卒業論文

重力波望遠鏡KAGRAの懸架系ファイバにおける非平衡熱雑音の検証

東京工業大学理学院物理学系　宗宮研究室

山口由伎

2024 年 8 月 25 日
2025 年 4 月 29 日改

概要

重力波とは Einstein が提唱した時空のゆがみが光の速さで伝播する現象のことであり、2015 年にアメリカの重力波望遠鏡が初めて検出した。日本の重力波望遠鏡 KAGRA では時空の歪みを Michelson 干渉計を用いて測定しており、その対象は連星中性子星などによる 10^2Hz 付近の重力波である。しかし、連星合体による重力波の影響は 1m に対しおよそ 10^{-21}m ほどの歪みであるためレーザーの波長 (10^{-6}m) に対して極めて短い。したがって Michelson 干渉計で重力波を測定するには干渉計の腕を長くし、ミラーによる反射等を用いてレーザーの光路長を伸ばす Fabry-Perot 共振器を導入して検出器の手前で信号を増幅させる必要がある。また、重力波望遠鏡 KAGRA では共振器に用いられる反射鏡がファイバにより懸架されており (これらをまとめて懸架系と呼ぶ。)、ファイバは熱浴に接続されファイバを通じて反射鏡の冷却が行われている。
この懸架系の中には様々な原理的なノイズが存在する。その中の 1 つに熱雑音があり、熱雑音自体も 2 種類のものに分類される。1 つ目は原子のブラウン運動によって鏡やファイバも各点における変位が微小に変化し、弾性体として応力が働くため変形が生じるブラウニアン雑音。2 つ目は熱浴とのやり取りにより非一様な変形が生じ、熱膨張係数を通じて物体内にランダムな温度分布 (平衡温度からのずれ) を引き起こし、この温度分布の熱緩和から生じる熱弾性雑音である。

懸架系のファイバの横方向 (レーザーの光路方向)、ミラーの表面における横方向熱雑音はすでに先行研究が存在し、ファイバの縦方向熱雑音の先行研究も存在する。しかし縦方向熱雑音の計算はファイバ断面での温度を一様とみなした状態 (1 次元モデル) でしか行われておらず (参考文献 5)、設定する平衡温度によっては非現実的な計算結果となっているため、本論文ではファイバを 3 次元の直方体とみなし、より厳密に計算を行う。

目次

図目次

第 1 章

基礎となる理論

1.1 Einstein 方程式

一般相対性理論によると、四次元時空間内の異なる 2 点 $x^\mu(= (-ct, x, y, z))$ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の線素はメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

とあらわされる。重力場の存在しない Minowski 時空において、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

ただし、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

であらわされる。重力場のある時空にいおいては、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ はアインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.5}$$

に従う。ここで、クリストフェル記号 $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$、リーマンテンソル $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$, リッチテンソル $R_{\mu\nu}$、リッチスカラー R はそれぞれ

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \tag{1.6}$$

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma{}_{\nu\alpha} \tag{1.7}$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \tag{1.8}$$

$$R = R^\alpha{}_\alpha \tag{1.9}$$

ただし c は光の速度、G は 重力定数、$T_{\mu\nu}$ は運動量テンソルである。

1.2 Einstein 方程式の線形化

重力場が弱い場合重力場を、重力波のない Minkowski 時空と、重力波によってゆがめられた時空とのずれを $h_{\mu\nu}$ とすると、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

となる。このとき $h_{\mu\nu}$ の trance reverse tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{1.11}$$
$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{1.12}$$

と、定義すると、$\bar{h}_{\mu\nu}$ の 1 次までの範囲で

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \tag{1.13}$$
$$= \frac{1}{2}(\bar{h}^{\mu}{}_{\nu,\lambda} + \bar{h}^{\mu}{}_{\lambda,\nu} - \bar{h}_{\nu\lambda}{}^{,\mu}) \tag{1.14}$$
$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\mu\alpha,\mu}{}^{,\alpha}) \tag{1.15}$$

となる。ここで $|\bar{h}_{\mu\nu}| \ll 1$ であることから

$$\bar{h}^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha}\bar{h}_{\alpha\nu} \tag{1.16}$$
$$\bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha}\bar{h}^{\mu}{}_{\alpha} \tag{1.17}$$

ここで gauge 条件として Loentz gauge

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{1.18}$$

を課すことによって、

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu} \tag{1.19}$$
$$\Box = -\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \Delta \tag{1.20}$$

となり、Einstein 方程式は

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.21}$$

となる。これが線形化された Einstein 方程式である。

1.3　重力波

真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ であるから、式 1.17 は

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.22}$$

となる。式 1.22 の解として、平面波

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \tag{1.23}$$

を考える。式 1.23 が真空中の線形化された Einstein 方程式 (式 1.22)、Lorentz gauge の条件 (式 1.18) を満たすには

$$A_{\mu\nu}k^{\nu} = 0 \tag{1.24}$$
$$k_{\mu}k^{\mu} = 0 \tag{1.25}$$

でなければばならない。Lorentz gauge の条件を課していても、座標の取り方にはまだ任意性が残っている。そこで Transverse Traceless gauge （TTgauge）条件

$$A^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \tag{1.26}$$
$$A_{\mu\nu}U^{\nu} = 0 \tag{1.27}$$

ここで U^ν は任意の時間的な単位ベクトルである。このとき $U^\nu = \delta^\nu{}_0$(background Mikkowki 時空の時間基底) として重力波の進行方向を z 軸にとると、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik(ct-z)) \tag{1.28}$$

$$A_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_+ & \bar{h}_\times & 0 \\ 0 & \bar{h}_\times & \bar{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

となる。ここで、$k = k_0, \bar{h}_+ = A_{xx}, \bar{h}_\times = A_{xy}$ これは重力波が 2 つの自由度を持っていることを意味している。また、重力波の角周波数 ω は $\omega = ck$ を満たす。この時

$$\begin{aligned} h &= h^\alpha{}_\alpha & (1.30)\\ &= \eta^{\alpha\nu}h_{\nu\alpha} & (1.31)\\ &= -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} & (1.32)\\ &= -(\bar{h}_{00} + \frac{1}{2}\eta_{00}h) + (\bar{h}_{11} + \frac{1}{2}\eta_{11}h + (\bar{h}_{22} + \frac{1}{2}\eta_{22}h) + (\bar{h}_{33} + \frac{1}{2}\eta_{33}h) & (1.33)\\ &= 2h & (1.34) \end{aligned}$$

より $h = 0$ が成立する。

1.4　自由質点に対する重力波の影響

重力以外に力を受けていない粒子（自由粒子）は測地線の方程式

$$\frac{\partial}{\partial r}U^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 0 \tag{1.35}$$

ここで U^μ は粒子の四次元速度 r は粒子の固有時である。粒子が最初静止している back ground Minkowski 時空を考えこの系に関する TT guage をとる。このとき、U^μ の初期値は

$$\begin{aligned} (U^\mu)_o &= -\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta & (1.36)\\ &= \begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix} & (1.37) \end{aligned}$$

式 1.35 に、クリストフェル記号 1.14 と、式 1.37 を代入し、式 1.29 と、式 1.28 から $\bar{h}_{\alpha 0} = 0$ を考慮すると加速度の初期値は

$$\begin{aligned} (\frac{dU^\mu}{d\tau})_0 &= -\Gamma^\mu{}_{00} & (1.38)\\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(\bar{h}_{\alpha 0,0} + \bar{h}_{0\alpha,0} - \bar{h}_{00,\alpha}) & (1.39)\\ &= 0 & (1.40) \end{aligned}$$

これは、静止している質点には加速度が働かず、TTgauge の座標軸上で静止し続けることを意味している。重力波による影響を見るために、二つの接近している粒子間の距離を調べる必要がある。例えば、二つの自由質点 P_1, P_2 を考える。TTgauge 上での座標がそれぞれ $(\epsilon,0,0)(0,0,0)$ である場合 P_1, P_2 の間の距離は、次の

ように求められる。

$$\int_{P_1}^{P_2} |g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu| = \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}}dx \tag{1.41}$$
$$= \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}}dx \tag{1.42}$$
$$\simeq |g_{xx}(P_1)|^{\frac{1}{2}}\epsilon \tag{1.43}$$
$$= |1 + h_{xx}|^{\frac{1}{2}}\epsilon \tag{1.44}$$
$$= |1 + \frac{1}{2}\bar{h}_{xx} + \frac{1}{2}\eta_{xx}h|^{\frac{1}{2}}\epsilon \tag{1.45}$$
$$= |1 + \bar{h}_{xx}|^{\frac{1}{2}}\epsilon \tag{1.46}$$
$$\simeq [1 + \frac{1}{2}\bar{h}_{xx}(P_1)]\epsilon \tag{1.47}$$

この式から重力波の入射によって質点間の距離が変化することがわかる。

1.5　重力波の偏光

自由質点 P_1, P_2 が、微笑距離 ξ^i だけ離れていて z 軸方向に進む重力波が入射した時の円状に配置した質点の距離の変化を考える。測地線の方程式より

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi = R^i{}_{\alpha\beta j}U^\alpha U^\beta \xi^j \tag{1.48}$$

がえられ、$\bar{h}_{\mu\nu}$ の一次の項までを考慮すれば

$$\begin{aligned} U^\alpha &\simeq (1,0,0,0) \\ \tau &\simeq ct \end{aligned} \tag{1.49}$$

よって式 1.48 は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i_{0j0}\xi^j \tag{1.50}$$

となる。さらに TT gauge において

$$R^i{}_{0j0} = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 \bar{h}^i{}_j}{\partial t^2} \tag{1.51}$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{h}^i{}_j}{\partial t^2}\xi \tag{1.52}$$

この時 t が無限大に向かうときに発散しないような解を求めると、その変化量 $\delta\xi^i$ は

$$\delta\xi^i = \frac{1}{2}\bar{h}^i{}_j\xi^j \tag{1.53}$$

よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\xi^x \\ \delta\xi^j \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{h}_+ & \bar{h}_\times \\ \bar{h}_\times & -\bar{n}_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \\ &= \frac{1}{2}\bar{h}_+\begin{pmatrix} \xi^x \\ -\xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} + \frac{1}{2}\bar{h}_\times\begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \end{aligned} \tag{1.54}$$

となる式の第 1 項と第 2 項はそれぞれ重力波の二つの偏光 +mode と ×mode を表している。z 方向 (紙面てまえから垂直) に重力波が入射した時 xy 平面上に円状に配置された自由質点がそれぞれの mode の影響を受けた時の変位の形は図 1.1 のようになる。

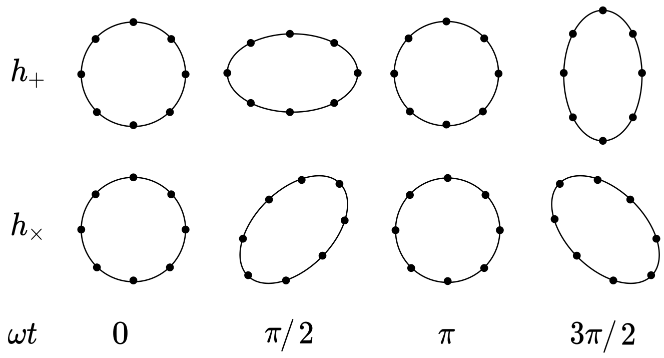

図 1.1　+mode と ×mode による自由質点の位置の変化

1.6　自己相関関数とパワースペクトル密度

以下区分的になめらかな関数 $f(x)$ に対してフーリエ変換 (とフーリエ変換から定まる逆変換) を次のように定める

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)](\omega) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega t}dt \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)](\omega)e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{1.55}$$

確率過程 $X(t)$ の時刻 $t=\tau, 2\tau, \cdot$ における X の値をそれぞれ $X_1, X_2, \cdot$ とし、列 $\{X_1, X_2, \cdot\}$ のサンプルを N 個作り、k 番目のサンプルを $\{X_1^k, X_2^k, \cdot\}$ とする。$\langle X_n\rangle, \langle X_n X_{n+h}\rangle$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \langle X_n\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_n^k \\ \langle X_n X_{n+h}\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_n^k X_{n+h}^k \end{aligned} \tag{1.56}$$

この二つの定義の右辺をアンサンブル平均と呼ぶ。

ランダムな 2 つの信号の類似性を見るための指標に相互相関関数があり、信号同士の性質により異なる定義が存在する。

1.6.1　無限時間における自己相関関数の定義

連続的な時間の中で不規則変動する信号 $f(t), g(t)$ について無限時間で $f(t), g(t)$ が定義されているとき、相互相関関数は次のように定義される。

$$(f\star g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t+\tau)dt \tag{1.57}$$

f, g が同じ関数である場合の相互相関関数を自己相関関数と呼ぶ。

$$(f\star f)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t+\tau)dt \tag{1.58}$$

自己相関関数の値は時間差のある波の類似性を表している。

$$P_s(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f * f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{1.59}$$

1.6.2 有限時間における自己相関関数

不規則変動する波 $x(t)$ について、式 1.57 が発散してしまう場合、有限時間のみで信号が定義されている場合を考える。有限時間で定義された次のような信号を考える。

$$X(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{1.60}$$

元の自己相関関数の定義に代替して $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t+\tau)dt$ の $T \to \infty$ 時間平均として自己相関関数を定義する。エルゴード仮設よりアンサンブル平均は時間平均と一致するため、T を大きくしたときこの自己相関関数は x(t) のアンサンブル平均である。

$$\langle f^*(t)g(t+\tau)\rangle = (f \star g)(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt \tag{1.61}$$

ここで

$$\Phi_T(\omega) = \frac{\left|\tilde{X}_\omega(T)\right|^2}{T} \tag{1.62}$$

ただし

$$\tilde{X}_\omega(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.63}$$

と定め $P_s(\omega) \equiv \lim_{T\to\infty}\langle\Phi_T(\omega)\rangle$ と定める。

$$\begin{aligned} \langle\Phi_T(\omega)\rangle &= \langle\frac{\left|\tilde{X}_\omega(T)\right|^2}{T}\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 T}\langle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_1)e^{-i\omega t_1}dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t_2)e^{i\omega t_2}dt_2\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \langle x^*(t_2)x(t_2+(t_1-t_2))\rangle e^{-i\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \end{aligned} \tag{1.64}$$

