$$\Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}} = \sqrt{(\Delta n_{\text{shot}}^{\text{bir}})^2 + (\Delta n_{\text{shot}})^2} \text{ [W}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.16)$$

となる。

5.2.2 重み付係数の変更によるショット雑音の増加

前述したように、適切に重み付け係数を決定することで、複屈折によるオフセットの揺らぎを抑えることができる。これは KAGRA の雑音低下に寄与する。しかしその一方で、重み付

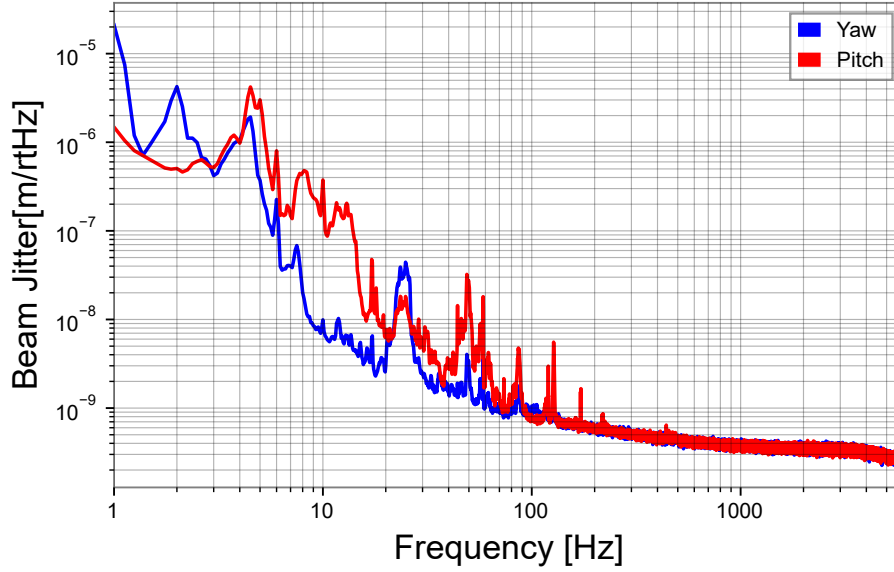


図 5.4: ITM 上でのビームジッタースペクトル

け係数の変更により、他の雑音の増加を引き起こし得る。以下では、重み付け係数の変更によって増加し得る雑音について議論する。

WFS 信号強度の低下によるショット雑音の増加

WFS 法は、Hermite-Gaussian モードの 10 モードを検出することで信号を得る。しかし重み付けを変更することにより WFS 信号が減少してしまう可能性がある。例として共振器が Yaw 方向に傾いた際の WFS 信号を QPD で検出することを考える。復調信号の 2 次元信号を考えたときに、アライメントが十分整っているとすれば、Hermite-Gaussian モードの 10 モードが支配的に現れる。反射光の QPD へのセンタリングが十分に行われているとすれば、QPD の各領域の信号は対称性より図 5.1 のナンバリングを用いると $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P, P, -P, -P)$ 分布となる。今、重み付け係数が a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) であるとして、得られる WFS 信号を計算すると、

$$Pa_1 + Pa_2 - (-Pa_3 - Pa_4) = P(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \quad (5.17)$$

となる。通常の QPD の場合、 $a_i = 1$ より $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$ であるから信号は $4P$ となるが、 a_i の変化に応じて信号の出力が減少する可能性がある。減少した信号を元に戻すためには、信号全体を定数倍すればよいが、それに伴ってショット雑音が増加してしまうため、雑音の増加につながる。また信号強度を保つためには QPD の場合、

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \quad (5.18)$$

という条件を a_i に課せばよい。16 分割 PD の場合反射光のセンタリングを行った場合でも PD の各領域において信号強度が異なるため、重み付け係数と各領域の信号の絶対値をそれぞれ a_n, P_n ($n = 1, \dots, 16$) としたときに、

$$\sum_{k=1}^{16} P_k a_k = \sum_{k=1}^{16} P_k \quad (5.19)$$

となるように a_n を決めればよい。

ショット雑音の増加

先ほど述べた雑音もショット雑音の増加であったが、ここでは、重み付け係数の設定によってショット雑音が直接増加する現象について説明する。例として QPD の場合を考える。重み付け係数 a_i について、各領域でショット雑音は $\sqrt{a_i}$ 倍される。例えばすべての a_i について $a_i = 2$ である場合、QPD の各領域でショット雑音は $\sqrt{2}$ 倍となる。QPD 全体のショット雑音は、各領域に入射するレーザーパワーが等しいとみなせると仮定すれば、各重み付け係数の絶対値の和の平方根を取ればよい。すなわちショット雑音が $A_{\text{shot}}^{\text{QPD}}$ 倍されたとすると、

$$A_{\text{shot}}^{\text{QPD}} = \frac{\sqrt{|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|}}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{\sqrt{|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|}}{2} \quad (5.20)$$

となる。分母は通常の QPD の場合を示している。なお、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|}}{2} &= 1 \\ \therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| &= 4 \end{aligned} \quad (5.21)$$

とすればショット雑音を通常の QPD の場合と等しくすることができる。しかし式 (5.18) との連立方程式を立てた際に解は $a_i > 0$ という制約条件を満たす必要がある。今回は式 (5.18) のみを係数への条件として課し、ショット雑音については評価関数へ組み込んだ。なお、先程と同様に 16 分割 PD の場合 PD の各領域において信号強度が異なることを考慮する必要がある。重み付け係数と各領域の DC 信号の強度の絶対値をそれぞれ a_n, P_n^{DC} としたときにショット雑音が $A_{\text{shot}}^{16\text{PD}}$ 倍されたとすると、

$$A_{\text{shot}}^{16\text{PD}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{16} P_k^{\text{DC}} |a_k|}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{16} P_k^{\text{DC}}}} \quad (5.22)$$

となる。すなわち、

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{16} P_k^{\text{DC}} |a_k|} = \sqrt{\sum_{k=1}^{16} P_k^{\text{DC}}} \quad (5.23)$$

を満たすとき、ショット雑音は通常の 16 分割と等しくなる。

Pitch, Yaw 間のカップリング

重み付け係数の変更により、Pitch, Yaw の信号間でそれぞれの信号がカップリングし、それがショット雑音の増加を引き起こす。例として、Yaw 方向の信号を取る QPD に Pitch 方向の共振器のずれにより生じた 01 モードが混入した場合を考える。このとき各領域での信号は、各領域での信号の絶対値を P としたときに、対称性より $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (-P, P, -P, P)$ のようになる。重み付け係数を a_i とすると、Yaw 方向の信号は、

$$-Pa_1 + Pa_2 + Pa_3 - Pa_4 = P(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4) \quad (5.24)$$

となる。通常の QPD の場合は $a_i = 1$ であるため、この出力は 0 となるため、Pitch 方向の信号は混入しない。しかし a_i の変更により出力が 0 でなくなることで、Pitch 方向の信号が混入する。なお、

$$-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0 \quad (5.25)$$

となるように a_i を決定することにより信号の混入を抑えることができる。16PD の場合 Hermite-Gaussian モードの 1 次モードの強度分布を考慮する必要がある。例として、01 モードの 16 分割 PD での信号分布 S_i , ($i = 1, \dots, 16$) は P_l ($l = 1, 2, 3, 4$) を用いて、

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_5 & S_9 & S_{13} \\ S_2 & S_6 & S_{10} & S_{14} \\ S_3 & S_7 & S_{11} & S_{15} \\ S_4 & S_8 & S_{12} & S_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_4 & -P_3 & -P_3 & -P_4 \\ -P_2 & -P_1 & -P_1 & -P_2 \\ P_2 & P_1 & P_1 & P_2 \\ P_4 & P_3 & P_3 & P_4 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

のように表現できる。右辺のナンバリングは 5.1 を参照。ここで、対称性より各領域からの信号は 4 つに分類できる。このとき、

$$\sum_{k=1}^8 P_k a_k - \sum_{k=9}^{16} P_k a_k = 0 \quad (5.27)$$

となるように a_k を決定すれば信号の混入を抑えることができる。 P_k には、式 (5.26) における各信号出力を代入する。

本論文では QPD の場合式 (5.18) 及び式 (5.25) を重み付け係数に条件として課した。これらを課することによる、最終的な重み付け係数の条件は以下になる。

$$a_1 + a_3 = 2 \quad (5.28)$$

$$a_2 + a_4 = 2 \quad (5.29)$$

16 分割 PD の場合には、式 (5.19) 及び式 (5.27) を重み付け係数に条件として課した。

5.2.3 KAGRA 感度への影響の計算

次に算出したショット雑音の KAGRA 感度への算出について議論する。KAGRA 感度への算出にあたり、フィードバック制御考慮した上での雑音評価を行う必要がある。そのためまずはフィードバック制御について説明する。

フィードバック制御

光干渉計を重力波望遠鏡として用いるためには共振器長を、光の波長をフィネスの 2 倍で割った値以下の変動に抑える必要がある。共振器長は常に外乱を受け変動するため、外乱を抑え込むためフィードバック制御を行う。

フィードバック制御を考えるにあたり、図 5.5 のような伝達関数を用いたブロック線図を導入する。伝達関数は図の $H(\omega)$ のような周波数空間の関数であり、一般的には複素数関数である。伝達関数は入力と出力の比で与えられる：

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (5.30)$$

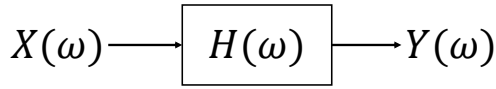


図 5.5: 伝達関数

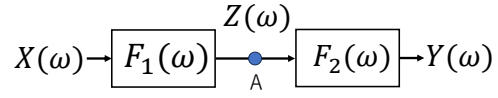


図 5.6: 連結した伝達関数

ブロックを直列で接続した場合を考える。例として図 5.6 のようなブロック線図を考える。入力 $X(\omega)$ が $F_1(\omega)$ を通過すると通過後の点 A における信号 $Z(\omega)$ は、

$$Z(\omega) = F_1(\omega)X(\omega) \quad (5.31)$$

である。 $Z(\omega)$ が $F_2(\omega)$ を通過後の最終的な出力信号 $Y(\omega)$ は、

$$Y(\omega) = F_2(\omega)Z(\omega) = F_2(\omega)F_1(\omega)X(\omega) \quad (5.32)$$

となる。したがって、直列に接続されたブロックはそれらの積で表現される。一般的に $F_1(\omega), \dots, F_n(\omega)$ のブロックが直列に接続されているとき、入力及び出力を $X(\omega), Y(\omega)$ とすると、

$$Y(\omega) = \prod_{i=1}^n F_i(\omega)X(\omega) \quad (5.33)$$

となる。

ブロック線図を用いてフィードバック制御について議論する。フィードバック制御のブロック線図は図 5.7 のようになる。白丸付近の符号は信号を加えるか、引くかの計算を示している。

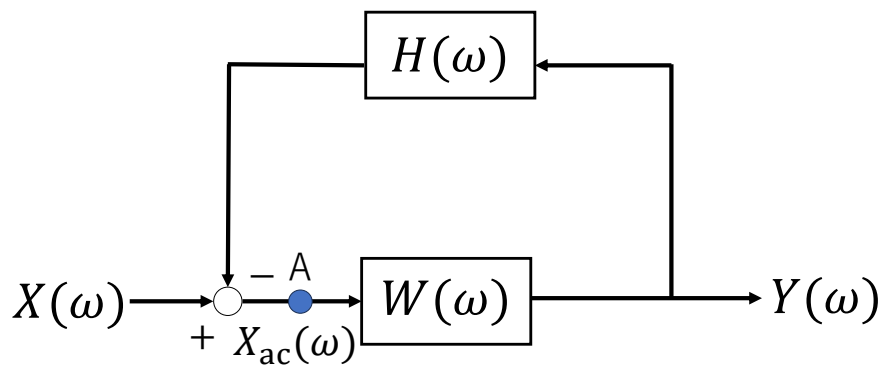


図 5.7: フィードバック制御の伝達関数

このとき点 A での実効的な入力を X_{ac} とすると、

$$X_{ac} = -HWX_{ac} + X \quad (5.34)$$

$$\therefore X_{ac} = \frac{1}{1 + HW} X \quad (5.35)$$

となる。 HW はオープンループ伝達関数 (Open Loop Transfer Function : OLTF) であり、 $|HW|$ をオープンループゲイン (Open Loop Gain : OLG) と呼ぶ。OLG が 1 より十分大きいとき実効的な入力は、

$$X_{ac} \simeq \frac{1}{HW} X \quad (5.36)$$

となり、 X を外乱としたときには $1/|HW|$ だけ外乱を抑えることができる。 $|HW| = 1$ となる点が、被制御下にあるかそうでないかの分岐点であり、このときの周波数をユニティゲイン周波数 (Unity Gain Frequency : UGF) と呼ぶ。式 (5.35) を見ると分かるように、UGF のときに位相が -180° であるとする、 $HW = -1$ となり、分母が 0 になってしまうため発振を起こす。すなわち、UGF のときの位相が、制御の安定性を考える上で重要である。UGF のときの位相に 180° を足したものを位相余裕と呼び、制御の安定性の指標となる。

制御系内のショット雑音の影響

WFS 法で制御を行う際のショット雑音の影響について議論する。図 5.8 は本論文で使用したにおけるアライメントフィードバックループのブロック線図である。 $F(\omega)$ はフィルターで

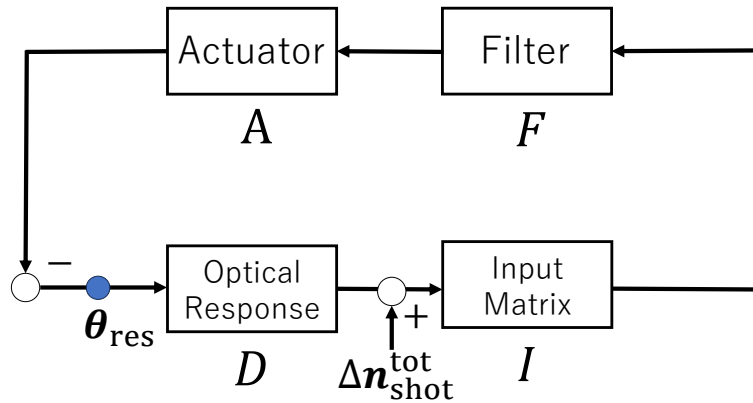


図 5.8: 本論文で使したフィードバックループの伝達関数

あり、 $A[\text{rad/Nm}]$ はアクチュエータを示している。フィルターは WFS 法に必要な高周波数帯域の信号を落とすためのローパスフィルタが組み込まれている。アクチュエータは制御において必要な鏡の駆動系の伝達関数を示している。

$D(\omega)[\text{W/rad}]$ は各鏡の傾きによって発生する WFS 信号の値をまとめた行列である。以下では D のブロックの影響を見るためにカップリングによる雑音増加の過程について議論する。Pitch, Yaw, HARD, SOFT のカップリングを考える際には、出力信号の行列を考えると便利である。例として、表 5.1 のようなマトリクスを考える。単位は $[\text{W/rad}]$ である。横に並んだ Pitch, Yaw は鏡の傾きの方向を、縦に並んだ Pitch, Yaw は分割 PD から検出する信号成分を示す。例えば、鏡が Yaw 方向と Pitch 方向にそれぞれ $1[\text{rad}]$ 傾いた場合、分割 PD から

	Yaw	Pitch
Yaw	1	-0.5
Pitch	-1.6	1

表 5.1: Pitch,Yaw のカップリングマトリクス

Yaw 方向の信号を取ると Yaw 方向の傾きによる信号が 1[W]、Pitch 方向の傾きによる信号が $-0.5[W]$ 現れる。表 5.1 を行列 D_{yp} を用いて、

$$D_{yp} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -1.6 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

と置く。同様に Pitch,Yaw の傾きを検出する分割 PD のショット雑音をベクトル表記で

$$\Delta \mathbf{n}_{\text{shot}}^{\text{py}} = \begin{pmatrix} \Delta n_{\text{shot}}^{\text{yaw}} \\ \Delta n_{\text{shot}}^{\text{pitch}} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

と定義すれば、ショット雑音による鏡の傾きは

$$D_{yp}^{-1} \Delta \mathbf{n}_{\text{shot}}^{\text{py}} = \begin{pmatrix} 5 & 2.5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta n_{\text{shot}}^{\text{yaw}} \\ \Delta n_{\text{shot}}^{\text{pitch}} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

となる。合計の角度揺らぎは、各ショット雑音の二乗和の平方根である。簡単のため

$$\Delta n_{\text{shot}}^{\text{yaw}} = \Delta n_{\text{shot}}^{\text{pitch}} = \Delta n_{\text{shot}}^{\text{py}} \quad (5.40)$$

と仮定すれば、Yaw 方向を検出する分割 PD からの合計の角度揺らぎは、

$$\sqrt{5^2 + 2.5^2} \Delta n_{\text{shot}}^{\text{py}} \simeq 5.6 \Delta n_{\text{shot}}^{\text{py}} \quad (5.41)$$

と計算できる。Pitch,Yaw 間のカップリングが存在しない場合、 D_{yp} は単位行列となるため、ショット雑音は 5.6 倍程度増加することになる。

今回のシミュレーションでは、Pitch,Yaw のカップリングに加え、HARD モードと SOFT モードのカップリングを考慮する必要があり、制御系内の D は各腕に対して 4×4 の行列となる。また WFS 信号の大きさは周波数依存しないと仮定しており、そのため D は定数行列となる。

$I(\omega)[\text{rad/W}]$ は入力行列であり、前述したようなカップリングを含む WFS 信号を各自由度の信号に再構成する。理想的には I は D の逆行列で与えられ、今回のシミュレーションでもそのように仮定している。

このように KAGRA では同時に制御する必要のある自由度が多く、それらが互いに影響を及ぼし合う。そのため、各自由度同士の相互関係を行列にして状態でブロック線図に当てはめて計算する必要があり、それに伴って $\boldsymbol{\theta}_{\text{res}}, \Delta \mathbf{n}_{\text{shot}}^{\text{tot}}$ はベクトルとなる。この制御系において OLTF を $G(\omega)$ としたときに、

$$G = AFDI \quad (5.42)$$

となる。今 I が D の逆行列であることを踏まえ本研究では簡単のため、

$$G(\omega) = g(\omega) \times I_4 \quad (5.43)$$

とした。ここで I_4 は 4×4 の単位行列であり、 $g(\omega)$ は行列でないスカラー関数であることに注意する。すなわち $G(\omega)$ は対角成分が $g(\omega)$ 対角行列であると仮定した。

このときの θ_{res} について、

$$\theta_{\text{res}} = -AFI(D\theta_{\text{res}} + \Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}}) \quad (5.44)$$

であるから、

$$\theta_{\text{res}} = -(1 + G)^{-1}GD^{-1}\Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}} \quad (5.45)$$

となる。ここで式 (5.43) の仮定より、

$$\theta_{\text{res}} = -\frac{g(\omega)}{1 + g(\omega)}D^{-1}\Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}} \quad (5.46)$$

となる。 θ_{res} に DC 的なビームジッターの大きさ d_{DC} を掛け合わせることで、共振器の長さ揺らぎのスペクトル分布に変換できる。本論文では $d_{\text{DC}} = 0.1[\text{mm}]$ であると想定して計算している。また KAGRA の感度と比較するためには、この値を共振器長である $3000[\text{m}]$ で割る必要がある。これらを踏まえた最終的な雑音を S_{shot} とすると

$$S_{\text{shot}} = \frac{\theta_{\text{res}}d_{\text{DC}}}{3000} [1/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.47)$$

となる。

ここで $G(\omega)$ のボード線図について議論する。本論文では [12] を参考に、 $0.4[\text{Hz}]$ にポールを持つ周波数 f に関する一次のローパスフィルターと、 $10[\text{Hz}]$ に 4 次のポールを持つローパスフィルターを掛け合わせたものを導入した。また、ゲインは UGF が $3[\text{Hz}]$ となるように調整した。上記条件を満たすフィルターとアクチュエーターの伝達関数は図 5.9, 5.10 の通りである。図 5.10 の赤線は -180° の線であり、位相余裕が保たれていることが分かる。実際計算で

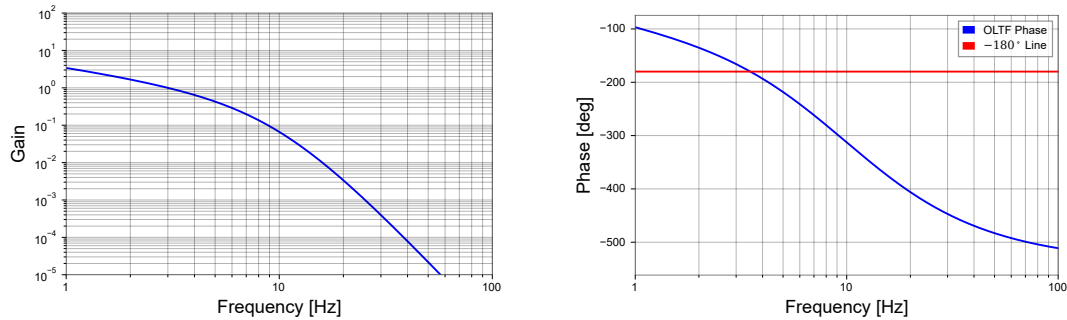


図 5.9: 設計したオープンループ伝達関数 (ゲイン) 図 5.10: 設計したオープンループ伝達関数 (位相)

は UGF での位相余裕は 14.1° である。

5.2.4 最適化に使用した評価関数

これまでの議論を踏まえて、複屈折の影響を抑えつつ、他の雑音の増加を防ぐ重み付け係数を決定する必要がある。以下では、QPD の場合と 16 分割 PD の場合の重み付け係数の評価のために使用した評価関数について定義する。

前述したように、各自由度の間にはカップリングが存在するが、本論文では簡単のために各自由度を個別で改良していく際の評価関数を考える。具体的にはショット雑音の周波数空間の積分値を評価関数とした。すなわち式 (5.46) において、

$$\frac{g(\omega)}{1+g(\omega)} \Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}} \quad (5.48)$$

の各成分の積分値を評価関数とした。この成分の一つを $\Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}}$ として、式 (5.16) と等しいとすると、

$$\int_0^\infty \frac{g(\omega)}{1+g(\omega)} \Delta n_{\text{shot}}^{\text{tot}} d\omega = \int_0^\infty \frac{g(\omega)}{1+g(\omega)} \sqrt{(\Delta P_{\text{bir}} B(\omega))^2 + (\Delta n_{\text{shot}})^2} d\omega \quad (5.49)$$

となる。

この式を評価関数として重み付け係数を評価した。

5.2.5 インスパイラルレンジ

ここでは、重力波検出器の感度の指標の一つであるインスパイラルレンジについて簡単に説明する。インスパイラルレンジとは、信号と雑音の大きさの比率 (Signal to Noise Ratio: SNR) が 8 以上となる距離を示す。インスパイラルレンジは以下のように与えられる:

$$\mathcal{R} = \frac{0.442}{8} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} \frac{c}{\pi^{2/3}} \left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3} \right) \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right]^{1/2} \quad (5.50)$$

$S_n(f)$ は雑音のスペクトル密度である。 $\mathcal{M}_c$ はチャープ質量と呼ばれる。ここで、重力波を生み出す二つの天体の質量を m_1, m_2 とすると、

$$\mathcal{M}_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (5.51)$$

となる。重力波は二つの天体の接近に伴い周波数が増加するがその増加具合を決める指標である。また、 $f_{\max}$ は通常 ISCO 周波数、

$$f_{\max} = \frac{c^3}{6^{3/2} \pi G (m_1 + m_2)} \quad (5.52)$$

と定めることが多い。

第 6 章

FINESSE によるシミュレーション

ここでは、FINESSE を使用した提案手法の原理検証の内容とその結果について述べる。FINESSE [13] とは干渉系シミュレーションに関するオープンソースソフトウェアである。光学系の応答の出力だけでなく、信号の変調や復調、干渉計の制御など多数の機能を備えている。今回の検証においては FINESSE3 を使用して検証を行った。

6.1 FISNESSE 上でのセットアップ

今回の検証では、KAGRA における Fabry-Perot 共振器を再現することで検証を行った。検証にあたり複屈折の影響を考慮した Fabry-Perot 共振器を作成する必要がある。今回のシミュレーションでは、KAGRA における X arm を再現するため Mach-Zehnder 干渉計を組み込んだ Fabry-Perot-Michelson 干渉計を作成した。シミュレーションセットアップのイメージは図 6.1 のようになる。赤い線は S 偏光、青い線は P 偏光を示す。中央のオレンジ色の領域

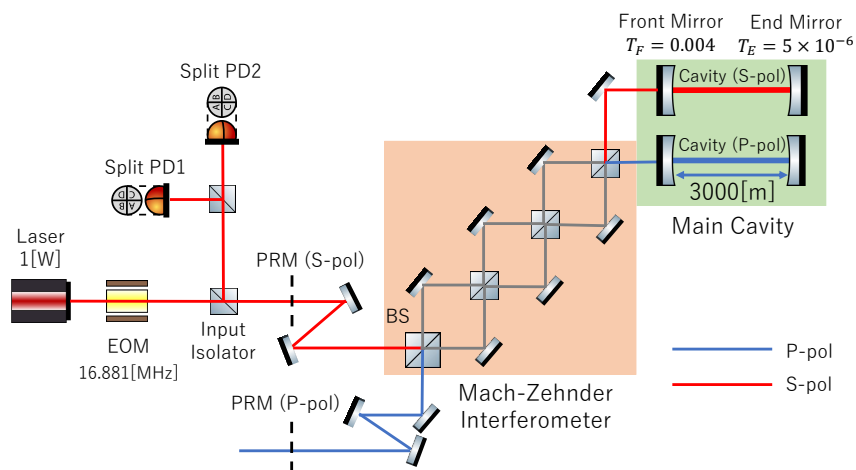


図 6.1: シミュレーションのセットアップイメージ図

に Mach-Zehnder 干渉計が組み込まれており、これにより複屈折による光の分裂を再現することができる。Mach-Zehnder 干渉計に貼るミラーマップを切り替えることで X arm, Y arm を切り替えている。Mach-Zehnder 干渉計によって分離された二つの光はそれぞれ S 偏光と P

