

卒業論文

非一様な複屈折の影響下における
鏡の姿勢制御法の開発

東京工業大学理学院物理学系 宗宮研究室

田中 颯

2023/2/13

概要

日本に建設された重力波検出器 KAGRA を構成する光干渉計には実質的な光路長を伸ばすために Fabry-Perot 共振器を用いている。この光共振器のセットアップが外部からの振動や熱などのノイズによって崩れた場合、重力波信号が減衰したり不要なノイズが乗ったりしてしまう。したがって共振器の長さ方向の制御や鏡のずれ、鏡の回転を正確に制御する必要がある。そこで長さ方向の制御法である PDH 法と鏡の角度と回転に対する制御法である WFS 法について考える。

KAGRA の干渉計を構成する鏡にはサファイア鏡が用いられている。このサファイア鏡の特性として複屈折性がある。サファイア鏡の複屈折分布が非一様であると、レーザー光の透過する位置や角度によって光の偏光が変化してしまい、鏡を透過した光の波面が汚れる。この非一様な複屈折分布のもとで共振器を正確に制御できるような新たな制御方法を考案する。

目次

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	重力波の理論	3
2.1	アインシュタイン方程式	3
2.2	弱重力場におけるアインシュタイン方程式の線形化	4
2.3	線形化されたアインシュタイン方程式の平面波解	5
2.4	マイケルソン干渉計による重力波の検出	6
第 3 章	レーザー光学	10
3.1	ガウシアンビーム	10
3.2	ビームパラメータ	13
3.3	エルミートガウシアンモード (HG モード)	14
3.4	ビームの平行移動と回転	15
3.5	ビーム移動の行列表現	15
3.6	Fabry Perot 共振器	16
3.7	Pound Drever Hall 法	18
3.8	Wave Front Sensing 法	21
第 4 章	複屈折	25
4.1	複屈折の原理	25
4.2	偏光の回転	26
4.3	KAGRA の複屈折問題	27
第 5 章	FINESSE によるシミュレーション	29
5.1	実行環境	29
5.2	光学系のセットアップ	29
5.3	ミラーマップ	30
5.4	共振	31
5.5	PDH 信号	33
5.6	WFS 信号	35
5.7	16 分割 PD の再現	37
5.8	線形制御	39

第 6 章	実験・結果	41
6.1	パラメータの最適化	41
6.2	トレーニング結果	42
6.3	最適化したパラメータのテスト	45
6.4	最適化した 16 分割 PD による WFS 信号	46
第 7 章	本研究のまとめ・今後の展望	49
7.1	本研究のまとめ	49
7.2	今後の展望	49
付録 A	python のソースコード	50
	謝辞	57
	参考文献	59

第1章

はじめに

アインシュタインの一般相対性理論によると、時空は質量によって歪む。質量が加速度運動を行うことで時空の歪みは波動となって時空を伝播する。この時空の歪みの波動は一般に重力波と呼ばれる。[\[1\]](#) 重力波はさまざまな天体现象から発生する。代表的な例としては、ブラックホールなどの大質量天体からなるコンパクト連星系の衝突・合体や超新星爆発などがあげられる。重力波は物質との相互作用が小さく透過力が大きいという特徴がある。そのため重力波を観測することができれば、可視光や X 線、電波では捉えることのできなかった天体现象を観測できるという期待がある。

重力波の振幅は非常に小さく、アインシュタインが重力波を予言してから長い間観測されることはなかった。その理論予言から約 100 年後の 2015 年、アメリカに建設された地上重力波検出器 LIGO[\[2\]](#) が重力波を初観測した。現在では地球上にある重力波検出機は LIGO の 2 つの検出器 H1、L1 とイタリアの Virgo[\[3\]](#)、ドイツの GEO600[\[4\]](#)、日本の KAGRA[\[5\]](#) が存在する。重力波検出器はレーザー干渉計重力波検出器であり、その基本となるのはマイケルソン干渉計である。100Hz の重力波を捉えるためには基線長の長さが 750km 必要であるが、そのうでの長さをもつ検出器を設置するのは現実的ではない。KAGRA ではうでの中に光共振器を設置することによって実質的な光路長をのばす手法がとられており、うでのながさは 3km のマイケルソン干渉計となっている。

KAGRA では他の重力波検出器とは異なる特徴が大きく 2 つある。1 つは検出器を地下に設置していることである。旧神岡鉱山内地下 200m 以深に設置することで、地上に比べて地面振動が小さく温度と湿度が安定しているため不必要な雑音を抑えることができる。もう一つは検出器を構成する鏡にサファイアを使用し、それを 20K まで冷却している。そうすることで熱雑音を抑えることができる。

鏡に用いられているサファイアの特長として複屈折性がある。これはサファイア結晶の c 軸に平行でない光が入射したとき、光のそれぞれの振動方向に対して屈折率が異なることによって偏光がことなる現象である。その影響によってレーザービームの波面が汚れてしまう。

本研究ではこのサファイア鏡の複屈折分布の非一様性がもたらす影響下においても鏡の姿勢制御を正確に行えるような手法として、16 分割フォトディテクターを用いた信号の取得による方法を考案した。16 分割フォトディテクターの受光する光強度信号に対して複屈折の影響を最小にするような重みをつけることによって、精度良く姿勢制御できるような姿勢制御信号を

取得できる。そのための最適な重みを光学シミュレーションソフトウェア FINESSE でシミュレーションし導出した。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 章ではアインシュタイン方程式の線形化から重力波の導出を行い、マイケルソン干渉計による検出原理を記述する。第 3 ではマクスウェル方程式からガウシアンビームを導出し、光軸のずれや回転によってエルミートガウシアンモードの高次のモードが現れることを確認する。また、共振器の特性や長さ制御法である PDH 法、姿勢制御法である WFS 法を説明する。本章では立原さんの修論 [6] の第 3 章を参考にした。第 4 では複屈折の基本原理を記述し、その特性が KAGRA で引き起こす問題について説明する。本章では阿部さんの修論 [7] の第 3 章を参考にした。第 5 では、共振器内の光の共振や PDH 信号、WFS 信号が複屈折の影響下でどのようになるのかを FINESSE を用いてシミュレーションする。第 6 では python の数理最適化モジュール SciPy を使用し、最小二乗法を用いて重みを導出する。その重みを用いた結果を用いていない結果と比較し有意性を検証する。第 7 では、本研究のまとめと本研究を通して浮かび上がってきた課題を記述する。

第2章

重力波の理論

本章ではアインシュタイン方程式の線形化をおこない重力波の満たす方程式を導出し、重力波検出器による検出原理を確認する。簡略化のため計算過程では自然単位系 $c = 1$ を採用する。

2.1 アインシュタイン方程式

一般相対論における時空間座標は $x^\mu = (-ct, x, y, z)$ 、時空間における微小距離 ds^2 は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

と表す。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ がミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ となるときの時空を一般にミンコフスキー時空 (平坦な時空) と呼ぶ。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ はアインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

を満たす。ここでは宇宙項を無視している。クリストッフェル記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 、リーマンテンソル $R_{\alpha\mu\nu}^\lambda$ 、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ 、リッチスカラー R はそれぞれ、

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.4)$$

$$R_{\alpha\mu\nu}^\lambda := \partial_\mu\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda\Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \quad (2.5)$$

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\nu\lambda}^\lambda \quad (2.6)$$

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

で定義される。

2.2 弱重力場におけるアインシュタイン方程式の線形化

弱重力場における計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ と摂動項 $h_{\mu\nu}$ の和で表すと、

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ h_{\mu\nu} &= \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。以降を ϵ の一次まで考えることで線形化を行う。添字の上げ下げを $\eta^{\mu\nu}$ 、 $\eta_{\mu\nu}$ でおこなうと、

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

$$h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

$$\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \quad (2.11)$$

となり、クリストッフェル記号、アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ を h を用いて表すと、

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.12)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial^\lambda h_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial^\lambda h_{\mu\lambda} - h_{,\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\square h) \quad (2.13)$$

と表せる。ここで変数変換

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.14)$$

を導入すると式 (2.13) は、

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial^\lambda\tilde{h}_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial^\lambda\tilde{h}_{\mu\lambda} - \square\tilde{h}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\beta\tilde{h}_{\alpha\beta}) \quad (2.15)$$

と書き直せる。ここで一般相対論において座標系を自由に選べるので、ゲージ変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ に対して

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu \quad (2.16)$$

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{h}'_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + \partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\xi_\alpha \quad (2.17)$$

となるから、

$$\begin{aligned} \partial^\mu\tilde{h}'_{\mu\nu} &= \partial^\mu\tilde{h}_{\mu\nu} + \square\xi_\nu + \partial_\nu(\partial^\mu\xi_\mu) - \partial_\nu(\partial^\alpha\xi_\alpha) \\ &= \partial^\mu\tilde{h}_{\mu\nu} + \square\xi_\nu \end{aligned} \quad (2.18)$$

と計算できる。これより

$$\square\xi_\nu = -\partial^\mu\tilde{h}_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

を満たすようにゲージ変換を行えば (ゲージ固定) 常に

$$\partial^\mu\tilde{h}'_{\mu\nu} = 0 \quad (2.20)$$

とすることができる。これはローレンツ条件と呼ばれる。以上より線形化されたアインシュタイン方程式は

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

$$\partial^\mu \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.22)$$

の2式を基本方程式として表せる。式(2.19)において、

$$\square \tilde{\xi}_\nu = 0 \quad (2.23)$$

を満たす解を ξ_ν に加えて新たなゲージ $\xi_\nu + \tilde{\xi}_\nu$ としても同様に式(2.19)を満たす。つまり残存ゲージ自由度が存在する。

2.3 線形化されたアインシュタイン方程式の平面波解

真空中におけるエネルギー運動量テンソルは0であるため式(2.21)は

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.24)$$

となる。この波動方程式の単色平面波解として

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \text{Re}[A_{\mu\nu} \exp[ik_\alpha x^\alpha]] \quad (2.25)$$

を考える。 $A_{\mu\nu}$ は対称テンソルである。これを式(2.22)に代入すると、

$$k^\mu A_{\mu\nu} = 0 \quad (2.26)$$

となる。平面波の進行方向を z 軸方向とすると、

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad (2.27)$$

を式(2.26)に代入して、

$$kA_{0\nu} + kA_{3\nu} = 0 \quad (2.28)$$

となる。これより $A_{\mu\nu}$ の自由度は10から6になる。次に残存ゲージ自由度を用いて式(2.23)、さらにゲージ変換を行うと、 $\tilde{\xi}_\mu$ も平面波解

$$\tilde{\xi}_\mu = \text{Re}[B_{\mu\nu} \exp[ik_\alpha x^\alpha]] \quad (2.29)$$

を持つことに注意してゲージ変換は

$$\begin{aligned} \tilde{h}'_{\mu\nu} &= \tilde{h}_{\mu\nu} + \partial_\nu \tilde{\xi}_\mu + \partial_\mu \tilde{\xi}_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \tilde{\xi}_\alpha \\ A'_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} + B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu - \eta_{\mu\nu} B^\alpha k_\alpha \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。ここで $A'_{\mu\nu}$ が空間成分のみであるという条件を課すと、

$$A'_{0\nu} = 0 \quad (2.31)$$

となる。これで $\tilde{\xi}_\mu$ の3つの自由度を用いている。残りの一つの自由度を $\text{Tr } A' = 0$ と考えると、

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} - 2k_\mu B^\mu = 0 \\ k_\mu B^\mu &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (2.32)$$

となる。以上をまとめると平面波解は

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t)\quad (2.33)$$

となる。ここで任意定数 h_+ 、 h_\times はそれぞれ重力波のプラスモード、クロスモードと呼ばれる。 $h_{\mu\nu}$ に課した条件

$$\begin{aligned}h_{\mu 0} &= 0 \\ \partial^\nu h_{\mu\nu} &= 0 \\ h_\mu^\mu &= 0\end{aligned}\quad (2.34)$$

は合わせてトランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ) と呼ばれる。

TT ゲージのもとで線素 ds^2 を考えると、

$$\begin{aligned}ds^2 &= -dt^2 + (1 + h_+ \cos(kz - \omega t))dx^2 + (1 - h_+ \cos(kz - \omega t))dy^2 \\ &\quad + 2h_\times \cos(kz - \omega t)dx dy + dz^2\end{aligned}\quad (2.35)$$

となり、 $h_\times = 0$ のとき

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+ \cos(kz - \omega t))dx^2 + (1 - h_+ \cos(kz - \omega t))dy^2 + dz^2\quad (2.36)$$

となる。これは x 方向が縮むと y 方向は伸び、 y 方向が縮むと x 方向は伸びるということを表す。また $h_+ = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}ds^2 &= -dt^2 + (1 - h_+ \cos(kz - \omega t))\left(\frac{dx - dy}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\quad + (1 + h_+ \cos(kz - \omega t))\left(\frac{dx + dy}{\sqrt{2}}\right)^2 + dz^2\end{aligned}\quad (2.37)$$

となる。これはプラスモードにの座標軸を45度回転させた軸に対して伸び縮みしていることを表す。以上より重力波が来た時の自由質点間の距離は図 2.1 となる。

2.4 マイケルソン干渉計による重力波の検出

マイケルソン干渉計では、レーザー光をビームスプリッターで2つの方向に分ける。そしてその光の光路上に鏡を置き光を反射させ、もと来た光路をたどり再びビームスプリッターにもどす。そして別々の光路を辿ってきた光を合流させる。二手に分かれた光が再び合流したとき、この二つの光は干渉を起こす。マイケルソン干渉計で重力波を検出するためには、2つの

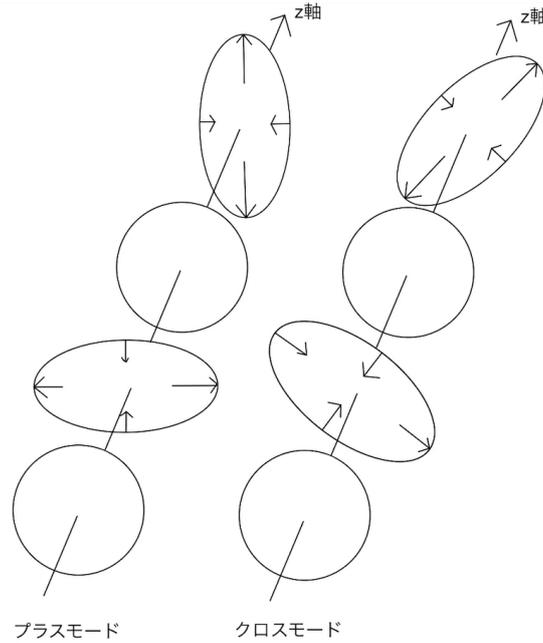


図 2.1 重力波のプラスモードとクロスモードの伝搬の様子

光路が 90 度になるように設計する。重力波によって 90 度を成す角度で空間が伸び縮みすることで、マイケルソン干渉計の 2 つの光路長も伸び縮みをする。2 つの光路長が異なる方向に変位することによって、光の干渉の様子が変化する。その変化する干渉の様子を検知することによって重力波を検出する。

マイケルソン干渉計の光路をそれぞれ x 軸上と y 軸上取る。 x 方向のうでの長さ L_x 、 y 軸方向のうでの長さを L_y とする。ここに TT ゲージのプラスモードの重力波が入射したときのマイケルソン干渉計の応答を考える。このとき $x - y$ 平面の線素は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h_+(t))dx^2 + (1 - h_+(t))dy^2 \quad (2.38)$$

となる。光は線素 $ds^2 = 0$ で進むため、 x 軸方向を進む光は h_+ の一次近似で

$$dx = \pm c dt \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t) \right) \quad (2.39)$$

と表せる。 $t = t_0$ でレーザー光がビームスプリッターに入射し、 $t = t_1$ で往路を経て鏡に到達、反射し $t = t$ で再びビームスプリッターに戻ってきたとする。往路と復路でそれぞれ時間積分すると、

$$L_x = c(t_1 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} h_+(t') dt' \quad (2.40)$$

$$-L_x = -c(t - t_1) + \frac{c}{2} \int_{t_1}^t h_+(t') dt' \quad (2.41)$$

となる。この2式の差をとると、

$$\begin{aligned}\Delta t_x &= t - t_0 \\ &= \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h_+(t') dt'\end{aligned}\quad (2.42)$$