$\tau = t_1 - t_2$ とすれば

$$\begin{aligned} \langle\Phi_T(\omega)\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2 T}\left(\int_{-T}^{0}\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \langle x^*(t_2)x(t_2+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}dt_2d\tau \right. \\ &\qquad \left. + \int_{0}^{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \langle x^*(t_2)x(t_2+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}dt_2d\tau\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 T}\left(\int_{-T}^{0}\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \langle x^*(t_2)x(t_2+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}dt_2d\tau \right. \\ &\qquad \left. + \int_{0}^{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \langle x^*(t_2)x(t_2+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}dt_2d\tau\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 T}\int_{-T}^{0}(T+\tau)(x*x)(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau + \int_{0}^{T}(T-\tau)(x*x)(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 T}\int_{-T}^{T}(T-|\tau|)(x*x)(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \end{aligned} \tag{1.65}$$

よって

$$P_s(\omega) = \lim_{T\to\infty} \langle \Phi_T(\omega)\rangle = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[(x*x)(\tau)](\omega) \tag{1.66}$$

ただし式 1.66 において $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau(x*x)(\tau)|\, d\tau$ の収束を仮定した。収束条件を仮定すれば、パワースペクトル密度が自己相関関数のフーリエ変換となる。また、信号 $x(t)$ が実数であれば

$$\begin{aligned}
(x*x)(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(\omega)e^{i\omega(t+\tau)}d\omega dt \\
&= 2\pi\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(\omega)e^{i\omega\tau}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-i\omega t}\right)^{*} d\omega \\
&= 2\pi\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}^{*}(\omega)\tilde{x}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{\tilde{x}(\omega)\tilde{x}^{*}(\omega)}{T}e^{i\omega\tau}d\tau \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{\tilde{x}(\omega)\tilde{x}^{*}(\omega)}{T}e^{i\omega\tau}d\omega \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}P_s(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega
\end{aligned} \tag{1.67}$$

が得られ条件を与えずとも自己相関関数のフーリエ変換がパワースペクトル密度に比例することがわかる。この定理は Wiener–Khinchin の定理と呼ばれる。$\tau = 0$ とすれば

$$|\bar{x}|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_s(\omega)d\omega \tag{1.68}$$

本論文ではアンサンブル平均を次の様に表記する。

$$\langle x(t)x^{*}(t')\rangle \equiv (x*x)(t-t') \tag{1.69}$$

この形式のアンサンブル平均からパワースペクトルを導出する場合 $t - t' = \tau$ とし、τ でアンサンブル平均をフーリエ変換する必要がある。これを t,t' におけるフーリエ積分と関連付けるため、次のような変形を行う。

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{x}(\omega)\tilde{x}^{*}(\omega')\rangle &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int e^{-i\omega t}dt\int e^{i\omega' t'}dt'\langle x(t)x(t')\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\int (x*x)(t-t')e^{-i\omega(t-t')}e^{it'(\omega'-\omega)}dtdt' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int P_x(\omega)e^{-it'(\omega-\omega')}dt' \\
&= P_x(\omega)\delta(\omega-\omega')
\end{aligned} \tag{1.70}$$

1.6.3　パワースペクトル密度と感度の関係

パワースペクトル密度から感度を求めるための式は次の式で与えられる。

$$Sensitivity = \frac{\sqrt{P_s(\omega)}\times l_c}{L_{arm}} \tag{1.71}$$

ここで lc は縦横カップリングである。縦横カップリングとは地球が球状であることによって導出される係数である。カップリングの角は θ $= L_{arm}/(2R_{earth})$ で与えられる。よってアーム長さ L_{arm} に依存しており、より長いアーム長は変位とひずみのカップリングを減らすが一方で縦横カップリングの値を大きくすることが分かる

第 2 章

ランダウリフシッツの弾性理論

2.1　歪テンソルと一般運動方程式

ある物体が変形を受けた時、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$(その成分は x_i) の点が $\boldsymbol{r'}$(成分は x'_i) に変形を受けて移動したとする。変形に際する変位 $\boldsymbol{u}$ は

$$u = \boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}$$

とあらわされる。限りなく近くにある 2 点間の相対位置ベクトルが変形前に dx_i であったとすれば、変形を受けた後の 2 点間の相対位置ベクトルは $dx'_i = dx_i + du_i$ とあらわせる。また変形前の 2 点間の距離は

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

に等しく、変形後のそれは

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$$

とあらわされる。積において同じ添え字が二回繰り返されるとき、添え字について和をとるという求和表現のもとこれらの式は

$$dl^{'2} = dx_i^2, \quad dl^{'2} = (dx_i + du_i)^2$$

で表される。この式に $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ を代入すると

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_k dx_j$$

とあらわされる。$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_k dx_i$ に注意するとこの式は

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k \tag{2.1}$$

ただし

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}) \tag{2.2}$$

これにより変形を受けた時の線素の変化が求まる。u_{ik} のことを歪テンソルと呼ぶ。定義式からわかるように $u_{ik} = u_{ki}$ である。また、テンソルの固有ベクトルを主軸に引き直すことによって対角成分 u_{11}, u_{22}, u_{33} 以外のものを 0 にすることができる。この時の歪テンソルの対角成分を歪テンソルの主値と呼び、$u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ とあらわすこととし、この軸の取り方を主軸系と呼ぶ。ただし、変形ベクトル自体が各点において異なるものであるため、ある点における主軸系がほかの点においても主軸系となるわけではない。歪テンソルがある点において主軸系に関して導入されているとするならば、式 2.1 は

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k & (2.3) \\ &= (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2 & (2.4) \end{aligned}$$

ここに登場する 3 つの項はそれぞれの主軸における引き延ばしまたは圧縮を表している。例えば第 1 主軸に沿った変形後の長さ dx'_1 は $dx'_1 = \sqrt{1+2u^{(1)}}dx_1$ となる。同様にして、他の二つの軸に関しても同じことが言える。この時 dx'_1 と dx_1 の比、$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1+2u^{(i)}} - 1$ のことを主軸に関する相対伸びという。

また、物体が微小変化を受けているなら、物体の中の歪を表す歪テンソルの成分は小さいはずである。したがって式 2.2 は

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) \tag{2.5}$$

とあらわされ、相対伸びは $\sqrt{1+2u^{(i)}} - 1 \simeq u^{(i)}$ と表される。

次に微小体積 dV と変形後の微小体積 dV' の相対変化を考える相対伸びが $u^{(i)}$ であることから $dx'_i = (1+u^{(i)})dx_i$ が得られるので

$$dV' = dV(1+u^{(1)})(1+u^{(2)})(1+u^{(3)}) \tag{2.6}$$

二次以上の項を無視することで

$$dV' = (1+u_{ii})dV \tag{2.7}$$

が得られるので微小体積の相対変化は u_{ii} で表される。

変形を受けているときの分子配列が変化することから、物体の内部では物体をもとの形に戻そうとする力が発生し、このような内力を内部応力と呼ぶ。物体内の一部の体積に働く力を考えると、これは体積内の各体素に働く力の和であることから

$$\int \boldsymbol{F} dV$$

であらわされる。(ただし $\boldsymbol{F}$ は、各点における単位体積当たりに働く力をあらわしている。) $F = (F_1, F_2, F_3)$ とすればこの積分の各成分は

$$\int F_i dV \tag{2.8}$$

とあらわせる。物体の内部に働く力は作用反作用の法則により打ち消し合うので、対象物に対して働く力は物体の周辺から物体の表面に働く力のみの和であらわせる。つまり式 2.8 は、物体表面に沿っての積分で表される。よって、物体の任意の体積に対してその内部応力に対しても同様である。ガウスの発散定理でも知られている通り、スカラー関数の任意の体積積分があるベクトル値関数の divergence であれば表面積分に置き換えることができる。つまり、この積分が表面に沿った積分であらわせるとき、F は、あるベクトル値関数の divergence になっている。すなわち $F = (F_1, F_2, F_3)$ し、S を考えている体積の表面とすれば

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{2.9}$$

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV \tag{2.10}$$

$$= \oint \sigma_{ik} df_k \tag{2.11}$$

ここで、df_i は表面の面素ベクトル $\boldsymbol{df}$ の成分を表しておりその向きは体積の内側から外側に貫く方向とする。σ_{ik} は応力テンソルと呼ばれる。σ_{ik} は x_k 軸に垂直な物体の表面に働く力の第 i 成分である。すなわち x 軸に垂直な単位面積上にはこれに垂直な $\sigma_{xx}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}$ がはたらく。式 2.8 は考えている物体の体積の外側から内部に働く力の積分を考えているため、考えている体積からその外側への内部応力の大きさは

$$-\oint \sigma_{ik} df_k \tag{2.12}$$

であらわされる。次に物体の、ある体積当たりに働く力のモーメントについて定義する。力学の知識から力 F のモーメントは $F_i x_k - F_k x_i$ を成分とする第 2 位の歪対象テンソルの形で書きあらわされる。F が単位体積当たりに働く力の大きさを表していることから、体積素 dV あたりに作用する力のモーメントはつぎのように書き表せる。

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV \tag{2.13}$$

が全体積にかかる力のモーメントであることがわかる。式 2.13 を式 2.9 を用い書き換えると、

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV \tag{2.14}$$
$$= \int (\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i) dV \tag{2.15}$$
$$= \int \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) - \int (\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l}) dV \tag{2.16}$$

ここで、$\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$($\delta_{jl}$ はクロネッカーのデルタを表している。) また、式 2.16 の第 1 項はガウスの発散定理により表面積分に書き換えられるため、

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l - \int (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV \tag{2.17}$$

体積の内部に発生する任意の力は反作用が体積内部に存在する。これらは作用点が同じであり、作用反作用の法則により互いに反対方向を向いた力であることから、モーメントを足し合わせると 0 になる。体積内のモーメントの合計があるベクトル値関数の表面積分のみで表せる場合、式 2.17 の第 2 項は高等的に 0 になる。つまり

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 0 \tag{2.18}$$
$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{2.19}$$

このことから、応力テンソルは対象であるという事実が得られる。以上から

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV \tag{2.20}$$
$$= \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l \tag{2.21}$$

2.2　一様な圧力を受けているときの応力テンソル

周辺から一様な圧力 p を受けた時の応力テンソルを考える。物体の表面の面素 df_i には $-p df_i = -p\delta_{ik} df_k$ の力が働いている。したがって周辺からの力に関する式

$$\oint (-p) \delta_{ik} df_k = \oint \sigma_{ik} df_k \tag{2.22}$$

が得られ、応力テンソルは

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} \tag{2.23}$$

とわかる。

2.3　変形の熱力学

2.3 のセクションでは、物体の変形 u_i がとても微小量 $j\delta u_i$ だけ変化すると仮定する。つまり式 2.5 が成立すると仮定する。内部応力による仕事を定める。物体の変形による物体のある体積における内部応力のする仕事は、各点において内部応力がした仕事の体積全体での積分。つまり、力 $F_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$ に δu_i を乗じそれを全体積で積分したもの。

$$\int \delta R dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i dV \tag{2.24}$$

$$= \oint \sigma_{ik}\delta u_i df_k - \int \sigma_{ik}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV \tag{2.25}$$

ここで、式 2.24 から式 2.25 にかけて部分積分を行なっており、δR は内部応力の単位体積あたりの仕事量をあらわす。無限遠方において変形を受けていない有界な物質を仮定すれば、式 2.25 の第 1 項における積分表面を無限遠方に近づけることによって第 1 項において $\delta u_i = 0$ が成立するため第 1 項は 0 となる。テンソルの対称性を考慮し、式変形を行うと

$$\int \delta R dV = -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i})dV \tag{2.26}$$

$$= -\int \frac{1}{2}\sigma_{ik}\delta(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i})dV \tag{2.27}$$

$$= -\int \sigma_{ik}\delta u_{ik} dV \tag{2.28}$$

ただし最後の式変形において式 2.5 を用いた。以上から

$$\delta R = -\sigma_{ik} u_{ik} \tag{2.29}$$

この公式によって歪みテンソルの変化に応じる仕事 δR を定めた。物体変形が十分小さい時、変形歪みを発生させる外力を取り除くことで、物体は変形を受ける前の元の状態に復帰する。このような歪のことを弾性とよぶ。変形が大きい場合、外力を取り除いても完全な変形を受ける前の状態には戻らない場合がある。本論文では場合のみを考える。

単位体積当たりの内部エネルギーの変化量 $d\mathscr{E}$ は物体に単位体積当たりに与えられる熱量と、内部応力によって物体が外にする仕事 δR の差に等しい。可逆過程において、熱量の変化は TdS 温度を T とした。

式 2.29 から

$$d\mathscr{E} = TdS - dR \tag{2.30}$$

$$= TdS + \sigma_{ik}\delta u_{ik} \tag{2.31}$$

式 2.23 より

$$\sigma_{ik}du_{ik} = -p\delta_{ik}du_{ik} = -pdu_{ii} \tag{2.32}$$

ここで u_{ii} は変形による体積の相対変化であることから、これは単位体積の増分のもとの単位体積と比べた時の割合 dV に等しい。したがって熱力学関係式は次のように書き表せる。

$$d\mathscr{E} = TdS - pdV \tag{2.33}$$

$$\tag{2.34}$$

自由エネルギー $F = \mathscr{E} - TS$ これを式 2.31 に代入すると

$$dF = -SdT + \sigma_{ik}du_{ik} \tag{2.35}$$

物体の熱力学ポテンシャル Φ を

$$\Phi = \mathscr{E} - TS - \sigma_{ik} du_{ik} = F - \sigma_{ik} du_{ik} \tag{2.36}$$

S, u_{ik} および T, u_{ik} が独立変数であるため

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T \tag{2.37}$$

また、

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}}\right) \tag{2.38}$$

2.4　フック則

この章では等方性のある物体を考え、F の歪テンソルによるべき級数展開を考える。今、いたるところで温度が一定の物体が変形を受けているものとし、この温度において外力を受けていない場合物体は変形しない。つまり、膨脹熱が存在せず、外力と内部応力のみによって変形が起こる場合を考える。$u_{ik} = 0$ であるとき、付近からの内部応力を受けていないことになるため $\sigma_{ik} = 0$ 今、$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$ から F の u_{ik} に関する冪級数展開の 1 次の項は 0 となる。参考文献 [4] から等方性を仮定することによって、u_{ik} における一般同次式はテンソル u_{ik} の第 1 不変量 $u_{ii}u_{kk}$ と、第 2 不変量 u_{ik}^2 によって表されるということがわかっている。したがって