偏光を意味している。二つの Fabry-Perot 共振器は S 偏光と P 偏光のそれぞれにおける共振器であり、二つの共振器を用いて一つの共振器に発生する二つの偏光の振る舞いを再現している。フロントミラーとエンドミラーのパワー透過率はそれぞれ $0.004, 5 \times 10^{-6}$ である。折り返し鏡には、反射率 1 の鏡を使用している。PRM は今回シミュレーション内には設置しているが、透過率 1 と設定しており、今回のシミュレーションには影響しない。光検出器は分割 PD1 と分割 PD2 の二つが存在する。分割 PD1 は HARD モードの傾きの検出に使用し、分割 PD2 は SOFT モードの傾きの検出に使用する。

Match-Zehnder 干渉系に加え、検証にあたって FINESSE3 のコマンド外のシステムを作成し、使用している。これらのシステムは B 章にて述べる。

6.2 Gouy 位相の決定

共振器の制御にあたり、HARD モード及び SOFT モードが互いに混入することが制御の精度を落とす要因となる。そこで HARD モード及び SOFT モードを Gouy 位相の異なる二つの測定地点で測定することで、二つのモードを分離する。すなわち HARD モードの信号が 0 となる点で SOFT モードの信号を測定し、SOFT モードの信号が 0 となる点で HARD モードの信号を測定することで、両者の信号の混入を防ぐことができる。以下では上記の条件を満たす Gouy 位相の決定手法と、その実行結果を示す。

6.2.1 手順

以下では、決定方法の詳細について述べる。同様の手順を X arm と Y arm の両方で行う。

1. 図 6.1 の干渉計を HARD モードの Yaw 方向に $300[\text{nrad}]$ 傾け位相を共振状態に合わせる。
2. Gouy 位相を -180° から 180° まで 100 分割して動かし、図 6.1 における分割 PD2 の位置における QPD の信号の値を測定する。
3. 同様の測定を干渉計を HARD モードの Yaw 方向に $-300[\text{nrad}]$ 傾けた場合でも行う。
4. 得られた二つの QPD の信号を引き算し信号強度を得る。
5. 信号強度が 0 になる前後合わせて 4° の間で再度 Gouy 位相を 500 分割して同様の測定を行う。
6. 得られた信号のうち信号強度の絶対値が最も 0 に近くなる Gouy 位相を SOFT モードの測定に使用する Gouy 位相とする。
7. 同様の測定を SOFT モードでも行い、HARD モードの Gouy 位相を決定する。

今回の測定では共振器を Yaw 方向に傾けた信号を元に Gouy 位相を決定した。FINESSE3 では水平方向と垂直方向のそれぞれについて Gouy 位相を決めることができるため、Pitch,Yaw それぞれで Gouy 位相の最適化が可能であるが、今回は KAGRA の状況に則して Yaw 方向の Gouy 位相で Pitch,Yaw 方向共に決定した。

6.2.2 結果

手順における 4 番目で得られた、Gouy 位相を -180° から 180° まで 100 分割して動かした際の信号強度の変化のグラフを図 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 に示す。

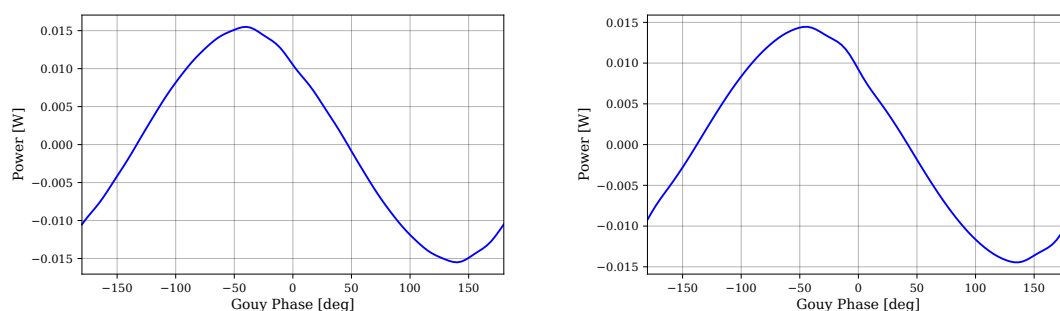


図 6.2: X arm における SOFT モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD1 の信号強度 (-180° から 180°)

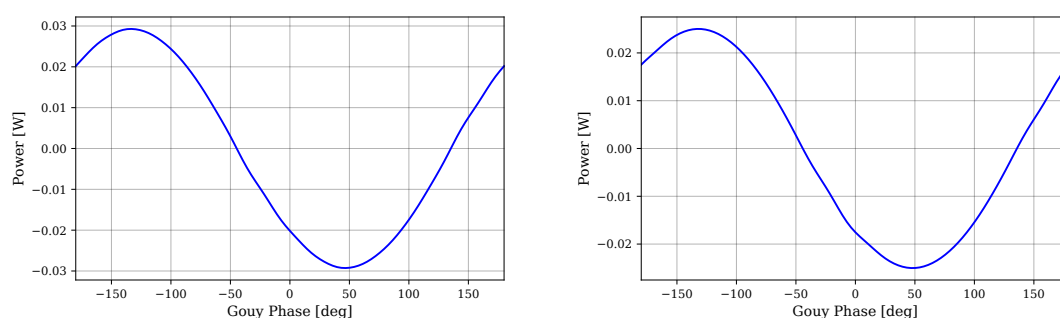


図 6.4: X arm における HARD モードに傾けた際の Gouy 位相と分割 PD2 の信号強度 (-180° から 180°)

グラフを見ると分かるように、X arm, Y arm, HARD モード, SOFT モードによらず、Gouy 位相の変化に応じておおよそ sin 波の形状で変化していることが分かる。これは式 (3.73) にもあるように、WFS 信号が QPD における Gouy 位相の三角関数で記述されることに起因すると考えられる。このグラフをもとに、5 番目での Gouy 位相の探索範囲は表 6.1 のように決定した。

	X arm	Y arm
HARD	$44^\circ - 48^\circ$	$40^\circ - 44^\circ$
SOFT	$133.2^\circ - 137.2^\circ$	$133^\circ - 137^\circ$

表 6.1: 手順 5 番目での探索範囲

表 6.1 にて決定した探索範囲における信号強度のグラフを図 6.6 -6.9 に示す。

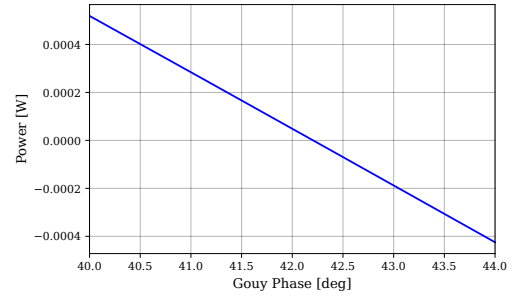
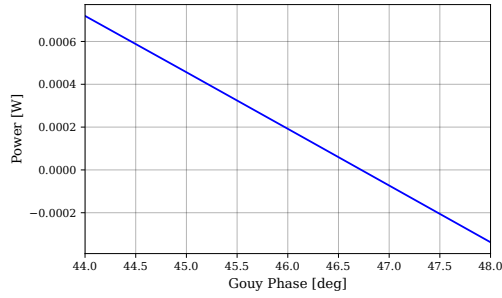


図 6.6: X arm における SOFT モードに傾 図 6.7: Y arm における SOFT モードに傾
けた際の Gouy 位相と分割 PD1 の信号強度 けた際の Gouy 位相と分割 PD1 の信号強度
(44°-48°) (40°-44°)

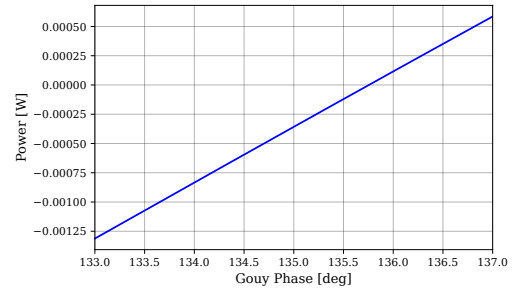
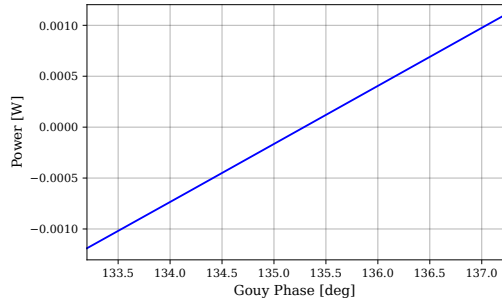


図 6.8: X arm における HARD モードに傾 図 6.9: Y arm における HARD モードに傾
けた際の Gouy 位相と分割 PD2 の信号強度 けた際の Gouy 位相と分割 PD2 の信号強度
(133.2°-137.2°) (133°-137°)

図における信号強度の絶対値が最も低くなる点から、最適な Gouy 位相を決定した。各腕とモードにおける最適な Gouy 位相は表 6.2 のようになった。なお表 6.2 に掲載する

	X arm	Y arm
HARD	46.728°	42.208°
SOFT	135.288°	135.752°

表 6.2: 最適な Gouy 位相

にあたり小数点第四位を四捨五入している。表を見ると分かるように、HARD モード及び SOFT モードの最適な Gouy 位相はおよそ 90° ずれていることが分かる。HARD モードは式 (3.73) における $\delta\theta$ を変化させ、SOFT モードは δx を変化させる。それらには $\cos(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f)$, $\sin(\eta_{\text{QPD}} + 2\eta_f)$ がかけられているため、それぞれの信号が 0 となる Gouy 位相は 90° ずれると考えられる。

以降のシミュレーションでは図 6.1 における Split PD1 を HARD モードの測定用、Split PD2 を SOFT モードの測定用として Gouy 位相を設定した。

6.3 復調位相の決定

復調後の制御信号を最大化するために、復調位相を最適化する必要がある。以下では復調位相最適化の手順と、その結果について述べる。

6.3.1 手順

以下では具体的な決定方法を述べる。こちらも Gouy 位相の場合と同様に、下記の手順を X arm と Y arm の両方で行う。

1. 図 6.1 の干渉計を HARD モードの Yaw 方向に 300[nrad] 傾ける。
2. 復調位相を -180° から 180° まで 100 分割して動かし、の QPD で信号の値を測定する。
3. 同様の測定を干渉計を HARD モードの Yaw 方向に -300 [nrad] 傾けた場合でも行う。
4. 得られた二つの QPD の信号を引き算し信号強度を得る。
5. 信号強度が 0 になる前後合わせて 4° の間で再度復調位相を 50 分割して同様の測定を行う。
6. 得られた信号のうち信号強度の絶対値が最大となる復調位相を HARD モードの測定に使用する復調位相とする。
7. 同様の測定を SOFT モードでも行い、SOFT モードの復調位相を決定する。

こちらも Gouy 位相の場合と同様に Yaw 方向に傾けたデータについて最適化し、それをそれぞれの分割 PD における復調位相とした。

6.3.2 結果

手順における 4 番目で得られた、復調位相を -180° から 180° まで 100 分割して動かした際の信号強度の変化のグラフを図 6.10 -6.13 に示す。

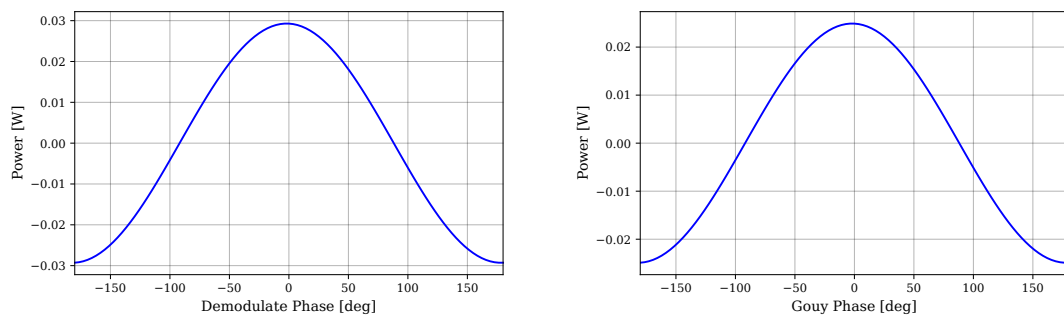


図 6.10: X arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)

図 6.11: Y arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)

グラフを見ると分かるようにこちらも Gouy 位相の場合と同様に、X arm, Y arm, HARD モード, SOFT モードによらず、Gouy 位相の変化に応じておおよそ sin 波の形状で変化していることが分かる。これは式 (3.54) より、復調信号が復調位相の三角関数で記述されることに

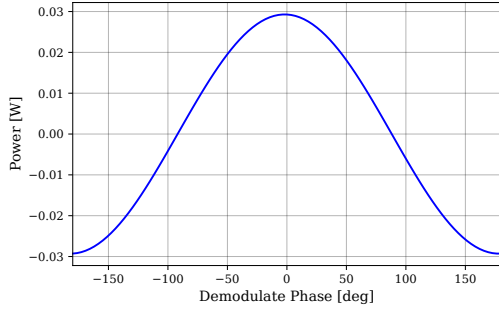


図 6.12: X arm における SOFT モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)

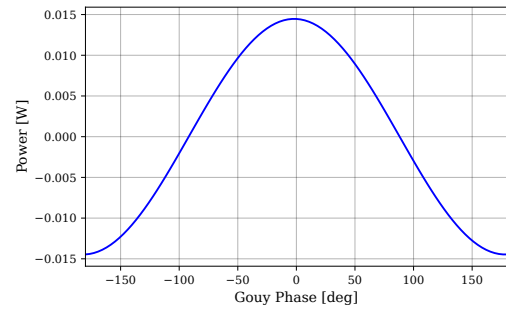


図 6.13: Y arm における SOFT モードの復調位相と信号強度 (-180° - 180°)

起因すると思われる。このグラフをもとに、4 番目での復調位相の探索範囲は全ての場合で -4° から 0° とした。この探索範囲における信号強度のグラフを図 6.14 - 6.17 に示す。

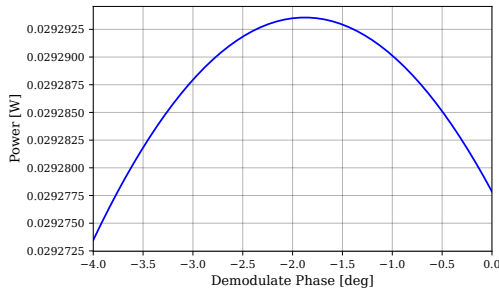


図 6.14: X arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)

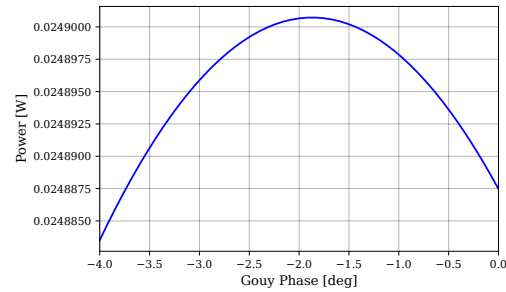


図 6.15: Y arm における HARD モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)

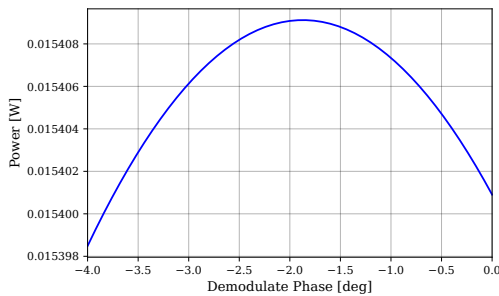


図 6.16: X arm における SOFT モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)

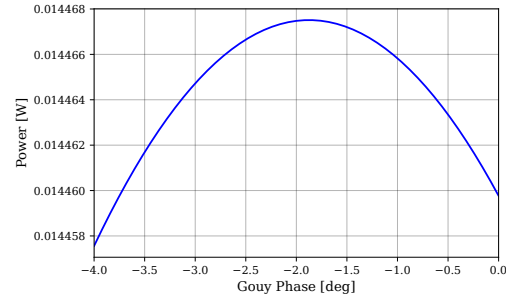


図 6.17: Y arm における SOFT モードの復調位相と信号強度 (-4° - 0°)

図より信号強度の絶対値が最大となる復調位相は、全て -1.834° であると求められた。ここでは、少数第三位を四捨五入している。ここからも分かるように、ほとんど 0° 付近で最大値を取ることが分かる。

6.4 各検出器からの信号

今回設定した光学系において設置した光検出器の出力を確認することで、複屈折が光学系に与える影響について議論する。今回は共振器の反射光の強度分布及びパワーと復調信号の二次元分布を測定した。光検出器は図 6.1 における PRM (S-pol), PRM (P-pol) 地点（強度分布測定に使用、PRM (P-pol) 地点ではパワーも測定）及び Split PD1 及び Split PD2（キャリア光とサイドバンド光の個別信号測定、復調信号の測定及びパワーの測定に使用）の位置に配置し、アライメントは整っている状態で信号を取得した。その際の結果を以下にまとめる。

X arm 及び Y arm の S 偏光成分と P 偏光成分を図 6.18 -6.21 に示す。

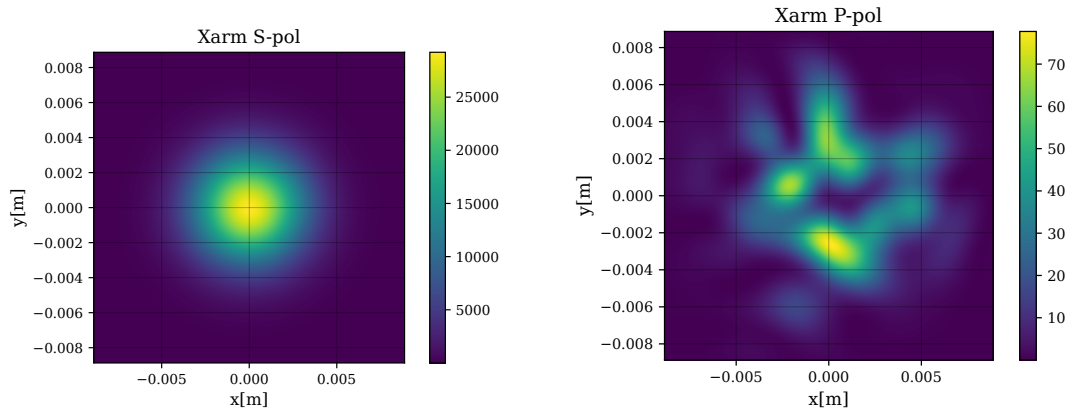


図 6.18: S 偏光の DC 成分強度分布 (X arm) 図 6.19: P 偏光の DC 成分強度分布 (X arm)

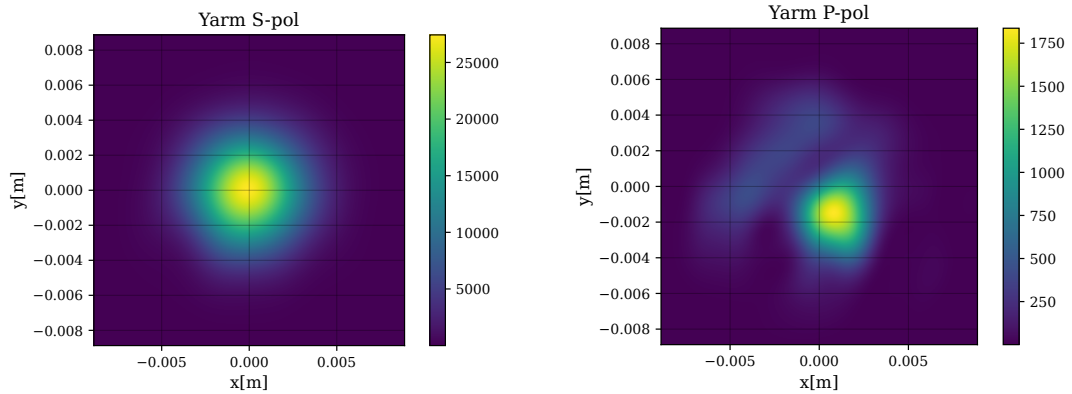


図 6.20: S 偏光の強度分布 (Y arm)

図 6.21: P 偏光の強度分布 (Y arm)

単位は強度 $[W/m^2]$ である。図を見ると、S 偏光はおおよそ綺麗なガウシアン分布をしているように見える。しかし P 偏光には強度としては小さいが複屈折によって生じた高次モードが存在していることから、波面の歪みを引き起こしていることが分かる。

X arm 及び Y arm のキャリア光とサイドバンド光の個別に測定した強度分布を図 6.22-6.33 に示す。

単位はこちらも同様に強度 $[W/m^2]$ である。図を見ると分かるように、キャリア光に対して

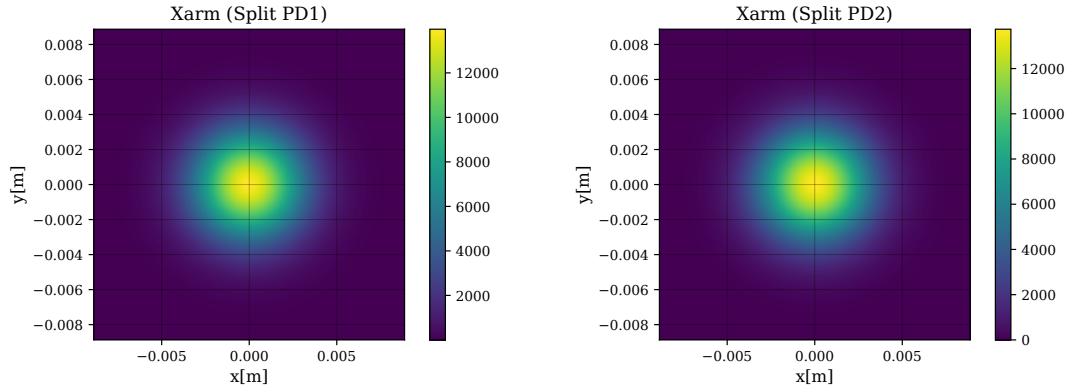


図 6.22: キャリア光の強度分布 (X arm, Split PD1) 図 6.23: キャリア光の強度分布 (X arm, Split PD2)

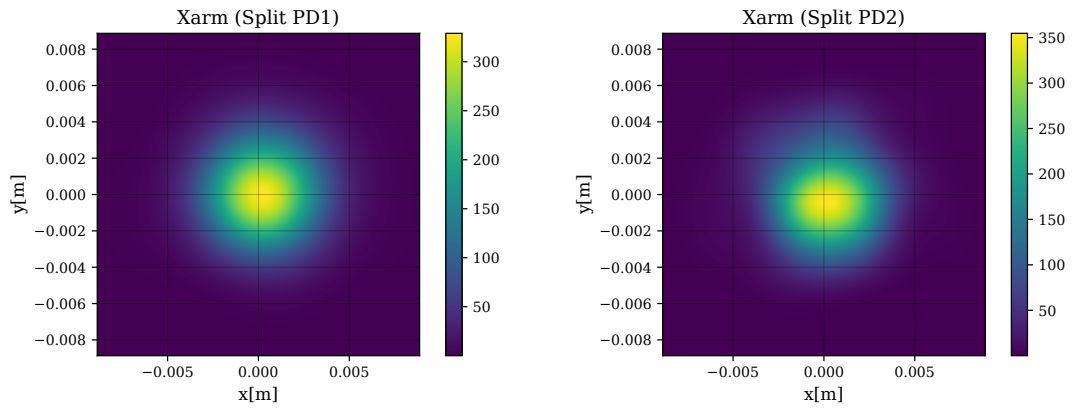


図 6.24: Upper サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD1) 図 6.25: Upper サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD2)

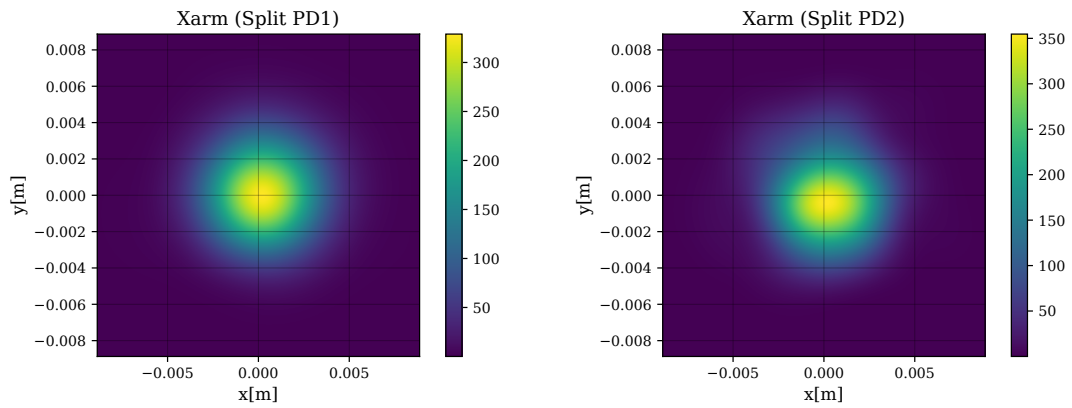


図 6.26: Lower サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD1) 図 6.27: Lower サイドバンド光の強度分布 (X arm, Split PD2)