となる。同様に Δt_y は、

$$\Delta t_y = \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h_+(t') dt' \quad (2.43)$$

と求められる。ここで Δt_x 、 Δt_y はそれぞれのうでを一往復するのにかかる時間である。レーザーの角振動数を Ω とすると、光がうでを一往復してきたのちに位相は $\Omega \Delta t$ 進む。これより再びビームスプリッターで合流した光の位相差 $\Delta \phi$ は、

$$\begin{aligned}\Delta \phi &= \Omega(\Delta t_x - \Delta t_y) \\ &= \Omega \left[\frac{2}{c}(L_x - L_y) + \int_{t-2L/c}^t h_+(t') dt' \right]\end{aligned}\quad (2.44)$$

となる。ここで積分区間の下限を $t_0 \sim t - 2L/c$ とした。第1項は基線長の差による位相差であり、第2項は重力波の入射によるうでの差動変位がもたらす位相変化である。これより第2項を $\Delta \phi_{\text{gw}}$ とおく。重力波に対する干渉計の周波数応答を考える。重力波の振幅 $h_+(t)$ をフーリエ変換すると、

$$h_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.45)$$

であり、これを用いて $\Delta \phi_{\text{gw}}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\Delta \phi_{\text{gw}} &= \Omega \int_{t-2L/c}^t h_+(t') dt' \\ &= \Omega \int_{t-2L/c}^t \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_+(\omega) e^{i\omega t'} d\omega dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) e^{-i\omega L/c} \tilde{h}_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}\quad (2.46)$$

となる。重力波に対するマイケルソン干渉計の周波数応答関数 H_M は、

$$H_M = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) e^{-i\omega L/c} \quad (2.47)$$

と求められる。周波数応答関数が最大になるように基線長 L を決めれば重力波に対する感度が最大となる。つまり $\omega L/c = \pi/2$ となるように L をとると、

$$\begin{aligned}L &= \frac{c\pi}{2\omega} \\ &= \frac{c}{4} \times \frac{1}{f} \\ &\sim 750[\text{km}] \times \frac{100[\text{Hz}]}{f}\end{aligned}\quad (2.48)$$

となる。ここで f は重力波の周波数である。つまり 100Hz の周波数に対して感度を最大にするようなマイケルソン干渉計の基線長の長さは約 750km であるとわかる。うでの長さが 750km である干渉計は現実的に設計不可能であるため、実際の干渉系型重力波検出器ではうでの間に共振器を導入し実質的な光路長を稼いでいる。

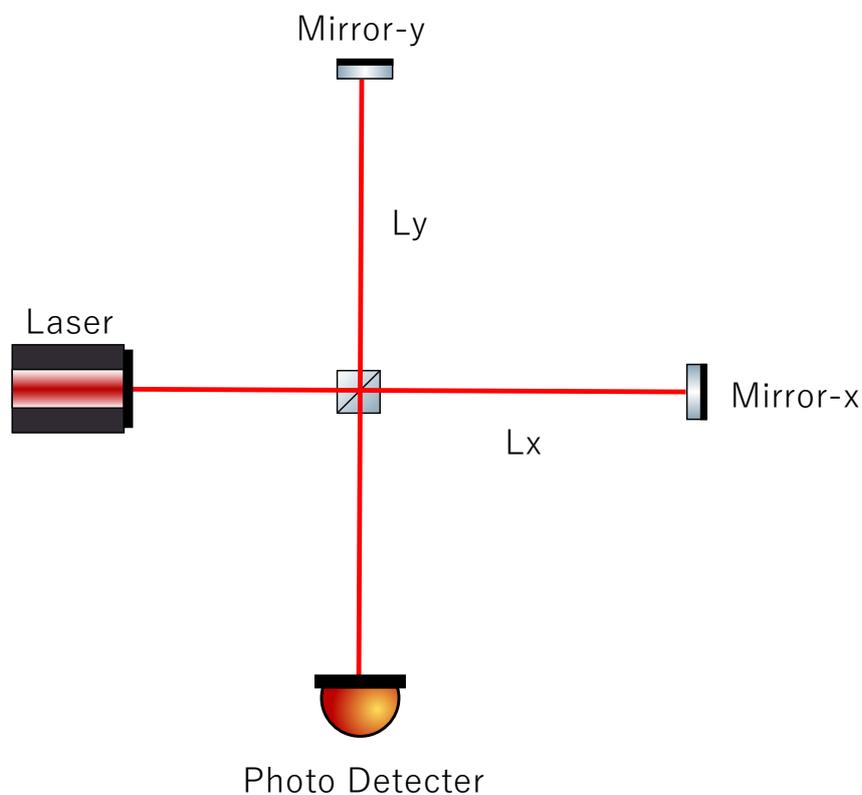


図 2.2 マイケルソン干渉計

第3章

レーザー光学

3.1 ガウシアンビーム

真空中のマクスウェル方程式からガウシアンビームを導出する。真空中のマクスウェル方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

と表される。これらを用いて電場の波動方程式を導出すると、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (3.5)$$

となる。電場の進行方向を z 軸方向とし平面波解を仮定すると、

$$\mathbf{E} = u(x, y, z) \exp[i(\omega_0 t - kz)] \quad (3.6)$$

となり、これを式 (3.5) に代入し計算すると、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, y, z) \exp[i(\omega_0 t - kz)] = 0 \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u - 2ik \frac{\partial}{\partial z} u = 0 \quad (3.8)$$

を得る。ここで $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim 0$ という近似をすると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

を得る。これを近似ヘルムホルツ方程式という。式 (3.9) の解の一つとしてガウシアン分布

$$u(r, z) = A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] \quad (3.10)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3.11)$$

を考えると、式 (3.10) を式 (3.9) に代入して、

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] - 2ik \frac{\partial}{\partial z} A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] = 0 \\
& A(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] - 2ik \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} + A(z) i \frac{k}{2q^2} r^2 \frac{\partial q}{\partial z} \right) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] = 0 \\
& A(z) \left(- \left(\frac{k}{q} \right)^2 r^2 - 2i \frac{k}{q} \right) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] \\
& - 2ik \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} + A(z) i \frac{k}{2q^2} r^2 \frac{\partial q}{\partial z} \right) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] = 0 \\
& \left\{ -A(z) \left(\frac{k}{q} \right)^2 r^2 \left(1 - \frac{\partial q}{\partial z} \right) - 2ikA(z) \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right\} \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] = 0 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

と計算できる。これが恒等的に成り立つようにパラメータ q と $A(z)$ を決定する。式 (3.12) より、

$$\frac{dq}{dz} - 1 = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dz} + \frac{1}{q} = 0 \quad (3.14)$$

を計算すると、

$$q(z) = z + q_0 \quad (3.15)$$

$$\frac{A'}{A} = -\frac{1}{q}$$

$$\log A = -\log q + c_0$$

$$A(z)q(z) = A_0q_0 \quad (3.16)$$

となる。ここで A_0 、 q_0 は積分定数であり、それぞれ $z = 0$ の時の値である。これらを用いて式 (3.10) を書き直すと、

$$u(r, z) = \frac{A_0q_0}{z + q_0} \exp \left[-i \frac{k}{2(z + q_0)} r^2 \right] \quad (3.17)$$

と表せる。これがガウシアン分布を満たすためには、 $r \rightarrow \infty$ で $|u| \rightarrow 0$ をみたく必要がある。 $|u|$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
|u|^2 &= |A|^2 \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^*} \right) \right] \\
&= |A|^2 \exp \left[-\frac{k}{2|q|^2} \text{Im}[q] \right] \quad (3.18)
\end{aligned}$$

となる。これが境界条件をみたすのは $\text{Im}[q] > 0$ を満たすときである。 q_0 をある正の定数 z_R を用いて、

$$\begin{aligned}
q_0 &= iz_R \\
z_R &> 0 \quad (3.19)
\end{aligned}$$

とおくと、

$$q = z + iz_R \quad (3.20)$$

$$A(z) = \frac{A_0 iz_R}{z + iz_R} \quad (3.21)$$

と表せる。これらより式 (3.10) を書き直すと、

$$u(r, z) = A_0 \frac{iz_R}{z + iz_R} \exp\left[-i \frac{k}{2(z + iz_R)} r^2\right] \quad (3.22)$$

となる。係数部分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{iz_R}{z + iz_R} &= \frac{iz_R(z - iz_R)}{(z + iz_R)(z - iz_R)} \\ &= \frac{z_R(iz + z_R)}{z^2 + z_R^2} \\ &= \frac{z_R}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \exp\left[i \tan^{-1} \frac{z}{z_R}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}} \exp\left[i \tan^{-1} \frac{z}{z_R}\right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

となるので、式 (3.22) は、

$$\begin{aligned} u(r, z) &= A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}} \exp\left[-i \frac{k(z - iz_R)}{2(z^2 + z_R^2)} r^2 + i \tan^{-1} \frac{z}{z_R}\right] \\ &= A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}} \exp\left[-\frac{1}{w_0^2} \frac{1 + i \frac{z}{z_R}}{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} r^2 + i \tan^{-1} \frac{z}{z_R}\right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

となる。ここで $z_R = \frac{kw_0^2}{2}$ とおいて計算した。

ビームの特徴を表すパラメータとして、スポットサイズ w 、曲率半径 R 、Gouy 位相 η を以下のように定義する。

$$w = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (3.25)$$

$$R = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right] \quad (3.26)$$

$$\eta = \tan^{-1} \frac{z}{z_R} \quad (3.27)$$

これらを用いて式 (3.24) を書き直すと、

$$u(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w} \exp\left[-\left(\frac{1}{w^2} + i \frac{k}{2R}\right) r^2 + i\eta\right] \quad (3.28)$$

と表せる。

3.2 ビームパラメータ

ガウシアンビームで用いたビームパラメータの物理的な意味を説明する。

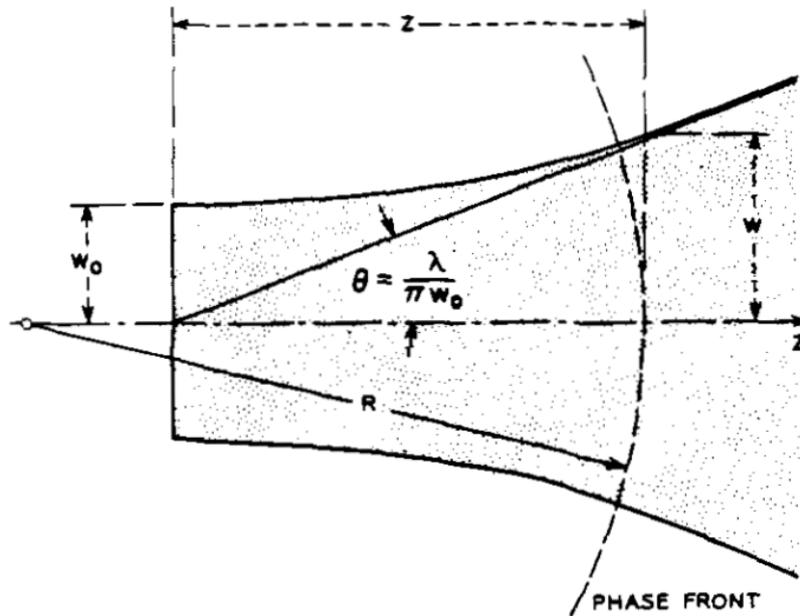


図 3.1 beam parameter [8]

3.2.1 w : スポットサイズ

ビームの太さを表すパラメータ。 $w(z)$ の中には約 86.4% のパワーが含まれる。定数 w_0 は $z=0$ の位置におけるスポットサイズである。上記のガウシアンビームは $z=0$ をビームウエストとしている。つまり $z=0$ でビームのサイズは最も絞られている。関係式は式 (3.25) で与えられる。

3.2.2 z_R : Rayleigh レンジ

ビームウエスト $z=0$ から z_R だけ離れた位置におけるスポットサイズは、

$$w(z_R) = \sqrt{2}w_0 \quad (3.29)$$

となる。この z_R を Rayleigh レンジという。 z_R が長いほどビームは広がりにくい。ここで w_0 と z_R には

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} \quad (3.30)$$

の関係があるため、 z_R を長くしようとする w_0 が大きくなる。すなわちビームが太くなる。

3.2.3 R : 曲率半径

ビームは $z = 0$ で平面波、 $z \rightarrow \infty$ で球面波となる。関係式は式 (3.26) で与えられる。

3.2.4 η : Gouy 位相

ビームは進行するにつれて平面波から球面波になるため、ある z におけるビームは中心から離れるにつれて位相が遅れていく。これを Gouy 位相という。関係式は式 (3.27) で与えられる。この式を見ると、Rayleigh レンジにおける Gouy 位相は $\pi/4$ 、無限遠で $\pi/2$ となる。

3.3 エルミートガウシアンモード (HG モード)

近傍ヘルムホルツ方程式式 (3.9) の高次の解を考える。エルミートガウシアンモードの一般的な表式は、エルミート多項式

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} & (3.31) \\ H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \end{aligned}$$

を用いて表すことができ、

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp[-ikz + i(l + m + 1)\eta] \quad (3.32)$$

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R}\right] \quad (3.33)$$

で与えられる。ここで $l = 0, m = 0$ (基本モード) とすると、式 (3.32) と式 (3.33) より、

$$U_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp\left[-ikz - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2} + i\frac{k}{2R}\right) + i\eta\right] \quad (3.34)$$

のガウシアンビームとなる。基本モードを用いて高次モードを表すと、

$$U_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) U_{00} \exp[i(l + m)\eta] \quad (3.35)$$

となる。エルミート多項式には直交性があるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_l(x)U_m^*(x)dx = \delta_{lm} \quad (3.36)$$

を満たす。これより添字が異なるエルミートガウシアンモードはそれぞれ独立な解であることがわかる。つぎに逆行するビームを考える。 z 軸上を順行するビームに対して、逆行するビームは $x - y$ 平面に関して対称なものを考えて、

$$\begin{aligned} U_{lm}(x, y, -z) &= U_l(x, -z)U_m(y, -z) \exp[-ik(-z) + i(l + m + 1)\eta(-z)] \\ &= U_l^*(x, z)U_m^*(y, z) \exp[ikz - i(l + m + 1)\eta(z)] \\ &= U_{lm}^*(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.37)$$

と計算できる。つまり逆行するビームは順行するビームの複素共役で与えられる。

3.4 ビームの平行移動と回転

ビームがガウシアンビームの理想的な光軸からずれたときのビームの振る舞いについて考える。 x 軸方向に δx だけ平行移動した座標系 (x', y', z') として、 $z' = 0$ まわりでエルミートガウシアンモードを展開すると

$$U_{00} = U_{00}(x', y', 0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', 0) \quad (3.38)$$

$$U_{10} = U_{10}(x', y', 0) - \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', 0) \quad (3.39)$$

と展開できる。次に y 軸を中心として $\delta\theta$ 回転した座標系 (x', y', z') で展開すると、

$$U_{00} = U_{00}(x', y', 0) - i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} U_{10}(x', y', 0) \quad (3.40)$$

$$U_{10} = U_{10}(x', y', 0) + i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} U_{10}(x', y', 0) \quad (3.41)$$

と展開できる。ここで $\alpha_0 = 2/kw_0$ はビームの広がり角を示している。

3.5 ビーム移動の行列表現

式 (3.38), 式 (3.39), 式 (3.40), 式 (3.41) を行列で表現する。00 モードと 10 モードのみをもつガウシアンビームを考える。00 モードと 10 モードの係数をそれぞれ α_0, α_1 とおくと、

$$E = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.42)$$

と表せる。つまり x 軸方向に δx だけ平行移動した座標系への変換と、 y 軸を中心として $\delta\theta$ 回転した座標系への変換はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ -i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