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii} u_{kk} + \mu u_{ik}^2 \tag{2.39}$$

λ, μ はそれぞれラメ係数と呼ばれる。$u_{ii} = 0$ となる時物体の体積変化率は 1 と (式 2.7 参照) 剪断歪と呼ぶ。

一方体積変化がないが元の物体と相似な形に変形するような変形を周辺圧縮とい、このような変形における歪テンソルは

$$u_{ik} = const \delta_{ik} \tag{2.40}$$

という形をとる。また、歪テンソルを剪断歪による歪と、周辺圧縮による歪に分けることができる。

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll} \tag{2.41}$$

とあらわせる。第 1 項対角項の和をとると

$$u_{mm} - 3\frac{1}{3}u_{ll} = 0$$

となるため、第 1 項は純粋剪断歪を表しており、第 2 項は表記からわかる通り周辺圧縮歪である。変形を受けた等方性のある物体の自由エネルギーも剪断歪と周辺圧縮歪で書き直すと (F_0 を省略すると)

$$\begin{aligned} F &= \frac{\lambda}{2} u_{ii} u_{kk} + \mu u_{ik}^2 \\ &= \frac{\lambda}{2} u_{ii} u_{ll} + \mu \left(\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)^2 + \frac{2}{3}\delta_{ik} u_{ll} \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{9}\delta_{ik}\delta_{ik} u_{ll} u_{mm} \right) \end{aligned} \tag{2.42}$$

式 2.41 の第 1 項が 0 となるのと同じ理由から

$$F = \frac{\lambda}{2} u_{ii} u_{ll} + \mu \left(\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)^2 + + \frac{1}{3} u_{ll} u_{mm} \right) \tag{2.43}$$

$$= \mu (u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll})^2 + \frac{1}{2} K u_{ii} u_{ll} \tag{2.44}$$

ただし $K=\lambda+\frac{2}{3}\mu$ としており、K は周辺圧縮率、μ は剪断率と呼ばれる。平衡状態において自由エネルギーは最小となるため、物体に何も外力が働いていない場合 F が極小値をとるのは $ku_{ik}=0$ のときでなければならない。つまり 0 が極小値となり式 2.44 は正の値をとる。また、テンソルを $u_{ll}=0$ となるようにとることができ、この時式 2.44 は第 1 項のみとなり $u_{ik}=const\delta_{ik}$ となるように取れば式 2.44 は第 2 項のみとなる。したがって式 2.44 が正となるための必要十分条件は

$$K>0,\mu>0$$

つぎに、式 2.37 を用いて応力テンソルを歪テンソルを用いて表すことを考える。

$$dF=K_{ll}du_{ii}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) \tag{2.45}$$

$du_{ii}=\delta_{ik}du_{ik}$ と u_{ll} は不変量であることから

$$dF=\left(Ku_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\right)du_{ik} \tag{2.46}$$

よって式 2.37 から

$$\sigma_{ik}=Ku_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) \tag{2.47}$$

これで σ_{ik} を σ_{ik} で表すことができた。u_{ii} を σ_{ik} で表せれば u_{ik} を σ_{ik} で表すことができる。式 2.47 の第 2 項は剪断歪であることから対角成分の和をとると 0 になるので

$$u_{ii}=\frac{1}{3K}\sigma_{ii} \tag{2.48}$$

この式から u_{ii} と σ_{ii} は周辺圧縮率のみで定まることが分かった。式 2.47 にこの式を代入すると

$$u_{ik}=\frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}+\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right) \tag{2.49}$$

よって歪テンソルを応力テンソルで定めることができた。周辺一様圧縮を受けた場合の応力テンソルは式 2.23 であるため周辺一様圧縮の場合の式 2.48 はは

$$u_{ii}=-\frac{p}{K} \tag{2.50}$$

となる。u_{ii}/p は単位圧力あたりの体積の相対変化率を表しているので

$$\frac{u_{ii}}{p}=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,\frac{1}{K}=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

が得られる。$\frac{1}{K}$ を周辺圧縮係数と呼ばれる。歪テンソルは応力テンソルの線形和で表されることから変形は物体に働く力に比例するという法則を Hooke 則という。ここで Euler 定理

$$\boldsymbol{x}\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})=kf(\boldsymbol{x}) \tag{2.51}$$

(ただし k は同次関数の次数) を用いれば

$$u_{ik}\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}=2F \tag{2.52}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ik}u_{ik}=F \tag{2.53}$$

式変形において式 2.37 を用いた。ここで式 2.49 を代入し Euler の定理を用いると、

$$\sigma_{ik}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ik}}=2F \tag{2.54}$$

式 2.53 と比較して

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} \tag{2.55}$$

導出からもわかる通りこの式は熱力学的に一般的な関係式というわけではなく、Hook の法則が成立する場合にしか成立しない。

2.5　均等変形

今均等変形となる場合について考える。均等変形とは歪テンソルが物体のいたるところで一定であるような変形である。その中でも棒の両端を引っ張った場合の棒の単純引張りをかんがえる。歪テンソルが z 軸に沿うようにおかれ両端から外側に引っ張る力が働いている場合を考える。単位体積当たりの引っ張る力を p とする。この場合変形が物体全体において一定となる場合応力テンソルも物体の中で一定となる。棒の表面において釣り合いの式を考えると σ_{ik} は σ_{zz} 以外 0 であり

$$\sigma_{zz} = p \tag{2.56}$$

がえられる。式 2.49 にこれを代入すると

$$u_{xx} = u_{uu} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p \tag{2.57}$$

$$u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p \tag{2.58}$$

u_{zz} に関する式の p の係数を引張り係数、その逆数を E とあらわし、引張り率 (ヤング率) と呼ぶ。

$$u_{zz} = \frac{p}{E}, E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}$$

また、$u_{xx} = -\sigma u_{zz}$ となるように σ を定めると

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{3K-2\mu}{3K+\mu} \tag{2.59}$$

これは z 方向が伸びた時のそれに応じた x,y 方向の縮みがどれだけであるかを表したものである。σ が正の値をとる場合、z 軸方向が伸びた時に x,y 方向は縮む。$\frac{\mu}{K} = x \geq 0$ とおけば $\sigma = \frac{(3-2x)}{2(3+x)}$ である。x が 0 から ∞ を動くと考えれば

$$-1 \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$$

がえられる。棒を引張った時の棒の相対体積変化は

$$u_{ii} = p\frac{1}{3K} \tag{2.60}$$

次に自由エネルギーを求める。式 2.53 より

$$F = \frac{\sigma_{zz}u_{zz}}{2} = \frac{p^2}{2E} \tag{2.61}$$

弾性率 K, μ はヤング率とポアソン比 E, σ をもちいて

$$\mu = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{2.62}$$

σ, E を用いると式 2.42, 式 2.47, 式 2.49 は以下の様に書き換えられる。($\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$ であることを使っている。)

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}^2\right) \tag{2.63}$$

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right) \tag{2.64}$$

$$u_{ik} = \frac{1}{E}\left((1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}\right) \tag{2.65}$$

2.6　温度変化を伴った変形

今、温度変化を伴った変形について考察する。温度変化は変形の仮定の結果として変化する場合や、外的要因によって変化する場合がある。ある一定の温度 T_0 において、外力が存在しないならば変形が起こらない状態を考える。物体が T_0 と異なる温度 T にあるとするならば、外力を受けていなくても物体は熱膨張による変形を受ける。よって自由エネルギー F の歪テンソル u_{ik} による冪級数展開には、歪テンソルの一次の項が含まれるはずである。F は主軸系の取り方によらないが、主軸系によらない歪テンソルの 1 次スカラーは、対角成分の和 u_{ii} のみである。よって、熱膨張を考慮しない場合の自由エネルギーのべき級数展開 (式 2.44) に代わって次の式が得られる。

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T-T_0)u_{ll} + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) + \frac{K}{2}u_{ll}^2 \tag{2.66}$$

μ, K, α はここでは一定と考える。式 2.37 から応力テンソルは

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T \tag{2.67}$$

$$= -K\alpha(T-T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) \tag{2.68}$$

$$= -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}(T-T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) \tag{2.69}$$

この場合

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} \tag{2.70}$$

外力が存在しない場合、内部応力は 0 となるため式 2.69 において $i = k$ となる場合の和をとれば第 3 項は剪断歪を表しているため 0 となり

$$u_{ll} = \alpha(T-T_0) \tag{2.71}$$

が得られる。u_{ll} は体積の相対変化を表しているため、α は物体の熱膨張係数と呼ぶ。等温変形を考える場合、式 2.66 の第 2 項は 0 となり熱流を考慮しなかった場合の自由エネルギーの式 2.53 に一致する。したがってこのときの K, μ のことを等温率と呼ぶ。断熱変形を考える場合、エネルギーの変化が起きないため、エントロピー S は一定値をとる。

$$S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{2.72}$$

$$= S_0(T) + K\alpha u_{ll} \tag{2.73}$$

S はここで一定だからこの式から $T - T_0$ が定まり、この値は u_{ll} に比例する。よって式 2.69 は

$$\sigma_{ik} = K_{ad}u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) \tag{2.74}$$

2.7　つり合い方程式

物体が重力場にあり、物体の等方性を仮定した個体のつり合いの方程式を導出する。つり合い状態において常に内部応力は物体の単位体積当たりにかかる常に重力と相殺されなければならないので

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \tag{2.75}$$

(ただし重力加速度 $\boldsymbol{g} = (g_i)$) つり合い方程式に式 2.70 を代入し、2.5 を用いると次のようなつり合い方程式が得られる。

$$-\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0 \tag{2.76}$$

$$-\frac{2\alpha(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}\nabla T + \Delta \boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = -\rho \boldsymbol{g}\frac{2(1+\sigma)}{E} \tag{2.77}$$

ベクトル解析の公式

$$\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = \Delta \boldsymbol{u} + \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{u}$$

を用いると

$$-\frac{\alpha(1+\sigma)}{3(1-\sigma)}\nabla T + \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{u} = -\rho \boldsymbol{g}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \tag{2.78}$$

物体表面にかかる力のみで変形が起こるときのつり合い方程式は

$$-\frac{2\alpha(1+\alpha)}{3}\nabla T + (1-2\sigma)\Delta \boldsymbol{u} + \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.79}$$

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \alpha \nabla T \tag{2.80}$$

で表される。外力は境界条件のみによって定まる。右辺が 0 である場合 (熱膨張を考慮しない場合) においては、式 2.80 の両辺に発散をとると $\mathrm{div}\ \mathrm{grad} = \Delta$, $\mathrm{div}\ \mathrm{rot} = 0$ から

$$\Delta \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.81}$$

式 2.79 に Δ を左から作用させると

$$\Delta \Delta \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.82}$$

が得られる。よって物体に表面のみに外力が働いている場合、変形ベクトルは重調和方程式を満たす。単位体積当たりにかかる力の大きさが場所によらず一定であれば同様の結果が得られる。

2.8　熱伝導方程式

固体における熱拡散方程式は熱量の連続方程式 (エネルギー保存則) から導かれる。物体の単位体積当が持つ熱量の単位時間当たりの変化は $T\frac{\partial S}{\partial t}$ とあらわすことができ S はエントロピー密度 (単位体積当たりのエントロピー) であり、参考文献 [4] より、$S = \nabla \boldsymbol{q}$ を満たす $\boldsymbol{q}$($\boldsymbol{q}$ は熱流れ密度) が存在する。また、熱流れ密度は $\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla T$ という形で表される。したがって

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \mathrm{div}(\kappa \nabla T) \tag{2.83}$$

式 2.73 を式 2.83 に代入すると

$$T\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha KT\frac{\partial u_{ll}}{\partial t} = \kappa\Delta T \tag{2.84}$$

よく知られた熱力学公式 $C_p - C_v = K\alpha^2 T$ と、$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{C_v}{T}$ を用いれば

$$C_v\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \kappa\Delta T \tag{2.85}$$

2.9　棒および板における弾性方程式

この章では棒や板における歪の伝播を考える。これまでは応力テンソルを簡略化する等のために無限に広がる媒質に関する議論を行ってきた。棒や板において無限媒質という仮定は一般的には成立しないが、物体内を伝播する波の波長が棒の各方向の長さに対して十分小さい場合棒や板の各方向を無限に広い媒質として仮定することができるため、これまでの議論が利用できる。z 軸を棒に沿う方向に設定し、棒の中に生じる縦波と横波を分けて考える。まず縦波について考える。棒の側面に外力が働いていない場合の縦変形は単純引張りまたは圧縮を表している。単純引張りの場合の応力テンソルは 2.5 章にあるように σ_{zz} 以外 0 となり、

$$\sigma_{zz} = Eu_{zz} = E\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.86}$$

という関係式で結ばれる。また温度変化を考慮しない場合、各点単位体積あたりおける一般運動方程式は

$$\rho\frac{\partial u_z^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k} \tag{2.87}$$

式 2.86 を代入すれば

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \tag{2.88}$$

これが温度変化を考慮しない場合の弾性方程式となる。

第 3 章

懸架系ファイバにおける熱雑音

3.1 Langevin Approach

Langevin Approach は Braginsky の先行研究 (3.1.1 章) において, 熱弾性雑音を導出するために提案された手法である. 平衡温度からのわずかな温度揺らぎ $\theta(x,t)$ を再現するため, 熱拡散方程式に仮想的な熱源としてランジュバン項 $F(x,t)$ を導入し, 温度揺らぎを Langevin 項であらわす. 次に Langevin 項の規格化を熱統計力学に関する式を用いて行い, 変位揺らぎ $u(x,t)$ を Langevin 項で表すために弾性方程式を用いる.
ここで,Langevin 項の自乗のアンサンブル平均 $\langle F(x,t)F^*(x',t')\rangle$ が式 3.3 で与えられているため, 変位揺らぎの自乗のアンサンブル平均を導出することができる. これをフーリエ変換することで変位揺らぎのパワースペクトル密度を得る. 詳しくは章 3.1.1,3.2 を参照.

3.1.1 Braginsky による先行研究

この章では参考文献 5 に関して本論文と関連する部分を抜粋してまとめる.