サイドバンド光の方が歪みが大きい傾向にある。これは、4.4 節でも言及したローレンス効果によるものであると考えられる。また、X arm 及び Y arm の復調信号の平面分布を図 6.34 -6.37 に示す。

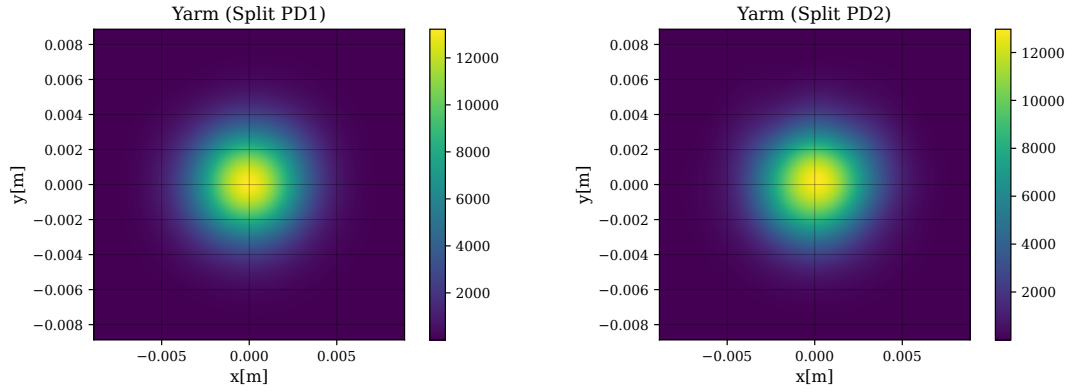


図 6.28: キャリア光の強度分布 (Y arm, Split PD1) 図 6.29: キャリア光の強度分布 (Y arm, Split PD2)

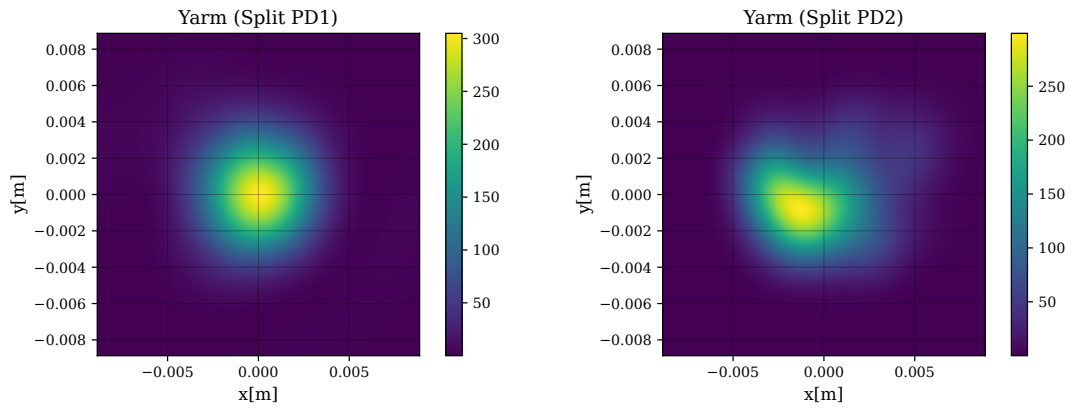


図 6.30: Upper サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD1) 図 6.31: Upper サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD2)

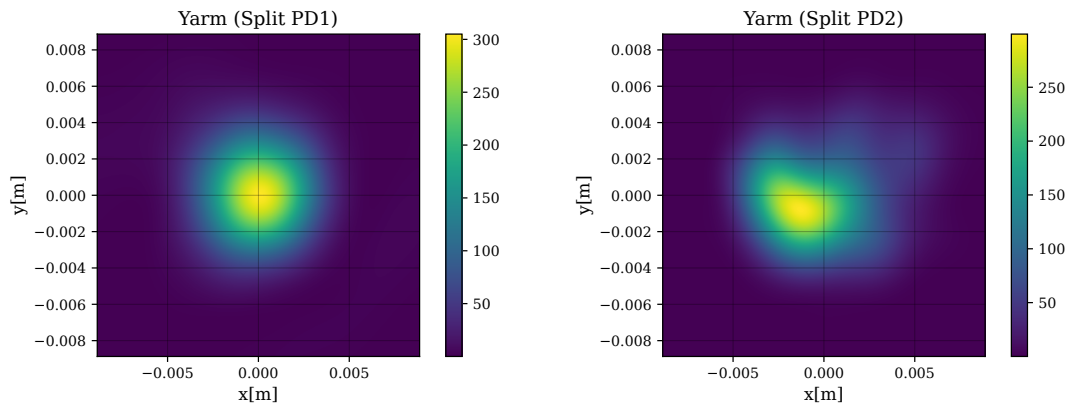


図 6.32: Lower サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD1) 図 6.33: Lower サイドバンド光の強度分布 (Y arm, Split PD2)

単位は強度 $[\text{W}/\text{m}^2]$ である。図を見ると、アライメントが整っているにもかかわらず、いずれの分割 PD についても複屈折によって生じた高次モードが存在することが分かる。これにより、WFS 信号を取り出した際にオフセットが発生すると考えられる。

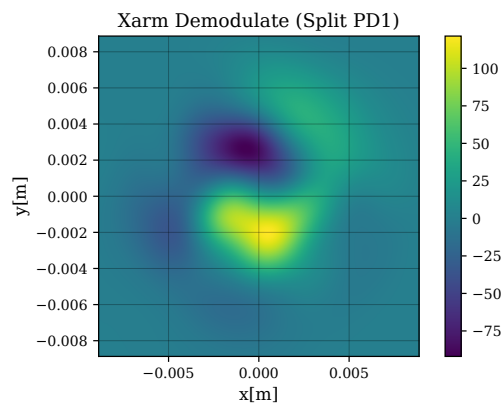


図 6.34: X arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD1)

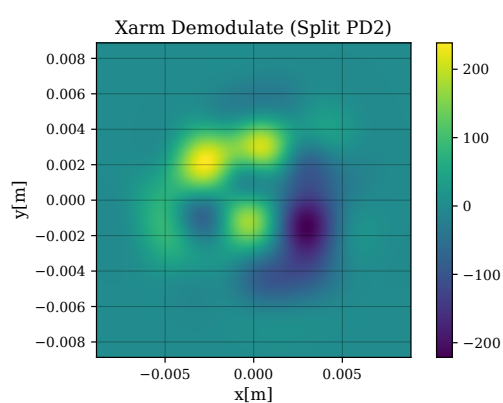


図 6.35: X arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD2)

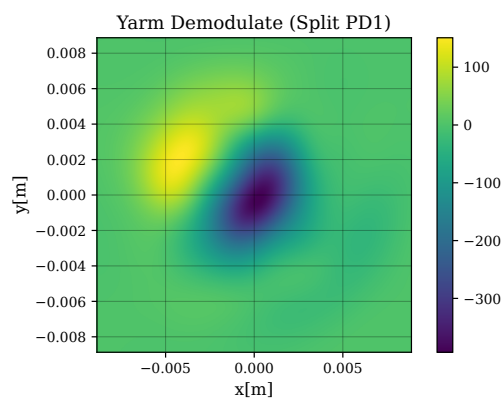


図 6.36: Y arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD1)

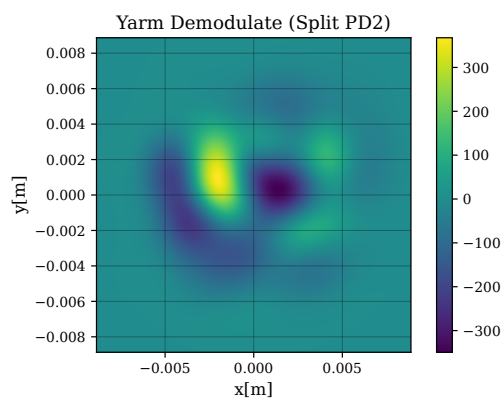


図 6.37: Y arm における S 偏光の復調信号 (分割 PD2)

また、測定した反射光の DC パワーを表 6.3 にまとめる。ここでは有効数字 4 桁で表示して

	S-pol	P-pol
X arm	0.4541	0.003391
Y arm	0.4315	0.04167

表 6.3: S 偏光と P 偏光のレーザーパワー

いる。表を見ると、Y arm の方が P 偏光の混入度合いが 10 倍ほど大きいことが分かる。実際に復調信号の信号強度を比べても Y arm の方が高次モードの混入が大きく、Y arm の複屈折の影響が大きいことが分かる。なお、今回ショット雑音の計算では X arm の S 偏光のパワーを使用した。

6.5 学習用データの取得

重み付け係数決定のため、ビームジッターが発生した際の分割 PD の信号の変化を取得する必要がある。以下では具体的な学習用データの取得手順と、取得したデータについて述べる。

6.5.1 手順

学習用データ取得の手順は以下の通りである。信号の復調及び QPD 及び 16 分割 PD の作成に関する理論は B 章を参照。

1. 図 6.38 の青い丸のように、位相マップの中心から x, y 軸方向に $\pm 1[\text{mm}]$ 四方の領域に対し、 15×15 に分割された領域の各点の反射光を 800×800 に分割して測定する。
2. B.2 節で述べるような理論をもとに、反射光を復調する。
3. 復調した 800×800 分割の信号を足し合わせることで、QPD 及び 16 分割 PD の各領域での RF 成分の信号を取得する。

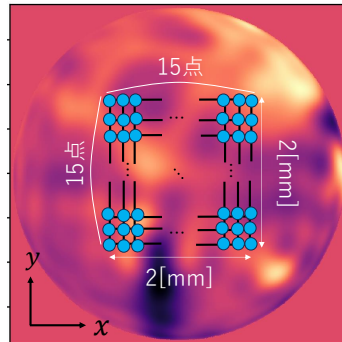


図 6.38: 学習用データの測定イメージ

6.5.2 結果

QPD

取得した学習用データを図 6.39 -6.42 に示す。ここでは、代表として X arm における Split PD1 からの QPD の出力を示している。横軸は図 6.38 における x 軸方向のビームジッターの値であり、縦軸は y 軸方向のビームジッターの値を示している。図を見ると、Pitch, Yaw, HARD, SOFT に関わらずおおよそ平面に近い分布をしていることが分かる。

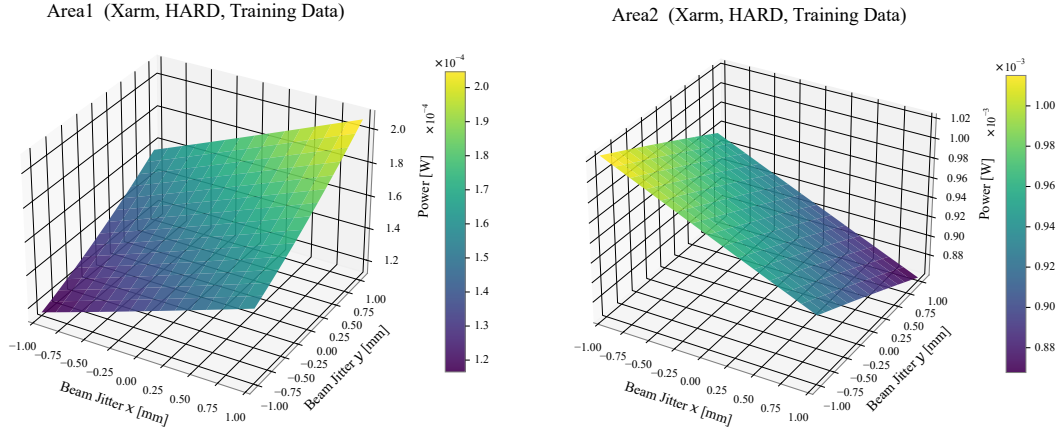


図 6.39: ビームジッターと QPD からの出力 (領域 1) 図 6.40: ビームジッターと QPD からの出力 (領域 2)

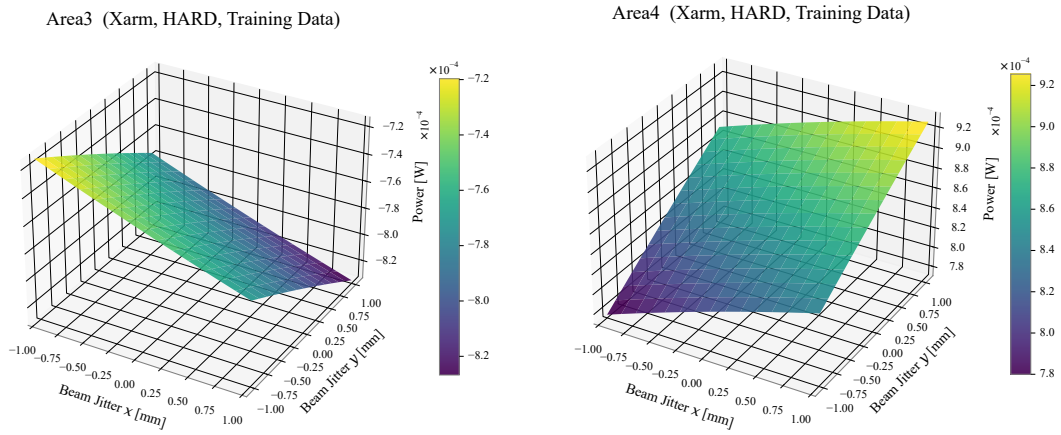


図 6.41: ビームジッターと QPD からの出力 (領域 3) 図 6.42: ビームジッターと QPD からの出力 (領域 2)

16 分割 PD

取得した学習用データは図 6.43 -6.46 の通りである。こちらでも QPD の場合と同様に、X arm における Split PD1 からの検出する 16PD からの出力を示している。またここでは代表して鏡を傾けた際の信号強度が大きく異なる領域 1,2,5,6 の出力を示している。横軸と縦軸の定義は QPD の場合と同様である。

図を見ると 6.45 を除いておおよそ平面に近い分布をしていることが分かる。一方で QPD の場合と比較して、勾配の様子が多様に存在することが分かる。これらを適切に足し合わせることで通常の分割 PD を使用した場合よりも最終的な信号の勾配を下げるができることが分かる。

また各信号の絶対値を見ると、Hermite-Gaussian モードの空間分布の影響で中心部分領域 6 の信号のパワーが高く、領域 2,5 のパワーは同程度のオーダーであり、領域 1 のパワーが小さいことが分かる。これは、中心部分から外側に向かうにつれて値が減少していることを示し

ている。特に今回使用した 16 分割 PD の場合、中心部分の光強度が非常に大きくなっていることが分かる。これは中心部分の強度に対し、外側に向かうにつれて信号強度が指数関数的に減少するためであると考えられる。

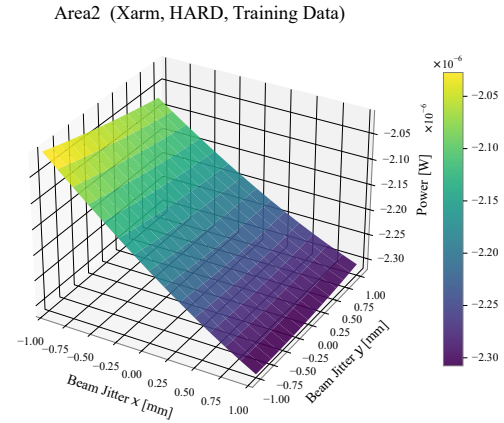
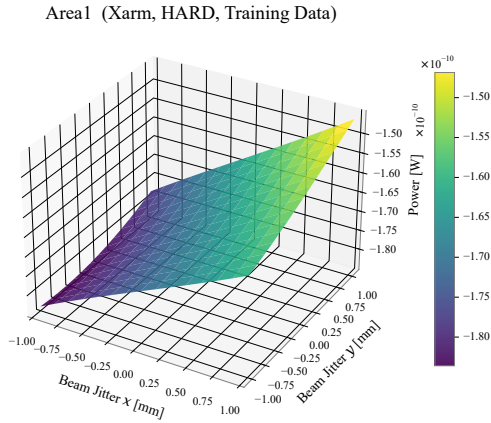


図 6.43: ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 1)

図 6.44: ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 2)

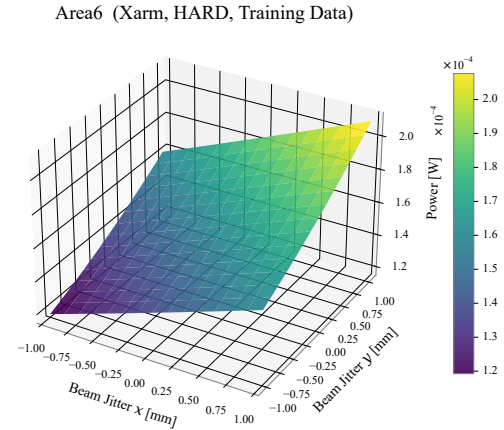
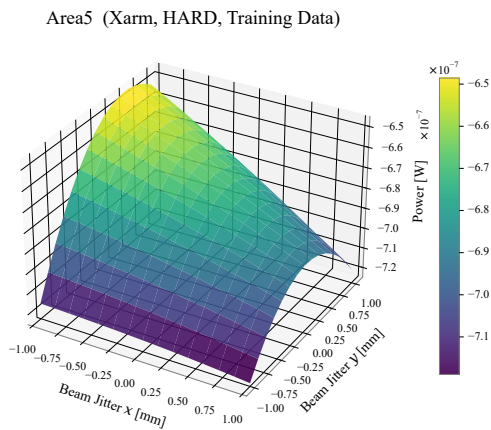


図 6.45: ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 5)

図 6.46: ビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 6)

6.6 テスト用データの取得

学習データをもとに決定した重み付け係数の検証のため、テスト用データを取得する。テスト用データには、学習用データで動かしたパターンとは異なるパターンで光の中心位置を動かしたデータに加え、鏡の傾きを 300[nrad] ずらしたデータや、0 から 4[μ rad] までずらしたデータも作成した。300[nrad] ずらしたデータは、各自由度のカップリングを見るために作成し、0 から 4[μ rad] までずらしたデータは WFS 信号の線形性を検証するために作成した。

6.6.1 手順

手順は以下のようになる。信号の復調や分割 PD の作成に関しては、学習用データ作成の際と同様に行った。

1. 図 6.38 の青い丸のように、位相マップの中心から x, y 軸方向に $\pm 1[\text{mm}]$ 四方の領域に対し、 14×14 に分割された領域の各点の反射光を測定する。
2. 反射光を復調することで分割 PD の各領域での RF 成分の信号を取得する。
3. 光軸の角度を Yaw, Pitch 方向の HARD, SOFT モードに $300[\text{nrad}]$ ずらし合計 4 種類の、分割 PD の各領域における RF 成分の信号を取得する。
4. 光軸の角度を Yaw, Pitch 方向の HARD モードに 0 から $4.4[\mu\text{rad}]$ 、SOFT モードに 0 から $5[\mu\text{rad}]$ 程度までずらし合計 4 種類の、分割 PD の各領域における RF 成分の信号を取得する。

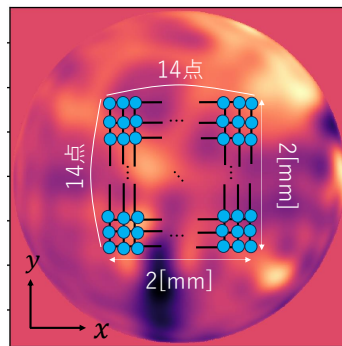


図 6.47: テストデータの測定イメージ

6.6.2 結果

テスト用データの分布

鏡を HARD モードの Yaw 方向に $300[\text{nrad}]$ 際の QPD の各領域からの信号分布を以下の図 6.48 - 6.51 において示す。横軸及び縦軸は学習用データの場合と同様である。こちらも学習用データと同様に各自由度に関わらずおおよそ平面に近い分布をしていることが分かる。また、鏡を傾けずに測定したデータと比較して分布の勾配がおおよそ一致していることが分かる。

同様に、16 分割 PD のデータは図 6.52 - 6.55 の通りである。

こちらも QPD の場合と同様に、Xarm における Split PD1 からの 16PD からの領域 1, 2, 5, 6 の、HARD モードの Yaw 方向に傾けた出力を示している。こちらも各自由度に関わらずおおよそ平面に近い分布をしていることが分かる。領域 5 に関しても 10 モードが出現した影響で

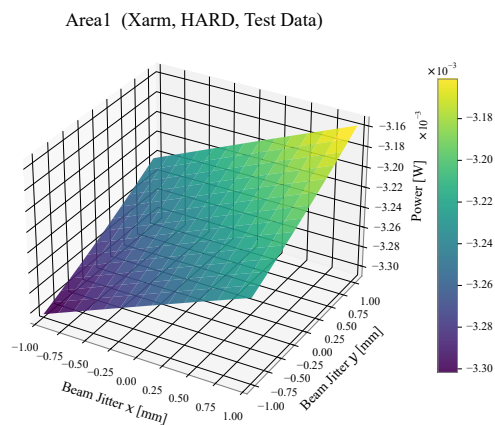


図 6.48: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 1)

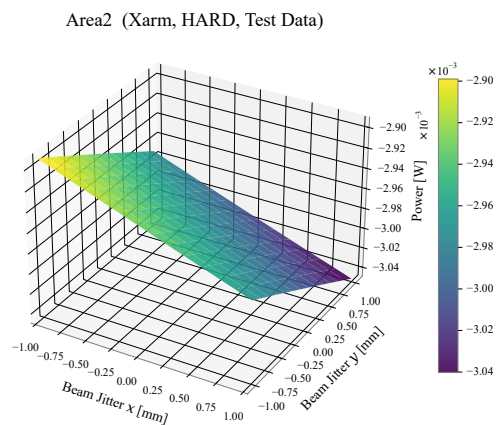


図 6.49: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 2)

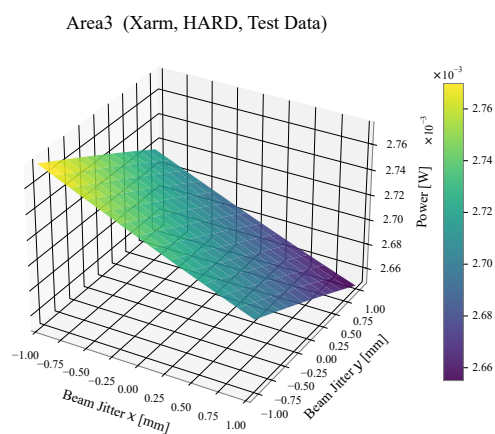


図 6.50: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 3)

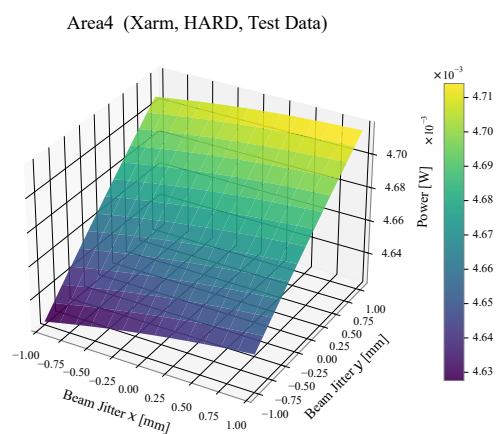


図 6.51: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと QPD からの出力 (領域 4)

曲面の曲率が緩やかになっていることが分かる。また、信号強度の高い領域 6 では分布の勾配がおおよそ一致している。これは QPD との挙動とも矛盾しない。

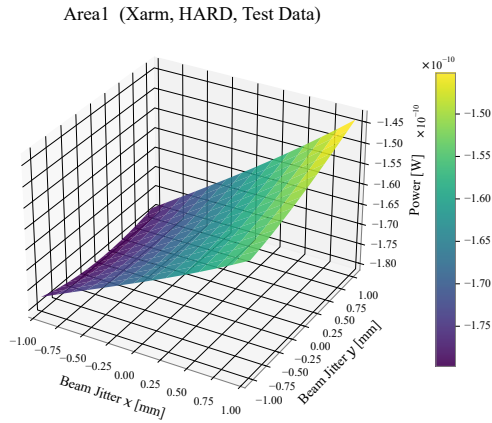


図 6.52: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 1)

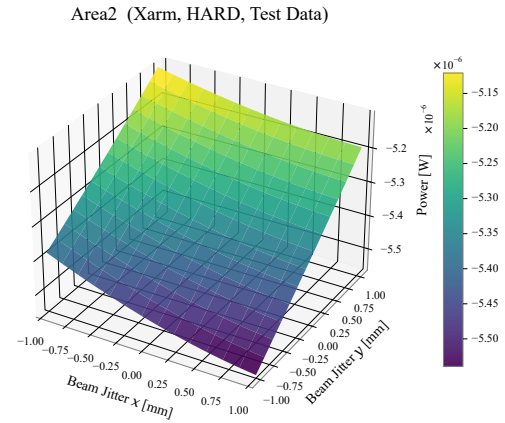


図 6.53: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 2)