となる。平行移動と回転移動を同時に考えると、

$$\begin{aligned} M(\delta x, \delta\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \frac{\delta x}{\alpha_0} \\ -i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} + i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} + i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と表せる。ここで $\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i \frac{\delta\theta}{\alpha_0}$ と置いた。

3.6 Fabry Perot 共振器

Fabry-Perot 共振器とは2枚の鏡を向かい合わせておくことで光を何度も往復させることのできる光学系装置のことである。光が何度もこの共振器内で往復することによって実質的な光路長を稼ぐことができるようになる。共振器の内部には共振条件を満たす光が溜まる。



図3.2 Fabry Perot 共振器

光源側のミラーをフロントミラー、もう一方をエンドミラーと呼ぶ。反射率と透過率をそれぞれ r_F, r_E, t_F, t_E とおく。光源から

$$E_{\text{in}} = E_0 \exp[i\omega t] \quad (3.46)$$

の光を入射する。共振器長を L 、光が共振器内を n 回往復したとすると、

$$\begin{aligned} E_r &= r_F E_{\text{in}} + t_F^2 (-r_E) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-2i \frac{L\omega}{c}\right] \left(r_F r_E \exp\left[-2i \frac{L\omega}{c}\right]\right)^n \\ &= \left(r_F - \frac{t_F^2 r_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]}\right) E_{\text{in}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

ここで $\phi = 2L\omega/c$ とおいた。これは共振器内を1往復する際の位相差である。同様にして透過光は、

$$E_t = \frac{t_F t_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]} E_{\text{in}} \quad (3.48)$$

と計算できる。式(3.47)、式(3.48)より共振器の反射率 r_{cav} と透過率 t_{cav} はそれぞれ、

$$r_{\text{cav}} = \frac{E_r}{E_{\text{in}}} = r_F - \frac{t_F^2 r_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]} \quad (3.49)$$

$$t_{\text{cav}} = \frac{t_F t_E \exp[-i\phi]}{1 - r_F r_E \exp[-i\phi]} \quad (3.50)$$

となる。これらより入射光のパワーを P_{in} 、反射光のパワーを P_r 、透過光のパワーを P_t とす

ると、

$$\begin{aligned}
 P_r &= |E_r|^2 \\
 &= |r_{\text{cav}}|^2 P_{\text{in}} \\
 &= \frac{\{(t_F^2 + r_F^2)r_E - r_E\}^2 + 4r_F r_E \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{(1 - r_F r_E)^2 \left\{1 + F \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}} P_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
 P_t &= |E_t|^2 \\
 &= |t_{\text{cav}}|^2 P_{\text{in}} \\
 &= \frac{(t_F t_E)^2}{(1 - r_F r_E)^2 \left\{1 + F \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}} P_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

となる。ここで、

$$F = \frac{4r_F r_E}{(1 - r_F r_E)^2} \tag{3.53}$$

とおいた。

次に共振条件について考える。光が共振器を一往復するとき位相 ϕ が

$$\phi = 2\pi n \tag{3.54}$$

を満たすと共振する。 $\phi = 2L\omega/c$ より、

$$L = \frac{n\pi c}{\omega} \tag{3.55}$$

となる。共振が起こる間隔 (FSR: Free Spectrum Range) は、

$$L_{\text{FSR}} = \frac{c}{2f} \tag{3.56}$$

$$f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L} \tag{3.57}$$

となる。共振ピークの半値全幅 (FWHM : Full Width at Half Maximamm) を計算すると、式 (3.52) において透過光強度が 1/2 となる位相 ϕ を求めると

$$\begin{aligned}
 P_t(\phi_H) &= \frac{1}{2} P_t(0) \\
 1 + F \sin^2\left(\frac{\phi_H}{2}\right) &= 2 \\
 \sin\left(\frac{\phi_H}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{F}} \\
 \phi &\simeq \frac{2}{\sqrt{F}}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

となる。これより周波数空間における FWHM は、

$$\begin{aligned}
 f_{\text{FWHM}} &= \frac{c}{4\pi L} 2\phi_{\text{H}} \\
 &= \frac{c}{\pi L} \frac{1}{\sqrt{F}} \\
 &= \frac{c}{2\pi L} \frac{1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}}}{\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}} \\
 &= \frac{1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}}}{\pi\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}} f_{\text{FSR}}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

となる。ここでフィネス \mathcal{F} と呼ばれる量を

$$\mathcal{F} = \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{FWHM}}} \tag{3.60}$$

と定義すると、

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}}{1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}}} \tag{3.61}$$

と表せる。FSR やフィネスなどの値は共振器の性能を示すために用いられる値である。

3.7 Pound Drever Hall 法

共振器の長さ制御をするためには鏡の変位を読み取る必要がある。そのためには鏡の光軸方向の変位に対して線形な信号を得ることができれば良い。そのために開発されたのが PDH 法と呼ばれる方法である。この方法では、キャリア光から少し周波数のずれたサイドバンド光をもちいて共振条件からのずれを測定することによって変位に対する線形な信号を得る。

この信号をエラー信号とよぶ。キャリア光を位相変調器 (EOM : Electro Optical Modulator) に通してサイドバンドを発生させ、検出器で変調周波数と同じ周波数で復調することによってエラー信号を得るという仕組みである。

3.7.1 位相変調

サイドバンドを発生させるために入射光を EOM に入れる。EOM 結晶は印加電圧によって屈折率が変化し、光路長が変化する。

角周波数 ω_c の入射光に対して、変調指数 m 、変調周波数 ω_m の位相変調をかけると、EOM を透過した光 E_{mod} は、

$$\begin{aligned}
 E_{\text{mod}} &= E_0 \exp[i(\omega_c t + m \sin(\omega_m t))] \\
 &= E_0 e^{i\omega_c t} \exp[im \sin(\omega_m t)]
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

と表せる。ここで Bessel 関数 $J_n(m)$ を用いて $\exp[im \sin(\omega_m t)]$ を展開する。ここで Bessel 関数の母関数表示は、

$$\exp\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)x^n \tag{3.63}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\exp[im \sin(\omega_m t)] &= \exp\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \\ x - \frac{1}{x} &= 2i \sin(\omega_m t) \\ x &= \exp[i\omega_m t]\end{aligned}\quad (3.64)$$

と計算できる。これより

$$\begin{aligned}\exp[im \sin(\omega_m t)] &= \exp\left[\frac{1}{2}\left(\exp[i\omega_m t] - \frac{1}{\exp[i\omega_m t]}\right)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp[in\omega_m t]\end{aligned}\quad (3.65)$$

と表せる。次に Bessel 関数の無限級数表示は、

$$J_{n \geq 0}(m) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!} \left(\frac{m}{2}\right)^{n+2s} \quad (3.66)$$

$$J_{-n} = (-1)^n J_n(m) \quad (3.67)$$

となる。式 (3.66) において m を十分小さいとして 2 次以上の項を無視すると入射光は

$$\begin{aligned}E_{\text{mod}} &= E_0 e^{i\omega_c t} \{J_0(m) + J_1(m)\} (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) \\ &= E_0 J_0 e^{i\omega_c t} + E_0 J_1 e^{i(\omega_c + \omega_m)t} - E_0 J_1 e^{i(\omega_c - \omega_m)t}\end{aligned}\quad (3.68)$$

と表せる。これより $\omega_c \pm \omega_m$ で振動する光が現れる。これがサイドバンド光である。

3.7.2 サイドバンド光の共振器応答

サイドバンド光を共振器に入射した時の共振器の応答を計算する。式 (3.49) において共振器長 L を一定として $r_{\text{cav}}(\phi) = r_{\text{cav}}(\omega)$ とする。つまり共振器内部の反射率は入射してきた光の周波数による。これを用いて共振器から出てくる反射光を計算すると、式 (3.68) より、

$$E_r = E_0 J_0 r_{\text{cav}}(\omega_c) e^{i\omega_c t} + E_0 J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) e^{i(\omega_c + \omega_m)t} - E_0 J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m) e^{i(\omega_c - \omega_m)t} \quad (3.69)$$

となる。これより反射光強度は、

$$\begin{aligned}P_r &= |E_r|^2 \\ &= \left[J_0^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)|^2 \right] E_0^2 \\ &\quad + \left[2J_0 J_1 \operatorname{Re}\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\} e^{-i\omega_m t} \right] E_0^2 \\ &\quad + f(e^{2i\omega_m t})\end{aligned}\quad (3.70)$$

と計算できる。式 (3.70) の第 1 項は PDH 信号の DC 成分である。この項は共振状態において 0 をとる。第 1 項が共振点まわりで線形な信号となれば良い。第 2 項は高周波数な項で PDH 法においてはローパスフィルターを含む制御回路で落とす。

3.7.3 復調

式 (3.70) の強度信号から共振点周りでのエラー信号を得るために変調周波数と同じ周波数 ($\times \sin(\omega_m t)$) か $\pi/2$ 位相をずらした周波数 ($\times \cos(\omega_m t)$) で復調する。式 (3.70) の第 2 項を V_{RF} と表すと、

$$V_{\text{RF}} = 2J_0 J_1 \text{Re}[\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\}] E_0^2 \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} & \times (\cos(\omega_m t) - i \sin(\omega_m t)) \\ & = 2J_0 J_1 \text{Re}[\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\}] \cos(\omega_m t) E_0^2 \\ & + 2J_0 J_1 \text{Im}[\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\}] \sin(\omega_m t) E_0^2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

と計算できるので、($\times \sin(\omega_m t)$) で復調すると、

$$\cos(\omega_m t) \times \sin(\omega_m t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega_m t) \quad (3.73)$$

$$\sin(\omega_m t) \times \sin(\omega_m t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega_m t)) \quad (3.74)$$

に注意して高周波数を落とすと、

$$V_{\text{RF}}^{\text{I}} = J_0 J_1 \text{Im}[\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\}] E_0^2 \quad (3.75)$$

となる。($\times \cos(\omega_m t)$) で復調すると、

$$V_{\text{RF}}^{\text{Q}} = J_0 J_1 \text{Re}[\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\}] E_0^2 \quad (3.76)$$

となる。共振点まわり ($\phi = 2n\pi + \delta\phi$) において $r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) \simeq r_{\text{cav}}^*(\omega_c - \omega_m) \sim r_{\text{sb}}$ が成り立つことに注意して式 (3.75) を計算すると、式 (3.49) を用いて

$$\begin{aligned} V_{\text{RF}}^{\text{I}} &= 2J_0 J_1 r_{\text{sb}} \text{Im}[r_{\text{cav}}(\omega_c)] E_0^2 \\ &= 2J_0 J_1 r_{\text{sb}} E_0^2 \text{Im} \left[r_{\text{F}} - \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} \exp[-i\phi]}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}} \exp[-i\phi]} \right] \\ &= 2J_0 J_1 r_{\text{sb}} E_0^2 \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} \sin(\phi)}{1 + (r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2 - 2r_{\text{F}} r_{\text{E}} \cos(\phi)} \\ &\simeq 2J_0 J_1 r_{\text{sb}} E_0^2 \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{(1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2} \delta\phi \\ &= V_{\text{PDH}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

となる。これより PDH 信号は $\delta\phi$ に比例していることがわかる。 $\delta\phi$ は鏡の変位 δL によるものか入射光の周波数の変化 $\delta\omega$ によるものかが判別できないことに注意する。 $\delta\omega = 0$ を仮定すると

$$V_{\text{RF}}^* \propto \delta L \quad (3.78)$$

となり鏡の変位に対して線形な信号を得ることができる。

3.8 Wave Front Sensing 法

前節 3.7 で考えた PDH 法が共振器を構成する鏡の長さ方向 (光軸方向) のずれを測定する方法であったのに対し、今節で考える WFS(Wave Front Sensing 法) は鏡の光軸とは垂直な方向のずれと鏡の回転のずれを測定する方法である。

3.8.1 FP 共振器の反射行列

式 (3.49) で計算した反射率は 00 モードに対してのものである。これを r_{c0} とし、10 モードに対する反射率を r_{c1} とすると、

$$r_{c1} = r_F - \frac{t_F^2 r_E \exp[-i(\phi - 2\eta_{cav})]}{1 - r_F r_E \exp[-i(\phi - 2\eta_{cav})]} \quad (3.79)$$

と表せる。ここで η_{cav} は FP 共振器を片道進んだ時の Gouy 位相である。 r_{c0} 、 r_{c1} を用いてアラインメントされた FP 共振器の反射行列 R_{FP}^{align} を表すと、

$$R_{FP}^{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{c0} & 0 \\ 0 & r_{c1} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

となる。3.5 節で求めたように、入射光から見た共振器のずれを γ 、共振器からみた一次反射光の座標系のずれを γ_r とおくと一次反射光の反射行列 R_{FP}^{misalign} は式 (3.45) と式 (3.80) を用いて、

$$\begin{aligned} R_{FP}^{\text{misalign}} &= M^*(\gamma_r) R_{FP}^{\text{align}} M(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma_r^* \\ -\gamma_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{c0} & 0 \\ 0 & r_{c1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma_r^* & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} r_{c0} & r_{c0}\gamma + r_{c1}\gamma_r^* \\ -r_{c0}\gamma_r - r_{c1}\gamma^* & r_{c1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.81)$$

と表せる。ここで γ は十分小さいものとして 2 次の項は落とした。入射光 $E_0 e^{i\Omega t}$ が 00 モードのみであるとするると 1 次反射光は、

$$\begin{aligned} E_{\text{ref}} &= (U_{00} \ U_{10}) \begin{pmatrix} r_{c0} & r_{c0}\gamma + r_{c1}\gamma_r^* \\ -r_{c0}\gamma_r - r_{c1}\gamma^* & r_{c1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \\ &= \{r_{c0}U_{00} - (r_{c0}\gamma_r + r_{c1}\gamma^*)U_{10}\} E_0 e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (3.82)$$

と表せる。これよりミスアラインされた共振器に対する反射率 $r_{cav}^{\text{misalign}}$ は

$$r_{cav}^{\text{misalign}} = r_{c0}U_{00} - (r_{c0}\gamma_r + r_{c1}\gamma^*)U_{10} \quad (3.83)$$

と表せる。

3.8.2 ミスアラインされた共振器からの信号

$r_{cav}^{\text{misalign}}$ をそのまま FP 共振器の反射率であると考えたと PDH 信号 V_{RF}^I は式 (3.77) より、

$$\begin{aligned} V_{RF}^I &= E_0^2 J_0 J_1 \text{Im}[r_c r_{sb}^* - r_c^* r_{sb}] \\ &= iE_0^2 J_0 J_1 (r_c r_{sb}^* - r_c^* r_{sb}) \end{aligned} \quad (3.84)$$

と表せる。ここで、

$$r_c = r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c) \quad (3.85)$$

$$r_{\text{sb}} = r_{\text{cav}}^{\text{misalign}}(\omega_c \pm \omega_m) \quad (3.86)$$

と表記した。次に $r_c r_{\text{sb}}^* - r_c^* r_{\text{sb}}$ を計算する。簡略化のために以下では、

$$C = r_{\text{c}0}\gamma_r + r_{\text{c}1}\gamma^* \quad (3.87)$$

$$S = r_{\text{sb}0}\gamma_r + r_{\text{sb}1}\gamma^* \quad (3.88)$$

とおくと、 r_c と r_{sb} はそれぞれ、

$$r_c = r_{\text{c}0}U_{00} - CU_{10} \quad (3.89)$$

$$r_{\text{sb}} = r_{\text{sb}0}U_{00} - SU_{10} \quad (3.90)$$

と表せる。これらの表式を用いると $r_c r_{\text{sb}}^* - r_c^* r_{\text{sb}}$ は、

$$\begin{aligned} r_c r_{\text{sb}}^* - r_c^* r_{\text{sb}} &= (r_{\text{c}0}U_{00} - CU_{10})^*(r_{\text{sb}0}U_{00} - SU_{10}) \\ &\quad - (r_{\text{c}0}U_{00} - CU_{10})(r_{\text{sb}0}U_{00} - SU_{10})^* \\ &= (r_{\text{c}0}^*U_{00}^* - C^*U_{10}^*)(r_{\text{sb}0}U_{00} - SU_{10}) \\ &\quad - (r_{\text{c}0}U_{00} - CU_{10})(r_{\text{sb}0}^*U_{00}^* - S^*U_{10}^*) \\ &= (r_{\text{c}0}^*r_{\text{sb}0} - r_{\text{c}0}r_{\text{sb}0}^*)|U_{00}|^2 + (r_{\text{c}0}^*S^* - r_{\text{sb}0}C^*)U_{00}U_{10}^* \\ &\quad + (r_{\text{sb}0}^*C^* - r_{\text{c}0}S^*)U_{00}^*U_{10} + \mathcal{O}(\gamma^2) \end{aligned} \quad (3.91)$$