3.1.1.1 背景

アメリカの重力波望遠鏡 LIGO は望遠鏡内のミラーの反射率を上げるため, ミラーに薄い誘電層のコーティングを行っている. 鏡本体とは異なり誘電層のコーティングは熱膨張による影響を大きく受けるため, 平衡温度からのわずかな温度揺らぎがか引き起こすコーティングの変位揺らぎが光路長に影響を及ぼし LIGO の感度に影響を与える可能性がある. その影響を調べるために Langevin 法を用いて変位揺らぎのアンサンブル平均と, パワースペクトルを計算する.

3.1.1.2 Langevin 法の厳密解と, 定性的な考察

参考文献 5 から, 平衡温度からの温度揺らぎ δT の自乗の空間平均は, 系の体積 V, 平衡温度 T, 密度 ρ, 比熱 C, ボルツマン定数 κ を用いて次のように表せる.

$$\langle \delta T^2 \rangle = \frac{\kappa T}{\rho C V} \tag{3.1}$$

古典固体熱力学において, 平衡温度からのわずかな温度揺らぎは固体の体積に影響を及ぼさなかったが, 熱膨張係数が 0 でない場合は影響を及ぼす. よって温度揺らぎが体積に及ぼす影響を計算するため, 熱拡散方程式に温度揺らぎを再現するための仮想的な熱源 (Langevin 項) を導入した熱拡散方程式と, 弾性方程式を解くことで変位揺らぎのパワースペクトル密度を導出する. 使用する熱拡散方程式と弾性方程式はそれぞれ次のよう

になる.(ただし平衡温度からの揺らぎを θ, 変位揺らぎを u とおく.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} - \chi\Delta\theta(\boldsymbol{x},t) = F(\boldsymbol{x},t) \\ \frac{1+\nu}{1-\nu}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}u(\boldsymbol{x},t) - \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}u(\boldsymbol{x},t) = \alpha\nabla\theta(\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

(ν,α,χ はそれぞれポアソン比, コーティングとミラー本体の熱膨張率の差, 熱拡散率を表している.)

F はランジュバン項と呼ばれ, 平衡温度からのランダムな揺らぎを再現するための熱源を表している. また,F_0 は平衡温度によって定まる定数である.

$$\langle F(\boldsymbol{x},t)F^*(\boldsymbol{x}',t')\rangle = F_0^2\delta(t-t')\Delta\left(\delta(x-x')\delta(y-y')(\delta(z-z')+\delta(z+z'))\right) \tag{3.3}$$

ランジュバン項をフーリエ変換すると次のような式が得られる.

$$\langle F(\boldsymbol{k},\omega)F^*(\boldsymbol{k}',\omega')\rangle = F_0^2(2\pi)^4|k|^2\delta(t-t')\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(k_x-k_x')\delta(k_y-k_y')(\delta(k_z-k_z')+\delta(k_z+k_z')) \tag{3.4}$$

また,$\theta(\boldsymbol{x},t)$ に関して次の変形を行う.

$$\theta(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\cdots\int d\boldsymbol{k}\,d\omega\,\tilde{\theta}(\boldsymbol{k},\omega)e^{i\omega t+i\boldsymbol{kr}} \tag{3.5}$$

熱拡散方程式から

$$\tilde{\theta}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{\tilde{F}(\boldsymbol{k},\omega)}{\chi(\boldsymbol{k})^2+i\omega} \tag{3.6}$$

論文では弾性方程式対して境界条件が定められており, これを用い変位揺らぎのパワースペクトル S_{TD} を導出する.(導出の流れは次章の 1 次元計算と同じなので省略)

$$\begin{aligned} S_{TD}^{\theta}(\boldsymbol{k},\omega) &= \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)^2}{\pi}\frac{\alpha^2d^2k_BT^2}{r_0^2\sqrt{\kappa\rho C\omega}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)^2}{\pi}\frac{\alpha^2d^2k_BT^2}{\rho Cr_0^2r_T\sqrt{\omega}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

(d,k_B,T,r_0,ρ,C はそれぞれミラーコーティングの厚さ, ボルツマン定数, 平衡温度, レーザーのビーム径, コーティングの密度, コーティングの比熱を表している.)

熱拡散長 r_T を次のように定める.

$$r_T = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho C\omega}} \tag{3.8}$$

この熱拡散長は減衰する熱が届く範囲を表しており,r_T 離れた場所の温度揺らぎは独立である. この熱拡散長を用いて定性的に熱弾性雑音を推定することができる. ミラーコーティングの薄さ d はとても小さく,$d << r_T$ と仮定する. 仮定から, 鏡の奥行き方向に対してミラーコーティングの温度揺らぎはコヒーレントとなる. 鏡の熱膨張率を α_{bulk} ミラーコーティングの熱雑音を α_{layer} とし $\alpha = \alpha_{layer} - \alpha_{bulk}$ とすれば, コーティング部分における熱拡散長範囲内のミラーの変位揺らぎ Δx_T は

$$\Delta r_T = \alpha d\Delta T \tag{3.9}$$

ただし,ΔT は熱拡散長内の温度揺らぎを表す. 式 3.1 から導出される温度揺らぎと, コーティング内で独立な温度揺らぎをする小体積が $N = \frac{r_0^2}{r_T^2}$ 個あることからビームスポット全体の変位揺らぎの平均 $\bar{X}$ は

$$\bar{X} = \alpha d\sqrt{\frac{k_BT^2}{\rho Cr_0^2r_T}} \tag{3.10}$$

よって大まかにパワースペクトル密度を考えると

$$\begin{aligned} S_{TD}^{est} &\simeq \alpha^2 d^2 \bar{X}^2 \\ &\simeq \alpha^2 d^2 \frac{k_B T^2}{\rho C r_0^2 r_T} \end{aligned} \tag{3.11}$$

を考えることができる. 式 3.7 と比較すれば係数は違えど, 周波数を除いてスケールが一致することがわかる.

3.2　懸架系ファイバに対する Langevin 法の応用

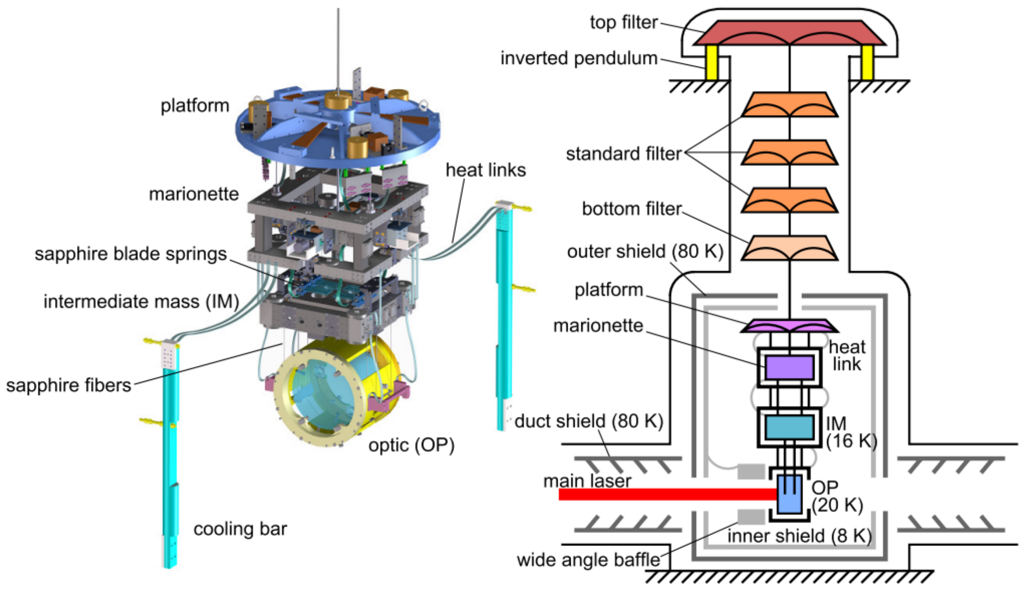

図 3.1　懸架系のモデル (文献 5) より引用

重力波望遠鏡 KAGRA は山にトンネルを掘り, その中にマイケルソン干渉計を設置している. また, 干渉計内の鏡は地面振動からの影響を減らすために懸架されており (図 3.1), 鏡自身の熱雑音を減らすため鏡と同じ素材の懸架系ファイバを通じて鏡の冷却を行っている. そのため, 懸架系ファイバには熱流が存在し (非平衡状態), 熱流がファイバ下端の変位の揺らぎを引き起こす. この揺らぎは, 鏡の曲率を通じて重力波測定にノイズを引き起こす. また, 参考文献 5 からわかる通り, 平衡状態においても平衡状態からのわずかな温度揺らぎが存在し, 熱膨張係数を介して変位揺らぎを引き起こす. このような理由から, 非平衡状態における懸架系ファイバの前段階として Braginsky の論文同様に平衡状態を仮定し, 懸架系ファイバに生じる変位揺らぎを計算することが本章の目的である.

最終的に, 変位揺らぎは自乗のアンサンブル平均の形で導出され, これをフーリエ変換することでパワースペクトル密度が求まる. これを次の式に代入することで変位揺らぎのパワースペクトル密度から感度に書き直すことができる.

$$Sensitivity = \frac{\sqrt{S_u(\omega)} \times l_c}{a_{zarm}} \tag{3.12}$$

以下, 変位揺らぎのパワースペクトルから式 3.12 で求められた数値を熱弾性雑音と呼ぶ. KAGRA の鏡は最終的に 20K に冷却することを目標としており,20K において表 3.1 から熱拡散長 r_T はファイバの半径 r_0 に比べて大きい. よってファイバ断面における温度揺らぎは一定となるため,z 方向依存性のみを見ればよい (図 3.3). 3.3 章ではこのようにファイバを 1 次元とみなした場合の計算を行う.

KAGRA の鏡の目標温度は 20K であったが当時 KAGRA の鏡の温度は 300K であったため,4 章では 300K

における ファイバの熱弾性雑音が KAGRA の感度に影響を与えているかの検証を試みている. ただし 300K において熱拡散長はファイバの半径に比べ小さい値であるため,(表 3.1) ファイバの断面における温度揺らぎは一定であるとみなせない.(図 3.2) したがってファイバを断面方向の依存性も含めた 3 次元モデルとみなした状態で熱弾性雑音を計算する必要がある.

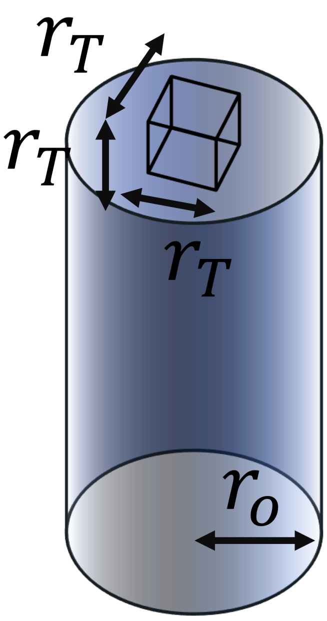

図 3.2　熱拡散長 300K

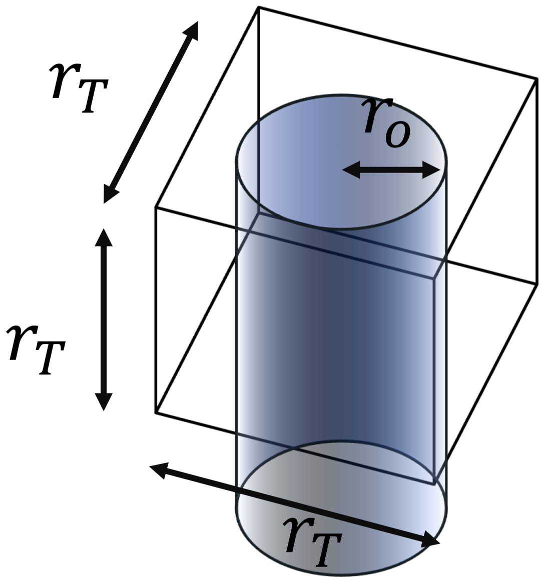

図 3.3　熱拡散長 20K

	20K	300K
r_T [m]	0.17	0.00025
r_o [m]	0.0008	0.0008
a_z [m]	0.35	0.35

表 3.1　温度ごとの熱拡散長

3.3　1 次元

3.3.1　弾性方程式と熱拡散方程式の導出

Langevin 法で使用する弾性方程式を導出する. ファイバの懸架されている方向に z 軸をとり, 熱膨張による圧力を考慮した z 方向の弾性方程式を導出する.