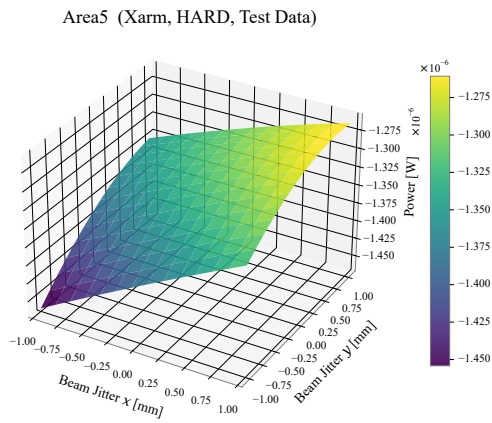


図 6.54: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 5)

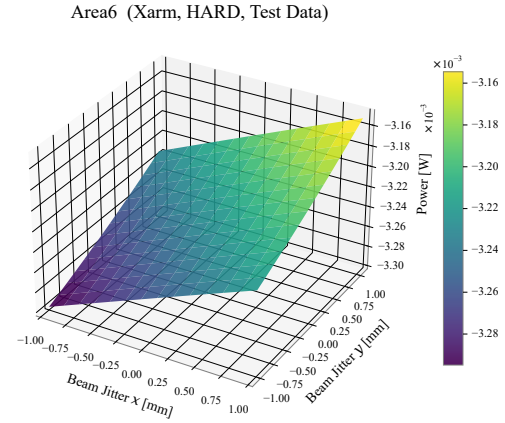


図 6.55: 300[nrad] 傾けた場合のビームジッターと 16 分割 PD からの出力 (領域 6)

WFS 信号のグラフ

手順 4 番目で取得した、QPD の各領域における復調信号のグラフを図 6.56 に示す。ここでは代表して、X arm における Split PD1 で検出した、HARD モード Yaw 方向の信号を示す。グラフを見ると分かるように Yaw 方向に傾けた場合は左右の領域がお互いに対して対称な挙動を示しており、Pitch 方向に傾けた場合は上下の領域がお互いに対して対称な挙動を示している。これは Hermite-Gaussian モードの 1 次モードの反対称性に起因する。したがって全ての信号を足し合わせた場合、各信号同士で打ち消し合いが起こり WFS 信号は発生しないことが分かる。これは通常の PD では WFS 信号を取ることはできず、QPD などの分割 PD が必要であることを示している。

同様に、同様の測定を 16 分割 PD で行った際の各領域における復調信号のグラフを図 6.57 -6.60 に示す。ここでは、信号強度の異なる領域 1,2,5,6 の信号を代表して示す。

グラフを見ると領域 2,5,6 では線形性が確認できるが、領域 1 では 0[rad] 付近での線形性が低下している。これは、10 モードの強度が複屈折の影響で現れる高次モードの強度と比べて他

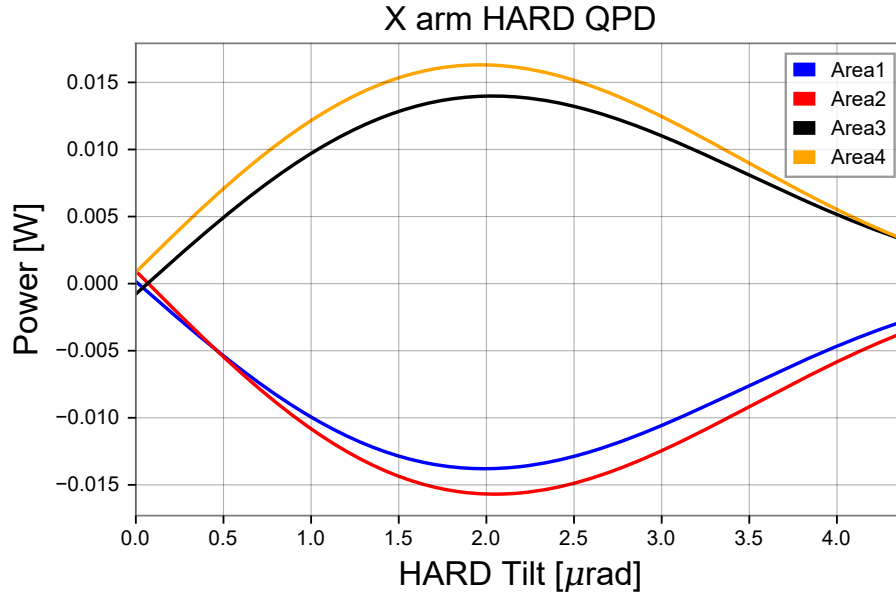


図 6.56: Xarm の QPD の各領域における復調信号 (HARD,Yaw)

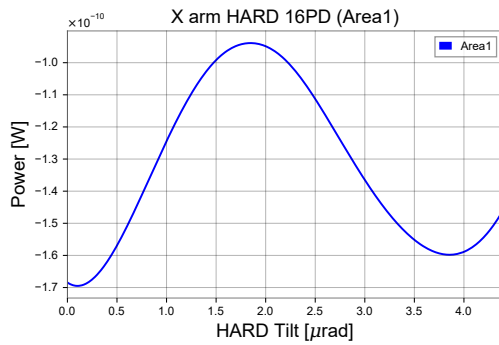


図 6.57: X arm の 16PD における復調信号 (HARD,Yaw, 領域 1)

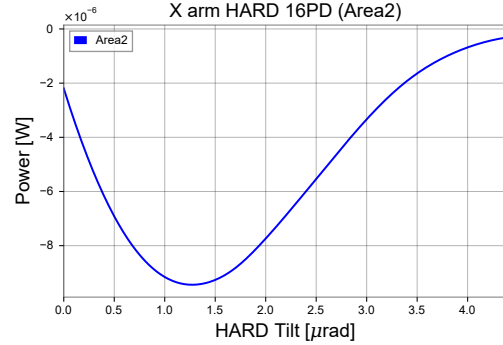


図 6.58: X arm の 16PD における復調信号 (HARD,Yaw, 領域 2)

の領域と比較して小さく、複屈折の影響が強く表れてしまっているためだと考える。重み付け係数の変更によりこのような信号が増幅され過ぎてしまうと、信号全体の線形性が崩れ制御が行えなくなると考えられる。

6.7 複屈折が KAGRA に与える雑音の推定

テスト用データを見ても分かるように、ビームジッターに応じて分割 PD からの信号は増減する。この増減が KAGRA の感度に与える影響について議論する。本論文では、複屈折による信号の増減をショット雑音と合わせて雑音量の推定を行った。以下に雑音の算出手順と、算出した結果について述べる。

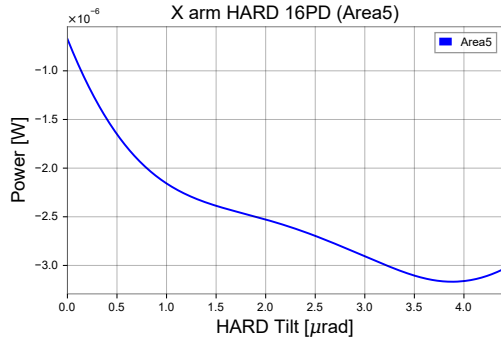
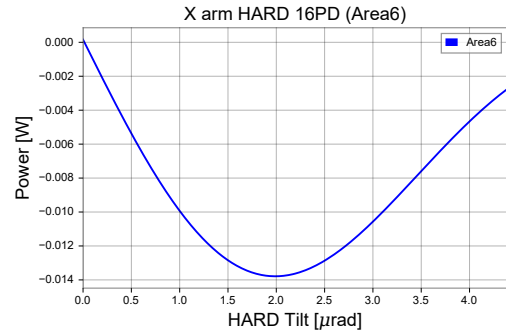


図 6.59: X arm の 16PD における復調信号 (HARD,Yaw, 領域 5)



(HARD,Yaw, 領域 6)

6.7.1 手順

算出にあたり必要な計算については 5.2.3 節にて議論している。以下では実際の算出方法について述べる。

1. 6.6 節の手順 1 において取得したテスト用データを図 6.47 における x, y 軸方向のデータに分ける。これにより、 x, y 方向のデータがそれぞれ 14 個手に入る。
2. x, y 方向のデータのそれぞれについて信号の増減量を計算しその絶対値が最大のものを求める。
3. 算出された最大値に x, y 方向のビームジッタースペクトルをかけ、ショット雑音とみなした際の雑音の大きさを算出する。
4. 分割 PD に届く光強度を測定し分割 PD からのショット雑音を式 (5.12) を用いて計算する。これを複屈折による雑音と足し合わせて合計のショット雑音とする。
5. 6.6 節の手順 3 において取得した、鏡を傾けた際のデータを用いて、WFS 信号の行列 D_{normal} を作成する。
6. 伝達関数と合わせて式 (5.47) を用いて計算を行い、KAGRA の感度曲線と比較する。

6.7.2 結果

手順 3 において計算した、複屈折による影響を受けた際のショット雑音を図 6.61 -6.64 に示す。

図を見ると分かるように、ビームジッターのスペクトル特性から低周波領域で特に大きな雑音であることが分かる。また、手順 4 において計算したショット雑音 Δn_{shot} は式 (5.12) より、

$$\Delta n_{\text{shot}} \simeq \sqrt{2 \times 6.626 \times 10^{-34} \times 2.817 \times 10^{14} \times 0.4541} \simeq 4.117 \times 10^{-10} [\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (6.1)$$

となった。二つの雑音を足し合わせたスペクトルを計算した結果を図 6.65 -6.68 に示す。

グラフを見ると、30[Hz] 程度の周波数までは複屈折の影響が支配的であり、それを超えるとショット雑音が支配的になることが分かる。WFS 法による制御帯域は 10[Hz] より小さい周波

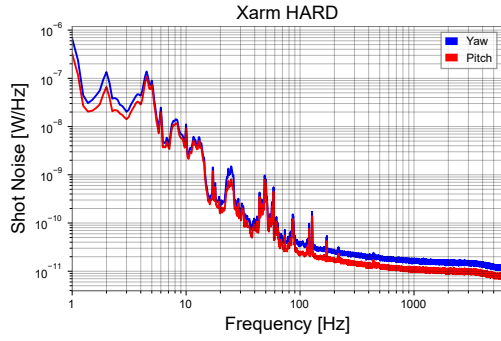


図 6.61: X arm の複屈折によるショット雑音 (HARD モード)

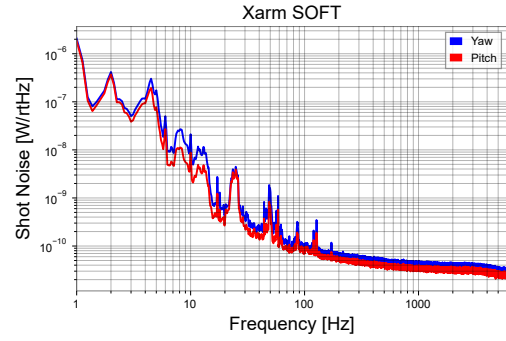


図 6.62: X arm の複屈折によるショット雑音 (SOFT モード)

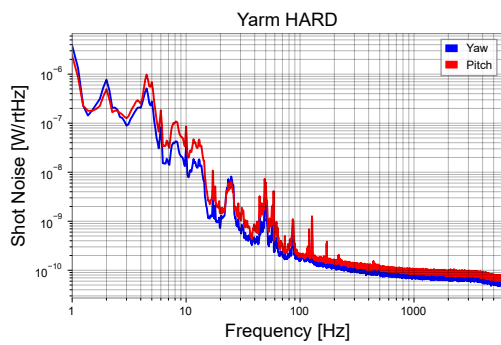


図 6.63: Y arm の複屈折によるショット雑音 (HARD モード)

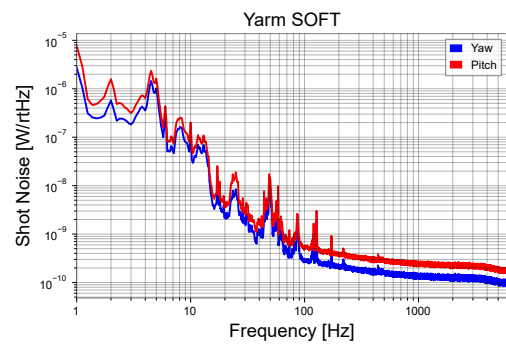


図 6.64: Y arm の複屈折によるショット雑音 (SOFT モード)

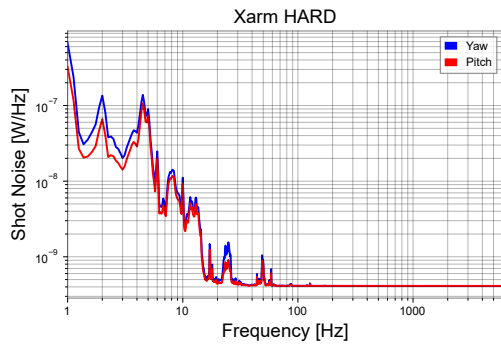


図 6.65: X arm の合計のショット雑音 (HARD モード)

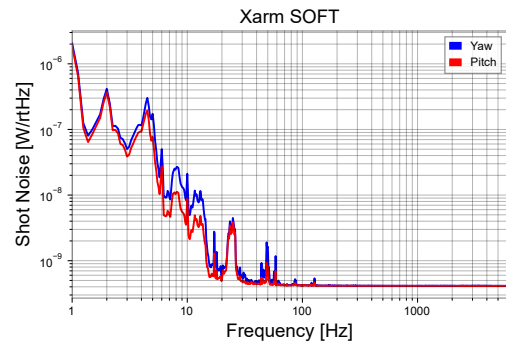


図 6.66: X arm の合計のショット雑音 (SOFT モード)

数帯域であるため、複屈折の影響を低減させることは雑音低減において有効であると考えられる。また、X arm と Y arm を比較すると Y arm の方が雑音は大きく、複屈折の影響がより強く表れていることが分かる。

KAGRA の感度と比較するために、ショット雑音を共振器長の揺らぎスペクトルに変換する必要がある。計算にあたっての理論は 5.2.3 節で示した。以下では具体的な計算過程と、その結果を述べていく。今回考えた制御系のブロック線図は図 5.8 の通りである。制御系内での雑音の振る舞いを明らかにするために、WFS 信号の行列 D_{normal}^A ($A = X, Y$) 及びオープンルー

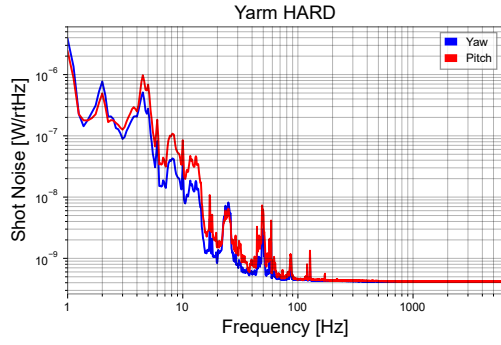
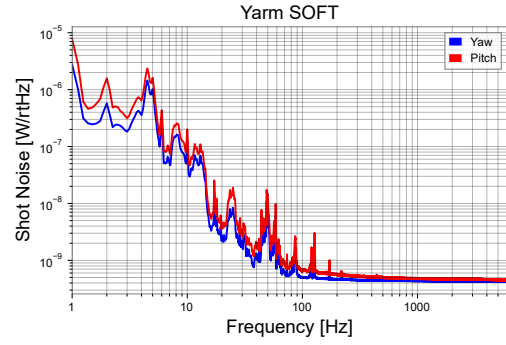


図 6.67: Y arm の合計のショット雑音 図 6.68: Y arm の合計のショット雑音 (SOFT (HARD モード) モード)



伝達関数 G を求める必要がある。 G については 5.2.3 節にて既に定義している。 D_{normal}^A は 6.6 節において取得した鏡の角度を 300[nrad] 傾けた際のデータと、傾けていないテストデータとの差の平均値を取ることで求める。計算の結果得られた X arm の WFS 信号行列を表 6.4 に示す。単位は [W/rad] であり、表内の値は 1/100 で表示している。また、対角成分が正と

$\times 10^2$	HARD Yaw	HARD Pitch	SOFT Yaw	SOFT Pitch
HARD Yaw	487	1.44	1.67	-3.31
HARD Pitch	6.24	498	-4.64	-3.29
SOFT Yaw	-1.24	0.943	258	-2.81
SOFT Pitch	-3.82	17.7	0.194	241

表 6.4: X arm での WFS 信号マトリクス

なるように符号を調整している。縦軸が検出する信号を示しており横軸が鏡の傾きを示している。例えば、HARD モードの Pitch 方向に 1[rad] 傾いたとしたら、HARD モードの Yaw 方向を検出する検出器に 144[W] が発生するという事を示している。この先の計算においては、この表を行列表記で記述する。先程の X arm の結果と合わせて、Y arm の WFS 信号の行列 $D_{\text{normal}}^X, D_{\text{normal}}^Y$ についても求めると、

$$D_{\text{normal}}^X = \begin{pmatrix} 487 & 1.44 & 1.67 & -3.31 \\ 6.24 & 498 & -4.64 & -3.29 \\ -1.24 & 0.943 & 258 & -2.81 \\ -3.82 & 17.7 & 0.194 & 241 \end{pmatrix} \times 10^2 [\text{W/rad}] \quad (6.2)$$

$$D_{\text{normal}}^Y = \begin{pmatrix} 409 & -13.1 & -0.0501 & 14.1 \\ -8.41 & 382 & 11.3 & 29.2 \\ -0.596 & 6.39 & 242 & 7.25 \\ 9.87 & -29.1 & 5.86 & 251 \end{pmatrix} \times 10^2 [\text{W/rad}] \quad (6.3)$$

となった。表示の都合により有効数字 3 桁で表示している。これを見ると、全自由度で少なくとも 1/10 程度は他の信号との分離ができていることが分かる。また、pitch 方向の HARD,SOFT モードのカップリングが yaw 方向と比較して多い傾向にあることが分かる。こ

これは、Gouy 位相の設定において yaw 方向を基準に調整したためであると考えられる。また、各行と列の対応は図表 6.4 と一致している。 $D_{\text{normal}}^X, D_{\text{normal}}^Y$ の逆行列を計算し、式 (5.47) を用いることで、感度曲線と比較する。計算結果は図 6.69 のようになった。

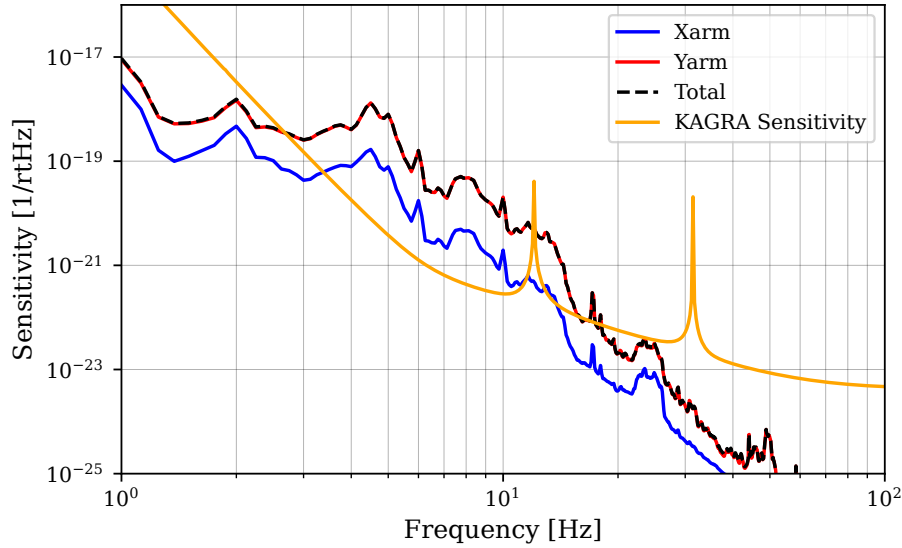


図 6.69: ショット雑音と KAGRA 感度曲線の比較

グラフを見ると、Y arm の雑音が Xarm からの雑音と比べると大きく、より支配的な雑音となっていることが分かる。また KAGRA の感度と比較すると、3-20[Hz] の領域で KAGRA の感度を制限している。これを低減させることで、KAGRA の感度向上につながると考えられる。

6.8 重み付け係数の決定

6.5 節で取得した学習用データをもとに、重み付け係数の決定を行った。計算における理論に関しては 5.2.3 節にて議論している。以下では具体的な係数の計算内容とその結果について述べる。

6.8.1 QPD

計算にあたり使用した重み付け係数決定に用いたソースコードを C.7, C.8 に示す。5.2.3 節でも述べたように、今回は QPD の重み付け係数決定にあたり複数の最小化関数を使用した。具体的には、Python の SciPy ライブラリに含まれる minimize 関数を使用した。これは、与えられた関数が最小値となるパラメータを出力する関数である。重み付け係数を最適化する前に、式 (5.18) 及び式 (5.25) を課し、信号強度の減少と Pitch, Yaw カップリングの増加を抑えている。最小化する関数は式 (5.49) で与えられる評価関数を最優先で使用したが、 ΔP_{bir} の部分など形を変えたパターンについても試し、収束した場合はそのパラメータを直接評価関数に代入し値を比較した。その上で、比較した中で最も評価関数を最小化することができる値を採用した。

今回の重み付け係数の決定においては、式 (5.49) で与えられる評価関数が有効な値に収束せず、すべての自由度において ΔP_{bir} の部分について最適化する場合が最も評価関数を小さくしたため、評価関数は直接 minimize 関数には使用していない。

初期値は全てのパラメータを 1 としたが、こちらも値によっては有益な収束を示さないものも存在し、その場合は初期値を適当に変更して係数を入手した。また、評価関数を低減させることのできる解が存在したとしても、全ての係数が 1 から大きく離れている場合は除外した。

式 (6.4) から式 (6.11) に取得した重み付け係数を示す。重み付け係数の番号は図 5.1 における各領域のナンバリングと対応している。また、上の添え字における一番目の X, Y はそれぞれ X arm と Y arm を、二番目の H, S はそれぞれ HARD モードと SOFT モードを、三番目の P, Y はそれぞれ Pitch と Yaw を示している。取得に使用した最小化関数及び初期値は表 C.1, C.2 にて示す。

$$\begin{aligned} a_{\text{QPD}}^{\text{XHY}} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.08 & 1.31 \\ 0.693 & 0.917 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$a_{\text{QPD}}^{\text{XHP}} = \begin{pmatrix} 2.26 & 2.09 \\ -0.0915 & -0.261 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$a_{\text{QPD}}^{\text{XSY}} = \begin{pmatrix} -4.32 & 7.92 \\ -5.92 & 6.32 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$a_{\text{QPD}}^{\text{XSP}} = \begin{pmatrix} -2.21 & 0.467 \\ 1.53 & 4.214 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$a_{\text{QPD}}^{\text{YHY}} = \begin{pmatrix} -0.124 & 1.42 \\ 0.582 & 2.12 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$a_{\text{QPD}}^{\text{YHP}} = \begin{pmatrix} 1.33 & 1.85 \\ 0.149 & 0.665 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$a_{\text{QPD}}^{\text{YSY}} = \begin{pmatrix} -0.660 & 10.00 \\ -8.00 & 2.66 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$a_{\text{QPD}}^{\text{YSP}} = \begin{pmatrix} 1.25 & -8.06 \\ 10.1 & 0.746 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

ここでは、表示の都合上有効数字三桁で表示している。なお通常の QPD の場合、

$$a_{\text{QPD}}^{\text{normal}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

である。各重み付け係数を見ると、式 (6.6) のように左右で引き算をするのではなく、バランスを変えて足し合わせるといった操作を行う重み付け係数も存在することがわかる。

決定した重み付け係数が学習用データに対してどれだけ評価関数を減少させることができるのか確かめるため、評価関数に決定した重み付け係数を代入し値を全ての重み付け係数が 1 の

	X arm	Y arm
HARD Yaw	9.307	12.02
HARD Pitch	5.436	1.025
SOFT Yaw	6.307	15.41
SOFT Pitch	7.748	19.14

表 6.5: QPD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (学習用データ)

場合と比較した。実際に比較した結果を表 6.5 に示す。QPD の場合の評価関数のソースコードは C.5 に示す。

表示の都合上、有効数字 4 桁で表示している。X は X arm、Y は Y arm のデータであることを示している。表 6.5 は重み付け係数適用前後の評価関数の減少倍率を示している。例えば、X arm の HARD モード Yaw 方向を検出する QPD は、評価関数を 9.307 低減させることができたことを示している。表を見ると評価関数を最大 19 分の 1 程度に減少させることができていたことが分かる。