と計算できる。第1項はPDH信号そのものである。第2項と第3項が00モードと10モードの干渉を表しているためWFS信号 V_{WFS} として扱える。第4項は γ^2 の項であり γ を十分小さいとして落とせる。

$U = U_{00}U_{10}^*$ とおき、PDH法の計算の時にもした $r_c^* = r_c$ 、 $r_{\text{sb}}^* = r_{\text{sb}}$ の近似のもとで、 V_{WFS} を計算すると、

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}} &= (r_{\text{c}0}^*S^* - r_{\text{sb}0}C^*)U + (r_{\text{sb}0}^*C^* - r_{\text{c}0}S^*)U^* \\ &= [r_{\text{c}0}(r_{\text{sb}0}\gamma_r^* + r_{\text{sb}1}\gamma) - r_{\text{sb}0}(r_{\text{c}0}\gamma_r^* + r_{\text{c}1}\gamma)]U \\ &\quad + [r_{\text{sb}0}(r_{\text{c}0}\gamma_r + r_{\text{c}1}\gamma^*) - r_{\text{c}0}(r_{\text{sb}0}\gamma_r + r_{\text{sb}1}\gamma^*)]U^* \\ &= (r_{\text{c}0}r_{\text{sb}1} - r_{\text{sb}0}r_{\text{c}1})(\gamma U - \gamma^*U^*) \end{aligned} \quad (3.92)$$

となり、 $\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}$ を戻すと、

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}} &= (r_{\text{c}0}r_{\text{sb}1} - r_{\text{sb}0}r_{\text{c}1}) \left[\left(\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U - \left(\frac{\delta x}{w_0} - i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U^* \right] \\ &= (r_{\text{c}0}r_{\text{sb}1} - r_{\text{sb}0}r_{\text{c}1}) \left[(U - U^*) \frac{\delta x}{w_0} + i(U + U^*) \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right] \end{aligned} \quad (3.93)$$

となる。ここで $U - U^*$ と $U + U^*$ を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned} U - U^* &= 2i \text{Im}[U] \\ &= 2i \text{Im}[U_{00}U_{10}^*] \\ &= 2i \text{Im}[U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y)e^{-i\eta}] \\ &= -2iU_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y) \sin \eta \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned}
U + U^* &= 2i \operatorname{Re}[U] \\
&= 2i \operatorname{Re}[U_{00}U_{10}^*] \\
&= 2i \operatorname{Re}[U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y)e^{-i\eta}] \\
&= 2U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y) \cos \eta
\end{aligned} \tag{3.95}$$

となるのでこれらを式 (3.92) に代入して、

$$V_{\text{WFS}} = -2i(r_{c0}r_{sb1} - r_{sb0}r_{c1})U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y) \left(\sin \eta \frac{\delta x}{w_0} + \cos \eta \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \tag{3.96}$$

となる。これより共振状態における WFS 信号強度は式 (3.84) より、

$$V_{\text{RF}}^I = V_{\text{PDH}} + 2E_0^2 J_0 J_1 \left((r_{c0}r_{sb1} - r_{sb0}r_{c1})U_0(x)U_0(y)U_1^*(x)U_0^*(y) \left(\sin \eta \frac{\delta x}{w_0} + \cos \eta \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \right) \tag{3.97}$$

と求められる。

3.8.3 WFS 信号の抽出

式 (3.97) で出てきた強度信号には共振器の長さ方向のずれを与える PDH 信号と鏡の光軸とは垂直な方向のずれと回転方向のずれがある WFS 信号が足しあわされている。PDH 法を用いて鏡を共振状態に制御しておいた状態で WFS 信号を取得する方法を考える。

式 (3.33) において $l = 0$ 、 $l = 1$ とすると、

$$U_0(x) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R} \right] \tag{3.98}$$

$$U_1(x) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{2x}{w} \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R} \right] \tag{3.99}$$

より WFS 信号は奇関数である。単一の PD は取得した光を PD の領域内で積分するので WFS 信号は 0 となり検出することができない。そこで $x > 0$ と $x < 0$ の領域に分割された分割 PD で強度信号を取得し、左右で差 $V_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}}$ をとると、

$$\begin{aligned}
V_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}}(x, y) - \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}}(x, y) \\
&= 2 \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}}(x, y) \\
&= 2E_0^2 J_0 J_1 (r_{c0}r_{sb1} - r_{sb0}r_{c1}) \left(\sin \eta \frac{\delta x}{w_0} + \cos \eta \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \\
&\quad \times \int_0^\infty U_0^*(x)U_1(x)dx \int_{-\infty}^\infty U_0^*(y)U_0(y)dy
\end{aligned} \tag{3.100}$$

となる。 x に関する積分を計算すると式 (3.98) と式 (3.99) より、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty U_0^*(x)U_1(x)dx &= \frac{2}{w^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x \exp \left[-2 \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned} \tag{3.101}$$

となる。 y に関する積分は規格化条件から、

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0^*(y)U_0(y)dy = 1 \quad (3.102)$$

となる。したがって WFS 信号強度は、

$$V_{\text{WFS}}^{\text{splitPD}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0^2 J_0 J_1 (r_{c0} r_{sb1} - r_{sb0} r_{c1}) \left(\sin \eta \frac{\delta x}{w_0} + \cos \eta \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \quad (3.103)$$

と求められる。式 (3.103) をみると δx に比例する項と $\delta \theta$ に比例する項の両方が出てくるが、gouy 位相を適当に選ぶことによってどちらかの寄与を消すことができ、片方の情報のみを得ることができる。

第 4 章

複屈折

4.1 複屈折の原理

光が物質を透過する際に偏光によって異なる屈折率を示す現象のことである。サファイア結晶などの 1 軸性結晶では、c 軸とその軸に直交する平面で屈折率が異なる。この屈折率の違いによって光の分割が起こる。光が結晶に入射し屈折が起きるとき、光は通常光線と呼ばれるスネルの法則に従って屈折する光線と異常光線と呼ばれる通常光線以外の偏光の合成によって表されるスネルの法則に従わないように見える光線に分割される。

複屈折を考える際に屈折率楕円体を考える。屈折率楕円体とは、方向によって異なる屈折率を楕円の長軸と短軸を用いて立体的に表した図 4.1 のことである。

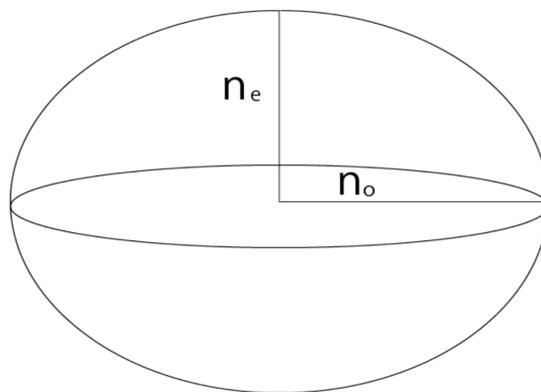


図 4.1 屈折率楕円体

入射光の光軸に対して垂直な平面で楕円を切断してその断面の成す楕円の長軸と短軸の長さに対して屈折率を考える。図 4.2 より 1 軸性結晶は中心を通る平面で切断し楕円の断面をみると長軸は常に n_o となる。短軸の n'_e を考えると、結晶 c 軸方向とレーザーの伝搬方向の成す角を θ として

$$n'_e = \sqrt{\frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}}} \quad (4.1)$$

と表される。 n_o 軸方向と n'_e 軸方向をそれぞれ低速軸、高速軸と呼ぶ。高速軸 n'_e の方向を ϕ

とする。例えば、低速軸と高速軸のそれぞれに平行な直線偏光 (波長 λ) が試料 (厚み d) に入射したとき、1回の透過で生じる位相差は、

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}(n'_e - n_0) \quad (4.2)$$

となる。

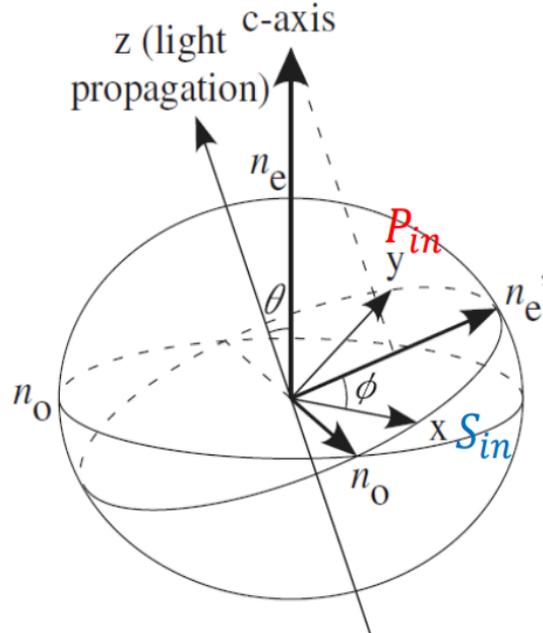


図 4.2 屈折率楕円体とレーザー光の関係

4.2 偏光の回転

複屈折を持つ物質に光を入射すると、振動の方向によって屈折率が異なるために振動の方向で位相が変わるため、光の偏光状態が変化する。この現象を Jones 計算法を用いて考える。これは電場の複素振幅の x 成分と y 成分を 2次元ベクトルとして計算する方法である。その 2次元ベクトルに 2×2 の行列を作用させて状態の変化を追う。厚さ d 、屈折率の差 Δn で高速軸と低速軸がそれぞれ x 軸、 y 軸を向いているとすると Jones 行列は、

$$\exp\left[i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] \begin{pmatrix} \exp\left[i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

と表せる。高速軸が x 軸に対して ϕ 傾いているとすると、

$$\begin{aligned} M(\phi, \Delta n) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\left[i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi\Delta nd}{\lambda} - i\cos 2\phi \sin\frac{\pi\Delta nd}{\lambda} & -i\sin 2\phi \sin\frac{\pi\Delta nd}{\lambda} \\ -i\sin 2\phi \sin\frac{\pi\Delta nd}{\lambda} & \cos\frac{\pi\Delta nd}{\lambda} + i\cos 2\phi \sin\frac{\pi\Delta nd}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (4.4) \end{aligned}$$

となる。複屈折をもつ物質に光が入射したとき、光は n_o 軸方向に振動する通常光線と n'_e 方向に振動する異常光線に分割される。その角度は、

$$\Psi = \frac{\pi}{2} - \theta + \arctan\left(\frac{n_o^2}{n_e^2 \tan \theta}\right) \quad (4.5)$$

となる。

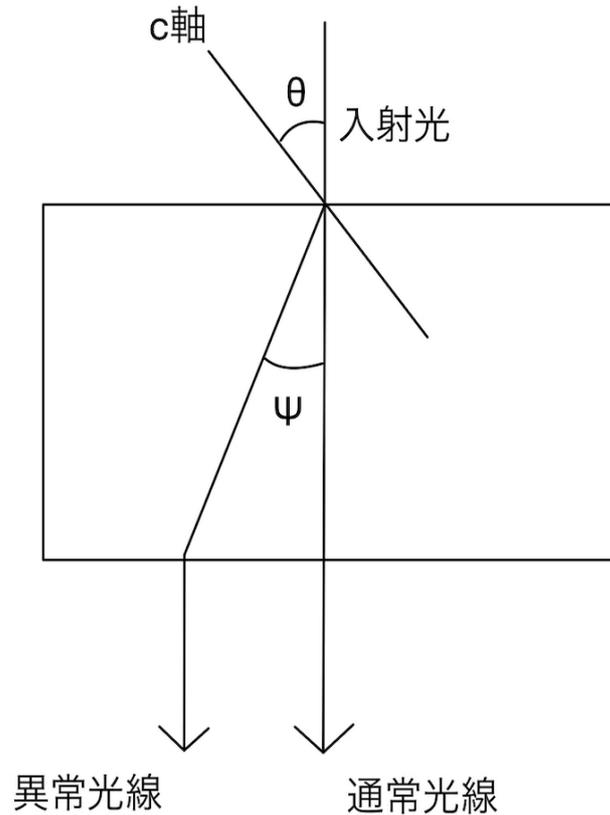


図 4.3 複屈折物質による光の分割

4.3 KAGRA の複屈折問題

現在の KAGRA の光干渉計に用いられている鏡はサファイア鏡が用いられている。光学素子は s 偏光と p 偏光で異なる反射率や透過率を示す。KAGRA では s 偏光のみをあつかうことになっているが、ITM を通過した光に予定されていた誤差よりも多くの p 偏光が確認された。共振器から出てきた光は Faraday isolator を通るため一部の偏光以外は透過できない。複屈折によって偏光が変わってしまった場合、その偏光された光はそのまま損失となる。

今回注目する複屈折による問題として、サファイア鏡の複屈折分布の非一様性がある。複屈折が非一様に分布していると、ビームが鏡を透過する位置によって反射率や透過率が変わってしまい、強度分布や位相が変わりビームの波面が汚れる。この影響によって鏡の長さ制御や姿勢制御に支障をきたす。

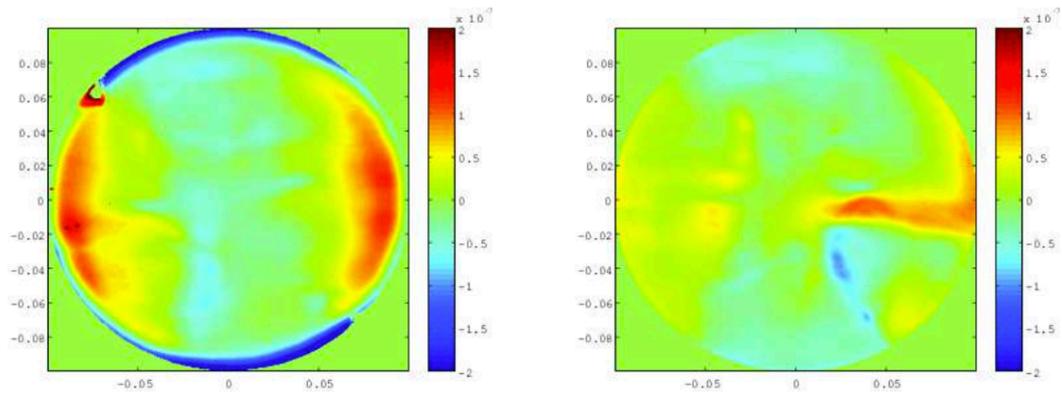


図 4.4 ITM の透過率マップ (左:ITMx 右:ITMy)[9]



図 4.5 透過光の p 偏光 [10]

第5章

FINESSE によるシミュレーション

本研究では、光学シミュレーションライブラリである「FINESSE2」を用いてコンピュータ上で光学系を再現しシミュレーション実験を行う。FINESSE のインストール方法や実行方法はマニュアルを参考にした。

5.1 実行環境

実験の再現性担保のため、実行環境を記述する。

OS : macOS Monterey version 12.6.1

プロセッサ : デュアルコア Intel Core i5

python : 3.9.13

pykat : 1.2.81

FINESSE : 2.3.1

5.2 光学系のセットアップ

再現性の担保のためにソースコードを記述する。

ソースコード 5.1 FINESSE:FP 共振器の基本セットアップ

```
1  l i1 1 0 nL
2  const fmod 15M
3
4  mod eo1 $fmod 0.15 2 pm 0 nL neo2
5  s eo1eo2 0 neo2 neo3
6  bs refl 0.0001 0.9999 0 45 neo3 dump n0 nREFL #REFL
7  s s0 0 n0 n1ar
8  m ARx 0 1 0 n1ar n1ar2
9  s sAR 0 n1ar2 n1
10 m ITMx 0.996 4000e-6 90 n1 n2
11 s s1 1 n2 n3
12 m ETMx 0.999945 5e-6 90 n3 n4
```

```

13
14     attr ITMx Rc 0
15     attr ETMx Rc 2
16     cav xarm ITMx n2 ETMx n3
17
18
19     maxtem 5
20     gauss* input i1 nL 0 2