熱膨張により単位体積当たりにかかる力の大きさは Hook の法則から $\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \cdot \alpha \cdot E$ である. したがって, ファイバにおける一般方程式は式 2.87 に熱膨張による圧力の項を追加した次のような式となる.

$$\frac{\rho}{S}\frac{\partial^2 u_z(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zk}(z,t)}{\partial x_k} + E\alpha\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \tag{3.13}$$

ファイバの外力から受ける単純引張を考えているため, 式 2.86 から

$$\frac{\partial^2 u_z(z,t)}{\partial z} - \frac{\rho}{SE}\frac{\partial^2 u_z(z,t)}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = 0 \tag{3.14}$$

次に Langevin 法で用いる熱拡散方程式を導出する.

$$\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} - \chi\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} = \frac{SE\alpha T}{\rho C}\frac{\partial^2 u_z(z,t)}{\partial t \partial z} \tag{3.15}$$

上式における熱流の項を Langevin 項に置き換えることによって温度揺らぎを再現した熱拡散方程式 (式 3.16) が得られる.

$$\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t} - \chi\frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial z^2} = F(z,t) \tag{3.16}$$

温度揺らぎを $\theta(z,t) = \theta(z)\int\theta(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ として熱拡散方程式に代入すると, 各 ω ごとに次のような式が得られる.

$$i\omega\tilde{\theta}(z,\omega) - \chi\frac{\partial^2\tilde{\theta}(z,\omega)}{\partial z^2} = \tilde{F}(z,\omega) \tag{3.17}$$

ファイバの表面では温度揺らぎが一定という仮定から, 境界条件

$$\dot{\theta}(0,t) = \dot{\theta}(a_z,t) = 0 \tag{3.18}$$

が成立する. 境界条件から, 熱拡散方程式の一般解をフーリエ余弦級数展開すると次の式を得る.

$$\theta(z) = \sum_n \theta_n \cos(\frac{n\pi z}{a_z}) \tag{3.19}$$

$$\tilde{\theta}(z,\omega) = \tilde{\theta}(z,\omega)\sum_n \theta_n \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) = \sum_n \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\tilde{\theta}_n(\omega) \tag{3.20}$$

ただし,

$$\tilde{\theta}_n(\omega) = \frac{2}{a_z}\mathcal{F}[\theta(t)](\omega)\int_0^T \theta(x)\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)dt \tag{3.21}$$

($n=0$ のときは右辺は 2 倍の値となる) F も同様にフーリエ級数展開すると

$$F(z,t) = \sum_n \left(F_n(t)\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) + F'_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{a_z}\right)\right) \tag{3.22}$$

$$\tilde{F}(z,\omega) = \sum_n \left(\tilde{F}_n(\omega)\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) + \tilde{F}'_n(\omega)\sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\right) \tag{3.23}$$

ただしフーリエ級数展開した $F(\omega,t), \theta(\omega,t)$ を, 式 3.17 に代入すると

$$i\omega\tilde{\theta}_n(\omega) + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi\tilde{\theta}_n(\omega) = \tilde{F}_n(\omega) \tag{3.24}$$

$$\tag{3.25}$$

を得る. したがって Langevin 項も余弦級数で書き表せることがわかる. したがって次のような式を得る.

$$\theta_n(\omega) = \frac{F_n(\omega)}{i\omega + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi} \tag{3.26}$$

$$\theta(z,\omega) = \sum_n \frac{F_n(\omega)}{i\omega + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi}\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \tag{3.27}$$

参考文献 5 から 1 次元 Langevin 項のアンサンブル平均は以下のように与えられる.

$$\langle\tilde{F}(z,t)\tilde{F}^*(z',t')\rangle = F_0^2 \times \delta(t-t') \times \frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta(z-z') \tag{3.28}$$

また, デルタ関数の微分に対して次のような 2 式が成立する.

$$\int \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x-x')f(x)dx = \left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x'} \tag{3.29}$$

$$\delta(\omega-\omega') = \frac{1}{2\pi}\int e^{-it(\omega-\omega')}dt \tag{3.30}$$

したがって

$$\langle F_n(\omega)F_m^*(\omega')\rangle \tag{3.31}$$

$$= \langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}_n(z,t)e^{-i\omega t}dt\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}_m^*(z',t')e^{i\omega' t'}dt'\rangle \tag{3.32}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle F_n(z,t)F_m^*(z,t)\rangle e^{-i(\omega t-\omega' t')}dtdt' \tag{3.33}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{2}{a_z}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{a_z}\int_0^{a_z}\langle F(z,t)F^*(z',t')\rangle e^{-i(\omega t-\omega' t')} \tag{3.34}$$

$$\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi z'}{a_z}\right)dzdz'dtdt$$

$$= \left(\frac{F_0}{\pi a_z}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{a_z}\int_0^{a_z}\delta(t-t')e^{-i(\omega t-\omega' t')}dtdt'\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta(z-z')v \tag{3.35}$$

$$\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi z'}{a_z}\right)dzdz'dtdt'$$

$$= -\left(\frac{F_0}{\pi a_z}\right)^2 2\pi\delta(\omega-\omega')\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\int\cos\left(\frac{n\pi z'}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi z'}{a_z}\right)dx' \tag{3.36}$$

$$= -\frac{F_0^2}{\pi a_z}\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\delta_{nm}\delta(\omega-\omega') \tag{3.37}$$

ただし $n=m=0$ となるときただし,5 行目から 6 行目において式 3.30 を用いた．式 3.27 を用いることで温度揺らぎのフーリエ変換のアンサンブル平均を求めファイバ全体で積分するとファイバ全体における温度揺らぎの空間平均に関するアンサンブル平均が導出できる．

$$\langle\bar{\theta}^2\rangle \tag{3.38}$$

$$= \langle\frac{1}{a_z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{a_z}\tilde{\theta}(z,\omega)e^{i\omega t}d\omega dz\frac{1}{a_z}\int_{\infty}^{\infty}\int_0^{a_z}\tilde{\theta}^*(z',\omega')e^{-i\omega' t}d\omega' dz'\rangle \tag{3.39}$$

$$= \frac{1}{a_z^2}\int\int\int\int\sum_{n,m}\langle\tilde{\theta}_n(\omega)\tilde{\theta^*}_m(\omega')\rangle\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi z'}{a_z}\right)e^{i(\omega t-\omega' t)}dzdz'd\omega d\omega' \tag{3.40}$$

$$= \frac{1}{a_z^2}\int\int\int\int\sum_{n,m}\langle\frac{\tilde{F}_n(\omega)}{i\omega+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi}\frac{\tilde{F}_m^*(\omega')}{-i\omega'+\left(\frac{m\pi}{a_z}\right)^2\chi}\rangle\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi z'}{a_z}\right)e^{i(\omega t-\omega' t)}dzdz'd\omega d\omega'$$

$$= \frac{1}{a_z^2}\int\int\int\int\sum_{n,m}\frac{\langle\tilde{F}_n(\omega)\tilde{F}_m^*(\omega')\rangle}{(i\omega+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi)(-i\omega'+\left(\frac{m\pi}{a_z}\right)^2\chi)}\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi z'}{a_z}\right)e^{i(\omega t-\omega' t)}dzdz'd\omega d\omega'$$

$$= -\frac{F_0^2}{\pi a_z^3}\int\int\int\sum_n\frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2}{\omega'^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^4\chi^2}\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{n\pi z'}{a_z}\right)dzdz'd\omega' \tag{3.41}$$

$$= -\frac{F_0^2}{\pi a_z^3}\int\sum_{n=0}\frac{\sin^2(n\pi)}{\omega'^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^4\chi^2}d\omega' \tag{3.42}$$

$$= -\frac{F_0^2}{\pi a_z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi a_z^2}{\chi}\frac{\sin^2(n\pi)}{(n\pi)^2} \tag{3.43}$$

$$= -\frac{F_0^2}{\pi a_z^3}\frac{\pi a_z^2}{\chi} \tag{3.44}$$

$$= -\frac{F_0^2}{\chi a_z} \tag{3.45}$$

熱力学的要請から

$$\langle\bar{\theta}^2\rangle = \frac{k_B T^2}{\rho C a_z} \tag{3.46}$$

から

$$F_0^2 = \frac{k_B T^2 \kappa}{(\rho C)^2} \tag{3.47}$$

ファイバの弾性方程

　に式 3.27 を x で偏微分したものと,$u_z(z,t) = u_(z) \int \tilde{u}_z(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ を代入することで各 ω に対して次の式が得られる.

$$E\frac{\partial^2 u_z(z,\omega)}{\partial z^2} + \frac{\rho}{S}\omega^2 u_z(z,\omega) = E\alpha \sum_n \frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)}{i\omega + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 \chi} F_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi}{a_z}\right) \tag{3.48}$$

$$\equiv \sum_n f_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi}{a_z}\right) \tag{3.49}$$

この微分方程式の斉次の一般解は $k = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{SE}}$ とすれば

$$u^H(z,\omega) = A(\omega)\sin(kz) + B(\omega)\text{cos}(kz) \tag{3.50}$$

であり特殊解は次の式で表される.

$$u^S(z,\omega) = \sum_n \frac{-f_n(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 - \frac{\rho\omega^2}{S}} \sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \tag{3.51}$$

ファイバの上端は固定されているので,

$$u(0,\omega) = 0 \tag{3.52}$$

この式から B=0 が得られる. 下端の境界条件を求めるために, 鏡に関する運動方程式を立てる. 鏡にかかる力はファイバからかかる力 (F_f とする.) と重力であるしたがって運動方程式は

$$M\frac{\partial^2 u_z(z,t)}{\partial t^2} = Mg - F_f(z,t) \tag{3.53}$$

ここで作用反作用の法則により $F_f(z,t)$ はファイバを引張る断面積あたりにかかる力の大きさであるため式 2.5 から

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{F_f(z,t)}{SE} \tag{3.54}$$

よって運動方程式は

$$M\frac{\partial^2 u_z(z,t)}{\partial t^2} = Mg - \frac{\partial u_z(z,t)}{\partial z} SE \tag{3.55}$$

$$-Mu_z(z) \int \omega^2 \tilde{u}_z(\omega) e^{i\omega t} d\omega = Mg - \frac{\partial u_z(z,t)}{\partial z} SE \tag{3.56}$$

周波数ごとに運動方程式を分けると

$$-M\omega^2 \tilde{u}_z(z,\omega) = Mg\delta(\omega) - \frac{\partial \tilde{u}_z(z,\omega)}{\partial z} SE \tag{3.57}$$

よって $z = a_z$ における境界条件は $\omega \neq 0$ において

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}_z(z,\omega)}{\partial z}\right|_{z=a_z} = \frac{M\omega^2}{SE}\tilde{u}_z(a_z,\omega) \tag{3.58}$$

したがってこの条件から A が求まる．

$$A(\omega)k\cos(ka_z) - \sum_n \frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right) f_n(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 - \frac{\rho\omega^2}{S}}(-1)^n = \frac{M\omega^2}{SE}A(\omega)\sin(ka_z) \tag{3.59}$$

$$A = \frac{1}{k\cos(ka_z) - \left(\frac{M\omega^2}{SE}\right)\sin(ka_z)} \sum_n \frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right) f_n(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 - \frac{\rho\omega^2}{S}}(-1)^n \tag{3.60}$$

よって弾性方程式の解は次のようになる

$$\begin{aligned}\tilde{u}_z(z,\omega) = &\frac{1}{k\cos(ka_z) - \left(\frac{M\omega^2}{SE}\right)\sin(ka_z)} \times \\ &\times \left(\sum_n \frac{f_n(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 - \frac{\rho\omega^2}{S}} \left\{ (-1)^n \frac{n\pi}{a_z}\sin(kz) \right.\right. \\ &\left.\left. - \left(k\cos(ka_z) - \left(\frac{M\omega^2}{SE}\right)\sin(ka_z)\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\right\}\right)\end{aligned} \tag{3.61}$$

$z = a_z$ を代入することによって次のような式が得られる．

$$\begin{aligned}\tilde{u}_z(a_z,\omega) &= \frac{1}{k\cos(ka_z) - \left(\frac{M\omega^2}{SE}\right)\sin(ka_z)} \times \sum_n \frac{f_n(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 - \frac{\rho\omega^2}{S}}(-1)^n \frac{n\pi}{a_z}\sin(ka_z) \\ &= \frac{SE}{SE - \left(\frac{M\omega^2}{k}\right)\tan(ka_z)} \frac{\tan(ka_z)}{k} \\ &\quad \times \sum_n \frac{1}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 - \frac{\rho\omega^2}{S}}(-1)^n \frac{n\pi}{a_z} \frac{E\alpha\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)}{i\omega + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi}\tilde{F}_n(\omega) \\ &= \frac{SE}{SE - \left(\frac{M\omega^2}{k}\right)\tan(ka_z)} \frac{\tan(ka_z)}{k} \times \sum_n \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - a_z^2k^2} \frac{\alpha F_n(\omega)(-1)^n}{i\omega + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi}\end{aligned} \tag{3.62}$$

したがって $z = a_z$ における $\tilde{u}_z$ のアンサンブル平均を求めることができる．したがってファイバ下端のパワー

スペクトル密度は

$$
\begin{aligned}
P_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} C(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \langle \int \tilde{u}(a_z,\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^*(a_z,\omega'') e^{-i\omega'' t'} d\omega'' \rangle d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' t-\omega'' t')} \langle \tilde{u}(a_z,\omega')\tilde{u}^*(a_z,\omega'')\rangle d\omega' d\omega'' d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' t-\omega'' t')} \frac{SE\tan(ka_z)}{kSE - M\omega'^2\tan(ka_z)} \frac{SE\tan(ka_z)}{kSE - M\omega''^2\tan(ka_z)} \\
&\qquad \sum_n \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - a_z^2k^2} \frac{\alpha(-1)^n}{i\omega' + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi} \times \sum_m \frac{m^2\pi^2}{m^2\pi^2 - a_z^2k^2} \frac{\alpha(-1)^m}{-i\omega'' + \left(\frac{m\pi}{a_z}\right)^2\chi} \\
&\qquad\qquad \times \langle F_n(\omega') F_n^*(\omega'')\rangle \quad d\omega' d\omega'' d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' t-\omega'' t')} \frac{SE\tan(ka_z)}{kSE - M\omega'^2\tan(ka_z)} \frac{SE\tan(ka_z)}{kSE - M\omega''^2\tan(ka_z)} \frac{k_B T\kappa}{\pi a_z(\rho C)^2} \\
&\qquad \sum_n \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - a_z^2k^2} \frac{\alpha(-1)^n}{i\omega' + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi} \times \sum_m \frac{m^2\pi^2}{m^2\pi^2 - a_z^2k^2} \frac{\alpha(-1)^m}{-i\omega'' + \left(\frac{m\pi}{a_z}\right)^2\chi} \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 \\
&\qquad\qquad \times \delta_{nm}\delta(\omega-\omega') \quad d\omega' d\omega'' d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 k_B T\kappa}{\pi a_z(\rho C)^2} e^{i\omega''(t-t')} \left(\frac{SE\tan(ka_z)}{kSE - M\omega''^2\tan(ka_z)}\right)^2 \\
&\qquad\qquad \times \sum_n \left(\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - a_z^2k^2}\right)^2 \frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2}{\omega''2 + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^4\chi^2} \quad d\omega'' d\tau \\
&= \frac{\alpha^2 k_B T\kappa}{\pi a_z(\rho C)^2} \left(\frac{SE\tan(ka_z)}{kSE - M\omega''^2\tan(ka_z)}\right)^2 \sum_n \left(\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - a_z^2k^2}\right)^2 \frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2}{\omega''2 + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^4\chi^2}
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