6.8.2 16 分割 PD

16 分割 PD の場合も同様に minimize 関数を用いて係数の決定を行った。16 分割 PD の場合は事前に式 (5.19) と式 (5.27) を課し、信号強度の減少と Pitch,Yaw カップリングの増加を抑えている。最小化する関数や初期値については、QPD の場合と同様に決定していった。式 (6.13) から式 (6.20) に取得した重み付け係数を示す。また、取得に使用した初期値を示す。

$$\begin{aligned}
 a_{16PD}^{XHY} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \\ a_4 & a_8 & a_{12} & a_{16} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1.10 & 201 & -3.02 & 1.68 \\ 32.6 & 1.00 & 1.35 & 40.8 \\ -13.1 & 0.646 & 0.999 & -85.2 \\ 1.24 & 18.4 & -18.8 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

$$a_{16PD}^{XHP} = \begin{pmatrix} 0.971 & 112 & 1.77 & 1.22 \\ -81.3 & 2.81 & 2.76 & 21.1 \\ -19.6 & -0.760 & -0.814 & -107 \\ 0.763 & -3.08 & -0.480 & 1.05 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

$$a_{16PD}^{XSY} = \begin{pmatrix} 89.5 & 142 & -4.06 \times 10^3 & 24.2 \\ 15.5 & -1.31 & 3.31 & -3.50 \times 10^3 \\ 1.51 \times 10^3 & -1.97 & -0.814 & -1.06 \times 10^3 \\ 3.22 & 2.64 \times 10^3 & -1.16 \times 10^3 & 135 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

$$a_{16PD}^{XSP} = \begin{pmatrix} -43.3 & 61.2 & -2.64 \times 10^3 & -4.07 \\ -716 & -5.37 & -5.44 & -3.48 \times 10^3 \\ 1.39 \times 10^3 & 7.25 & 7.37 & -420 \\ -1.84 & 1.88 \times 10^3 & 628 & -79.3 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$a_{16PD}^{YHY} = \begin{pmatrix} 1.02 & -13.4 & 10.9 & 0.824 \\ -1.06 & -0.256 & 1.69 & -2.60 \\ 3.29 & 0.310 & 2.26 & 11.2 \\ 1.09 & -46.5 & 3.52 & 0.978 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

$$a_{16PD}^{YHP} = \begin{pmatrix} -1.73 & 486 & -143 & 1.28 \\ -78.7 & 5.19 & 7.04 & -62.8 \\ -71.8 & -5.04 & -3.20 & -131 \\ -9.42 & 134 & -768 & 2.81 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

$$a_{16PD}^{YSY} = \begin{pmatrix} 1.99998835 & 2.01292504 & 1.97857577 & 1.99996641 \\ 2.00225163 & -0.64802015 & 9.96449658 & 1.98406049 \\ 1.98432409 & -7.9644968 & 2.64801995 & 1.98734964 \\ 2.00001178 & 1.99699305 & 1.92102054 & 1.99999613 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$a_{16PD}^{YSP} = \begin{pmatrix} 1.00000269 & 0.99671913 & 1.00052799 & 1.00000049 \\ 1.00027224 & 4.19349003 & -0.29775197 & 1.00085197 \\ 0.99910856 & 2.29775197 & -2.19349003 & 0.99964895 \\ 1.00000012 & 0.99959575 & 0.99751941 & 0.99999486 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

式 (6.19), (6.20) については値の表示上有効数字を増やして表示しているが、それ以外は有効数字 3 桁で表示している。式を見ると、分割 PD の外側の領域ほど係数の桁が大きい傾向にあることが分かる。これは外側の信号強度が中心部分と比較して小さいため、他の領域からの揺らぎを打ち消すために信号強度を増幅させる必要があるためだと考えられる。

16 分割 PD の場合も同様に評価関数に決定した重み付け係数を代入し値を全ての重み付け係数が 1 の場合と比較した。実際に比較した結果を表 6.6 に示す。また、16PD の場合の評価関数のソースコードは C.6 に示す。

	X arm	Y arm
HARD Yaw	59.29	291.4
HARD Pitch	27.38	170.5
SOFT Yaw	94.08	15.38
SOFT Pitch	47.69	3.83

表 6.6: 16 分割 PD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (学習用データ)

表を見ると最大 288 分の 1 程度に減少させることができていることが分かる。また QPD と比較すると、Y arm の SOFT モード Pitch 方向を除くすべての自由度で QPD よりも評価関数を低減させていることが分かる。これは、16 分割 PD の方が重み付け係数の総数が多く、式 (5.5) における $\delta x, \delta y$ の高次の項まで低減させることができるためであると考えられる。

6.9 重み付け係数の検証

6.8 節で決定した重み付け係数を、本来の分割 PD の場合と比較することで重み付け係数の性能を評価する。本論文では、複屈折の影響によるオフセットの揺らぎ、WFS 信号の線形性、ショット雑音、感度曲線に変換した際の雑音といった観点で比較を行った。

6.9.1 複屈折による信号揺らぎの比較

重み付け係数の変更による複屈折による制御信号の揺らぎの変化を比較した。本論文ではテストデータにおける WFS 信号のオフセットの標準偏差を取り比較した。ここではテストデータに対して式 (5.8) 及び式 (5.9) で得られる信号の標準偏差を計算している。この値はショット雑音における ΔP_{bir} に対応する。計算結果を表 6.7, 6.8 に示す。この揺らぎは信号そのもの

	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
HARD Yaw	2.318×10^{-5}	2.412×10^{-6}	1.278×10^{-8}
HARD Pitch	1.427×10^{-5}	2.541×10^{-6}	1.522×10^{-8}
SOFT Yaw	6.300×10^{-5}	9.868×10^{-6}	8.930×10^{-8}
SOFT Pitch	4.748×10^{-5}	6.067×10^{-6}	6.718×10^{-8}

表 6.7: 係数適用前後のオフセット揺らぎの比較 (X arm)

	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
HARD Yaw	1.219×10^{-4}	1.011×10^{-5}	5.096×10^{-9}
HARD Pitch	1.535×10^{-4}	1.497×10^{-4}	7.644×10^{-8}
SOFT Yaw	1.988×10^{-4}	1.284×10^{-5}	1.286×10^{-5}
SOFT Pitch	3.760×10^{-4}	1.965×10^{-5}	9.805×10^{-5}

表 6.8: 係数適用前後のオフセット揺らぎの比較 (Y arm)

の揺らぎである。これを制御点のズレになおすと表 6.9, 6.10 のようになる。ここでの単位は $[\mu\text{rad}]$ である。

	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
HARD Yaw	4.760×10^{-4}	5.012×10^{-5}	2.631×10^{-7}
HARD Pitch	2.867×10^{-4}	3.015×10^{-3}	3.057×10^{-7}
SOFT Yaw	2.446×10^{-3}	3.870×10^{-4}	3.681×10^{-6}
SOFT Pitch	1.972×10^{-3}	2.578×10^{-4}	3.103×10^{-4}

表 6.9: 係数適用前後の制御点揺らぎの比較 (X arm)

具体的には鏡を $300[\text{nrad}]$ 傾けたデータとの差を取ることで信号強度の傾きを計算し、制御信号が $300[\text{nrad}]$ までの角度領域で線形であると仮定して制御信号が 0 となる制御点を算出している。表を見ると分かるように、制御点の揺らぎが QPD の場合最大 10 分の 1 程度、16 分割 PD の場合最大 10^3 分の 1 程度減少していることが分かる。信号強度が減少すれば、それに伴い制御点の揺らぎも増大するため、この重み付け係数の場合は信号強度がおおよそ保持されていることが分かる。また学習用データの場合と同様に評価関数の減少倍率も計算した。その

	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
HARD Yaw	2.983×10^{-3}	2.517×10^{-4}	1.258×10^{-7}
HARD Pitch	4.016×10^{-3}	3.947×10^{-3}	2.320×10^{-6}
SOFT Yaw	8.205×10^{-3}	5.004×10^{-4}	5.017×10^{-4}
SOFT Pitch	1.500×10^{-2}	8.430×10^{-4}	3.657×10^{-3}

表 6.10: 係数適用前後の制御点揺らぎの比較 (Y arm)

結果を表 6.11, 6.12 に示す。

	X arm	Y arm
HARD Yaw	9.273	12.02
HARD Pitch	5.416	1.025
SOFT Yaw	6.285	15.34
SOFT Pitch	7.714	19.05

表 6.11: QPD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (テストデータ)

	X arm	Y arm
HARD Yaw	59.57	292.8
HARD Pitch	27.51	171.2
SOFT Yaw	94.46	15.32
SOFT Pitch	47.91	3.834

表 6.12: 16 分割 PD における評価関数の重み付け前後の減少倍率 (テストデータ)

表を見ると学習用データの時と同程度の減少倍率を保っていることがわかる。学習用データとテストデータの測定点は異なるが、双方が同じ範囲で一様に測定を行ったため、このような結果になったと考えられる。

6.9.2 WFS 信号の比較

重み付け係数の変更により WFS 信号の線形性に影響がどの程度あるかの検証を行った。6.6 節で取得した WFS 信号のテストデータに重み付け係数を適用することで比較を行った。検証結果を図 6.70 - 6.77 に示す。

なお計算においてグラフの位置を定数を加えて調整している。グラフを見ると、WFS 信号が線形な角度領域は通常の QPD を使用した場合と同様に HARD モードで約 $2[\mu\text{rad}]$ 、SOFT モードで約 $4[\mu\text{rad}]$ であり、線型性は維持されていることが分かる。一方で、信号強度については通常の QPD と比べて最大約 15% 程のズレがあることが分かる。これは重み付け係数の決定にあたり、信号強度の保存の式 (5.18) や式 (5.19) は複屈折の存在しない理想的な

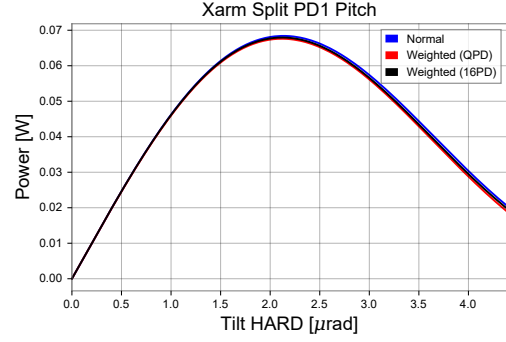
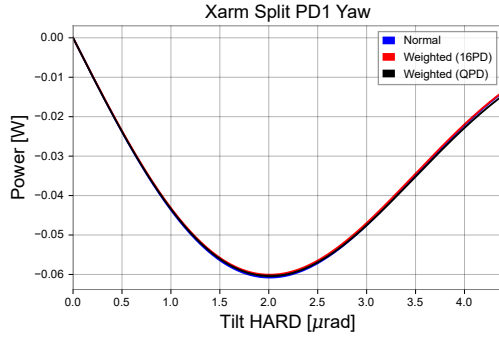


図 6.70: X arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Yaw)

図 6.71: X arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Pitch)

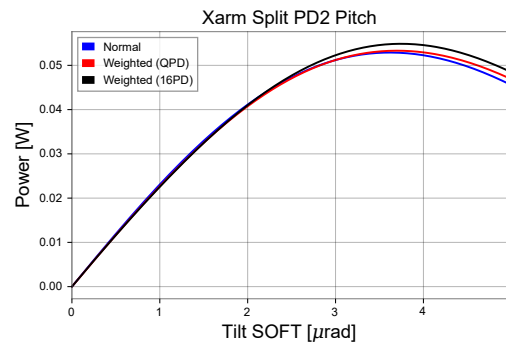
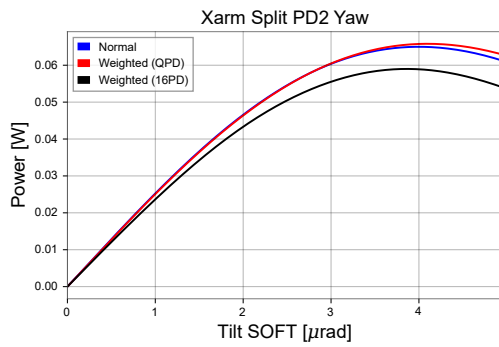


図 6.72: X arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Yaw)

図 6.73: X arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Pitch)

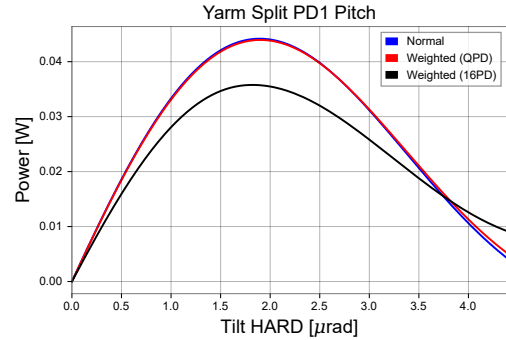
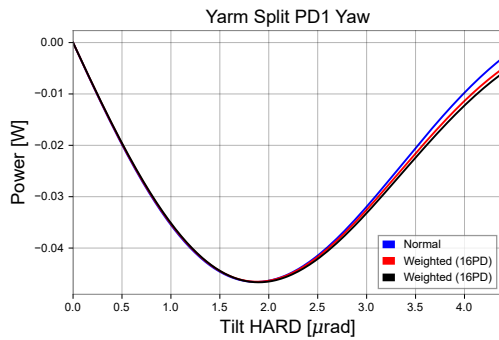


図 6.74: Y arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Yaw)

図 6.75: Y arm における HARD モードの WFS 信号の比較 (Pitch)

Hermite-Gaussian モードの 1 次モードを仮定したが、実際には複屈折による波面の歪みが存在するためであると考える。

6.9.3 ショット雑音の比較

6.7 節にて算出したショット雑音と、重み付け係数適用後のショット雑音を比較する。計算の流れは 6.7 節と変わらないが、5.2 節で議論したように、重み付け係数の変更に伴いショッ

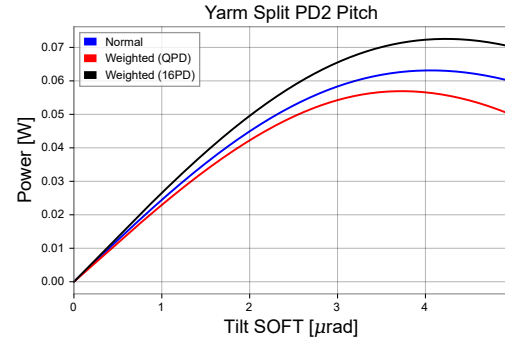
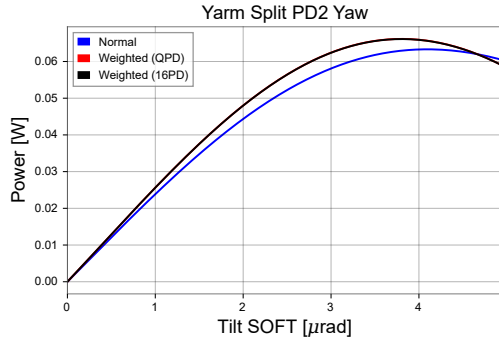


図 6.76: Y arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Yaw) 図 6.77: Y arm における SOFT モードの WFS 信号の比較 (Pitch)

ト雑音に変化するため、その影響を踏まえて計算を行う必要があり、式 (5.20) や式 (5.20) から $A_{\text{shot}}^{\text{QPD}}$, $A_{\text{shot}}^{16\text{PD}}$ 倍だけ変わる。各自由度でショット雑音の計算を行った結果を図 6.78 -6.81 に示す。

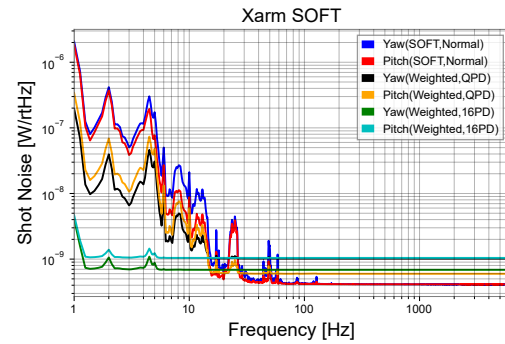
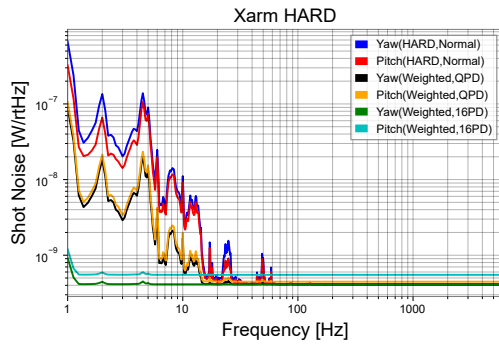


図 6.78: X arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (HARD モード) 図 6.79: X arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (SOFT モード)

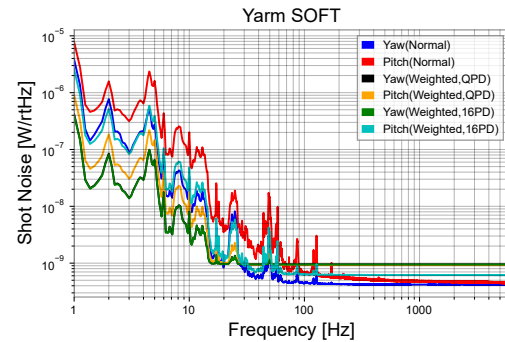
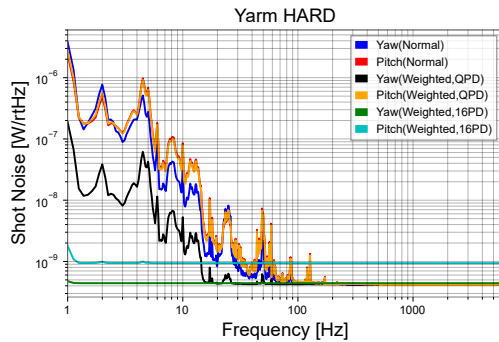


図 6.80: Y arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (HARD モード) 図 6.81: Y arm における重み付け前後のショット雑音の比較 (SOFT モード)

図を見ると全ての自由度において低周波数領域では雑音が低減されており、高周波数領域では雑音が増加していることが分かる。これは係数の変更により、複屈折によるオフセット揺ら

ぎの雑音が低減され、ショット雑音が増加したためである。すなわちこの手法は、高周波数領域のショット雑音を増加させる代わりに、低周波数側の雑音を低減させることができる手法だと言える。実際に 16 分割 PD を使用した場合は低周波数領域の雑音は QPD よりも抑えられるが、高周波数領域のショット雑音は QPD よりも大きい傾向にある。なお、グラフより雑音の大小が入れ替わる点は各自由度においておおよそ 10-30[Hz] 付近であることが分かる。KAGRA における WFS 法での制御に使用する周波数領域はおおよそ 10[Hz] より下の周波数領域であるため、制御に使用するローパスフィルタの性能次第で高周波数領域のショット雑音増加の影響は抑えられる。

6.9.4 感度曲線との比較

計算されたショット雑音を KAGRA の感度曲線と比較する。こちらも先程の計算と同様であるが、係数の変更により WFS 信号行列 D が変化する。重み付け係数を変更した場合も、 D は 6.6 節において取得した鏡の角度を傾けた際のデータから、傾けていないデータとの差の平均値を取ることで計算する。係数変更後のカップリング行列は QPD の場合、

$$D_{\text{weighted}}^{\text{XQPD}} = \begin{pmatrix} 481 & 1.62 & 0.0978 & -0.449 \\ 8.69 & 496 & -5.43 & -4.12 \\ -10.2 & 21.6 & 255 & -1.96 \\ 11.0 & -4.32 & 19.2 & 235 \end{pmatrix} \times 10^2 [\text{W/rad}] \quad (6.21)$$

$$D_{\text{weighted}}^{\text{YQPD}} = \begin{pmatrix} 402 & -22.7 & -0.412 & 17.5 \\ -6.50 & 379 & 104 & 36.5 \\ 111 & 153 & 257 & -22.4 \\ 145 & 137 & 23.6 & 233 \end{pmatrix} \times 10^2 [\text{W/rad}] \quad (6.22)$$

となり 16 分割 PD の場合、

$$D_{\text{weighted}}^{\text{X16PD}} = \begin{pmatrix} 486 & -8.79 & -4.81 & 4.07 \\ 17.6 & 498 & -8.02 & -3.45 \\ 6.40 & 12.4 & 243 & 5.45 \\ -9.16 & -16.7 & 15.6 & 235 \end{pmatrix} \times 10^2 [\text{W/rad}] \quad (6.23)$$

$$D_{\text{weighted}}^{\text{Y16PD}} = \begin{pmatrix} 405 & -24.0 & -5.07 & 22.6 \\ 66.1 & 329 & -58.2 & 90.3 \\ 111 & 153 & 257 & -22.2 \\ 66.4 & 25.0 & 12.9 & 268 \end{pmatrix} \times 10^2 [\text{W/rad}] \quad (6.24)$$

となった。これを見ると係数の変更により式 (6.22) のように HARD モードと SOFT モードの間でのカップリングが増大していることが分かる。今回重み付け係数の決定にあたり、HARD, SOFT 間のカップリングは Gouy 位相で分離していたため考慮せずにいた。そのためこのような増幅が起こったと考えられる。

WFS 行列と算出したショット雑音を用いて計算を行うと、図 6.82, 6.83 のようになる。

グラフを見ると分かるように、重み付け係数を使用した場合、3-20[Hz] 付近の雑音が低減されている。一方で、20[Hz] 以降の雑音はやや増幅されていることが分かる。また QPD と 16 分割 PD を比較して、3-20[Hz] 付近の雑音は 16 分割 PD を使用した場合の方がより低減され

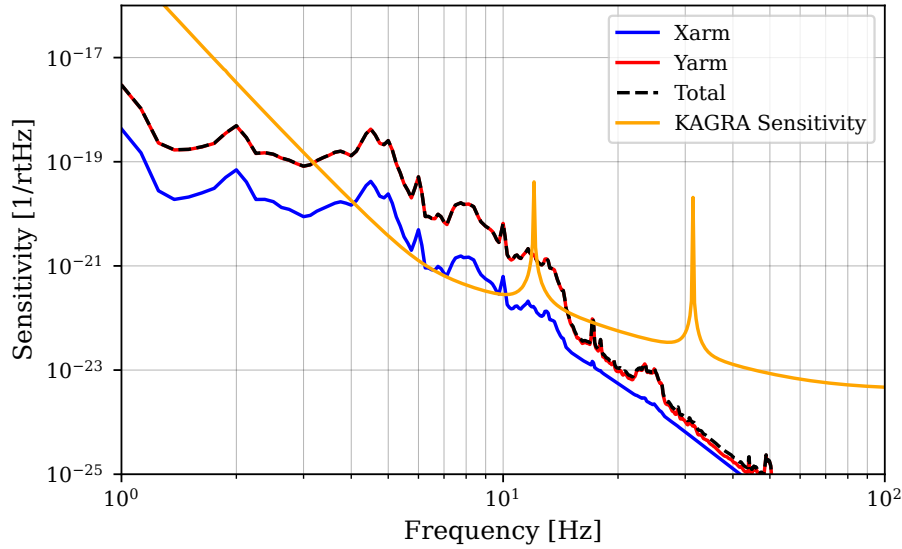


図 6.82: ショット雑音と KAGRA 感度曲線の比較 (QPD 重み付け後)

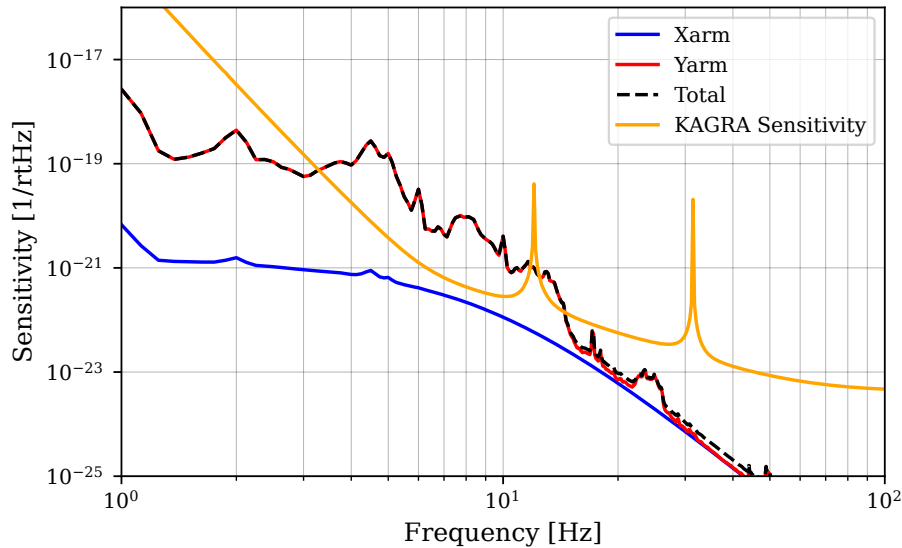


図 6.83: ショット雑音と KAGRA 感度曲線の比較 (16 分割 PD 重み付け後)

ている。一方で、20[Hz] 以降の雑音は 16 分割 PD の方が増幅されており、トレードオフの関係があることが分かる。

KAGRA の感度曲線と計算したショット雑音を足し合わせると図 6.84 のようになる。ここでは、DC 光によるショット雑音は KAGRA 感度に織り込み済みであるとして、その部分は差し引いて足し合わせている。またショット雑音の周波数軸と KAGRA 感度の周波数軸が異なるため、ショット雑音の値を調整している。具体的には、KAGRA 感度の周波数軸の値と最も近い前後の点の平均値を取っている。ショット雑音の周波数軸の最大値が KAGRA 感度の周波数軸の最大値よりも小さいため、最大値を超えた後は 0 を挿入している。

グラフを見ると、3-30[Hz] の領域で感度が悪化していることが分かる。また、重み付け係数を適用した場合の感度曲線は通常の QPD を使用した場合の感度曲線を大部分で下回ってお