```

本実験では1W、オフセット0のレーザーを用いた。EOMのパラメータとして変調周波数15MHz、変調指数0.15、次数2、位相変調(pm)とした。共振器を構成するミラーとしてフロントミラー(ITMx: Input Test Mass x)とエンドミラー(ETMx: End Test Mass x)があるが、それぞれにHR面(High Reflectivity)とAR面(Anti Reflectivity)がある。ITMxでそれを再現するためにAR面用のミラー(ARx)とHR面用のミラー(ITMx)をおいた。ITMxの曲率は0m、ETMxの曲率は2mとした。共振器内部のビームパラメータとしてビームウェストがITMxの位置 $z=0$ 、Rayleighレンジ $z_R=2$ とした。maxtemはFINESSE上で計算する高次モードのオーダーを決めている。 $n+m \leq \text{maxtem}$ を満たす $n+m$ 次までのエルミートガウシアンモードが計算される。このセットアップを基本として計算を行う。

5.3 ミラーマップ

本研究では複屈折の影響を加味した光学系を再現するために、ARxのミラーに反射率分布が一様でないミラーマップを導入する。ミラーマップの作成はPythonを用いた。以下にそのコードを記す。

ソースコード 5.2 python:ミラーマップの作成コード

```

1     def absorption(r, x, y):
2         result = 0
3         for nx in range(1,11):
4             for ny in range(1,11):
5                 result += r * math.cos(nx * math.pi * x + r * math.pi) * math
6                     .cos(ny * math.pi * y + r * math.pi)/(nx * nx * ny * ny)
7         return result
8
9     mirror_map = [[0 for _ in range(101)] for _ in range(101)]
10    for x in range(101):
11        for y in range(101):
12            mirror_map[x][y] = absorption(r, x/100, y/100) ** 2
13
14    mirror_map_arr = np.array(mirror_map)

```

この方法で作成した非一様な分布をミラーマップとしてARxに貼り付ける。ミラーマップはテキストファイルにする。ミラーマップは吸収率マップとした。光がミラーマップを透過すると、設定した数値倍の光量が吸収されるように設定している。図5.1はコード5.2で作成でき

るミラーマップの一例である。同一の曲線状で吸収率が等しい。

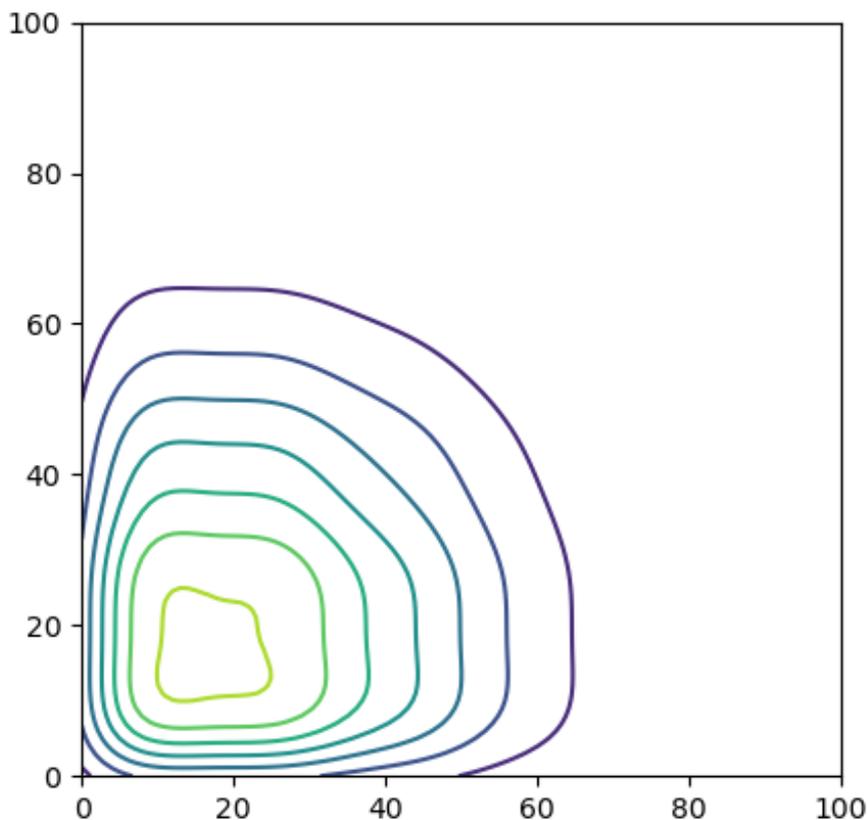


図 5.1 ミラーマップの例

ソースコード 5.3 FINESSE:ミラーマップを ARx に貼るためのコード

```
1 map ARx sub_r.txt
2 knm ARx sub_map
3 conf ARx save_knm_binary 1
4 conf ARx interpolation_method 2
5 conf ARx integration_method 1
```

コード 5.3 はミラーマップを FINESSE に組み込むためのコマンドである。FINESSE にはミラーマップの計算のための `integration_method` が 1 3 の 3 種類存在する。1 はリーマン和で 2、3 は立体求積法を用いている。実際にどの積分方法が適しているか調べたところ 1 が適していた。以下の実験では `integration_method1` を用いる。

5.4 共振

ミラーマップを導入したのちに FP 共振器内で光が共振していることを確認する。FP 干渉計のエンドミラーを透過した光をフォトディテクターで検出し共振ピークの様子をミラーマップを導入していない状態と比較する。

ソースコード 5.4 FINESSE:エンドミラーを透過した光を PD でみるコード

```
1 pd trans n4  
2 xaxis* ETMx phi lin -270 270 1000
```

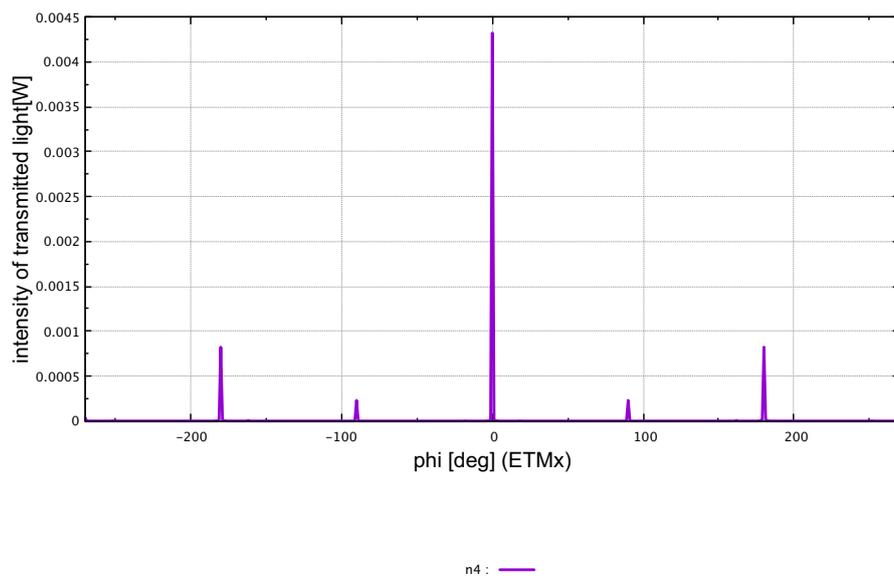


図 5.2 ミラーマップなしの共振ピーク

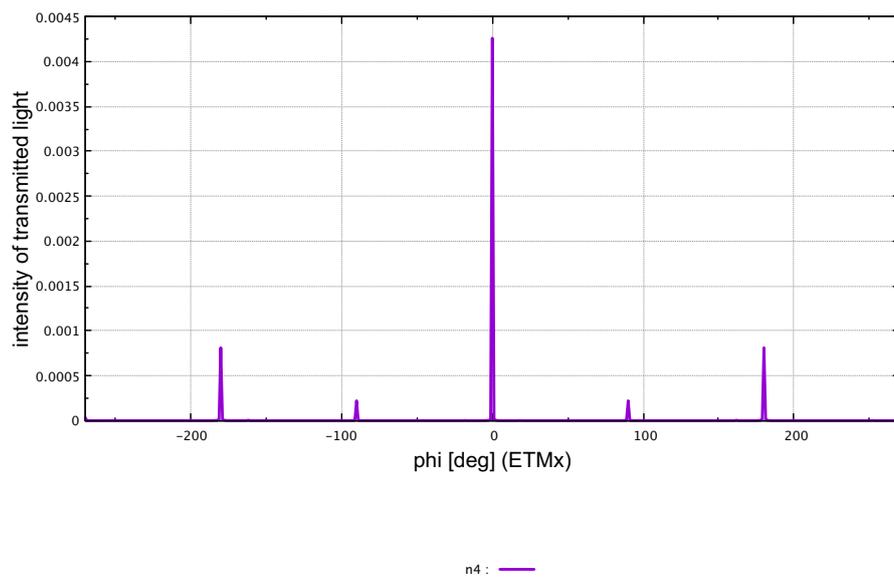


図 5.3 ミラーマップありの共振ピーク

ここでは ETM_x の位置を z 軸に平行に動かしている。図 5.2 はミラーマップをいれていないときの共振器を透過してきた光の共振ピークで、図 5.3 はミラーマップをいれたときの透過光の共振ピークである。横軸は ITM_x を動かしたときの位相変化、縦軸はフォトディテクターで検出した透過光強度である。透過光強度の理論値は式 (3.52) と式 (3.53) にシミュレーションで定義した ITM_x と ETM_x のそれぞれの反射率と透過率を代入して計算する。共振点における透過光強度はミラーマップなしのとき 4.320×10^{-3} [W]、ミラーマップありのとき 4.259×10^{-3} [W] であった。

5.5 PDH 信号

次にミラーマップを導入した状態で PDH 法をもちいて長さ制御が可能であるかどうかを検証する。PDH 法を用いて信号を取得するコマンドは以下のソースコードである。

ソースコード 5.5 FINESSE:PDH 法をもちいた線形信号の取得

```

1    pd1 Re1 $fmod 0 nREFL
2    xaxis* ITMx phi lin -.2 .2 1000

```

1 行目の pd1 ではフォトディテクターで取得した強度信号を変調周波数と同じ周波数で復調するコマンドである。図 5.4 はミラーマップなしのときの PDH 信号の様子で、図 5.5 はミラーマップありのときの PDH 信号の様子である。横軸は ITM_x の共振点からのずれを位相であらわしたもので、縦軸は PDH 信号強度である。

この2つを見比べると、マップの有無に限らずともに ETM_x のずれが 0 度のまわりで線形な信号が得られていることがわかる。これより共振器の鏡の長さ制御に複屈折の影響は乗らないことがわかる。PDH 信号は 3.7 節をみてもわかるようにレーザー光の基本モードの強度信号をもちいているため、信号強度自体は僅かに小さくなるものの、十分な線形信号を得ることができている。

この線形信号を用いて共振器の長さ方向の制御を考える。実際の実験系では PDH 法を用いて取得した信号をフィードバック回路に入力し制御する手法が取られている。FINESSE のシミュレーションでは lock コマンドを用いる。

ソースコード 5.6 FINESSE:PDH 法をもちいた共振器の長さ制御

```

1    pd1 Re1 $fmod 0 nREFL
2    set err Re1 re
3    lock pdh $err 1u .01u
4    put* ITMx phi $pdh
5    xaxis* ETMx phi lin -0.05 0.05 100

```

3 行目の lock コマンドでは、ETM_x を 1.0×10^{-6} (deg) 動かすたびに信号の強度を確認し、信号強度が 1.0×10^{-7} 分変化するたびに元の信号強度になるように ETM_x を動かして制御している。

図 5.6 はミラーマップなしでの透過光強度、図 5.7 はミラーマップありでの透過光強度の様

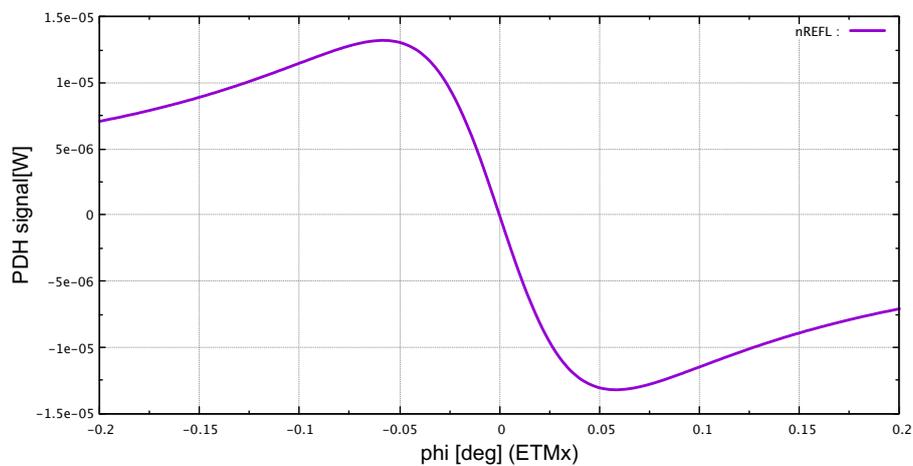


図 5.4 ミラーマップなしの PDH 信号

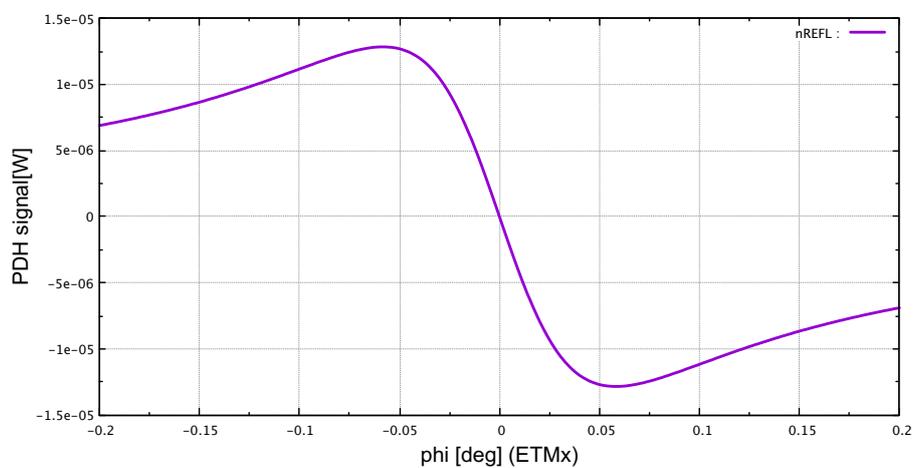


図 5.5 ミラーマップありの PDH 信号

子である。図 5.3 における共振ピーク時の透過光強度の値が 4.259×10^{-3} [W] であるから、これは共振器を共振状態で制御することができると言える。