ただし, 式 1.69 の表記を一行目で採用した. ここで, 無限級数に関する式

$$
\begin{aligned}
&\sum_n \left(\frac{1}{n^2-\phi^2}\right)^2 \frac{n^6}{n^4+b^4} \\
&= \Big(\pi(\phi^3\cosh(\sqrt{b}\pi)((5b^4+\phi^4)\cot(\pi\phi) - \pi\phi(b^4+\phi^4)\csc^2(\pi\phi) \\
&+ \phi^3\cos(\sqrt{2}b\pi)(-((5b^4+\phi^4)\cot^2(\pi\phi)) \\
&+ \sqrt{2}b^3(b^4-2b^2\phi^2-\phi^4)\sin(\sqrt{2}b\pi) + \sqrt{2}b^3(-b^4-2b^2\phi^2+\phi^4)\sinh(\sqrt{2}b\pi))) \\
&/4(b^4+\phi^4)^2(\cos(\sqrt{2}b)\pi) - \cosh(\sqrt{2}b\pi))\Big)
\end{aligned} \tag{3.64}
$$

この式を $\phi = \frac{ka_z}{\pi}, b = \frac{a_z}{\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}$ とすると, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\sum_n \left(\frac{1}{n^2-\phi^2}\right)^2 \frac{n^6}{n^4+b^4} \\
&= \frac{1}{4(b^4+\phi^4)^2}\frac{1}{\tan(\pi\phi)}\Bigg(-4\phi^3\pi b^4 - \sqrt{2}b^3\pi\tan(ka_z)\times \\
&\qquad \frac{(\phi^4+2b^2\phi^2-b^4)\sin(\sqrt{2}b\pi)-(\phi^4-2b^2\phi^2-b^4)\sinh(\sqrt{2}b\pi)}{\cos(\sqrt{2}b\pi)-\cosh(\sqrt{2}b\pi)}\Bigg) \\
&\qquad -\frac{1}{4(b^4+\phi^4)}\frac{\phi^3\pi}{\tan(\sqrt{2}\pi\phi)}(\tan(\sqrt{2}\pi\phi)-\pi\phi(1+\tan^2(\sqrt{2}\pi\phi))) \\
&= \frac{\pi^2}{(4\beta^4+(ka_z)^4)^2}\frac{\beta^3}{\tan(ka_z)} \\
&\quad \times\left(\frac{((ka_z)^4+4\beta^2(ka_z)^2+4\beta^4)\sin(2\beta)-((ka_z)^4-4\beta^2(ka_z)^2+-4\beta^4)\sinh(2\beta)}{\cosh(2\beta)-\cos(2\beta)}\tan(ka_z)-4\beta k^3a_z^3\right) \\
&\quad -\frac{\pi^2}{4(4\beta^4+(ka_z)^4)}\frac{(ka_z)^3}{\tan(ka_z)}(\tan(ka_z)-(ka_z)(1+\tan^2(ka_z))
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

よって式 3.63 は

$$
\begin{aligned}
&P_s(\omega) \\
&= \left(\frac{SE\tan(ka_z)}{kSE-M\omega^2\tan(ka_z)}\right)^2\frac{\alpha^2k_BT\kappa}{\pi a_z(\rho C)^2}\sum_n\left(\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2-k^2a_z^2}\right)^2\frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2}{\omega^2+\chi^2\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^4} \\
&= \left(\frac{SE\tan(ka_z)}{kSE-M\omega^2\tan(ka_z)}\right)^2\frac{\alpha^2k_BT\kappa}{\pi a_z(\rho C)^2}\left(\frac{a_z}{\pi\chi}\right)^2\sum_n\left(\frac{1}{n^2-\left(\frac{ka_z}{\pi}\right)^2}\right)^2\frac{n^6}{\left(\frac{a_z}{\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}\right)^4+n^4} \\
&= \left(\frac{SE\tan(ka_z)}{kSE-M\omega^2\tan(ka_z)}\right)^2\frac{\alpha^2k_BT\kappa}{\pi a_z(\rho C)^2}\left(\frac{a_z}{\pi\chi}\right)^2 \\
&\quad\Bigg(\frac{\pi^2}{(4\beta^4+(ka_z)^4)^2}\frac{\beta^3}{\tan(ka_z)} \\
&\quad\times\left(\frac{((ka_z)^4+4\beta^2(ka_z)^2+4\beta^4)\sin(2\beta)-((ka_z)^4-4\beta^2(ka_z)^2+-4\beta^4)\sinh(2\beta)}{\cosh(2\beta)-\cos(2\beta)}\tan(ka_z)-4\beta k^3a_z^3\right) \\
&\qquad -\frac{\pi^2}{4(4\beta^4+(ka_z)^4)}\frac{(ka_z)^3}{\tan^2(ka_z)}(\tan(ka_z)-(ka_z)(1+\tan^2(ka_z)))\Bigg) \\
&= \left(\frac{SE}{SE-\frac{M\omega^2}{k}\tan(ka_z)}\right)^2\Bigg(\frac{k_BT^2\alpha^2a_z^3}{\pi^3\kappa}\frac{\pi^2\tan(ka_z)\beta^3}{(4\beta^4+k^4a_z^4)^2k^2a_z^2} \\
&\quad\times\left(\frac{((ka_z)^4+4\beta^2(ka_z)^2+4\beta^4)\sin(2\beta)-((ka_z)^4-4\beta^2(ka_z)^2-4\beta^4)\sinh(2\beta)}{\cosh(2\beta)-\cos(2\beta)}-4\beta k^3a_z^3\right) \\
&\quad -\frac{k_BT^2\alpha^2a_z^3}{\pi^3\kappa}\frac{\pi^2ka_z}{4(4\beta^4+k^4a_z^4)}(\tan(ka_z)-ka_z(1+\tan^2(ka_z)))\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

$ka_z \ll 1$ とすれば

$$
P_s(\omega) \simeq \left(\frac{SE}{SE-M\omega^2a_z}\right)^2\frac{k_BT^2\alpha^2a_z^3}{\pi^3\kappa}\frac{\pi^2}{4\beta}\left(\frac{\sin(2\beta)-\sinh(2\beta)}{\cosh(2\beta)-\cos(2\beta)}\right) \tag{3.67}
$$

この結果から導出した熱弾性雑音を図 3.4 にまとめる. これは先行研究 (参考文献 5) と近いグラフとなった.

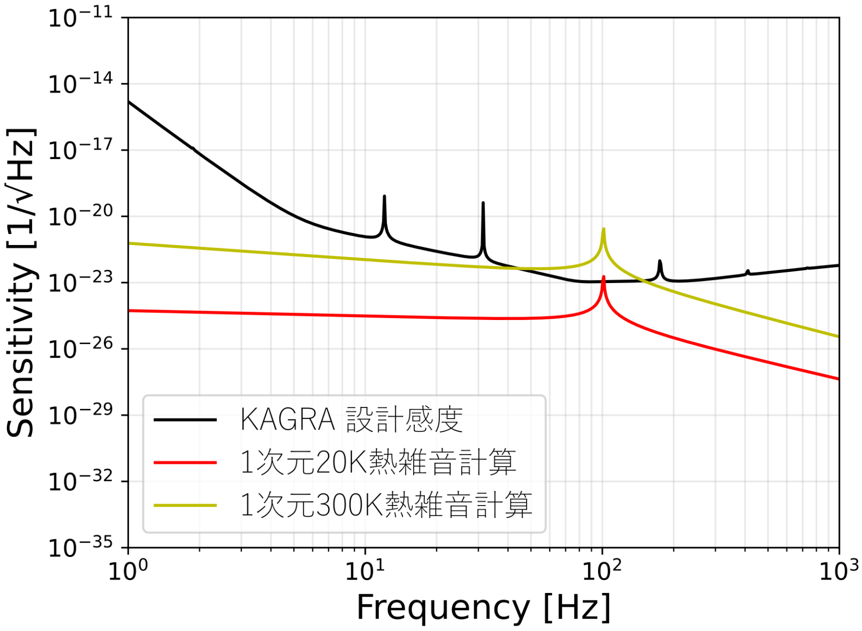

図 3.4　1 次元モデルで計算した熱弾性雑音

3.3.2　低周波近似 ($\omega << 1$)

この節では熱拡散方程式, 弾性方程式, 境界条件を低周波近似 ($\omega << 1$) し, 厳密に解いたものと比較する. 1 次元モデルの低周波近似における熱拡散方程式と弾性方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \chi \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} &= F(z,t) \\ \frac{\partial^2 u_z(z,t)}{\partial z^2} &= -\alpha \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.68}$$

であり, 境界条件から θ を z に関して余弦級数展開し,Langevin 項をフーリエ級数展開したものと比較すると次の式が得られる.

$$\theta(z,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^{-2} \frac{1}{\chi} F_n(\omega) \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \tag{3.69}$$

これを弾性方程式に代入することで弾性方程式の非斉次の解が得られる.

$$u_z^S(z,\omega) = -\sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^{-2} \sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \tag{3.70}$$

ただし

$$f_n = \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^{-1} \frac{\alpha}{\chi} F_n(\omega) \tag{3.71}$$

斉次の解は $u_z^H(z,\omega) = A(\omega)z + B(\omega)$ 境界条件から $B = 0, A = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^{-1}$ したがって一般解は次のようになる

$$\begin{aligned} u_z(z,\omega) &= u_z^S(z,\omega) + u_z^H(z,\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^{-1} z - \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^{-2} \sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.72}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
u_z(a_z,\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{a_z^2}{n\pi} \\
&= \frac{\alpha a_z^3 F_n(\omega)}{(n\pi)^2\chi}
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

よってパワースペクトルは次のようになる

$$
\begin{aligned}
S_u(\omega) &= \sum_n \sum_m -\frac{F_0^2}{\pi a_z}\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 \delta_{nm} \frac{\alpha^2 a_z^6}{(n\pi)^4\chi^2} \\
&= \frac{F_0^2 \alpha^2 a_z^3}{\pi^3\chi^2}\sum_n \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{k_B T^2 \alpha^2 a_z^3}{\kappa\pi^3}\sum_n \frac{1}{n^2}
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

プロットしたグラフは次のようになる.

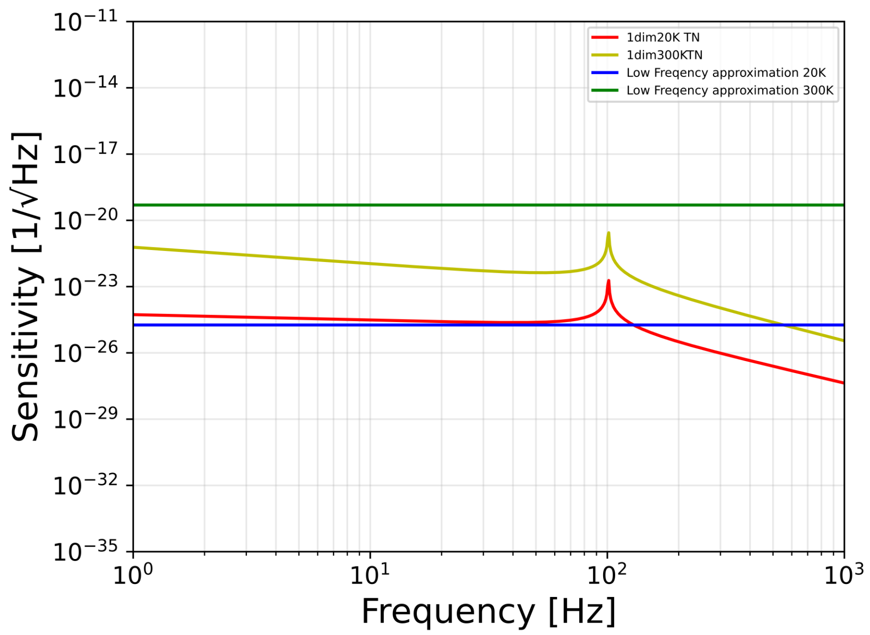

図 3.5　低周波近似解と近似なしで得た解の比較

20K においては低周波で近い値が出たが 300K に対しては近似なしのときの解を大きく上回るグラフが得られた.300K においても低周波では熱拡散長が発散するため,1 次元モデルでも正しい解が得られるべきである. よって計算間違いが存在すると考えられる.

第 4 章

考察

4.1　3 次元

懸架系ファイバが直方体であるとし, つるされている方向 (下向き) を z 軸として座標系を置く. ファイバが, つるされている鏡から受ける力による単純引張りと温度変化による熱膨張によって変形を受ける場合の熱雑音を求める. 軸をファイバの付け根を z=0 とし, 下向きを z 軸正の方向とし, 直方体の懸架系ファイバの z 軸に垂直な断面における長方形の頂点の 1 つを $x = 0, y = 0$ とする．ファイバにおける温度揺らぎを $\theta(\boldsymbol{x}, t) = \theta(\boldsymbol{x}) \int \tilde{\theta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ とする．三次元におけるファイバの熱拡散方程式と弾性方程式は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} - \chi\Delta\theta(\boldsymbol{x},t) = F(\boldsymbol{x},t) \\
&\frac{\partial^2 u_x(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} = \frac{E\alpha}{\rho}\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial x} \\
&\frac{\partial^2 u_y(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} = \frac{E\alpha}{\rho}\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial y} \\
&\frac{\partial^2 u_z(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} = \frac{SE}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z(\boldsymbol{x},t)}{\partial z^2} + \alpha\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

熱拡散方程式と弾性方程式を Fourier 変換することで, 各 ω に対して次の式を得る.

$$\begin{aligned}
&i\omega\tilde{\theta}(\boldsymbol{x},\omega) - \chi\Delta\tilde{\theta}(\boldsymbol{x},\omega) = \tilde{F}(\boldsymbol{x},\omega) \\
&\tilde{u}_x(\boldsymbol{x},\omega) = -\frac{E\alpha}{\omega^2\rho}\frac{\partial\tilde{\theta}(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial x} \\
&\tilde{u}_y(\boldsymbol{x},\omega) = -\frac{E\alpha}{\omega^2\rho}\frac{\partial\tilde{\theta}(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial y} \\
&\tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega) = -\frac{SE}{\omega^2\rho}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial z^2} + \alpha\frac{\partial\tilde{\theta}(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ファイバの表面では温度揺らぎが一定となる状態を考えるため, 次のような境界条件を課す.