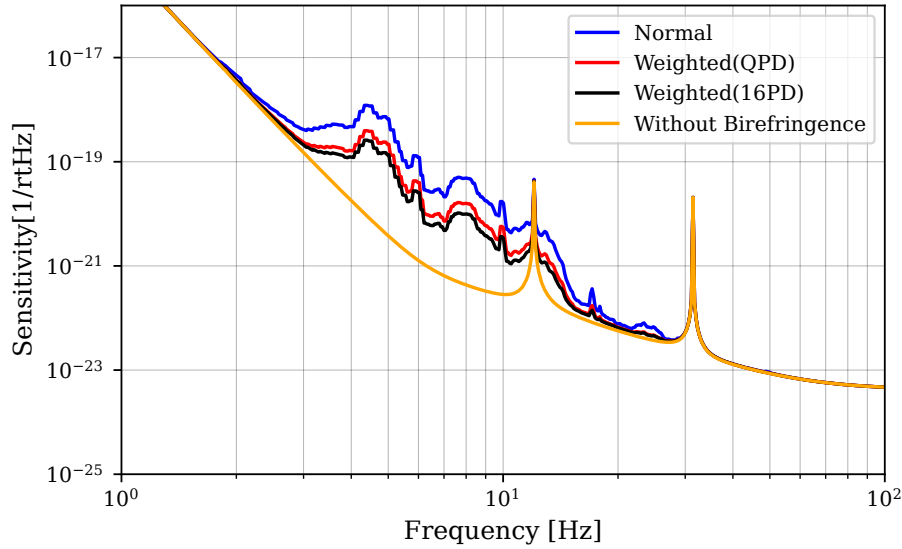


図 6.84: 複屈折の影響を考慮した KAGRA 感度曲線の比較

り、今回適用した手法が有効であるといえる。

6.9.5 インスパイラルレンジの比較

重み付け係数適用前後でインスパイラルレンジを比較する。インスパイラルレンジの理論については、5.2 節で議論している。計算にあたり、GWpy という Python のパッケージに含まれる inspiralrange 関数を使用している。今回の比較においては、1.4 太陽質量の中性子星連星合体と、30 及び 200 太陽質量同士のブラックホールの合体に対するインスパイラルレンジを X arm と Y arm のそれらの合計の場合で計算した。結果は表 6.13-6.15, のようになった。

Solar Mass	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)	No Birefringence
1.4	121.641	121.648	121.647	122.203
30	1139.70	1139.77	1139.76	1145.25
200	1230.84	1232.49	1232.33	1326.30

表 6.13: インスパイラルレンジの比較 (X arm のみ変更後)

Solar Mass	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)	No Birefringence
1.4	121.641	121.959	122.003	122.203
30	1139.70	1142.75	1143.19	1145.25
200	1230.84	1290.98	1298.09	1326.30

表 6.14: インスパイラルレンジの比較 (Y arm のみ変更後)

ここで単位は [Mpc] である。また、有効数字は 6 桁で表示している。参考のために、各重力波に対してインスパイラルレンジの上昇幅と上昇率を表 6.16-6.18 に示す。

Solar Mass	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)	No Birefringence
1.4	121.641	121.974	122.019	122.203
30	1139.70	1142.89	1143.34	1145.25
200	1230.84	1294.42	1301.68	1326.30

表 6.15: インスパイラルレンジの比較 (X arm, Y arm 変更後)

Solar Mass	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
1.4	6.70×10^{-3} (5.51×10^{-3} [%])	5.70×10^{-3} (4.68×10^{-3} [%])
30	6.22×10^{-2} (5.46×10^{-3} [%])	5.27×10^{-2} (4.62×10^{-3} [%])
200	1.65 (0.134[%])	1.50 (0.121[%])

表 6.16: インスパイラルレンジの上昇幅と上昇率 (X arm のみ変更後)

Solar Mass	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
1.4	0.318 (0.261[%])	0.362 (0.297[%])
30	3.05 (0.268[%])	3.49 (0.306[%])
200	60.1 (4.89[%])	67.3 (5.46[%])

表 6.17: インスパイラルレンジの上昇幅と上昇率 (Y arm のみ変更後)

Solar Mass	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
1.4	0.333 (0.274[%])	0.378 (0.311[%])
30	3.19 (0.280[%])	3.64 (0.319[%])
200	63.6 (5.17[%])	70.8 (5.76[%])

表 6.18: インスパイラルレンジの上昇幅と上昇率 (X arm, Y arm 変更後)

上昇幅の単位は [Mpc] である。表を見ると、X arm 及び Y arm のみの重み付け係数を変更した場合は、QPD, 16 分割 PD に関わらず全種類の重力波で感度が向上している。また、Y arm のみを変更した場合の方が上昇率が高いことが分かる。これらの係数を同時に適用した場合も、QPD, 16 分割 PD に関わらず全種類の重力波で感度が向上した。特に 16 分割 PD の方が上昇率が大きく、200 太陽質量のブラックホールでは 70.8[Mpc] (5.76[%]) の感度改善に成功した。

また各重力波で比較すると、物質の質量が増加するにつれて上昇率も増加している。これは、ISCO 周波数の低下により低周波数側の雑音低減の影響が大きくなったためであると考ええる。

実際に、200 太陽質量同士の衝突を考えた際の ISCO 周波数は式 (5.52) より、

$$\frac{c^3}{6^{3/2}\pi G M_{\text{tot}}} = 10.99 \cdots \simeq 11 [\text{Hz}] \quad (6.25)$$

であるため、雑音が大きく低減している領域と合致している。一方で、1.4 太陽質量の ISCO

周波数は同様の計算により 1.57[kHz] 程度であり、30 太陽質量の ISCO 周波数は 73.3[Hz] 程度とより高周波数領域の寄与が大きくなり、上昇率が低下したと考えられる。

6.10 課題と考察

重み付けを行った分割 PD を用いた制御法において更に感度を上げる上での課題とその解決方法について議論する。

当初重み付けを決定した際には雑音の低減が確認できたが、インスパイラルレンジを計算すると値が悪くなってしまうものが存在した。Y arm については、インスパイラルレンジを向上させることができたが、X arm の場合など当初想定した設定ではインスパイラルレンジを上げることができない、または上げられる幅が小さいといった課題がある。これは前述したように高周波数領域での雑音が増加したためであると考えられる。以下ではこの雑音を抑える方法について議論する。

6.10.1 ローパスフィルタの変更

現在のローパスフィルタには、0.4[Hz] に 1 次のポール、10[Hz] に 5 次のポールが存在するローパスフィルタが存在する。10[Hz] より高周波数の領域において追加でローパスフィルタをかければ、ショット雑音は更に減衰し、インスパイラルレンジが改善する可能性がある。ただし、ローパスフィルタの次数に応じて位相遅れは進むため、UGF 付近での位相余裕を持たせる必要がある。ここでは例として、20[Hz] に追加で 2 次のポールを入れることを考える。この時 10[Hz] に 5 次のポールが存在すると、3[Hz] では位相が -185° となり発振してしまう。そこで今回は 10[Hz] のポールの位置を 12[Hz] に変更した。こうする事で、3[Hz] で位相余裕 10.4° となり位相余裕が保たれる。この条件でインスパイラルレンジを計算すると表 6.19 -6.21 のようになった。

Solar Mass	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
1.4	121.694	121.699	121.699
30	1140.17	1140.23	1140.22
200	1241.83	1243.21	1243.07

表 6.19: ローパスフィルタ変更後のインスパイラルレンジの比較 (X arm のみ変更後)

Solar Mass	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
1.4	121.694	121.969	122.011
30	1140.17	1142.84	1143.25
200	1241.83	1293.60	1300.15

表 6.20: ローパスフィルタ変更後のインスパイラルレンジの比較 (Y arm のみ変更後)

Solar Mass	Normal	Weighted (QPD)	Weighted (16PD)
1.4	121.694	121.980	122.022
30	1140.17	1142.94	1143.36
200	1241.83	1296.04	1302.67

表 6.21: ローパスフィルタ変更後のインスパイラルレンジの比較 (X arm, Y arm 変更後)

表を見ると X arm を変更した場合における、QPD と 16 分割 PD のインスパイラルレンジの差が縮まったことが分かる。これは高周波数領域の雑音が低減することで、増加したショット雑音の差が縮まったためであると考ええる。しかし、位相余裕は小さくなり制御の安定性はローパスフィルタ変更前と比較して損なわれる。この手法を行う場合は高周波領域の雑音を落とすつつ、制御が不安定にならないようなフィルターの開発が課題となることが分かる。

6.10.2 周波数領域ごとの使い分け

前述したように、低周波数側の雑音に対しては重み付けを行った分割 PD が有効であり、高周波数側の雑音に対しては通常の分割 PD が有効である。すなわち低周波数側では重み付けを行った分割 PD を使用し、高周波数側では通常の分割 PD を使用すれば全周波数領域で雑音を低減できる。この手法を用いるためには、信号にある特定の周波数をポールとするローパスフィルタとハイパスフィルタをかけ、それぞれを通過した信号を重み付けを行った分割 PD と通常の分割 PD に入れて制御に返す必要がある。しかし、この場合ポールの周波数付近で雑音が増加する可能性があるなど、その他の雑音が増加する可能性がある。

6.10.3 評価関数の変更

今回の検証において使用した重み付け係数では感度改善効果を確認することができたが、当初設定していた重み付け係数では感度が改善しない自由度も存在した。これは振幅スペクトル密度の積分値と実際のインスパイラルレンジの計算値の違いや、カップリングの影響により生じたものであると考えられる。そのため、評価関数の見直しを行うことは有効である。評価関数としてはインスパイラルレンジと連動した評価関数を使用しさらに各自由度のカップリングを考慮して、重み付け係数の収束を行うという状況が理想的である。しかし、計算負荷や値の収束などの課題が考えられる。

第 7 章

まとめと結論

大型低温重力波望遠鏡である KAGRA では、鏡の素材として低温での熱的性質が良いサファイアが用いられるが、サファイアの非一様な複屈折性により将来的に KAGRA の感度を制限する可能性が考えられる。先行研究では、ビームジッターによるオフセットの変化を打ち消すためのパラメータの決定を行い、その効果を実証していた。本研究では、より光学系のパラメータを KAGRA のものと近付けて議論を行った。光学系のみだけでなく、非一様な複屈折による雑音を含む角度制御系全体の雑音に注目して、ショット雑音という形で KAGRA に与える影響とその低減方法の開発に取り組んだ。

5 章では、分割 PD からの信号を重み付けし、線形に組み合わせることで、複屈折による制御信号の揺らぎを打ち消す方法について理論的な側面から議論した。複屈折の揺らぎを ITM 上のビームジッター ($\delta x, \delta y$) に関する関数だと捉え、この関数の勾配を打ち消すように重み付けを決定すれば、複屈折の影響を低減できる。この手法のシミュレーションへの適用についても述べた。また重み付けの変更に伴う角度制御系内の他の雑音増加についても考え、DC 光のショット雑音や他自由度とのカップリングの増大などの可能性がある結論付けた。

6 章では、シミュレーションソフトを用いて上記手法の検証を行った。検証では主に複屈折による制御信号揺らぎの低減、KAGRA 感度曲線との比較、インスパイラルレンジの比較といった観点で議論した。信号揺らぎそのものに関しては各自由度で概ね大きく改善することに成功した。感度曲線との比較を行った際にも、3-20[Hz] 程度の周波数帯域で雑音が低減していることが確認できた。一方で、20[Hz] よりも高周波数の領域では 5 章でも議論したようにショット雑音が増加した。インスパイラルレンジを計算した結果、X arm, Y arm を変化させた場合のそれぞれで、検証に用いた全重力波についてインスパイラルレンジを上げることができた。16 分割 PD の場合、200 太陽質量同志のブラックホール合体によって発生する重力波は X arm において 0.121% (1.51[MPc]) 程度、Y arm において 5.46% (67.3[MPc]) 程度の感度改善に成功した。QPD を用いる場合も、同様のブラックホールに対し X arm において 0.134% (1.65[MPc]) 程度、Y arm において 4.89% (60.1[MPc]) 程度の感度改善に成功した。X arm, Y arm 共に重み付け係数を適用した状態でインスパイラルレンジを比較した場合には、16 分割 PD の場合には、200 太陽質量同志のブラックホールが衝突した際に発生する重力波に対して、インスパイラルレンジが最大 5.76% (70.8[MPc]) 程度改善した。また、30 太陽質量同志のブラックホールにより発生する重力波に対しては最大 0.364% (3.64[MPc]) 程度、

1.4 太陽質量同士の中性子星連星合体による重力波に対しては 0.311% (378[kPc]) 程度改善することができた。

今後は高周波数領域の雑音増加をいかに抑えるかが課題となる。具体的にはローパスフィルタの変更や周波数領域ごとの分割 PD の設定切り替え、評価関数の変更などが考えられるが、いずれにせよ理論的、技術的な課題が残るため考察の余地が残ると言える。

付録 A

Hermite-Gaussian モード

A.1 Gaussian ビームの導出

A.1.1 レーザー光が満たす方程式

まず、Maxwell 方程式から波動方程式を導出する。真空中の Maxwell 方程式は以下で与えられる:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

ここで、式 (A.3) に対して、両辺 ∇ の外積を取ると、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.5})$$

である。外積の公式より

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (\text{A.6})$$

である。また、式 (A.4) より

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\text{A.7})$$

であるから、式 (A.5) は、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.8})$$

となる。式 (A.8) の解の一つとして平面波解を考える。平面波解は以下で与えられる:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0(x, y, z, t) = E(x, y, z) \exp[i(\Omega t - kz + \phi)] \quad (\text{A.9})$$

ここでは、進行方向が z 軸方向であると仮定しているため、ベクトル表記を取り払っている。また ϕ は定数であり、平面波の位相成分である。式 (A.9) において、具体的な形式が明らかで

ない部分は $E(x, y, z)$ である。ここから、 E が満たす方程式を求める。式 (A.8) に式 (A.9) を代入すると、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E \exp[i(\Omega t - kz)] = 0 \quad (\text{A.10})$$

となる。この式をラプラシアン項と時間微分項に分けて計算する。まず、 ∇^2 がかかる項について、

$$\begin{aligned} \nabla^2 E \exp[i(\Omega t - kz)] &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E \exp[i(\Omega t - kz)] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E \exp[i(\Omega t - kz)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E \exp[i(\Omega t - kz)] \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E \exp[i(\Omega t - kz)] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \exp[i(\Omega t - kz)] + E \frac{\partial}{\partial z} \exp[i(\Omega t - kz)] \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E \exp[i(\Omega t - kz)] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \exp[i(\Omega t - kz)] - ikE \exp[i(\Omega t - kz)] \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E \exp[i(\Omega t - kz)] \\ &\quad + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \exp[i(\Omega t - kz)] - ik \frac{\partial E}{\partial z} \exp[i(\Omega t - kz)] \\ &\quad - ik \left(\frac{\partial E}{\partial z} \exp[i(\Omega t - kz)] - ikE \exp[i(\Omega t - kz)] \right) \\ &= \left(\nabla^2 E - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} - k^2 E \right) \exp[i(\Omega t - kz)] \end{aligned}$$

となる。また時間微分がかかる項について、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E \exp[i(\Omega t - kz)] = -\frac{\Omega^2}{c^2} E \exp[i(\Omega t - kz)]$$

となる。以上より、式 (A.9) は

$$\left(\nabla^2 - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) E(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.11})$$

となる。なお、 $\exp[i(\Omega t - kz)]$ は落としている。ここで近軸近似を課すことにより、 $\partial^2 E / \partial z^2 \simeq 0$ となる。これにより、最終的な方程式は以下ようになる：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) E(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.12})$$

A.1.2 波動方程式の解

本章では、フーリエ変換を以下のように定義する：

$$\tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy E(x, y, z) \exp(2\pi i \nu_x x + 2\pi i \nu_y y) \quad (\text{A.13})$$

また、逆フーリエ変換を以下のように定義する:

$$\tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y \tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) \exp(-2\pi i \nu_x x - 2\pi i \nu_y y) \quad (\text{A.14})$$

式 (A.12) において、式 (A.13) を用いて両辺を x, y についてフーリエ変換を行うと、

$$\left(-(2\pi\nu_x)^2 - (2\pi\nu_y)^2 - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) = 0 \quad (\text{A.15})$$

となる。これを $\partial \tilde{E} / \partial z$ の項について解くと、

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = -\frac{(2\pi\nu_x)^2 + (2\pi\nu_y)^2}{2ik} \tilde{E} \quad (\text{A.16})$$

となる。この微分方程式を解くと、

$$\tilde{E} = A(\nu_x, \nu_y) \exp \left[-\frac{(2\pi\nu_x)^2 + (2\pi\nu_y)^2}{2ik} (z + C(\nu_x, \nu_y)) \right] \quad (\text{A.17})$$

となる。なお、実際には $C(\nu_x, \nu_y)$ の部分を明示せず、 $A(\nu_x, \nu_y)$ と合わせて表記してもよいが、今回は今後の議論のため二つを分けて表示している。また今回は Gaussian ビームの基本モードについて考えるため、 $A(\nu_x, \nu_y), C(\nu_x, \nu_y)$ は (ν_x, ν_y) に依存しない定数として考える。すなわち、

$$\tilde{E} = A \exp \left[-\frac{(2\pi\nu_x)^2 + (2\pi\nu_y)^2}{2ik} (z + C) \right] \quad (\text{A.18})$$

である。ここで、

$$C = -z_0 + iz_R \quad (\text{A.19})$$

と定義する。定義された文字の意味については で議論する。

この時、 $|\tilde{E}|^2$ の (ν_x, ν_y) に関する積分が 1 になるように A を決定する。したがって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y |\tilde{E}|^2 = 1$$

となればよい。以下で具体的に計算していく。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y |\tilde{E}|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y |A|^2 \exp \left[-\{(2\pi\nu_x)^2 + (2\pi\nu_y)^2\} \times \text{Re} \left[\frac{C}{ik} \right] \right]$$

であるから、

$$\text{Re} \left[\frac{C}{ik} \right] = \text{Re} \left[\frac{-z_0 + iz_R}{ik} \right] = \frac{z_R}{k}$$

より、 $z_R > 0$ を仮定すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y |\tilde{E}|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y |A|^2 \exp \left[-\{(2\pi\nu_x)^2 + (2\pi\nu_y)^2\} \times \frac{z_R}{k} \right] \\ &= |A|^2 \cdot \frac{\pi}{(2\pi)^2 \frac{z_R}{k}} \\ &= |A|^2 \cdot \frac{k}{4\pi z_R} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$|A|^2 \cdot \frac{k}{4\pi z_R} = 1$$

となればよいので、

$$A = \sqrt{\frac{4\pi z_R}{k}} \quad (\text{A.20})$$

となる。

ここから、式 (A.18) を逆フーリエ変換していく。式 (A.14) より、

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y A \exp \left[-\frac{(2\pi\nu_x)^2 + (2\pi\nu_y)^2}{2ik} (z + C) \right] \\ \times \exp(-2\pi i\nu_x x - 2\pi i\nu_y y)$$

となる。ここで、

$$\alpha = \frac{(2\pi)^2(z + C)}{2ik} = \frac{(2\pi)^2(z - z_0 + iz_R)}{2ik} \quad (\text{A.21})$$

と置くと、

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y A \exp [-\alpha\nu_x^2 - \alpha\nu_y^2 - 2\pi i\nu_x x - 2\pi i\nu_y y] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y A \exp \left[-\alpha \left(\nu_x^2 + \frac{2\pi i}{\alpha} \nu_x x \right) - \alpha \left(\nu_y^2 + \frac{2\pi i}{\alpha} \nu_y y \right) \right] \\ \times \exp \left[-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha} - \frac{\pi^2 y^2}{\alpha} \right] \\ = A \cdot \frac{\pi}{\alpha} \cdot \exp \left[-\frac{\pi^2}{\alpha} (x^2 + y^2) \right]$$

となるので、

$$E(x, y, z) = \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \frac{iz_R}{z - z_0 + iz_R} \exp \left[-\frac{ik}{z - z_0 + iz_R} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \quad (\text{A.22})$$

となる。式 (A.22) が、Gaussian ビームの基本モードである。

A.1.3 ビームパラメータの導入

式 (A.22) において

$$q(z) = z - z_0 + iz_R \quad (\text{A.23})$$

と定義する。また、実関数 $R(z), S(z)$ を

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{1}{iS(z)} \quad (\text{A.24})$$

と定義する。そうすると、 $R(z), S(z)$ は

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right] \quad (\text{A.25})$$

$$S(z) = \frac{(z - z_0)^2 + z_R^2}{z_R} \quad (\text{A.26})$$

となる。ここで $S(z)$ を用いて、

$$\frac{1}{w^2(z)} = \frac{k}{2S(z)} \quad (\text{A.27})$$

と定義する。今 z_R は正の定数であるから適当な w_0 を用いて、

$$z_R = \frac{k w_0^2}{2} \quad (\text{A.28})$$

と定義すると、

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} \quad (\text{A.29})$$

となる。また、

$$\eta(z) = \arctan \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right) \quad (\text{A.30})$$

と定義する。これらを用いて式 (A.22) を変形すると、

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \frac{iz_R}{z - z_0 + iz_R} \exp \left[-\frac{ik}{z - z_0 + iz_R} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \frac{z_R \{i(z - z_0) + z_R\}}{(z - z_0)^2 + z_R^2} \exp \left[-\frac{ik}{z - z_0 + iz_R} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \frac{z_R \exp[i\eta(z)]}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_R^2}} \exp \left[-\frac{ik}{z - z_0 + iz_R} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \frac{z_R}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_R^2}} \exp \left[-\left(\frac{ik}{R(z)} + \frac{k}{S(z)} \right) \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} + \eta(z) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[-\left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + \eta(z) \right] \end{aligned}$$

となる。したがってまとめると、

$$E(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[-\left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + \eta(z) \right] \quad (\text{A.31})$$

となる。それぞれのパラメータの意味については、 で述べる。

A.2 Hermite-Gaussian モードの導出

A.2.1 変数変換

式 (A.12) における変数は x, y, z であるが、Hermite-Gaussian モードを導出するにあたり、この変数を新しい変数 ξ, ζ, η 置き換える必要がある。各変数は、

$$\xi = \sqrt{\frac{k z_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2}} x, \quad \zeta = \sqrt{\frac{k z_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2}} y, \quad \eta = \arctan \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right) \quad (\text{A.32})$$

のように変換する。逆変換は、

$$x = \sqrt{\frac{z_R}{k}} \frac{\xi}{\cos \eta}, \quad y = \sqrt{\frac{z_R}{k}} \frac{\zeta}{\cos \eta}, \quad z = z_R \tan \eta + z_0 \quad (\text{A.33})$$

である。この時、式 (A.12) を ξ, ζ, η を用いて変形する。まず x の偏微分を変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \sqrt{\frac{k z_R}{(z - z_0)^2 + z_R}} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ &= \sqrt{\frac{k}{z_R}} \cos \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \sqrt{\frac{k}{z_R}} \cos \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\frac{k}{z_R}} \cos \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{k}{z_R} \cos^2 \eta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

である。同様にして、

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{k}{z_R} \cos^2 \eta \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \quad (\text{A.36})$$

である。また、

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{\frac{k z_R}{(z - z_0)^2 + z_R}} \right) &= - \frac{\sqrt{k z_R} z}{\{(z - z_0)^2 + z_R\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \frac{\sqrt{k z_R} \tan \eta}{(1 + \tan^2 \eta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial z} &= - \frac{\sqrt{k z_R} \tan \eta}{(1 + \tan^2 \eta)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{z_R}{k}} \frac{\xi}{\cos \eta} \\ &= - \frac{\xi}{z_R} \sin \eta \cos \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= - \frac{\sqrt{k z_R} \tan \eta}{(1 + \tan^2 \eta)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{z_R}{k}} \frac{\zeta}{\cos \eta} \\ &= - \frac{\zeta}{z_R} \sin \eta \cos \eta \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \arctan \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{z_R}}{\left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{z_R} \cos^2 \eta\end{aligned}$$

である。以上より、式 (A.12) は以下のように書き換えることができる:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2i \tan \eta \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) - 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) E(\xi, \zeta, \eta) = 0 \quad (\text{A.37})$$

また式 (A.22) も ξ, ζ, η により書き換えると

$$\begin{aligned}E(x, y, z) &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \frac{iz_R}{z - z_0 + iz_R} \exp \left[-\frac{ik}{z - z_0 + iz_R} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \frac{i}{i + \tan \eta} \exp \left[-\frac{ik}{z_R(i + \tan \eta)} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \cos^2 \eta (1 + i \tan \eta) \exp \left[-(1 + i \tan \eta) \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{k}{\pi z_R}} \cos \eta \cdot e^{i\eta} \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right]\end{aligned}$$

である。 $\sqrt{k/\pi z_R}$ は今定数であるが、 ξ, ζ, η の関数だとしても同様に解となる。これを $F(\xi, \zeta, \eta)$ と置くと、

$$E(\xi, \zeta, \eta) = F(\xi, \zeta, \eta) \cos \eta \cdot e^{i\eta} \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \quad (\text{A.38})$$