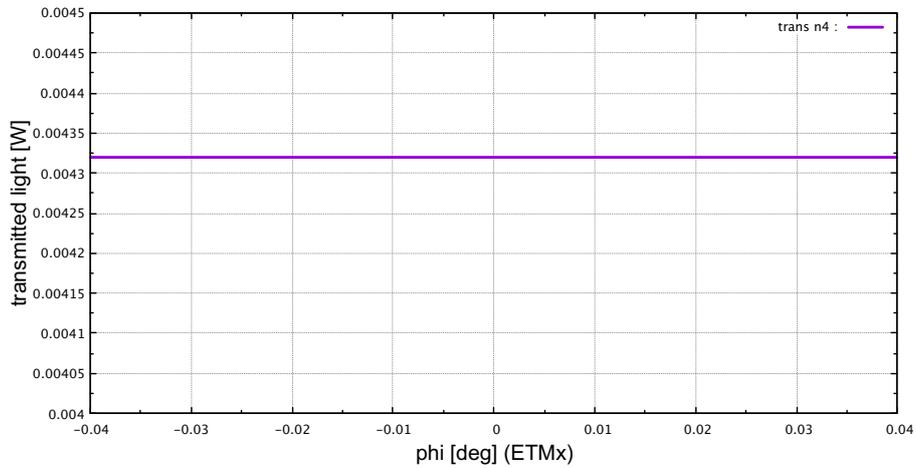


図 5.6 ミラーマップなしでの PDH 法による共振器のロック

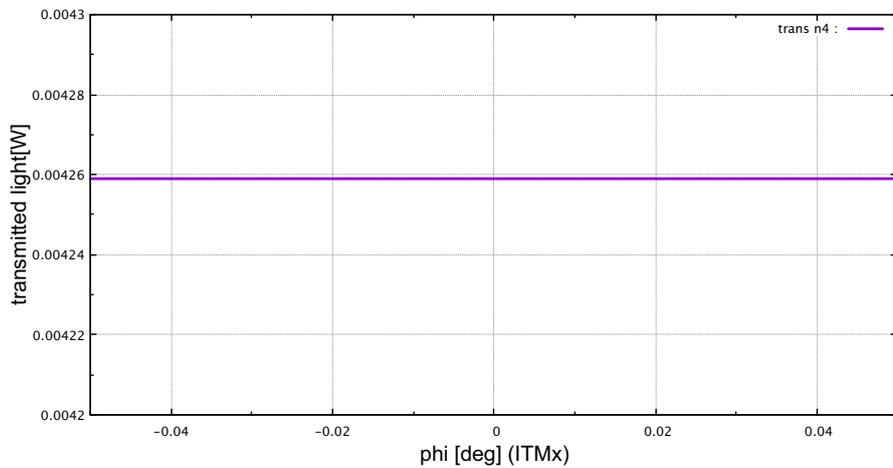


図 5.7 ミラーマップありでの PDH 法による共振器のロック

5.6 WFS 信号

次にミラーマップを導入した状態で WFS 法を用いてミラーの姿勢制御が可能であるかどうかを確認する。まずは鏡の回転に対する共振器の応答を確認する。方法は 5.4 節のときと同様

に共振器を透過した光をフォトディテクターで検出して共振ピークを観測することで行う。

ソースコード 5.7 FINESSE:鏡の回転に対する透過光強度

```
1 pd trans n4
2 xaxis* ETMx xbeta lin -50u 50u 1000
```

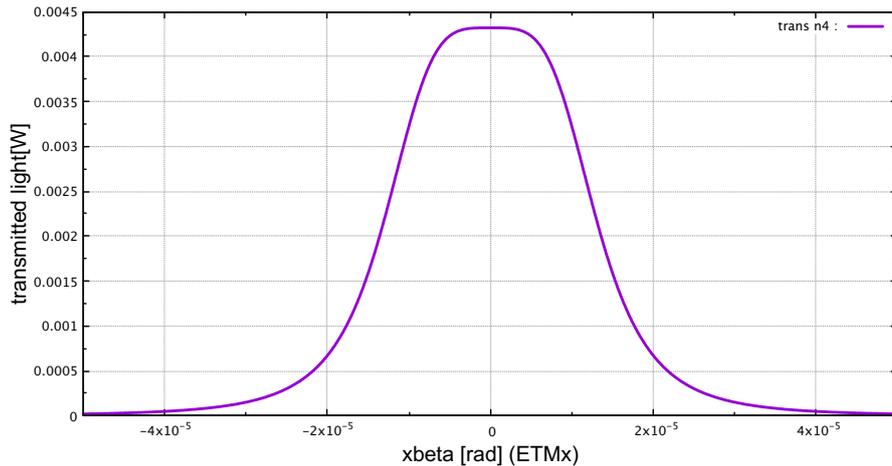


図 5.8 鏡の回転に対する共振器の応答

ここで透過光強度が $0.00425[\text{W}]$ よりも大きい値をとる鏡の回転角度の範囲は $-4.0 \times 10^{-6}[\text{rad}] \sim 4.0 \times 10^{-6}[\text{rad}]$ の範囲であることがわかる。

次に WFS 信号を取得するための分割 PD を置く適切な位置を考える。WFS 信号強度は Gouy 位相依存性がある。この適切な Gouy 位相を探す。鏡を $2 \times 10^{-6}[\text{rad}]$ 傾けた状態で gouy 位相を変化させ WFS 信号の強度をみる。

ソースコード 5.8 FINESSE:WFS 信号強度の gouy 位相依存性

```
1 s sGouy 0 nREFL nREFL2
2 attr ETMx xbeta 2u
3 pd1 ReI1 $fmod -176 nREFL2
4 pdtype ReI1 x-split
5 xaxis* sGouy gx lin 0 180 500
```

図 5.9 より、WFS 信号強度が最大となる gouy 位相は 90 度であることが分かる。以下では gouy 位相は 90 度に設定して実験を行う。

共振状態の範囲で鏡を回転させ WFS がどのようなようになるのかを確認する。

ソースコード 5.9 FINESSE:WFS 法における線形信号

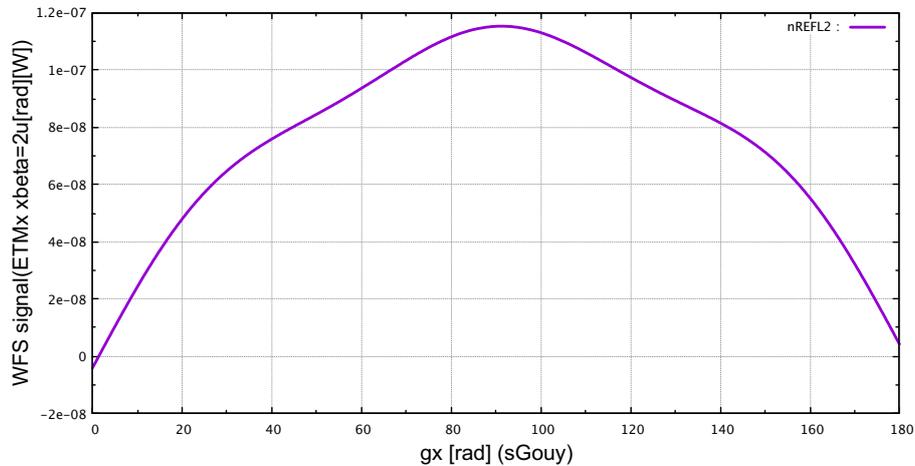


図 5.9 WFS 信号の gouy 位相依存性

```

1   s sgouy 0 nREFL nREFL2
2   attr sgouy g 90
3   pd1 ReI1 $fmod -176 nREFL2
4   pdtype ReI1 x-split
5   pd trans n4
6   xaxis* ETMx xbeta lin -4u 4u 1000

```

それぞれ横軸を ETMx の回転、縦軸を WFS 信号強度にとっている。図 5.10 は鏡の回転が 0 のときに WFS 信号強度も 0 となり、そのまわりで線形な信号が得られている。しかし図 5.11 の方では、鏡の回転角度が -3.8×10^{-6} のとき信号強度が 0 でそのまわりで線形な信号が得られている。これは、ミラーマップを導入したときには鏡が回転した状態に制御してしまうことを意味している。

この問題を解決するために、信号を取得するフォトディテクターに 16 分割フォトディテクターを採用する。16 分割のフォトディテクターが出力する 16 個の信号を線形に組み合わせて WFS 信号が原点周りで線形になるようにする手法を考える。

5.7 16 分割 PD の再現

今回のシミュレーションでは、FINESSE の beam コマンドを用いて 16 分割フォトディテクターを再現する。

ソースコード 5.10 FINESSE:16 分割フォトディテクター

```

1   s sgouy 0 nREFL nREFL2

```

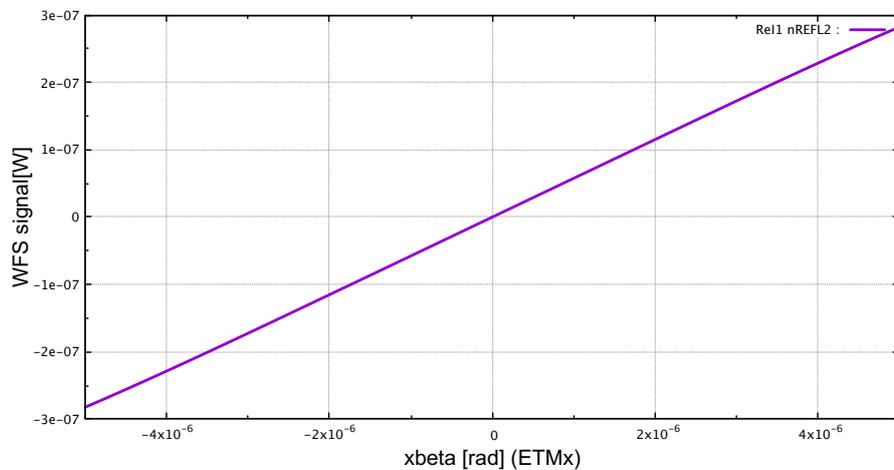


図 5.10 ミラーマップなしの WFS 信号

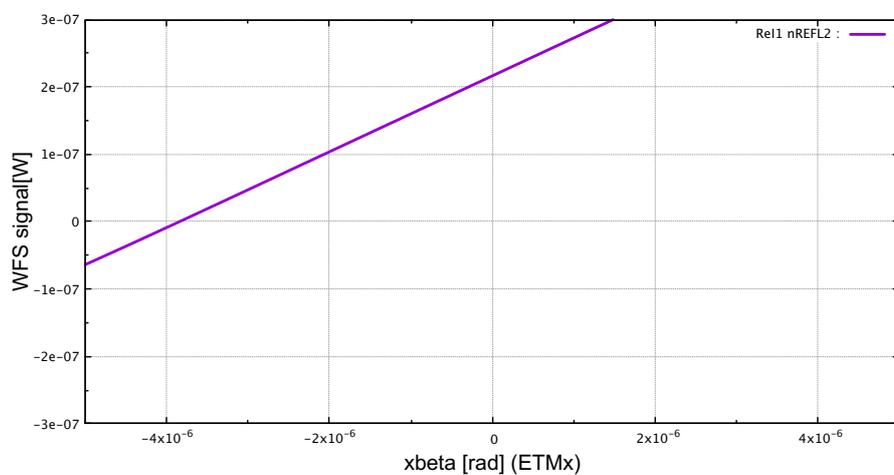


図 5.11 ミラーマップありの WFS 信号

```
2 attr sgouy g 90
3 attr ETMx xbeta Ou
4 beam beam1 nREFL2
5 xaxis beam1 x lin -1 1 3
6 x2axis beam1 y lin -1 1 3
```

7 yaxis abs

beam コマンドは、分割した領域内に入射する光の強度をそれぞれ出力する。これを用いて 4×4 の 16 個の領域に分割し、それぞれの光強度を取り出すことによって 16 分割フォトディテクターとして扱うことができる。3 行目の attr コマンドを用いて ETMx の回転角度を設定することができる。beam コマンドで得た信号は復調していない信号となることに注意する。

5.8 線形制御

16 分割フォトディテクターを用いて得た 16 個の光強度信号に適切な重みをつけて線形に組み合わせることによって、ミラーマップを導入した影響で乗ってしまうオフセットを限りなく 0 に近づける、つまり ETMx の回転角度が 0[rad] のときに原点周りで線形な信号を得ることを目的とする。

16 分割フォトディテクターの出力のそれぞれに対してパラメータをつける。

ここで $a_i (i = 0, 1, \dots, 15)$ をパラメータ、 $x_i (i = 0, 1, \dots, 15)$ を出力データとする。複屈折の影

$a_3 x_3$	$a_7 x_7$	$a_{11} x_{11}$	$a_{15} x_{15}$
$a_2 x_2$	$a_6 x_6$	$a_{10} x_{10}$	$a_{14} x_{14}$
$a_1 x_1$	$a_5 x_5$	$a_9 x_9$	$a_{13} x_{13}$
$a_0 x_0$	$a_4 x_4$	$a_8 x_8$	$a_{12} x_{12}$

図 5.12 16 分割フォトディテクターの出力データとパラメータのラベル

響がなく鏡の回転角度が 0[rad] のとき、 $a_i = 1 (i = 0, 1, \dots, 15)$ として

$$\sum_{i=0}^7 a_i x_i - \sum_{i=8}^{15} a_i x_i = 0$$

が成り立つ。これは単純な 2 分割フォトディテクターのとる信号と同じことである。複屈折の影響を加味する、つまりミラーマップを導入した状態で鏡の回転角度を 0[rad] としたときの信号強度は

$$y = \sum_{i=0}^7 a_i x_i - \sum_{i=8}^{15} a_i x_i \quad (5.1)$$

となる。すべてのパラメータが0を取らないことに注意して y の値が0に近くなるような最適なパラメータの組み合わせを求める。最適なパラメータを見つけることができれば、複屈折の影響下における鏡の姿勢制御を線形制御で行うことができる。

第 6 章

実験・結果

本章では 16 分割 PD の信号に乗せる重みのパラメータの最適化をした結果の説明と考察を述べる。

6.1 パラメータの最適化

パラメータの最適化のために、python の数値解析ソフトウェアである SciPy の数値最適化モジュールである `scipy.optimize` を用いて計算を行う。

実験手順は、

- トレーニングのための異なる 1000 個のミラーマップと、テストのための異なる 1000 個のミラーマップを作成
- それぞれのミラーマップについて FINESSE を用いてシミュレーションを実行
- それぞれの出力データと式 (5.1) を、0 にフィッティングするような最適なパラメータを計算
- トレーニングで得たパラメータを使用して、1000 個のテストデータに対する応答を計算

とする。ミラーマップの生成はコード 5.2 を用いて行う。ここでトレーニングデータの作成に用いた乱数は `random.seed(42)` である。

パラメータの最適化の計算は最小二乗法を用いた。1000 個ある 16 分割 PD の 16 個の出力に対して 0 からの誤差の 2 乗の和をとると、

$$\sum_{\text{data}} \left\{ 0 - \left(\sum_{i=0}^7 a_i x_i - \sum_{i=8}^{15} a_i x_i \right) \right\}^2 \quad (6.1)$$

となる。この和が最小となるようなパラメータを探す。今回の計算では初期パラメータをすべて 1 とした。初期パラメータを 0 から始めると最終的に出力されるパラメータも 0 となることに注意する。また、16 分割したのちに $x < 0$ と $x > 0$ の領域の光強度信号を小さくしすぎるようなパラメータは選ばないようにする。仮に 1 より十分に小さいパラメータのみが選ばれると信号は 0 に近くなったように見えるが、実際は信号自体が小さくなってしまい傾きが小さい線形信号しか出てこないためである。

ソースコード 6.1 python:最小二乗法を用いた最適化

```

1  import numpy as np
2  from scipy import optimize
3
4  intensity_arr = np.load("{training data}.npz")
5  intensity_test_arr = np.load("{test data}.npz")
6
7  def left_sum_func(params, x_arr):
8      left_sum = np.dot(params[:8], x_arr[:8])
9      return left_sum
10
11 def right_sum_func(params, x_arr):
12     right_sum = np.dot(params[8:], x_arr[8:])
13     return right_sum
14
15 def fit_func(params, x_arr):
16     return left_sum_func(params, x_arr) - right_sum_func(params, x_arr)
17
18 ini_params = np.ones(16)
19
20 result = optimize.leastsq(fit_func, ini_params, args=intensity_arr.T)
21 optimized_params = result[0]

```

コード 6.1 の 7 行目と 11 行目で定義した関数はそれぞれデータとパラメータを引数に持ち、分割 PD の $x < 0$ と $x > 0$ の領域でそれぞれ光強度信号の和を計算する関数である。15 行目はその光強度信号の差を計算する関数としている。この関数をモデル関数として最適化の対象とする。20 行目で最小二乗法を用いて最適化を行う。