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\theta(\boldsymbol{x},t)\Big|_{x=0,a_x} &= \frac{\partial}{\partial z}\theta(\boldsymbol{x},t)\Big|_{x=0,a_x} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial z}\theta(\boldsymbol{x},t)\Big|_{y=0,a_y} &= \frac{\partial}{\partial x}\theta(\boldsymbol{x},t)\Big|_{y=0,a_y} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\theta(\boldsymbol{x},t)\Big|_{z=0,a_z} &= \frac{\partial}{\partial y}\theta(\boldsymbol{x},t)\Big|_{z=0,a_z} = 0
\end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

したがって $\theta(x)$ を x, y, z についてフーリエ級数展開すると, 境界条件から sin が含まれる項の係数は 0 となる. また,y 方向と z 方向に対しても同様の理由から温度揺らぎのフーリエ変換は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\theta(\boldsymbol{x}, t) &= \int \tilde{\theta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \sum_l \theta_n(y, z) \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \\
&= \int \tilde{\theta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \sum_l \sum_m \theta_{lm}(z) \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \\
&= \int \tilde{\theta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \sum_l \sum_m \sum_n \theta_{lmn} \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \\
\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}, \omega) &= \tilde{\theta}(\omega) \sum_l \sum_m \sum_n \theta_{lmn} \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \\
&= \sum_l \sum_m \sum_n \tilde{\theta}_{lmn}(\omega) \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ただし l, m, n のうち 0 となるものの個数を k とすれば

$$\theta_{lmn}(\omega) = \theta(\omega) \frac{8}{a_x a_y a_z} \int\int\int dx\, dy\, dz\; \theta(\boldsymbol{x}) \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \times \frac{1}{2^k} \tag{4.5}$$

同様に F をフーリエ級数展開するが熱拡散方程式の形式を見れば左辺は温度揺らぎの項に由来するフーリエ余弦級数展開の項のみで構成されるため, 最終的に係数比較によって F においても余弦の項以外の項の係数が 0 となり F は以下のようにフーリエ級数展開できる.

$$\tilde{F}(\boldsymbol{x}, \omega) = \sum_l \sum_m \sum_n \tilde{F}_{lmn}(\boldsymbol{x}, \omega) \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \tag{4.6}$$

ただし, 温度揺らぎの級数展開同様, 係数は次のようになる.(k の定義も同様である)

$$F_{lmn}(\omega) = F(\omega) \frac{8}{a_x a_y a_z} \int\int\int dx\, dy\, dz\; F(\boldsymbol{x}) \cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \times \frac{1}{2^k} \tag{4.7}$$

熱拡散方程式に $\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}, \omega)$ を代入すれば

$$i\omega \tilde{\theta}_{lmn}(\omega) + \chi \left(\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)^2 \right) \tilde{\theta}_{lmn}(\omega) = \tilde{F}_{lmn}(\omega) \tag{4.8}$$

これを解くことで

$$\tilde{\theta}_{lmn}(\omega) = \frac{\tilde{F}_{lmn}(\omega)}{i\omega + \chi \left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2 \right)} \tag{4.9}$$

が得られる. 参考文献 [2] によると 3 次元空間における F のアンサンブル平均は

$$\langle F(\boldsymbol{x}, t) F^*(\boldsymbol{x}', t') \rangle = F_0^2\, \delta(x - x')\, \Delta\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{4.10}$$

で与えられるので

$$
\begin{aligned}
&\langle \tilde{F}_{lmn}(\boldsymbol{x},\omega)\tilde{F}^*_{l'm'n'}(\boldsymbol{x}',\omega')\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2\pi}\int F_{lmn}(t)e^{-i\omega t}dt\ \frac{1}{2\pi}\int F^*_{l'm'n'}(t')e^{i\omega' t'}dt'\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left(\frac{8}{a_xa_ya_z}\right)^2\int\cdots\int dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'\,dt\,dt'\ \langle F(\boldsymbol{x},t)F^*(\boldsymbol{x}',t')\rangle e^{-i(\omega t-\omega' t')} \\
&\qquad\qquad \times\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{l\pi x'}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y'}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n\pi z'}{a_z}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left(\frac{8}{a_xa_ya_z}\right)^2F_0^2\int\cdots\int dx'\,dy'\,dz'\,dt'\ e^{-i(\omega-\omega')t'}\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right) \qquad (4.11)\\
&\qquad\qquad \times\cos\left(\frac{l\pi x'}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y'}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n\pi z'}{a_z}\right)\cos\left(\frac{l\pi x'}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y'}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n\pi z'}{a_z}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left(\frac{8}{a_xa_ya_z}\right)^2F_0^2\,2\pi\,\delta(\omega-\omega')\frac{a_xa_ya_z}{2^3}\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{nn'} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{8}{a_xa_ya_z}F_0^2\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{nn'}
\end{aligned}
$$

したがって温度揺らぎのアンサンブル平均は

$$
\begin{aligned}
&\langle\bar{\theta}^2\rangle \\
&= \langle\frac{1}{a_xa_ya_z}\int\cdots\int\tilde{\theta}(\boldsymbol{x},\omega)e^{i\omega t}dx\,dy\,dz\,d\omega\ \frac{1}{a_xa_ya_z}\int\cdots\int\tilde{\theta}^*(\boldsymbol{x}',\omega')e^{-i\omega' t}dx'\,dy'\,dz'\,d\omega'\rangle \\
&= \left(\frac{1}{a_xa_ya_z}\right)^2\int\cdots\int\sum_{l,m,n}\sum_{l',m',n'}\langle\tilde{\theta}_{lmn}(\omega)\tilde{\theta}^*_{l'm'n'}(\omega')\rangle e^{i(\omega-\omega')t}\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \\
&\qquad\qquad \times\cos\left(\frac{l'\pi x'}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m'\pi y'}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n'\pi z'}{a_z}\right)dx\,dy\,dz\,d\omega\,dx'\,dy'\,dz'\,d\omega' \\
&= \left(\frac{1}{a_xa_ya_z}\right)^2\int\cdots\int dx\,dy\,dz,dx'\,dy'\,dz'\,d\omega'\sum_{l,m,n}\sum_{l',m',n'}\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \\
&\qquad \times\cos\left(\frac{l'\pi x'}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m'\pi y'}{a_y}\right)\cos\left(\frac{n'\pi z'}{a_z}\right) \\
&\qquad \times\int\frac{\langle\tilde{F}_{lmn}(\omega)\tilde{F}^*_{l'm'n'}(\omega')\rangle}{\left(i\omega+\chi\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)\right)\left(-i\omega'+\chi\left(\left(\frac{l'\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m'\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n'\pi}{a_z}\right)^2\right)\right)}d\omega \\
&= -\left(\frac{1}{a_xa_ya_z}\right)^3\frac{4F_0^2}{\pi}\int\cdots\int d\omega'\sum_{l,m,n}\sum_{l',m',n'}\frac{\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m_\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2}{\omega^2+\chi^2\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)^2} \\
&\qquad\qquad \times\left(\frac{a_x}{l\pi}\right)^2\left(\frac{a_y}{m\pi}\right)^2\left(\frac{a_z}{n\pi}\right)^2\sin^2(l\pi)\,\sin^2(m\pi)\,\sin^2(n\pi) \\
&= -\left(\frac{1}{a_xa_ya_z}\right)^3\frac{4F_0^2}{\pi}\sum_{l,m,n}\sum_{l',m',n'}\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m_\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)\frac{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m_\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)\chi} \\
&\qquad\qquad \times\left(\frac{a_x}{l\pi}\right)^2\left(\frac{a_y}{m\pi}\right)^2\left(\frac{a_z}{n\pi}\right)^2\sin^2(l\pi)\,\sin^2(m\pi)\,\sin^2(n\pi) \\
&= -\frac{1}{a_xa_ya_z}\frac{4F_0^2}{\chi}\sum_{l,m,n}\sum_{l',m',n'}\left(\frac{\sin(l\pi)}{l\pi}\right)^2\left(\frac{\sin(m\pi)}{m\pi}\right)^2\left(\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}\right)^2
\end{aligned}
\qquad (4.12)
$$

$l=m=n=0$ のときのみを考えればよいので

$$\langle\bar{\theta}^2\rangle = \frac{1}{a_x a_y a_z}\frac{4F_0^2}{\chi} \tag{4.13}$$

熱力学的要請から $\langle\bar{\theta}^2\rangle = \frac{k_B T^2}{\rho C a_x a_y a_z}$ であるため

$$F_0^2 = \frac{\kappa k_B T^2}{4(\rho C)^2} \tag{4.14}$$

弾性方程式における境界条件は

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial z}\right|_{x=a_z} &= \frac{M\omega^2}{SE}\tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega), \quad u_z(x,y,0,\omega)=0 \\
\left.\frac{\partial \tilde{u}_x(\boldsymbol{x},t)}{\partial x}\right|_{x=0,a_x} &= \left.\frac{\partial \tilde{u}_y(\boldsymbol{x},t)}{\partial y}\right|_{y=0,a_y} = 0 \\
\left.\frac{\partial \tilde{u}_x(\boldsymbol{x},t)}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}_z(\boldsymbol{x},t)}{\partial x}\right|_{x=0,a_x} &= \left.\frac{\partial \tilde{u}_y(\boldsymbol{x},t)}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}_z(\boldsymbol{x},t)}{\partial y}\right|_{x=0,a_y} = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

z 方向の弾性方程式は

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega) &= -\frac{SE}{\rho\omega^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial z^2} + \alpha\frac{\partial \tilde{T}(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial z}\right) \\
E\frac{\partial^2 \tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega)}{\partial z^2} + \frac{\rho\omega^2}{S}\tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega) &= \sum_{lmn} E\alpha\frac{\frac{n\pi}{a_z}\tilde{F}_{lmn}(\omega)}{i\omega+\chi\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)} \\
&\quad\times\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right) \\
&= \sum_{lmn} f_{z,lmn}(\omega)\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

z 方向に関しては 1 次元の場合と同様にしてもとめる z 方向の弾性方程式の斉次一般解は $k=\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{SE}}$

$$\tilde{u}_z^H(\boldsymbol{x},\omega) = A(x,y,\omega)\sin(kz) + B(x,y,\omega)\cos(kz) \tag{4.17}$$

で表され, 特殊解は

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_z^S &= -\sum_n \frac{1}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{S}}\frac{E\alpha\tilde{F}_{lmn}(\omega)}{i\omega+\chi\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)}\frac{n\pi}{a_z} \\
&\quad\times\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a_z}\right) \\
&= -\sum_{lmn}\frac{1}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{S}} f_{z,lmn}(\omega)\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

よって弾性方程式の一般解は弾性方程式の特殊解と斉次一般解の線形和で表されるが,z 方向の境界条件 $\tilde{u}_z(x,y,0,\omega)=0$ であることから $B(x,y,\omega)=0$. また,z 軸方向に関するもう一つの境界条件から

$$\begin{aligned}
A(x,y,\omega)k\cos(ka_z) - \sum_{lmn}\frac{f_{z,lmn}(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{S}}\frac{n\pi}{a_z}\cos\left(\frac{n\pi a_z}{a_z}\right)\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)& \\
= \frac{M\omega^2}{SE}A(x,y,\omega)\sin(ka_z)&
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$A(x,y,\omega) = \frac{1}{k\cos(ka_z)-\frac{M\omega^2}{SE}\sin(ka_z)}\sum_{lmn}\frac{(-1)^n f_{z,lmn}(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{S}}\frac{n\pi}{a_z}\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)$$

したがって一般解は

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega) &= \frac{1}{k\cos(ka_z)-\frac{M\omega^2}{SE}\sin(ka_z)} \\
&\times\left(\sum_{lmn}\frac{f_{z,lmn}(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{S}}\left\{(-1)^n\frac{n\pi}{a_z}\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\sin(kz)\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\left(k\cos(ka_z)-\frac{M\omega^2}{SE}\sin(ka_z)\right)\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{a_z}\right)\right\}\right)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_z(x,y,a_z,\omega) &= \frac{1}{k\cos(ka_z)-\frac{M\omega^2}{SE}\sin(ka_z)}\sum_{lmn}\frac{f_{z,lmn}(\omega)}{E\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{S}}(-1)^n\frac{n\pi}{a_z} \\
&\qquad\times\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\sin(ka_z) \\
&= \frac{SE\alpha}{SE-\frac{M\omega^2}{k}\tan(ka_z)}\frac{\tan(ka_z)}{k}\sum_{lmn}\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2-k^2a_z^2}\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right) \\
&\qquad\times\frac{(-1)^n\tilde{F}_{lmn}(\omega)}{i\omega+\chi\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

したがって $z=a_z$ 断面における z 方向の変位揺らぎの平均値は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(a_xa_y)^2}\int\cdots\int dxdx'dydy'\langle\tilde{u}_z(\boldsymbol{x},\omega)\tilde{u}_z^*(\boldsymbol{x}',\omega')\rangle \\
&=\left(\frac{SE\alpha}{SE-\frac{M\omega^2}{k}\tan(ka_z)}\frac{\tan(ka_z)}{k}\right)^2\sum_{lmn}\sum_{l'n'm'}\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2-k^2a_z^2}\frac{n'^2\pi^2}{n'^2\pi^2-k^2a_z^2} \\
&\quad\times\frac{(-1)^{n+m}\tilde{F}_{lmn}(\omega)\tilde{F}^*_{l'm'n'}(\omega')}{\left(i\omega+\chi\left(\left(\frac{l\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\right)\right)\left(-i\omega'+\chi\left(\left(\frac{l'\pi}{a_x}\right)^2+\left(\frac{m'\pi}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n'\pi}{a_z}\right)^2\right)\right)} \\
&\quad\times\int\cdots\int dxdx'dydy'\cos\left(\frac{l\pi x}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a_y}\right)\cos\left(\frac{l'\pi x'}{a_x}\right)\cos\left(\frac{m'\pi y'}{a_y}\right) \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

この計算結果は熱弾性雑音が 0 になることを示しているため明らかに間違っている. また 0 になった直接の原因はフーリエ余弦級数展開であるため, 次章では 1 次元と 3 次元における温度揺らぎ境界条件の妥当性について議論する。

4.1.1　Langevin 項の規格化に関する検証

Langevin 法を用いて 1 次元の熱弾性雑音を導出する過程において, 熱力学的要請 (式 3.46) を用いてランジュバン項の規格化を行っている. また, この式の左辺をランジュバン項の規格化定数を用いて表す計算において積分同士の交換や, 積分と極限の交換が行われている. 本章では, この交換の順序が式 3.45 の結果に影響を与えている可能性について考察する. 式 3.46 の左辺の定義は次に示したとおりである.

$$
\langle\bar{\theta}^2\rangle\equiv\int\int\langle\theta(x,t)\theta^*(x',t')\rangle dxdx'
\tag{4.23}
$$

$\langle\theta(x,t)\theta^*(x',t')\rangle$ の計算の中に, 式 3.45 の導出過程で出現する ω,ω' による積分や, 無限級数和が存在する. 計算過程で出現する主な極限と積分は次の 4 つである.