と書き換えることができる。

A.2.2 $F(\xi, \zeta, \eta)$ が満たす方程式

式 (A.38) において、非自明な部分は $F(\xi, \zeta, \eta)$ のみである。そこで、式 (A.37) を $F(\xi, \zeta, \eta)$ が満たす方程式に書き換える。まず、 ξ について、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi, \zeta, \eta) \cos \eta \cdot e^{i\eta} \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] &= \left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} - e^{2i\eta} \xi F \right) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right]\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} E(\xi, \zeta, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} - e^{2i\eta} \xi F \right) \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \right] \\
&= \left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - e^{2i\eta} F - e^{2i\eta} \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \\
&\quad + \left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} - e^{2i\eta} \xi F \right) \times \left(-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \xi \right) \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \\
&= \left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - e^{2i\eta} F - 2e^{2i\eta} \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{e^{3i\eta}}{\cos \eta} \xi^2 F \right) \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right]
\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2i \tan \eta \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) E(\xi, \zeta, \eta) &= \left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - e^{2i\eta} F - 2e^{2i\eta} \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{e^{3i\eta}}{\cos \eta} \xi^2 F \right. \\
&\quad \left. + 2i \tan \eta \cos \eta \cdot e^{i\eta} \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} - 2i \tan \eta \cdot e^{2i\eta} \xi^2 F \right) \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right]
\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
2i \tan \eta \cos \eta \cdot e^{i\eta} - 2e^{2i\eta} &= 2i \sin \eta \cdot e^{i\eta} - 2e^{2i\eta} \\
&= (e^{i\eta} - e^{-i\eta}) - 2e^{2i\eta} \\
&= -(e^{2i\eta} + 1) \\
&= -2e^{i\eta} \cos \eta
\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
\frac{e^{3i\eta}}{\cos \eta} - 2i \tan \eta \cdot e^{2i\eta} &= \frac{e^{3i\eta}}{\cos \eta} - \frac{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}{\cos \eta} e^{2i\eta} \\
&= \frac{e^{i\eta}}{\cos \eta}
\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2i \tan \eta \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) E &= \left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - 2e^{2i\eta} \cos \eta \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \xi^2 F - e^{2i\eta} F \right) \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \tag{A.39}
\end{aligned}$$

である。同様にして、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2i \tan \eta \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) E &= \left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - 2e^{2i\eta} \cos \eta \zeta \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \zeta^2 F - e^{2i\eta} F \right) \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \tag{A.40}
\end{aligned}$$

となる。次に η について、

$$\begin{aligned} -2i \frac{\partial}{\partial \eta} E &= -2i \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\cos \eta \cdot e^{i\eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} - e^{2i\eta} \xi F \right) \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right] \right] \\ &= -2i \frac{\partial F}{\partial \eta} \cos \eta \cdot e^{i\eta} + 2iF \sin \eta \cdot e^{i\eta} - 2iF \cos \eta \cdot i e^{i\eta} \\ &\quad - 2iF \cos \eta \cdot e^{i\eta} \left(\frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right) \cdot \left(-\frac{i e^{i\eta} \cos \eta + e^{i\eta} \sin \eta}{\cos^2 \eta} \right) \end{aligned}$$

である。第二項及び第三項について、

$$\begin{aligned} 2iF \sin \eta \cdot e^{i\eta} - 2iF \cos \eta \cdot i e^{i\eta} &= 2F e^{i\eta} (\cos \eta + i \sin \eta) \\ &= 2F e^{2i\eta} \end{aligned}$$

である。また第四項について、

$$\begin{aligned} -2iF \cos \eta \cdot e^{i\eta} \left(\frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} \right) \cdot \left(-\frac{i e^{i\eta} \cos \eta + e^{i\eta} \sin \eta}{\cos^2 \eta} \right) &= -F e^{2i\eta} (\xi^2 + \zeta^2) \frac{\cos \eta - i \sin \eta}{\cos \eta} \\ &= -F \frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} (\xi^2 + \zeta^2) \end{aligned}$$

となるので、

$$-2i \frac{\partial}{\partial \eta} E = -2i \frac{\partial F}{\partial \eta} \cos \eta \cdot e^{i\eta} + 2F e^{2i\eta} - F \frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} (\xi^2 + \zeta^2) \quad (\text{A.41})$$

である。式 (A.39)、式 (A.40)、式 (A.41) を足し合わせるにより、 $F(\xi, \zeta, \eta)$ の満たす方程式として、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - 2i \frac{\partial}{\partial \eta} \right] F(\xi, \zeta, \eta) = 0 \quad (\text{A.42})$$

が得られる。

A.2.3 変数変換後の方程式の解

式 (A.42) を解くことで、具体的な Hermite-Gaussian モードの表式を導出していく。

$F(\xi, \zeta, \eta) = B(\xi)D(\zeta)G(\eta)$ とすると、

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - 2i \frac{\partial}{\partial \eta} \right] B(\xi)D(\zeta)G(\eta) = 0 \\ &D(\zeta)G(\eta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) B(\xi) + B(\xi)G(\eta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) D(\zeta) \\ &\quad - 2iB(\xi)D(\zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta) = 0 \\ &\therefore \frac{1}{B(\xi)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) B(\xi) + \frac{1}{D(\zeta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) D(\zeta) - 2i \frac{1}{G(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta) = 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{B(\xi)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) B(\xi) = -2m \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{1}{D(\zeta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) D(\zeta) = -2n \quad (\text{A.44})$$

$$-2i \frac{1}{G(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta) = 2(m+n) \quad (\text{A.45})$$

と置くことができる。整理すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + 2m \right) B(\xi) = 0 \quad (\text{A.46})$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + 2n \right) D(\zeta) = 0 \quad (\text{A.47})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - i(m+n) \right) G(\eta) = 0 \quad (\text{A.48})$$

となる。式 (A.46) 及び式 (A.47) の解は Hermite 多項式である。また式 (A.48) の解は、

$$G(\eta) = e^{i(m+n)\eta} \quad (\text{A.49})$$

であるから、Hermite 多項式を $H_m(\xi), H_n(\zeta)$ とすると、

$$F(\xi, \zeta, \eta) = N H_m(\xi) H_n(\zeta) e^{i(m+n)\eta} \quad (\text{A.50})$$

となる。ここで N は規格化定数である。 N を、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy |E(x, y, z)|^2 = 1 \quad (\text{A.51})$$

となるように決定する。式 (A.32) より、

$$d\xi = \sqrt{\frac{kz_R}{(z - z_0)^2 + z_R}} dx = \frac{\sqrt{2}}{w(z)} dx \quad (\text{A.52})$$

$$d\zeta = \sqrt{\frac{kz_R}{(z - z_0)^2 + z_R}} dy = \frac{\sqrt{2}}{w(z)} dy \quad (\text{A.53})$$

であるから、

$$dxdy = \frac{w^2(z)}{2} d\xi d\zeta \quad (\text{A.54})$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy |E(x, y, z)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{w^2(z)}{2} |E(\xi, \zeta, \eta)|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{w^2(z)}{2} F^2(\xi, \zeta, \eta) \cos^2 \eta \cdot \exp [-(\xi^2 + \zeta^2)] \\ &= \frac{w^2(z)}{2} \cos^2 \eta \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta H_m^2(\xi) H_n^2(\zeta) \cdot \exp [-(\xi^2 + \zeta^2)] \\ &= \frac{w^2(z)}{2} \cos^2 \eta D^2 2^n n! 2^m m! \pi \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\frac{w^2(z)}{2} \cos^2 \eta \, N^2 2^n n! 2^m m! \pi = 1 \quad (\text{A.55})$$

$$\therefore N = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \cdot \frac{1}{\cos \eta} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^n n! 2^m m!}} \quad (\text{A.56})$$

である。以上より、

$$E(\xi, \zeta, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \sqrt{\frac{1}{2^n n! 2^m m!}} H_m(\xi) H_n(\zeta) \exp \left[-\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} \cdot \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2} + i(1+m+n)\eta \right] \quad (\text{A.57})$$

である。 x, y, z に変換すると、

$$E(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \sqrt{\frac{1}{2^n n! 2^m m!}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ \times \exp \left[-\left(\frac{1}{w^2(z)} + i \frac{k}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i(1+m+n)\eta(z) \right] \quad (\text{A.58})$$

となる。式 (A.58) と式 (A.9) より Hermite-Gaussian モードの表式は、

$$E_0(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \sqrt{\frac{1}{2^n n! 2^m m!}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ \times \exp \left[-ikz - i\phi - \left(\frac{1}{w^2(z)} + i \frac{k}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) \right] \\ \times \exp [i(1+m+n)\eta(z)] \quad (\text{A.59})$$

である。ここでは、時間発展する部分は落としている。式 (A.59) を見ると、 ikz は光の進行に対する位相の変化を示していることがわかる。ここでは位相の基準を $z = z_0$ とする。そのためには $\phi = -kz_0$ と選べばよく、

$$E_0(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \sqrt{\frac{1}{2^n n! 2^m m!}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ \times \exp \left[-ik(z - z_0) - \left(\frac{1}{w^2(z)} + i \frac{k}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) \right] \\ \times \exp [i(1+m+n)\eta(z)] \quad (\text{A.60})$$

となる。式 (A.60) が、最終的な Hermite-Gaussian モードの表式である。

付録 B

シミュレーションに使用したコマンド外のシステム

B.1 Match-Zhender 干渉計

Match-Zhender 干渉計とは入射光を二つに分け異なる光路を通過させ別のビームスプリッタに戻すシステムである。今回のシミュレーションでは、図 B.1 のような三個の Match-Zhender 干渉計を組み合わせた Triple Match-Zhender 干渉計を FINESSE3 内で作成することで複屈折を再現した。図において、 $r^2 = t^2 = 0.5$ のビームスプリッタを組み込んでいる。

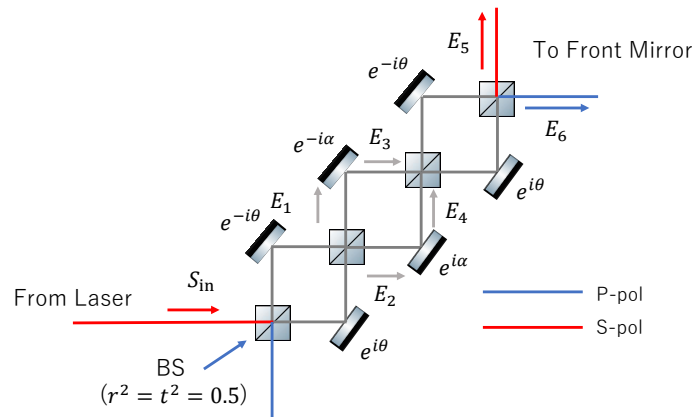


図 B.1: Triple Match-Zhender 干渉計のイメージ図

また、複屈折を示すパラメータである (θ, α) を図 B.1 に示すように組み込む。以下にその原理について述べる。

この時、入射光 S_{in} が矢印の方向から入射するとするとき、 E_1, E_2 は以下ようになる：

$$E_1 = (r^2 e^{-i\theta} - t^2 e^{i\theta}) S_{\text{in}} = -i \sin \theta S_{\text{in}} \quad (\text{B.1})$$

$$E_2 = (irte^{-i\theta} + irte^{i\theta}) S_{\text{in}} = i \cos \theta S_{\text{in}} \quad (\text{B.2})$$

計算において、ビームスプリッタの反射においては r を掛け合わせ、透過においては it を掛け合わせている。ミラーマップの鏡を反射する場合、その鏡に張り付けられた分布の位相分だけ波面の位相が変化する。そのため、計算においてその位相変化分を掛け合わせている。その後 α のミラーマップが張り付けられた鏡に反射することで E_3, E_4 は以下ようになる:

$$E_3 = -i \sin \theta e^{-i\alpha} S_{\text{in}} \quad (\text{B.3})$$

$$E_4 = i \cos \theta e^{i\alpha} S_{\text{in}} \quad (\text{B.4})$$

その後同様の形状の Match-Zhender 干渉計を通過するため最終的な出力である E_5, E_6 は以下ようになる:

$$\begin{aligned} E_5 &= (r^2 e^{-i\theta} - t^2 e^{i\theta}) E_3 + (irte^{-i\theta} + irte^{i\theta}) E_4 \\ &= -i \sin \theta E_3 + i \cos \theta E_4 \\ &= -(\cos^2 \theta e^{i\alpha} + \sin^2 \theta e^{-i\alpha}) S_{\text{in}} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} E_6 &= (irte^{-i\theta} + irte^{i\theta}) E_3 + (r^2 e^{-i\theta} - t^2 e^{i\theta}) E_4 \\ &= i \cos \theta E_3 + i \sin \theta E_4 \\ &= -i \sin 2\theta \sin \alpha S_{\text{in}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

式を見ると分かるように、式 (4.7) における符号の違いを除いて一致していることが分かる。また E_5 は S 偏光を表現しており E_6 は P 偏光を表現している。したがって、 E_5 の出力には S 偏光用の共振器をつなぎ E_6 の出力には P 偏光用の共振器をつないでいる。

B.2 分割 PD の再現

B.2.1 信号の復調

RF 帯の信号が取得できる分割 PD の再現するために、本論文では FINESSE3 における fcam というコマンドを使用した。このコマンドは、各点における電場の振幅と位相情報を複素数で表示するコマンドである。また fcam は検出する光の周波数を指定することができるため、キャリア光とサイドバンド光を個別に取り出すことができる。それはすなわち、式 (3.53) における各項の係数を取り出すことに等しい。つまり fcam で検出可能なキャリア光を C_r 、アッパーサイドバンドを S_u 、ローアサイドバンドを S_l とすると、

$$C_r = E_0 r(\Omega) J_0(m), S_u = E_0 i r(\Omega + \omega_m) J_1(m), E_0 i r(\Omega - \omega_m) J_1(m) \quad (\text{B.7})$$

となる。この時、式 (3.53) は、

$$E_r(t) = C_r e^{i\Omega t} + S_u e^{i(\Omega + \omega_m)t} + S_l e^{i(\Omega - \omega_m)t} \quad (\text{B.8})$$

となる。よって信号強度は、

$$|E_r|^2 = |C_r|^2 + |S_u|^2 + |S_l|^2 + 2\text{Re} [S_u C_r^* e^{i\omega_m t}] + 2\text{Re} [S_l^* C_r e^{i\omega_m t}] + f(e^{2i\omega_m t}) \quad (\text{B.9})$$

となる。第四項と第五項を計算すると、

$$2\text{Re}[S_u C_r^* e^{j\omega_m t}] + 2\text{Re}[S_l^* C_r e^{j\omega_m t}] = 2\text{Re}[S_u C_r^* + S_l^* C_r] \cos \omega_m t - 2\text{Im}[S_u C_r^* + S_l^* C_r] \sin \omega_m t \quad (\text{B.10})$$

となる。これを $\cos(\omega_m t + \alpha)$ で復調すると、最終的な信号 V_{demod} は、

$$V_{\text{demod}} = \text{Re}[S_u C_r^* + S_l^* C_r] \cos \alpha + \text{Im}[S_u C_r^* + S_l^* C_r] \sin \alpha \quad (\text{B.11})$$

となる。式 (B.11) を用いて信号処理を行うことで、信号の復調を行うことができる。

B.2.2 レーザー光強度の積分

復調をすることで得られる信号の単位は強度 $[\text{W}/\text{m}^2]$ であるから、レーザーパワーに直すためにはレーザー光強度について積分を行う必要がある。本論文では fcam の測定点数と測定範囲の大きさで決まる微小面積を信号強度に掛け算し、それを足し合わせることでパワーへと変換した。具体的には観測点数を $N \times N$ 、一辺 $2L_{\text{image}}$ で測定を行う際には、各点のレーザー光強度を $I(x_i, y_i)$ ($i = 1, \dots, N$) としたときに、

$$P_{\text{demod}} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N I(x_k, y_j) \left(\frac{2L_{\text{image}}}{N-1} \right)^2 \quad (\text{B.12})$$

のように計算した。なお分割 PD の個別の信号を取り出す場合には和を取る範囲を変更すればよい。

今回のシミュレーションでの分割数と測定範囲は具体的には、

$$L_{\text{image}} = 0.02661[\text{m}], N = 800 \quad (\text{B.13})$$

とした。ここでは有効数字 4 桁で表示している。 L_{image} は図 6.1 の分割 PD1,2 地点でのビームサイズである、

$$w = 0.004435[\text{m}] \quad (\text{B.14})$$

の 6 倍である。

B.3 共振器の長さ制御

鏡の角度を HARD モードや SOFT モードに傾けた場合、それに伴って共振器長が変化するため、同時に共振器長の制御を行う必要がある。本論文では、FINESSE3 における pseudolock というコマンドを使用した。このコマンドは共振器の状態に応じて、共振器が共振状態となる鏡の位相を出力するコマンドである。本論文では、事前に pseudolock コマンドで各角度に対応した位相を調べ、それを鏡に当てはめることで制御を行った。適切な位相を調べる中で、pseudolock が出力する値が発振することがあるため、前の値との差を基準値としてデータのクリーニングを行った。例として、HARD モードに傾けた際のクリーニング前後の鏡の傾きと位相の関係を図 B.2, B.3 に示す。ほとんどの発振を取り除くことができていることが分かる。

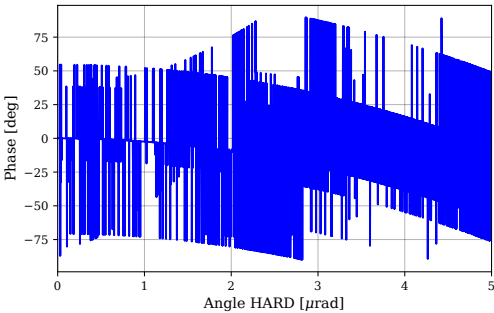


図 B.2: クリーニング前の共振器の傾きと位相

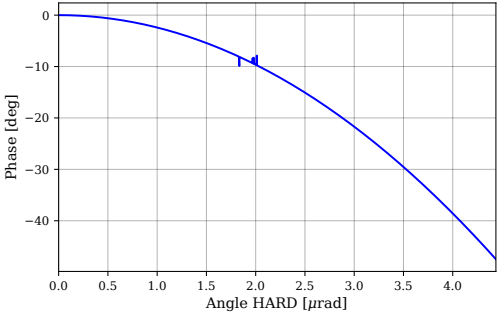


図 B.3: クリーニング後の共振器の傾きと位相
の関係

付録 C

ソースコード

ここでは、シミュレーションや計算において使用したソースコードを示す。計算の実行にあたり、コードの一部を書き換えて使用したものもあるため重要なものについてはそれについても詳しく説明する。

ソースコード C.1: 光学系のセットアップ

```

1  # Demodulate Phase (Xarm)
2  demod_optimized_HARD_yaw=-1.8399999999999999
3  demod_optimized_SOFT_yaw=-1.8399999999999999
4  # Gouy Phase (Xarm)
5  gouy_optimized_HARD_yaw=46.728
6  gouy_SOFT=135.28799999999998
7  code_base = f"""
8  #kat
9  variable f1 16.881M
10 variable PR_angle 0.686
11 variable PRM_phi -16
12 variable TMloss 40e-6 # Loss for each TM
13 variable T_ETM 5e-6 # Transmission of ETM
14
15 variable PRM_tilt 0
16 variable PR2_tilt 0
17 variable PR3_tilt 0
18 variable HARD 0 # Change HARD Mode Tilt
19 variable SOFT 0 # Change SOFT Mode Tilt
20
21 variable PHI_demod 0
22 variable PHI_Sarm 0 # Change cavity length
23 variable PHI_demod_HARD {demod_optimized_HARD_yaw}
24 variable PHI_demod_SOFT {demod_optimized_SOFT_yaw}
25
26 variable gouy_x_1 {gouy_optimized_HARD_yaw}
27 variable gouy_x_2 {gouy_SOFT}
28
29 # ===== Input optics =====
30 l i1 P=1
31 mod eo1 f1 0.3
32 link(i1, eo1, InputIsolator.p1)
33
34 # Add a directional beamsplitter (Faraday Isolator)

```

```

35 # One way beam propagation: p1->p3, p3->p4, p4->p2, p2->p1
36 dbb InputIsolator
37 s s_in InputIsolator.p3 PRMs.p1
38
39 ## ===== S-pol PRC =====
40 m PRMs T=1 L=0 phi=PRM_phi xbeta=PRM_tilt
41 s sLpr1s PRMs.p2 PR2s.p2 L=14.7615
42 bs PR2s T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=-3.0764 xbeta=PR2_tilt
43 s sLpr2s PR2s.p1 PR3s.p3 L=11.0661
44 bs PR3s T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=-24.9165 xbeta=PR3_tilt
45 s sLpr3s PR3s.p4 bs1.p1 L=15.7638+25-0.15*1.754
46
47 ## ===== P-pol PRC =====
48 s sLpr3p bsp.p1 PR3p.p1 L=15.7638+25-0.15*1.754
49 bs PR3p T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=24.9165 xbeta=-PR3_tilt
50 s sLpr2p PR3p.p2 PR2p.p2 L=11.0661
51 bs PR2p T=0 L=0 alpha=PR_angle Rc=-3.0764 xbeta=-PR2_tilt
52 s sLpr1p PR2p.p1 PRMp.p1 L=14.7615
53 m PRMp T=1 L=0 phi=-PRM_phi xbeta=-PRM_tilt
54
55 # ===== Triple MZ =====
56 bs bsp R=1 T=0
57 s sp bsp.p2 bs1.p4
58
59 bs bs1 R=0.5 T=0.5
60
61 s s11 bs1.p2 bs11.p4
62 bs bs11 R=1 T=0
63 s s12 bs11.p3 bs2.p1
64
65 s s13 bs1.p3 bs12.p1
66 bs bs12 R=1 T=0
67 s s14 bs12.p2 bs2.p4
68
69 bs bs2 R=0.5 T=0.5
70
71 s s21 bs2.p2 bs21.p4
72 bs bs21 R=1 T=0
73 s s22 bs21.p3 bs3.p1
74
75 s s23 bs2.p3 bs22.p1
76 bs bs22 R=1 T=0
77 s s24 bs22.p2 bs3.p4
78
79 bs bs3 R=0.5 T=0.5
80
81 s s31 bs3.p2 bs31.p4
82 bs bs31 R=1 T=0
83 s s32 bs31.p3 bs4.p1
84
85 s s33 bs3.p3 bs32.p1
86 bs bs32 R=1 T=0
87 s s34 bs32.p2 bs4.p4
88
89 bs bs4 R=0.5 T=0.5
90
91 s s41 bs4.p2 bss.p4

```

```

92 bs bss R=1 T=0
93 s ss bss.p3 ITMARs.p1
94 s s42 bs4.p3 ITMARp.p1
95
96 # ===== S/P cavities =====
97 m ITMARs R=0 T=1 phi=0 xbeta=HARD-SOFT
98 s thick_s ITMARs.p2 ITMs.p1 L=0.15 nr=1.754
99 m ITMs T=0.004 L=TMloss phi=0 Rc=-1900 xbeta=HARD-SOFT
100 s sarms ITMs.p2 ETMs.p1 L=3000
101 m ETMs T=T_ETM L=TMloss phi=PHI_Sarm Rc=1900 xbeta=HARD+SOFT
102
103 m ITMARp R=0 T=1 phi=ITMARs.phi xbeta=ITMARs.xbeta
104 s thick_p ITMARp.p2 ITMp.p1 L=0.15 nr=1.754
105 m ITMp T=0.004 L=TMloss phi=ITMs.phi Rc=-1900 xbeta=ITMs.xbeta
106 s sarmp ITMp.p2 ETMp.p1 L=3000
107 m ETMp T=T_ETM L=TMloss phi=ETMs.phi Rc=1900 xbeta=ETMs.xbeta
108
109 cav cavs ITMs.p2.o priority=2
110 cav cavp ITMp.p2.o priority=2
111
112 cav sarm ETMs.p1.o
113
114 modes(maxtem=15)
115 """

```

C.1 がシミュレーションを行った際の基本的なセットアップである。シミュレーションの必要に応じてコードを一部変更している。例えば、鏡を傾ける際には 18,19 行目の値を変え、それに応じて 22 行目を変えることで共振器を傾けた上で長さを共振状態にすることができる。なお光学系にはパワーリサイクリングミラーが組み込まれているが、透過率 1 であるため、通常の Fabry-Perot Michelson 干渉計とみなせる。

ソースコード C.2: 光検出器のセットアップ

```

1 image_size = 0.004435386559218215*6
2 split_size = 800
3 code_detectors = f"""
4 #kat
5
6
7 # ===== RF QPDs =====
8 ### REFL RFQPDs -----
9 s s_REFL_QPD InputIsolator.p4 bs_REFL_QPD.p1
10 bs bs_REFL_QPD R=0.5 T=0.5
11 s s_REFL_QPD1 bs_REFL_QPD.p2 n_REFL_QPD1.p1 L=0.1 user_gouy_x=gouy_x_1
   user_gouy_y=gouy_x_1
12 s s_REFL_QPD2 bs_REFL_QPD.p3 n_REFL_QPD2.p1 L=0.1 user_gouy_x=gouy_x_2
   user_gouy_y=gouy_x_2
13
14 nothing n_REFL_QPD1
15 nothing n_REFL_QPD2
16
17 # if demodulation phase is not given, Finesse will return complex number
18 pd1 REFL_QPD1_f1 n_REFL_QPD1.p1.i f1 PHI_demod_HARD pdtype=xsplrit
19 pd1 REFL_QPD2_f1 n_REFL_QPD2.p1.i f1 PHI_demod_SOFT pdtype=xsplrit
20