6.2 トレーニング結果

コード 6.1 を実行して得たパラメータは、

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.76682451 & 1.76935017 & 0.60114152 & 0.5295441 \\ 1.44715431 & 1.427861 & -0.51415725 & 0.11073828 \\ 0.31599501 & -0.49530249 & 1.44685966 & 0.85509597 \\ 0.58152594 & 0.31922602 & 2.28425128 & 1.81913178 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

となった。このパラメータをかけたときの分割 PD の $x < 0$ と $x > 0$ の領域でそれぞれ光強度信号の和を計算する。1000 個のトレーニングデータのそれぞれに対して、求めたパラメー

タをかけたときの強度信号の和の平均を計算すると、

$$\bar{I}_{\text{left}}^{\text{opt}} = \frac{1}{1000} \sum_{\text{data}} \sum_{i=0}^7 a_i x_i = 207.14097518770353 \quad (6.3)$$

$$\bar{I}_{\text{right}}^{\text{opt}} = \frac{1}{1000} \sum_{\text{data}} \sum_{i=8}^{15} a_i x_i = 207.1399751877039 \quad (6.4)$$

となった。また初期パラメータで同様の計算を行うと、

$$\bar{I}_{\text{left}}^{\text{ini}} = \frac{1}{1000} \sum_{\text{data}} \sum_{i=0}^7 1 \times x_i = 282.1342212087326 \quad (6.5)$$

$$\bar{I}_{\text{right}}^{\text{ini}} = \frac{1}{1000} \sum_{\text{data}} \sum_{i=8}^{15} 1 \times x_i = 282.1335623503474 \quad (6.6)$$

となる。これよりパラメータをかけたとき 16 分割 PD が得る信号強度ともとの分割 PD が得る信号強度の比は

$$\frac{\bar{I}_{\text{left}}^{\text{opt}} + \bar{I}_{\text{right}}^{\text{opt}}}{\bar{I}_{\text{left}}^{\text{ini}} + \bar{I}_{\text{right}}^{\text{ini}}} = 0.7341903302761064 \sim 0.734 \quad (6.7)$$

となる。

次にパラメータをかけた分割 PD によって得られた WFS 信号強度の計算を行った。その結果を初期パラメータのときの結果と比較する。

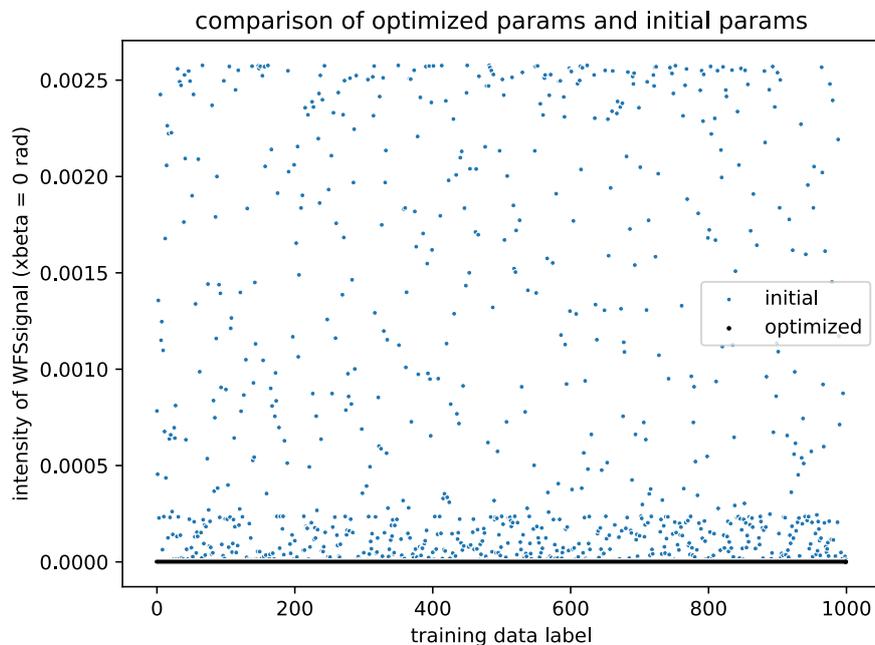


図 6.1 パラメータを変えた時の WFS 信号 (ETMx xbeta 0 rad) の散布図

図 6.1 は横軸に 1000 個のデータラベル、縦軸に $x\beta = 0[\text{rad}]$ のときの WFS 信号強度をプロットした散布図である。黒は最適化したパラメータのデータ、青は初期パラメータのデータである。図 6.2 は横軸に WFS 信号強度の絶対値、縦軸にデータの数をとったヒストグラム

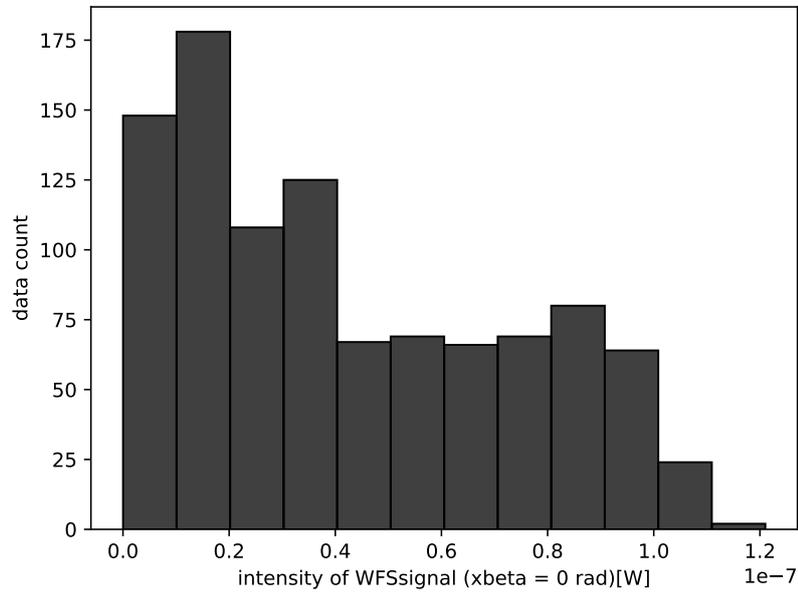


図 6.2 最適化したパラメータでの WFS 信号強度の分布

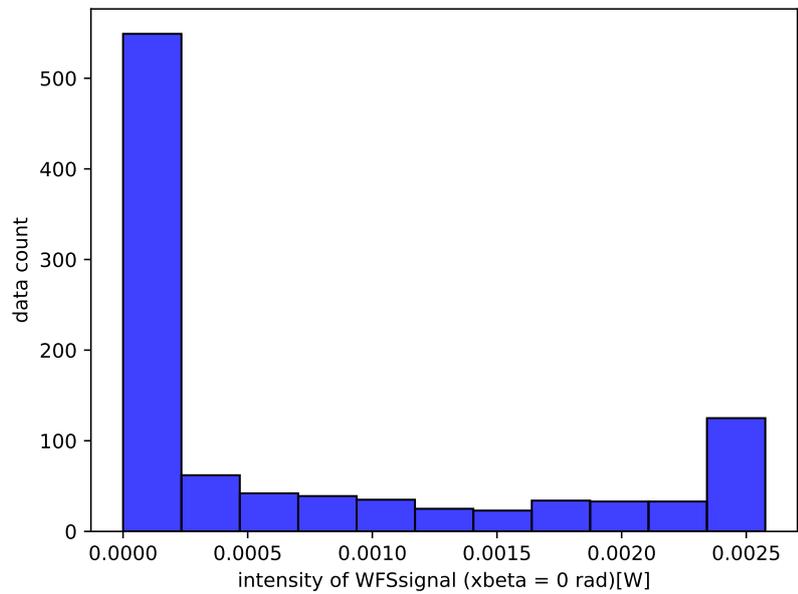


図 6.3 初期パラメータでの WFS 信号強度の分布

ラムである。図 6.3 は初期パラメータのヒストグラムである。それぞれのパラメータについて

WFS 信号強度の平均値と標準偏差を計算すると、表 6.1 となる。表 6.1 をより、最適化した

表 6.1 WFS 信号強度のそれぞれのパラメータでの平均値と標準偏差

パラメータ	平均値 [W]	標準偏差 [W]
最適化	4.241×10^{-8}	3.090×10^{-8}
初期	7.367×10^{-4}	9.145×10^{-4}

パラメータを用いると初期パラメータに対して平均値と標準偏差はそれぞれ 10^{-4} [W] 程度小さくすることができる。

6.3 最適化したパラメータのテスト

テストデータのために生成した 1000 個のミラーマップを通して ETMx の xbeta が 0[rad] のときの WFS 信号を取得する。トレーニングデータの生成に使用したミラーマップはテストには使用しない。

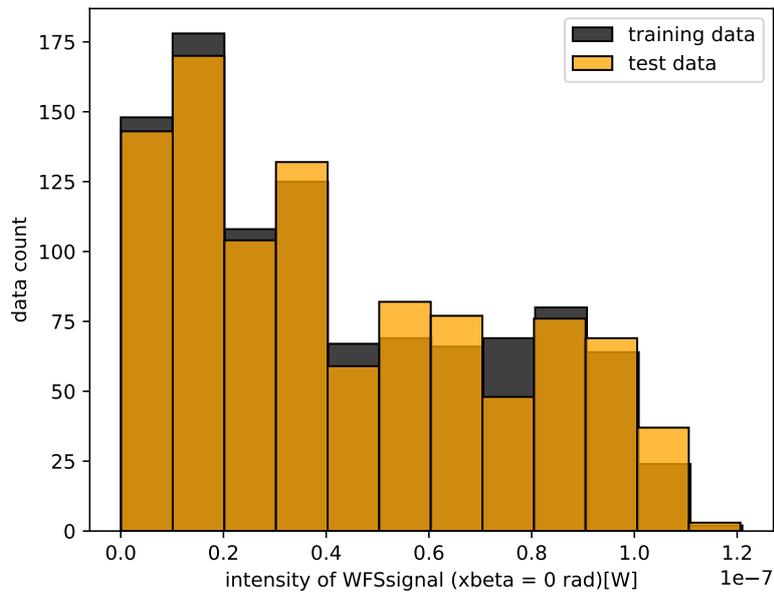


図 6.4 トレーニングデータとテストデータの WFS 信号強度の分布

表 6.2 テストデータでの WFS 信号強度のそれぞれのパラメータでの平均値と標準偏差

パラメータ	平均値 [W]	標準偏差 [W]
最適化	4.354×10^{-8}	3.132×10^{-8}
初期	7.382×10^{-4}	9.041×10^{-4}

図 6.4 は図 6.2 の上にテストデータ (オレンジ) をプロットしたものである。表 6.2 はテストデータを用いたときの平均値と標準偏差をまとめたものである。最適化したパラメータを用いた場合のテストデータによる信号強度の平均値はトレーニングデータに比べて 1.0×10^{-9} [W] 程度大きく、標準偏差は 0.5×10^{-9} [W] 程度大きい。これは初期パラメータとの差に比べて十分に小さい。したがって最適化したパラメータは ETMx の $x\beta$ が 0 [rad] のときの WFS 信号強度を 10^{-4} [W] 程度小さくすることができていると言える。

6.4 最適化した 16 分割 PD による WFS 信号

前節で求めたパラメータを適用した 16 分割 PD を用いて原点周りでの WFS 信号を取得する。今回のシミュレーションでは ETMx を -5.0×10^{-8} [rad] から 5.0×10^{-8} [rad] までの範囲で回転させ、 1.0×10^{-9} [rad] 刻みで測定する。それを異なるミラーマップ 100 個で行う。使用するミラーマップは、前節で作成した方法と同様の方法で作成する。ただしトレーニングデータの作成に用いたミラーマップとは異なるものとする。

シミュレーション結果は以下の図 6.5 になった。

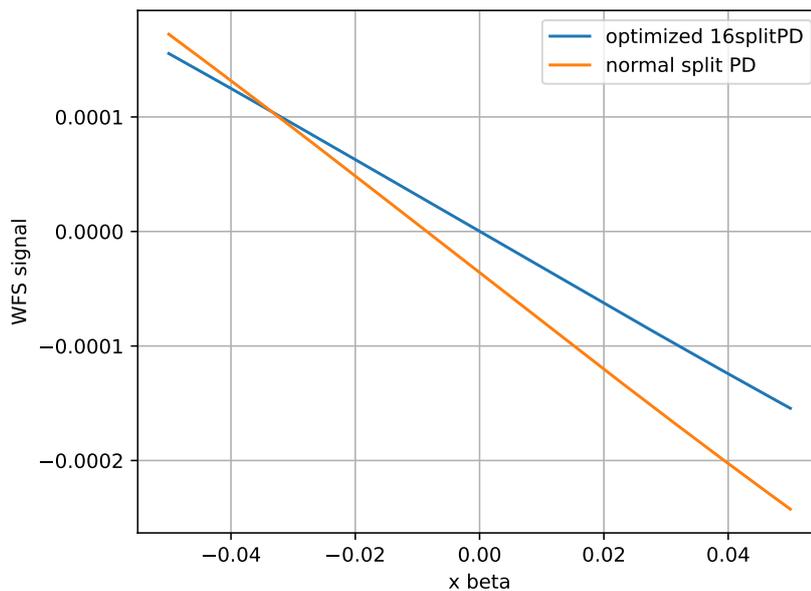


図 6.5 最適化した 16 分割 PD による WFS 信号

青線が最適化した 16 分割 PD によって測定した WFS 信号でオレンジの線が 2 分割 PD の WFS 信号である。この直線は最小二乗法を用いて計算して求めた。オレンジの線に比べて青線の方が原点付近で線形な信号が得られていることがわかる。それぞれの線形信号について WFS 信号強度が 0 になるときの角度 $x\beta$ [rad] を求める。

それぞれの直線の x 切片の平均と標準偏差は以下の表 6.3 となった。

この結果より、最適化した 16 分割 PD を用いると 2 分割 PD に比べて 10^{-5} [rad] 程度小さ

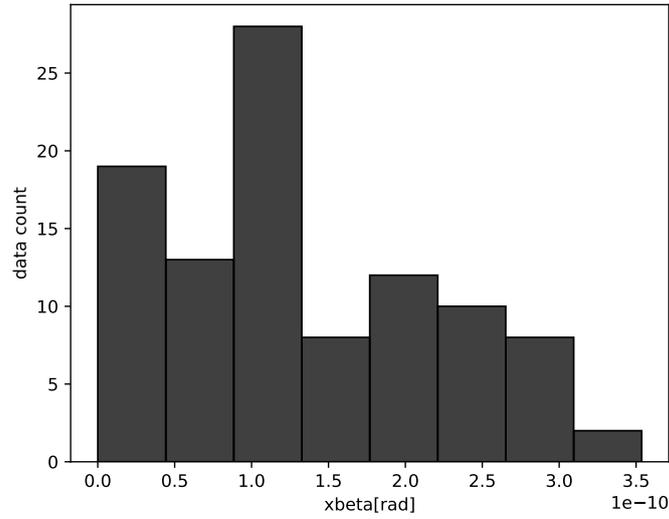


図 6.6 最適化した 16 分割 PD による ETMx の制御角度

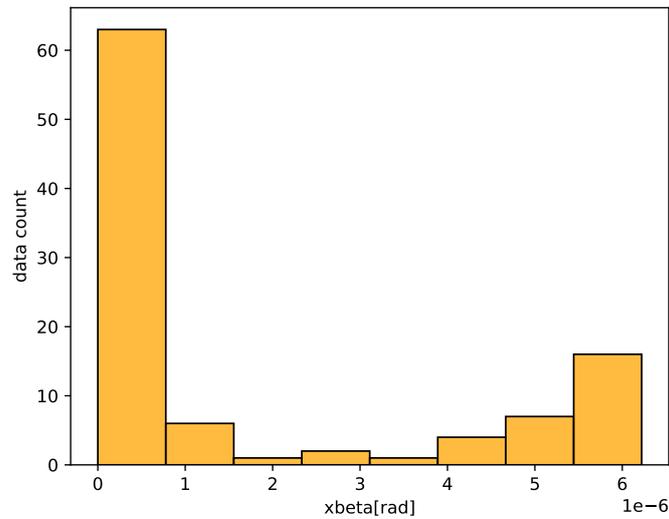


図 6.7 2 分割 PD による ETMx の制御角度

表 6.3 それぞれの PD による制御角度の平均値と標準偏差

パラメータ	平均値 [rad]	標準偏差 [rad]
最適化	2.507×10^{-11}	1.565×10^{-10}
初期	1.579×10^{-6}	2.482×10^{-6}