1. x, x' の積分
2. ω, ω' の積分
3. $lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}$ における $m\to\infty$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}$ の $n=0$ の項に対して行った $n\to 0$ の極限操作

式 4.23 から x, x' による積分は一番最後に行うものであるが,3.3 章における式 3.45 の計算では無限級数の計算より先に x, x' の計算が行われているため, 本来の計算順序とは異なる. この節では, この順序交換における計算結果の違いを見る. 3.3 章の計算では式 3.45 のような結果が得られている.

$$\langle\bar{\theta^2}\rangle = -\frac{F_0^2}{\chi a_z} \neq 0 \tag{4.24}$$

次に積分順序が温度揺らぎの自乗アンサンブル平均の定義通りとなるように計算 (x, x' による積分が最後となる.) を行うと次のような結果になる.

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\theta^2}\rangle &= \int\int\langle\theta(x,t)\theta^*(x',t')\rangle dxdx' \\
&= \int\int\langle\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{a_z}\right)\int\tilde{\theta}_n(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\times\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(\frac{m\pi x'}{a_z}\right)\int\tilde{\theta}_n^*(\omega')e^{i\omega t'}d\omega'\rangle \\
&= \int\cdots\int\sum_{n,m=0}^{\infty}\langle\tilde{\theta}_n(\omega)\tilde{\theta}_n^*(\omega')\rangle\cos\left(\frac{n\pi x}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi x'}{a_z}\right)e^{-i(\omega t-\omega' t')}d\omega d\omega' dxdx' \\
&= \int\cdots\int\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\langle\tilde{F}_n(\omega)\tilde{F}_n^*(\omega')\rangle}{(i\omega+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2\chi)(-i\omega'+\left(\frac{m\pi}{a_z}\right)^2\chi)}\cos\left(\frac{n\pi x}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi x'}{a_z}\right)e^{-i(\omega t-\omega' t')}d\omega d\omega' dxdx' \\
&= -\frac{F_0^2}{\pi a_z}\int\cdots\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^2}{\omega^2+\left(\frac{n\pi}{a_z}\right)^4\chi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi x'}{a_z}\right)d\omega dxdx' \\
&= -\frac{F_0^2}{a_z\chi}\int\cdots\int\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi x'}{a_z}\right)dxdx' \\
&= -\frac{F_0^2}{a_z\chi}\int\cdots\int(\frac{a_z}{2}\delta(x-x')+\frac{1}{2})dxdx' \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ただし無限級数をデルタ関数に書き換える式変形において次の式を用いた。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{a_z}\right)\cos\left(\frac{m\pi x'}{a_z}\right) = \frac{a_z}{2}\delta(x-x')+\frac{1}{2} \tag{4.26}$$

を用いた。

式 4.25 と式 3.45 は結果が異なるため, 積分と極限の順序交換が Langevin 項の規格化の結果を左右している. また, この場合ランジュバン項の規格化ができないため熱弾性雑音を求めることができない. しかし境界条件を変えると 0 にならない場合も存在する.(正弦級数展開できるような境界条件など) よって今後の展望として熱流がある状態で境界条件を変化させて計算を行うことで結果が変化する可能性がある.

第 5 章

結論とまとめ

Langevin 法を用いて 1 次元の計算を行った結果 20K では設計感度を下回るような値が導出された.300K における熱雑音を調べるために熱拡散長を用いた考察から 3 次元化を行うと計算の途中で熱雑音 0 となった. 予測される原因は

1. 計算間違い 2.Langevin 項を引用するときに 2 乗のアンサンブル平均の適用条件を考慮していなかった可能性

3. 境界条件が間違っている

3 に関しては考察で示した通り温度揺らぎが 0 となった原因であるため,3 次元での熱雑音計算が 0 となった原因である可能性が高い. よって今後の展望としては 1. Langevin 項の引用元となった Braginsky の論文 (参考文献 [2]) を検証し, アンサンブル平均に関する式の適用条件を見直す.

2. 境界条件を変化させ計算を行う

等が考えられる.

Appendix

1 次元 300K 熱弾性雑音の計算に用いた値

記号	意味	値
$u(x,t)$	ファイバの変位	変数
$\theta(x,t)$	平衡温度からの温度揺らぎ	変数
k_B	Bolzmann 定数	1.38×10^{-23}
M	鏡の質量を 4 本のファイバで割った値	$22.8/4\,[\mathrm{kg}]$
ファイバ直径		$0.0016\,[\mathrm{m}]$
S	ファイバの断面積	$0.0008^2\pi/4\,[\mathrm{m}^2]$
$a_z = L$	ファイバの長さ	$1.35\,[\mathrm{m}]$
a_x, a_y	ファイバを直方体とみなしたときの断面の縦横の長さ	$0.0016\,[\mathrm{m}]$
ρ	ファイバの線密度	$8.0 \times 10^3\,[\mathrm{kg/m}]$
T	懸架系の温度	$300\,[\mathrm{K}]$
C	サファイア比熱	$7.9 \times 10^2\,[\mathrm{J/kg \cdot K}]$
κ	サファイア線熱伝導率	$0.8\,[\mathrm{J \cdot m/s \cdot K}]$
E	サファイアヤング率	$4.0 \times 10^{11}\,[\mathrm{Pa}]$
χ	サファイア熱拡散係数	$\kappa/(\rho C)\,[\mathrm{m^2/sec}]$
α	サファイア熱膨張率	$5.0 \times 10^{-6}\,[1/\mathrm{K}]$
L_{arm}	KAGRA アーム長	$3000\,[\mathrm{m}]$
l_c	縦横カップリング	$1/200$

1 次元 20K 熱弾性雑音の計算に用いた値

記号	意味	値
$u(x,t)$	ファイバの変位	変数
$\theta(x,t)$	平衡温度からの温度揺らぎ	変数
k_B	Bolzmann 定数	1.38×10^{-23}
M	鏡の質量を 4 本のファイバで割った値	$22.8/4\,[\mathrm{kg}]$
ファイバ直径		$0.0016\,[\mathrm{m}]$
S	ファイバの断面積	$0.0008^2\pi/4\,[\mathrm{m}^2]$
$a_z = L$	ファイバの長さ	$1.35\,[\mathrm{m}]$
a_x, a_y	ファイバを直方体とみなしたときの断面の縦横の長さ	$0.0016\,[\mathrm{m}]$
ρ	ファイバの線密度	$8.0 \times 10^3\,[\mathrm{kg/m}]$
T	懸架系の温度	$20\,[\mathrm{K}]$
C	サファイア比熱	$0.227 \times T^{3.14} \times S/\rho\,[\mathrm{J/kg \cdot K}]$
κ	サファイア線熱伝導率	$(0.272 \times T^{-2.2} + 6.22 \times 10^{-9} \times T^{3.04})^{-1.25} \times S\,[\mathrm{J \cdot m/s \cdot K}]$
E	サファイアヤング率	$4.0 \times 10^{11}\,[\mathrm{Pa}]$
χ	サファイア熱拡散係数	$\kappa/(\rho C)\,[\mathrm{m^2/sec}]$
α	サファイア熱膨張率	$7.21 \times 10^{-13} \times T^{2.99}\,[1/\mathrm{K}]$
L_{arm}	KAGRA アーム長	$3000\,[\mathrm{m}]$
l_c	縦横カップリング	$1/200$

3 次元 300K 熱弾性雑音の計算に用いた値

記号	意味	値
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$	ファイバの変位	変数
$\theta(\boldsymbol{x},t)$	平衡温度からの温度揺らぎ	変数
k_B	Bolzmann 定数	1.38×10^{-23}
M	鏡の質量を 4 本のファイバで割った値	$22.8/4\,[\mathrm{kg}]$
ファイバ直径		$0.0016\,[\mathrm{m}]$
S	ファイバの断面積	$0.0016^2\,[\mathrm{m}^2]$
$a_z = L$	ファイバの長さ	$1.35\,[\mathrm{m}]$
a_x, a_y	ファイバを直方体とみなしたときの断面の縦横の長さ	$0.0016\,[\mathrm{m}]$
ρ	ファイバの密度	$8.0 \times 10^3/S\,[\mathrm{kg/m^3}]$
T	懸架系の温度	$300\,[\mathrm{K}]$
C	サファイア比熱	$7.9 \times 10^2\,[\mathrm{J/kg \cdot K}]$
κ	サファイア熱伝導率	$0.8/S\,[\mathrm{J/s \cdot K \cdot m^2}]$
E	サファイアヤング率	$4.0 \times 10^{11}\,[\mathrm{Pa}]$
χ	サファイア熱拡散係数	$\kappa/(\rho C)\,[\mathrm{m^2/sec}]$
α	サファイア熱膨張率	$5.0 \times 10^{-6}\,[1/\mathrm{K}]$
L_{arm}	KAGRA アーム長	$3000\,[\mathrm{m}]$
l_c	縦横カップリング	$1/200$

3 次元 20K 熱弾性雑音の計算に用いた値

記号	意味	値
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$	ファイバの変位	変数
$\theta(\boldsymbol{x}, t)$	平衡温度からの温度揺らぎ	変数
k_B	Bolzmann 定数	1.38×10^{-23}
M	鏡の質量を 4 本のファイバで割った値	$22.8/4$ [kg]
ファイバ直径		0.0016 [m]
S	ファイバの断面積	0.0016^2 [m^2]
$a_z = L$	ファイバの長さ	1.35 [m]
a_x, a_y	ファイバを直方体とみなしたときの断面の縦横の長さ	0.0016 [m]
ρ	ファイバの密度	8.0×10^3 [kg/m^3]
T	懸架系の温度	20 [K]
C	サファイア比熱	$0.227 \times T^{3.14} \times S/\rho$ [J/kg $\cdot$ K]
κ	サファイア熱伝導率	$(0.272 \times T^{-2.2} + 6.22 \times 10^{-9} \times T^{3.04})^{-1.25} \times S$ [J/s $\cdot$ K $\cdot$ m^2]
E	サファイアヤング率	4.0×10^{11} [Pa]
χ	サファイア熱拡散係数	$\kappa/(\rho C)$ [m^2/sec]
α	サファイア熱膨張率	$7.21 \times 10^{-13} \times T^{2.99}$ [1/K]
L_{arm}	KAGRA アーム長	3000 [m]
l_c	縦横カップリング	$1/200$

謝辞

本論文を作成するにあたり, 非常に多くの方のお力添えをいただきました。皆様に感謝の意を表します。指導教官の宗宮健太郎教授は半年で卒論を書きたいという私に多くの学習の機会をくださり, 質問に伺った際も多くの時間を割いてくださいました。宗宮先生の話はいつも初見であるにもかかわらず, 毎回イメージが具体的に想像できる説明ばかりで, 毎回感動しています。卒論の時期に関しても, 内容に関しても私の意思を尊重していただいき, 誠にありがとうございました。

博士課程の阿部誉さんは, 重力波に関して全くゼロの知識の私にたくさんのゼミの機会を与えてくださりました。また, 重力波や, 共振器についての話ををわかりやすく話してくださり, 重力波に対する解像度が自分の中で初めてはっきりした時にはとても感動しました。誠にありがとうございました。これからも熱雑音の計算を一緒に進めたいです。よろしくお願いします。博士課程の鈴木海堂さんは, 研究室配属されて最初の時期に料理を作っていただいたり,Mathematica の計算に困っていた時に知恵を貸していただきました。研究室の全員を集めた食事なども積極的に企画してくださり, 誠にありがとうございます。

修士 2 年の羽場大起さんは, 研究室配属当初からわからないことがあった時に一緒に考えてくださったり, 新しいアイデアについてよくお話ししてくださりするのを見て, 自分もこうなりたいと感じました。誠にありがとうございました。修士 1 年の竹下賢徳さんは隣の席だったこともあり, 仲良くしていただき PC 関連の問題が起こった時もすぐ解決してしまうのでいつもお世話になっております。Python のコードを書く際にも相談に乗っていただき, この論文を書くにあたって相当な貢献をしていただきました。誠にありがとうございました。井殿亮さんは輪講の準備で徹夜をしていた時にわからないところを教えてくださったり, よく研究室で話していただきました。コロキウムで英語で発表していたり, 海外から来た訪問の方とも積極的にお話をされていたのでとても尊敬しています。

Diego Dominguez さんと Shalika Singh さんはよく私とお話ししてくださり, いつも私のつたない英語をゆっくり聞いてくださりました。海外の乾杯の言葉などいろいろな言葉を教えていただきとても楽しく勉強になりました。誠にありがとうございました。

同期の浜野神威君と吉留那由多君はゼミで分からないところを質問し合ったり, たまにボードゲームをしたりするのがとても楽しかったです。

宗宮研究室はとても恵まれた環境であり, ここに身を置けたことに深く感謝申し上げます。

参考文献

[1] Kentaro Somiya (for the KAGRA Collaboration),「 Detector configuration of KAGRA - the Japanese cryogenic gravitational-wave detector -」,2012.
[2] V.B. Braginsky and Vyatchanin, “Thermodynamical fluctuations in optical mirror coatings”, Physics letters A 312, 2003, Appendix A.
[3] V.B.Braginsky, M.L.Gorodetky, and S.P.Vyatchanin, “Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational antennae”, Physics letters A 264, 1999.
[4] ランダウ＝リフシッツ (翻訳: 佐藤常三, 石橋善弘)「弾性理論」, 東京図書株式会社,1989.
[5] 宗宮健太郎「温度差がある場合の縦方向熱弾性雑音の計算 Ver7」,2021
[6] 東京工業大学大学院物理学コース武田 紗貴乃 修士論文「干渉計型重力波望遠鏡の懸架系における非平衡熱雑音の理論的検証」,2024.
[7] S. Ballmer and V. Mandic, “New Technologies in Gravitational-Wave Detection”, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2015. 65:555–77.
[8] 安東正樹　Febry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御
[9] T. Akutsu et al, “First cryogenic test operation of underground km scale gravitational-wave observatory KAGRA”, 9 Class. Quantum Grav. 36 165008, 2019.