```

```

21 # RF PDs
22 pd1 REFL_PD1_f1 n_REFL_QPD1.p1.i f1 PHI_demod_HARD #pdtype=xsplit
23 pd1 REFL_PD2_f1 n_REFL_QPD2.p1.i f1 PHI_demod_SOFT
24
25 ### -----
26
27 ### POP RFQPDs -----
28 fcam pd_car node=n_REFL_QPD1.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} f=0 w0_scaled=False
29 fcam pd_upper node=n_REFL_QPD1.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim
    =[-image_size},{image_size}] npts={split_size} f=f1 w0_scaled=False
30 fcam pd_lower node=n_REFL_QPD1.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim
    =[-image_size},{image_size}] npts={split_size} f=-f1 w0_scaled=False
31
32 fcam pd_car_2 node=n_REFL_QPD2.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim
    =[-image_size},{image_size}] npts={split_size} f=0 w0_scaled=False
33 fcam pd_upper_2 node=n_REFL_QPD2.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim
    =[-image_size},{image_size}] npts={split_size} f=f1 w0_scaled=False
34 fcam pd_lower_2 node=n_REFL_QPD2.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim
    =[-image_size},{image_size}] npts={split_size} f=-f1 w0_scaled=False
35 ### -----
36
37 ### Check Beam Size
38
39 bp REFL_BP_QPD1 node=n_REFL_QPD1.p1.i prop=w
40 pd REFL_pd n_REFL_QPD1.p1.i
41 pd AS_pd node=PRMp.p2.o
42
43 # CCDs
44 ccd ccd_n_REFL_QPD1 node=PRMs.p1.o xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim
    =[-image_size},{image_size}] npts={split_size} w0_scaled=False
45 ccd ccd_n_REFL_QPD1 node=n_REFL_QPD1.p1.i xlim=[{-image_size},{image_size}]
    ylim=[{-image_size},{image_size}] npts={split_size} w0_scaled=False
46 ccd ccd_PRMp node=PRMp.p2.o xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} w0_scaled=False
47 ccd ccd_PRMs node=PRMs.p1.o xlim=[{-image_size},{image_size}] ylim=[{-
    image_size},{image_size}] npts={split_size} w0_scaled=False
48 """

```

C.2 は光学系のセットアップであるが、こちらでも測定に応じてパラメータの変更を行ったり、計算時間短縮のために適宜選別して使用したりしている。

ソースコード C.3: 基本的な実行

```

1 kat = None
2 kat = finesse.Model()
3 kat.parse(code_base + code_detectors)
4
5 x = (x_index-(center[0]))*step[0]
6 y = (y_index-(center[1]))*step[1]
7 kat.bs11.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
8 kat.bs12.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
9 kat.bs31.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
10 kat.bs32.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
11
12 kat.bs21.surface_map = Map(x, y, opd=alpha/2)
13 kat.bs22.surface_map = Map(x, y, opd=alpha/2)

```



```

14
15 kat._settings.phase_config.zero_k00 = False
16 t0 = time.time()
17 out_HARD = kat.run()

```

C.3 の 5 から 13 行目でミラーマップを張り付けている。

ソースコード C.4: 学習用データ作成コード

```

1  output_list = []
2  output_list_comp = []
3
4  output_list_SOFT = []
5  output_list_comp_SOFT = []
6
7  output_list_finesse_QPD = []
8  output_list_finesse_PD = []
9
10 output_list_finesse_QPD_SOFT = []
11 output_list_finesse_PD_SOFT = []
12 miscenter_size = 2.5
13 for i,j in tqdm(itertools.product(np.linspace(-1, 1, 15), np.linspace(-1, 1,
    15))):
14     kat = None
15     kat = finesse.Model()
16     kat.parse(code_base + code_detectors)
17
18     x = (x_index-(center[0]+i*miscenter_size))*step[0]
19     y = (y_index-(center[1]+j*miscenter_size))*step[1]
20
21     kat.bs11.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
22     kat.bs12.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
23     kat.bs31.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
24     kat.bs32.surface_map = Map(x, y, opd=theta/2)
25
26     kat.bs21.surface_map = Map(x, y, opd=alpha/2)
27     kat.bs22.surface_map = Map(x, y, opd=alpha/2)
28
29     kat._settings.phase_config.zero_k00 = False
30     t0 = time.time()
31     out_HARD = kat.run()
32     # Demodulate (Split PD1)
33     car = out_HARD[kat.detectors[4].name]
34     upper = out_HARD[kat.detectors[5].name]
35     lower = out_HARD[kat.detectors[6].name]
36     demod = np.real(upper * np.conj(car) + car * np.conj(lower))
37     demod_flat = demod.T.flatten()
38     demod_flat=demod_flat.tolist()
39     output_list.append(demod_flat)
40     #print("Running time --- %s seconds ---" % (time.time() - t0))
41     output_list_comp.append(np.imag(upper * np.conj(car) + car * np.conj(
        lower)).T.flatten().tolist())
42
43     # Demodulate (Split PD2)
44     car = out_HARD[kat.detectors[7].name]
45     upper = out_HARD[kat.detectors[8].name]
46     lower = out_HARD[kat.detectors[9].name]

```

```

47     demod = np.real(upper * np.conj(car) + car * np.conj(lower))
48     demod_flat = demod.T.flatten()
49     demod_flat=demod_flat.tolist()
50     output_list_SOFT.append(demod_flat)
51     #print("Running time --- %s seconds ---" % (time.time() - t0))
52     output_list_comp_SOFT.append(np.imag(upper * np.conj(car) + car * np.
        conj(lower)).T.flatten().tolist())
53
54     #と比較用のデータを取得finsse
55     output_list_finesse_QPD.append(out_HARD[kat.detectors[0].name])
56     output_list_finesse_PD.append(out_HARD[kat.detectors[2].name])
57
58     output_list_finesse_QPD_SOFT.append(out_HARD[kat.detectors[1].name])
59     output_list_finesse_PD_SOFT.append(out_HARD[kat.detectors[3].name])
60
61 output_df = output_list
62 output_df = pd.DataFrame(output_df)
63 output_df_comp = output_list_comp
64 output_df_comp = pd.DataFrame(output_df_comp)
65 output_df_SOFT = output_list_SOFT
66 output_df_SOFT = pd.DataFrame(output_df_SOFT)
67 output_df_comp_SOFT = output_list_comp_SOFT
68 output_df_comp_SOFT = pd.DataFrame(output_df_comp_SOFT)

```

ソースコード C.5: 評価関数の定義 (QPD)

```

1 B_omega = ((np.sqrt(result_beam_jitter[:, 2]**2+result_beam_jitter[:, 1]**2)
    *(78.3*10**(-3)/6)*(1/2*10**(3)))*(1**4* (lowpass_4pol(result_freq))
    /((1**4+(lowpass_4pol(result_freq)))))*(-result_freq[0]+result_freq[1])
2 B_omega_pitch = ((np.sqrt(result_beam_jitter[:, 2]**2+result_beam_jitter[:,
    1]**2)*(78.3*10**(-3)/6)*(1/2*10**(3)))*(1**4* (lowpass_4pol(result_freq)
    ))/((1**4+(lowpass_4pol(result_freq)))))*(-result_freq[0]+result_freq
    [1])
3 N_shot = ((result_shot)*(1**4* (lowpass_4pol(result_freq)))/((1**4+(
    lowpass_4pol(result_freq)))))*(-result_freq[0]+result_freq[1])
4
5 poll_freq = 10
6 cut_freq = 0.4
7 def lowpass_4pol(omega):
8     return (1/(1+(omega/poll_freq)**2))**2 *np.sqrt(1/(1+(omega/poll_freq)
    **2))*np.sqrt((1/(1+(omega/cut_freq)**2)))/0.10654817360137006
9 def lowpass_4pol_phase(freq):
10     return (5*np.arctan(-freq/poll_freq)+np.arctan(-freq/cut_freq))*180/(np.
    pi)
11
12 B_omega = np.sum((np.sqrt(result_beam_jitter[:, 2]**2+result_beam_jitter[:,
    1]**2)*(78.3*10**(-3)/6)*(1/2*10**(3)))*(1**4* (lowpass_4pol(result_freq)
    ))/((1**4+(lowpass_4pol(result_freq)))))*(-result_freq[0]+result_freq
    [1])
13 B_omega_pitch = np.sum((np.sqrt(result_beam_jitter[:, 2]**2+
    result_beam_jitter[:, 1]**2)*(78.3*10**(-3)/6)*(1/2*10**(3)))*(1**4* (
    lowpass_4pol(result_freq)))/((1**4+(lowpass_4pol(result_freq)))))*(-
    result_freq[0]+result_freq[1])
14
15 def calc_noise_sum_yaw_QPD(params,X):
16     y_out_1 = X.iloc[:,0]

```

```

17     y_out_2 = X.iloc[:,2]
18     y_out_3 = X.iloc[:,1]
19     y_out_4 = X.iloc[:,3]
20     return np.sum(np.sqrt((np.std(y_out_1*params[0]+y_out_2*params[1]-
        y_out_3*params[2]-y_out_4*params[3])/((split_size-1)**2)*(image_size
        *2)**2 *B_omega)**2+(N_shot*np.sqrt(np.sum(np.abs(np.array(params)))
        /4)**2))
21
22 def calc_noise_sum_pitch_QPD(params,X):
23     y_out_1 = X.iloc[:,0]
24     y_out_2 = X.iloc[:,2]
25     y_out_3 = X.iloc[:,1]
26     y_out_4 = X.iloc[:,3]
27     return np.sum(np.sqrt((np.std(y_out_1*params[0]-y_out_2*params[1]+
        y_out_3*params[2]-y_out_4*params[3])/((split_size-1)**2)*(image_size
        *2)**2 *B_omega_pitch)**2+(N_shot*np.sqrt(np.sum(np.abs(np.array(
        params)))/4)**2))

```

ソースコード C.6: 評価関数の定義 (16PD)

```

1 param_power = np.array(pd.read_csv("
    KAGRA_out_ccd_withmap_800pic_4times4_REFL_QPD1_f1_2.csv"))
2 def check_function_yaw(params,X):
3     params_with_b1_b2 = insert_b1_b2(params)
4     specific_cols_left = [0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13]
5     specific_cols_right = [2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15]
6     adjusted_data = (X-X.mean()) * params_with_b1_b2 # パラメータによるデータの調整
7     sum_specific = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_left], axis=1)
8     sum_remaining = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_right], axis
    =1)
9     diff = sum_specific - sum_remaining
10    std_dev = np.std(diff) # 標準偏差を計算
11    return np.sum(np.sqrt(((std_dev/((split_size-1)**2)*(image_size*2)**2)*
        B_omega)**2+(N_shot *np.sqrt(np.dot(param_power/((split_size-1)**2)
        *(image_size*2)**2,np.abs(params_with_b1_b2))/np.sum(param_power/((
        split_size-1)**2)*(image_size*2)**2))**2))
12 def check_function_pitch(params,X):
13     params_with_b1_b2 = insert_b1_b2(params)
14     specific_cols_left = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
15     specific_cols_right = [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]
16     adjusted_data = (X-X.mean()) * params_with_b1_b2 # パラメータによるデータの調整
17     sum_specific = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_left], axis=1)
18     sum_remaining = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_right], axis
    =1)
19     diff = sum_specific - sum_remaining
20     std_dev = np.std(diff) # 標準偏差を計算
21     return np.sum(np.sqrt(((std_dev/((split_size-1)**2)*(image_size*2)**2)*
        B_omega_pitch)**2+(N_shot *np.sqrt(np.dot(param_power/((split_size
        -1)**2)*(image_size*2)**2,np.abs(params_with_b1_b2))/np.sum(
        param_power/((split_size-1)**2)*(image_size*2)**2))**2))

```

ソースコード C.7: 重み付け係数の決定 (QPD)

```

1 from scipy.optimize import minimize
2 y1_data = b1_array_x_HARD
3 y2_data = b2_array_x_HARD

```

```

4 y3_data = b3_array_x_HARD
5 y4_data = b4_array_x_HARD
6
7 def calc_shot_yaw(x1,x2):
8     return (((((y1_data-np.mean(y1_data))*x1+(y2_data-np.mean(y2_data))*x2
9             -(y3_data-np.mean(y3_data))*(2-x2)-(y4_data-np.mean(y4_data))*(2-x1)
10            ))/((split_size-1)**2)*(image_size*2)**2)))
11 # /((split_size-1)**2)*(image_size*2)**2 is constant
12
13 def func_yaw(params):
14     x1_yaw, x2_yaw= params
15     return np.std(calc_shot_yaw(x1_yaw, x2_yaw))
16 # Initial params
17 initial_params = [1.0, 1.0]
18
19 # Minimize
20 result = minimize(func_yaw, initial_params, method='BFGS')
21
22 # Save the data
23 x1_yaw_x_HARD = result.x[0]
24 x2_yaw_x_HARD = result.x[1]
25 x3_yaw_x_HARD = 2-x2_yaw_x_HARD
26 x4_yaw_x_HARD = 2-x1_yaw_x_HARD

```

C.7 は QPD における重み付け係数決定に使用したコードの例である。各自由度によって、係数決定時に使用していた関数の、8 行目の最後にかけられた定数の有無が変わる。初期値及び定数の有無を表 C.1 にまとめる。

	初期値 (X arm)	定数 (X arm)	初期値 (Y arm)	定数 (Y arm)
HARD Yaw	(1,1,1,1)	無	(1,0,2,1)	有
HARD Pitch	(1,1,1,1)	無	(1,0,2,1)	有
SOFT Yaw	(1,1,1,1)	無	(0,0,2,2)	無
SOFT Pitch	(1,1,1,1)	無	(1,1,1,1)	無

表 C.1: 初期値と関数の設定 (QPD)

ソースコード C.8: 重み付け係数の決定 (16 分割 PD)

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import leastsq
3 from scipy.optimize import minimize
4
5 Power_list = np.abs(pd.read_csv("KAGRA_out_xarm_1.5
6     u_nomap_800pic_4times4_REFL_QPD1_f1_HARD_yaw_center_only_2.csv").values.
7     tolist()[0])
8
9 P_1 = (Power_list[5]+Power_list[6]+Power_list[9]+Power_list[10])/4
10 P_2 = (Power_list[4]+Power_list[7]+Power_list[8]+Power_list[11])/4
11 P_3 = (Power_list[1]+Power_list[2]+Power_list[13]+Power_list[14])/4
12 P_4 = (Power_list[0]+Power_list[3]+Power_list[12]+Power_list[15])/4
13
14 X = df_pd_result_a_1_x_HARD
15

```

```

13 def insert_b1_b2(params):
14     array_for_minus = np.array([P_4,P_2,-P_2,-P_4,P_3,-P_3,-P_3,-P_1,P_1,P_3
15                                ,-P_4,-P_2,P_2,P_4])
16     array_for_plus = np.array([P_4,P_3,P_3,P_4,P_2,P_2,P_2,P_1,P_1,P_2,P_4,
17                                P_3,P_3,P_4])
18     b_6plus5 = 4*(P_1+P_2+P_3+P_4)-np.sum(np.dot(array_for_plus,params))
19     b_6minus5 = np.sum(np.dot(array_for_minus,params))
20     b1 = (b_6plus5-b_6minus5)/(2*P_1)
21     b2 = (b_6plus5+b_6minus5)/(2*P_1)
22     params_with_b1_b2 = np.insert(params, 5, b1)
23     params_with_b1_b2 = np.insert(params_with_b1_b2, 6, b2)
24     return params_with_b1_b2
25
26 def objective_function(params):
27     params_with_b1_b2 = insert_b1_b2(params)
28     specific_cols_left = [0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13]
29     specific_cols_right = [2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15]
30     adjusted_data = (X-X.mean()) * params_with_b1_b2
31     sum_specific = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_left], axis=1)
32     sum_remaining = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_right], axis
33                             =1)
34     diff = sum_specific - sum_remaining
35     std_dev = np.std(diff) # 標準偏差を計算
36     return ((std_dev))/((split_size-1)**2)*(image_size*2)**2
37
38 def insert_b1_b2_pitch(params):
39
40     array_for_minus = np.array([P_4,P_3,-P_3,-P_4,P_2,-P_2,-P_2,-P_1,P_1,P_2
41                                ,-P_4,-P_3,P_3,P_4])
42     array_for_plus = np.array([P_4,P_2,P_2,P_4,P_3,P_3,P_3,P_1,P_1,P_3,P_4,
43                                P_2,P_2,P_4])
44     b_6plus5 = 4*(P_1+P_2+P_3+P_4)-np.sum(np.dot(array_for_plus,params))
45     b_6minus5 = np.sum(np.dot(array_for_minus,params))
46     b1 = (b_6plus5-b_6minus5)/(2*P_1)
47     b2 = (b_6plus5+b_6minus5)/(2*P_1)
48     params_with_b1_b2 = np.insert(params, 5, b1)
49     params_with_b1_b2 = np.insert(params_with_b1_b2, 6, b2)
50     return params_with_b1_b2
51
52 def objective_function_pitch(params):
53     params_with_b1_b2 = insert_b1_b2_pitch(params)
54     specific_cols_left = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
55     specific_cols_right = [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]
56     adjusted_data = (X-X.mean()) * params_with_b1_b2
57     sum_specific = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_left], axis=1)
58     sum_remaining = np.sum(adjusted_data.iloc[:, specific_cols_right], axis
59                             =1)
60     diff = sum_specific - sum_remaining
61     std_dev = np.std(diff)
62     return ((std_dev))/((split_size-1)**2)*(image_size*2)**2
63
64 # initial param
65 initial_params = np.ones(14)
66
67 #minimize
68 # yaw
69 result = minimize(objective_function, initial_params, method='BFGS')

```

```

64 weighted_params_x_HARD_yaw_for_objfunc = result.x
65 weighted_params_x_HARD_yaw = insert_b1_b2(result.x)
66 print("最適化されたパラメータ(yaw):")
67 print(weighted_params_x_HARD_yaw)
68
69 # minimize
70 # pitch
71 initial_params = np.ones(14)
72 result = minimize(objective_function_pitch, initial_params, method='BFGS')
73 weighted_params_x_HARD_pitch_for_objfunc = (result.x)
74 weighted_params_x_HARD_pitch = insert_b1_b2(result.x)
75 print("最適化されたパラメータ(pitch):")
76 print(weighted_params_x_HARD_pitch)

```

こちらも同様に各自由度によって、係数決定時に使用していた関数の、33,56 行目の最後にか
けられた定数の有無が変わる。初期値及び定数の有無を表 C.2 にまとめる。なお、16 分割 PD
の初期値は 14 個存在し、残り二つは関数内で計算するため、14 個の初期値を示す。また、全
ての初期値が同じ値をとっているため、その値のみを示す。

	初期値 (X arm)	定数 (X arm)	初期値 (Y arm)	定数 (Y arm)
HARD Yaw	1	無	1	無
HARD Pitch	1	無	1	無
SOFT Yaw	1	無	2	有
SOFT Pitch	1	無	1	有

表 C.2: 初期値と関数の設定 (16PD)

謝辞

本論文は多くの方の支えで完成させることができました。この場で簡単にではありますが、皆様にお礼を述べさせていただきます。

指導教員である宗宮健太郎教授には、本研究を与えて下さっただけでなく、研究を進める上で幾度となく相談に乗っていただきました。宗宮先生の深い知識を基にした的確なアドバイスのおかげで、本研究をここまで進めることができました。また私の素朴な意見やアイディアも快く受け入れ、議論していただきました。先生のそのようなご指導により自分の意見を持ち、議論を行える人間になれたと感じています。

研究室の方々の感謝も欠かすことができません。

Haoyu Wang 特任助教には、研究を進める上で大変お世話になりました。本論文で使用した光学系のコードは、Haoyu さんのコードを基にしております。また複屈折についての深い知識を基に、様々なアドバイスいただきました。私の質問に対し、いつも優しくお答えいただき誠にありがとうございました。

D3 の阿部さんには、元々複屈折のテーマに取り組まれていたため、研究を進める上での理論の側面でアドバイスをいただきました。D2 の鈴木海堂さんには、テーマこそ違いましたが、検証実験の環境構築を行う際には様々なアドバイスをいただきました。D1 の Diego さんは、半年のずれはありますがほぼ同期のような存在で、気軽に話しかけさせていただきました。毎日慣れない英語に悪戦苦闘する中でも、成長を褒めていただきありがとうございました。

M1 の井殿君とはゼミや実験はもちろん、私がオーストラリアに訪れた際にも同じ部屋で生活してお世話になりました。海外に慣れておらず、困惑することも多かった中で、井殿君の積極的な姿勢を見習って行動しようと思いました。M1 竹下君は研究テーマが同じなこともあり、研究についての様々な議論をしました。しっかりと自分の意見を持って議論に参加してくれたため、とても良い刺激になりました。コーディング能力も高く、実装の面でも助けられました。QPD や 16 分割 PD を作成するためのコードは本研究でも使用しています。M1 の正木君は、席が隣ということもあり、会う度にお話ししてくれてありがとうございました。研究生生活について、何かと頼ってくれて嬉しかったです。M1 の Shalika さんとは、オーストラリアに訪れた際にお世話になりました。とてもしっかりとされていて、研究や生活姿勢の面で常に見習っていました。帰国後も会う度にお話ししてくれてありがとうございました。

B4 の浜野君、吉留君、山口さんには、研究テーマは異なりましたがゼミや研究生生活の面でお世話になりました。研究の話はもちろん、それ以外の会話も楽しませてもらいました。皆さんが息抜きで遊んでいるところに参加させてもらうこともありました。とても楽しかった思い出の一つとして残っています。

留学生の Ruizhe 君には、本論文で扱った理論の実験的検証を行う上での、環境構築に取り組んでもらいました。一つ一つの作業を丁寧に行い、精度の高い実験系を組んでいる姿を見て感銘を受けました。事務の土屋さんには、経費精算などの事務処理を数多く助けていただきました。そのような作業の手助けをいただいたことで、集中して研究に打ち込むことができました。

他にも原田さん、高野さん、小田部さん、Hou Yilung さん、鈴木孝典さん、臼倉さん、笹岡さん、竹口さん、武田さん、田中君など、イベントやゼミ、輪講などで大変お世話になりました。ありがとうございました。

研究室外の私の研究に関わっていただいた皆様にも大変お世話になりました。

新潟大学の小山さんには、FINESSE 上で私達の研究を行う上での環境構築におきまして、大変お世話になりました。特に分割 PD の再現におきましては、小山さんの作成されたコードを基に作成いたしました。東京大学の道村さんには、制御系内の雑音について議論する中で様々なアドバイスをいただきました。メールや直接お話しする中で丁寧に教えて頂き、理解を深めることができました。国立天文台の Marc さんには、定例会議やオーストラリアに訪れた際にも常に気にかけていただき大変お世話になりました。年下の私に対しても気さくに話しかけてくださり、とても安心して過ごすことができました。

最後に私が研究に打ち込めるように生活を支えてくれた両親に感謝いたします。

皆様誠にありがとうございました。

参考文献

- [1] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [2] K. Somiya, E. Hirose, and Y. Michimura, Influence of nonuniformity in sapphire substrates for a gravitational wave telescope, *Physical Review D* **100**, 082005 (2019).
- [3] P. R. Saulson, Thermal noise in mechanical experiments, *Physical Review D* **42**, 2437 (1990).
- [4] H. B. Callen and T. A. Welton, Irreversibility and Generalized Noise, *Physical Review D* **83**, 34 (1951).
- [5] D. Shoemaker, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Maischberger, and A. Rüdiger, Noise behavior of the Garching 30-meter prototype gravitational-wave detector, *Physical Review D* **38**, 423 (1988).
- [6] 鈴木孝典, 流体シミュレーションを用いた重力波望遠鏡 KAGRA の地下水がもたらす重力勾配雑音の推定 (修士論文), (2023).
- [7] H. Wang, Y. Aso, M. Leonardi, M. Eisenmann, E. Hirose, G. Billingsley, K. Kokeyama, T. Ushiba, M. Tamaki, *et al.*, Characterization of birefringence inhomogeneity of KAGRA sapphire mirrors from transmitted wavefront error measurements, *Physical Review D* **110**, 082007 (2024).
- [8] M. Eisenmann, S. Singh, and M. Leonardi, Birefringence compensation method of test-mass substrates for gravitational wave detectors with arbitrary polarization states, *Optics Letters* **49**, 3404 (2024).
- [9] 竹下賢徳, ニューラルネットワークを用いた複屈折影響下における鏡の姿勢制御 (卒業論文), (2024).
- [10] 田中颯, 非一様な複屈折の影響下における鏡の姿勢制御法の開発 (卒業論文), (2023).
- [11] L. Barsotti, M. Evans, and P. Fritschel, Alignment sensing and control in advanced LIGO, *Classical and Quantum Gravity* **27**, 084026 (2010).
- [12] Y. Enomoto, Y. Aso, Y. Michimura, and K. Somiya, KAGRA Main Interferometer Design Document, JGW-T1200913-v6 (2012).
- [13] D. D. Brown and A. Freise, *Finesse*, The software and source code is available at <http://www.gwoptics.org/finesse>.
- [14] 中村卓史, 三尾典克, and 大橋正健, 重力波をとらえる, 1st ed. (京都大学学術出版会,

- 1998).
- [15] 小田部荘達, 高硬度光ばねを用いた重力波信号増幅システムの開発 (修士論文), (2020).
 - [16] 安東正樹, Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御 (修士論文), (1995).
 - [17] 粕谷順子, 重力波検出器 KAGRA の出力モードクリーナの開発 (修士論文), (2018).
 - [18] 大島由佳, 重力波望遠鏡 TOBA のための結合光共振器を用いた角度信号増幅の実証 (修士論文), (2021).
 - [19] 阿部誉, 透過位相誤差分布を使用したサファイア鏡の複屈折推定の検証 (修士論文), (2022).
 - [20] 立原浩輝, 深層学習を用いた鏡の姿勢制御について (修士論文), (2022).
 - [21] 道村唯太, レーザー干渉計型重力波検出器と巨視的量子力学, ([2019](#)).