い。これは制御角度の精度を 10^{-5} [rad] 程度で向上させることができていることを意味している。

次にそれぞれの直線の傾きについて考える。最適化した16分割PDで得た線形信号の方が2分割PDに比べて傾きが小さくなっていることが分かる。この傾きの比の平均値と標準偏差は、

表 6.4 線形信号の傾きの比の平均値と標準偏差

平均値	標準偏差
0.802	0.0885

となった。式 (6.7) よりそれぞれのPDの左右の領域に入る信号強度の和の比は0.734である。それぞれの割合を比べると近い値をとっている。最適化したPDの取得する信号にはそれぞれの領域で取得する光強度信号に重みをつけている。そのパラメータの大きさ次第では、線形信号の傾きの大きさは光がPDにあたる場所によって大きく変わる。複屈折の影響によってビームの強度分布が一様でないために分割領域に入る光の光量が異なる。このこともまた線形信号の傾きが変わる要因であると考えらる。

第 7 章

本研究のまとめ・今後の展望

7.1 本研究のまとめ

FINESSE によるシミュレーションを用いて複屈折の影響下における共振器の応答や PDH 法による長さ制御信号、WFS 法による姿勢制御信号を取得することが確認できた。また、FINESSE と SciPy を組み合わせることによって、1000 個のミラーマップを作成した上で最適化したパラメータを求めることができた。そのパラメータを用いて鏡の姿勢制御の点において回転角度の制御の精度を 10^{-5} [rad] 程度で向上させることができた。パラメータが一定値であるため、レーザー光の感じる複屈折分布が変化してもフィードバック制御に生じるタイムロスが限りなく少なくなることが線形制御の大きな利点である。

本研究では簡単な実験系を想定した光学系でのシミュレーションを行ったが、この手法を用いればより複雑な実験系に適用が可能であると考えられる。実際の KAGRA のサファイア鏡の複屈折分布の測定も行われているため、サファイア鏡の複屈折分布により近いようなミラーマップを作成することができればこの鏡の姿勢制御法の応用が可能である。

7.2 今後の展望

本研究で用いた WFS 信号は復調していない信号を用いている。実際に制御するときには復調した信号で行うため、FINESSE 上で復調できるようなプログラムを考案する必要がある。本研究ではパラメータの最適化の計算を行う際に、パラメータに制約を加えていない。ゆえに線形信号の傾きが小さくなって出てきている。これを改善するために、パラメータに制約条件を加えた上で同程度の精度の信号を得られるような計算手法を考案する必要があると考えられる。また、この手法を実際の実験で試すために光学系のセットアップを実際の実験系と同じものに変更して計算を行う。

付録 A

python のソースコード

再現性のために第 6 章で使用した python のソースコードを記す。以下のコードはランダムにミラーマップを生成する python のコードである。

ソースコード A.1 ランダムにミラーマップを生成するコード

```
1 import math
2 import random
3 import numpy as np
4 import subprocess
5 from tqdm import tqdm
6 import textfile
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 random.seed(42)
9
10 def absorption(r, x, y):
11     result = 0
12     for nx in range(1,11):
13         for ny in range(1,11):
14             result += r * math.cos(nx * math.pi * x + r * math.pi) * math
15                 .cos(ny * math.pi * y + r * math.pi)/(nx * nx * ny * ny)
16
17     return result
18
19 for i in tqdm(range(2000)):
20     r = random.random()
21     mirror_map = [[0 for _ in range(101)] for _ in range(101)]
22     for x in range(101):
23         for y in range(101):
24             mirror_map[x][y] = absorption(r, x/100, y/100) ** 2
25
26     mirror_map_arr = np.array(mirror_map)
27
28     np.savetxt('./mirror_map.txt', mirror_map_arr)
29     textfile.insert('mirror_map.txt', '% Surface map\n% Name: sub\n% Type:
```

```

        absorption both\n% Size: 101 101\n% Optical center (x,y): 51 51\n
        % Step size (x,y): 1e-004 1e-004\n% Scaling: 1e-1\n',line = 0)
29
30 # finesse
31 subprocess.run('kat FPcavity.kat',shell = True)
32 subprocess.run(f'mv FPcavity.out ./outfile/FPcavity_{i}.out', shell =
    True)

```

ソースコード A.2 パラメータの最適化とそれによる WFS 信号

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy import optimize
4 from tqdm import tqdm
5 import seaborn as sns
6
7 intensity_list = [[0 for _ in range(16)] for _ in range(2000)]
8 for i in tqdm(range(2000)):
9     with open(f'./txt_files/FPcavity_{i}.txt', 'r') as f:
10         l = f.readlines()
11         l = [float(x.strip()) for x in l]
12         intensity_list[i] = l
13
14 intensity_list_arr = np.array(intensity_list)
15
16
17 def fit_func(params, x_arr):
18     return -right_sum_func(params, x_arr) + left_sum_func(params, x_arr)
19
20 def left_sum_func(params, x_arr):
21     left_sum = np.dot(params[:8], x_arr[:8])
22     return left_sum
23
24 def right_sum_func(params, x_arr):
25     right_sum = np.dot(params[8:], x_arr[8:])
26     return right_sum
27
28
29
30
31 ini_params = np.ones(16)
32
33 result = optimize.leastsq(fit_func, ini_params, args=intensity_list_arr
    [:1000].T)
34 optimized_params = result[0]
35

```

```
36
37 print(optimized_params)
38
39 np.save('../optimized_params.npy', optimized_params)
40
41
42
43 # training data
44
45 # calculate WFSsignal with optimized parameters and initial parameters(
    xbeta:0)
46 signal_list = [0 for _ in range(1000)]
47 signal_ini_params_list = [0 for _ in range(1000)]
48 for i in range(1000):
49     signal_list[i] = fit_func(optimized_params, intensity_list_arr[i])
50     signal_ini_params_list[i] = fit_func(ini_params, intensity_list_arr[i])
51
52
53 # average and std
54 print(np.abs(np.array(signal_list)).mean())
55 print(np.abs(np.array(signal_list)).std())
56 print(np.abs(np.array(signal_ini_params_list)).mean())
57 print(np.abs(np.array(signal_ini_params_list)).std())
58
59
60
61 # split PD intensity of left and right using optimized parameters
62 left_sum_list = [0 for _ in range(1000)]
63 right_sum_list = [0 for _ in range(1000)]
64
65 for i in range(1000):
66     left_sum_list[i] = left_sum_func(optimized_params, intensity_list_arr[i]
        ])
67     right_sum_list[i] = right_sum_func(optimized_params, intensity_list_arr[
        i])
68 #average
69 print(np.abs(np.array(left_sum_list)).mean())
70 print(np.abs(np.array(right_sum_list)).mean())
71
72
73 left_sum_list_init = [0 for _ in range(1000)]
74 right_sum_list_init = [0 for _ in range(1000)]
75
76 for i in range(1000):
77     left_sum_list_init[i] = left_sum_func(ini_params, intensity_list_arr[i])
```

```

78     right_sum_list_init[i] = right_sum_func(ini_params,intensity_list_arr[i
        ])
79
80 #average
81 print(np.abs(np.array(left_sum_list_init)).mean())
82 print(np.abs(np.array(right_sum_list_init)).mean())
83
84 # rate of signal intensity
85 # print((np.abs(np.array(left_sum_list)).mean() + np.abs(np.array(
        right_sum_list)).mean())/(np.abs(np.array(left_sum_list_init)).mean()
        + np.abs(np.array(right_sum_list_init)).mean()))
86
87
88 # test data
89
90 signal_list_test = [0 for _ in range(1000)]
91 signal_ini_params_list_test = [0 for _ in range(1000)]
92 for i in range(1000):
93     signal_list_test[i] = fit_func(optimized_params, intensity_list_arr[i
        +1000])
94     signal_ini_params_list_test[i] = fit_func(ini_params,
        intensity_list_arr[i+1000])
95
96 # average and std
97 print(np.abs(np.array(signal_list_test)).mean())
98 print(np.abs(np.array(signal_list_test)).std())
99 print(np.abs(np.array(signal_ini_params_list_test)).mean())
100 print(np.abs(np.array(signal_ini_params_list_test)).std())

```

ソースコード A.3 ミラーマップ 100 個で、ETMx を回転させながら出力を得るコード

```

1 import subprocess
2 for i in range(100):
3     for deg in range(-50, 51):
4         FPchange_angle = f"""
5         l i1 1 0 nL
6         const fmod 15M
7
8         mod eo1 $fmod 0.15 2 pm 0 nL neo2
9         s eo1eo2 0 neo2 neo3
10        bs refl 0.0001 0.9999 0 45 neo3 dump n0 nREFL #REFL
11        s s0 0 n0 n1ar
12        m ARx 0 1 0 n1ar n1ar2
13        s sAR 0 n1ar2 n1
14        m ITMx 0.996 4000e-6 90 n1 n2
15        s s1 1 n2 n3

```

```
16     m ETMx 0.999945 5e-6 90 n3 n4
17
18     attr ITMx Rc 0
19     attr ETMx Rc 2
20     cav xarm ITMx n2 ETMx n3
21
22
23     maxtem 5
24     gauss* input i1 nL 0 2
25
26
27     map ARx test_mirror_map_{i}.txt
28     knm ARx sub_map
29     conf ARx save_knm_binary 1
30     conf ARx interpolation_method 2
31     conf ARx integration_method 1
32
33
34
35     ##### DC PDA without LSC #####
36     s sgouy 0 nREFL nREFL2
37     attr sgouy g 90
38     attr ETMx xbeta {deg*1e-3}u
39     beam beam1 nREFL2
40     xaxis beam1 x lin -1 1 3
41     x2axis beam1 y lin -1 1 3
42     yaxis abs
43     gnuterm no
44     """
45         with open(f'FPchange_angle_{i}_{deg}.kat', 'w') as f:
46             f.write(FPchange_angle)
47         subprocess.run(f'kat FPchange_angle_{i}_{deg}.kat', shell=True)
48
49     subprocess.run('mkdir FPchange_angle_out', shell=True)
50     subprocess.run(f'mv FPchange_angle_{i}*.out out_files/', shell=True)
51     subprocess.run(f'rm -rf FPchange_angle_{i}*.gnu', shell=True)
52     subprocess.run(f'rm -rf FPchange_angle_{i}*.log.bak', shell=True)
53     subprocess.run(f'rm -rf FPchange_angle_{i}*.log', shell=True)
54     subprocess.run(f'rm -rf FPchange_angle_{i}*.py', shell=True)
55     subprocess.run(f'rm -rf FPchange_angle_{i}*.m', shell=True)
```

ソースコード A.4 線形信号をもとめ、その傾きと x 切片の平均と標準偏差をもとめるコード

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from tqdm import tqdm
```

```
4 from scipy.stats import linregress
5 import seaborn as sns
6
7 xbeta_list = []
8 ini_xbeta_list = []
9 rate_list = []
10 for n in range(100):
11     intensity_list_rtETM = [[0 for _ in range(16)] for _ in range(101)]
12     for i in tqdm(range(101)):
13         with open(f'./txt_files/FPchange_angle_{n}_{i-50}.txt', 'r') as f:
14             l = f.readlines()
15             l = [float(x.strip()) for x in l]
16             intensity_list_rtETM[i] = l
17
18
19     intensity_list_rtETM_arr = np.array(intensity_list_rtETM)
20     # np.save('intensity_list_rtETM.npy',intensity_list_rtETM_arr)
21
22
23     def fit_func(params, x_arr):
24         return -right_sum_func(params, x_arr) + left_sum_func(params, x_arr
25             )
26
27     def left_sum_func(params, x_arr):
28         left_sum = np.dot(params[:8], x_arr[:8])
29         return left_sum
30
31     def right_sum_func(params, x_arr):
32         right_sum = np.dot(params[8:], x_arr[8:])
33         return right_sum
34
35     def xbeta_func(a,b):
36         xbeta = (-1)*b/a
37         return xbeta
38
39
40     optimized_params_arr = np.load("../optimized_params.npy")
41     ini_params_arr = np.ones(16)
42
43
44
45     intensity_list_rtETM = [0 for _ in range(101)]
46     ini_intensity_list_rtETM = [0 for _ in range(101)]
47
```

```
48     for i in range(101):
49         intensity_list_rtETM[i] = fit_func(optimized_params_arr,
50             intensity_list_rtETM_arr[i])
51         ini_intensity_list_rtETM[i] = fit_func(ini_params_arr,
52             intensity_list_rtETM_arr[i])
53
54     x = [0, 10e-9]
55     y = [intensity_list_rtETM[50],intensity_list_rtETM[51]]
56     slope, intercept, r_value, p_value, std_err = linregress(x,y)
57     # print(slope, intercept, r_value, p_value, std_err)
58     xbeta = xbeta_func(slope, intercept)
59     # print(xbeta)
60     xbeta_list.append(xbeta)
61
62     ini_x = [0,10e-9]
63     ini_y = [ini_intensity_list_rtETM[50],ini_intensity_list_rtETM[51]]
64     ini_slope, ini_intercept, ini_r_value, ini_p_value, ini_std_err =
65         linregress(ini_x,ini_y)
66     # print(ini_slope, ini_intercept, ini_r_value, ini_p_value, ini_std_err
67         )
68
69     ini_xbeta = xbeta_func(ini_slope, ini_intercept)
70     # print(ini_xbeta)
71     ini_xbeta_list.append(ini_xbeta)
72
73     rate = slope/ini_slope
74     # print(rate)
75     rate_list.append(rate)
76
77 print(np.mean(xbeta_list), np.mean(ini_xbeta_list), np.mean(rate_list))
78 print(np.std(xbeta_list), np.std(ini_xbeta_list), np.std(rate_list))
```

ソースコード A.5 .out ファイルから必要なデータを取りだし.txt に変換するシェルスクリプトコード

```
1     find ./out_files/ -name "*.out" | xargs -I{} sh -c 'sed -e "s/
2         \{1,\}/,/g" -e "s/^,//g" -e "1,4d" -e "/^$/d" "{}" | awk -F", "
3         "{print \$3}" > "./txt_files/${basename {} }.out".txt'
```

謝辞

本卒業論文を執筆するにあたって、多くの方に支えていただきました。この場を借りて感謝を申し上げます。

指導教員の宗宮健太郎先生には研究室に所属してから1年間お世話になりました。研究の初歩であった重力波検出器の話や FINESSE の使い方などの初歩的な内容から丁寧に指導していただき研究を進めることができました。

原田先生には実験の見学の時に丁寧に説明をしていただきました。何も分かってなかった私に1から実験の内容を説明していただいて、理解を深めることができました。

D3の小田部さんには研究に対する姿勢をたくさん学ばせて頂きました。研究室ゼミや学会での発表を見て、発表の仕方や内容のまとめ方などを参考にさせて頂きました。

D1の阿部さんには複屈折について教えて頂きました。研究室ゼミで複屈折の内容について話されていたおかげで複屈折の原理を理解することができました。

M2の鈴木海堂さんには日常的には日常的に雑談に付き合ってくださいました。そのなかで研究の内容を教えてくださいいい息抜きになるとともに実験について知ることができました。

M2の鈴木孝典さんは食事会や飲み会で気さくに話かけてくれました。また研究で KAGRA の地下水のシミュレーションをしており、その内容がとても興味深いものなので研究室ゼミではとても有意義に発表を聞かせて頂きました。

M2のElonさんには FINESSE のシミュレーションについて教えて頂きました。私に教えていただくために居室まで来て丁寧に教えて頂きました。

M1の笹岡さんには python の講習会を開いていただいて、そこでプログラムについて教えて頂きました。また、コロキウムや中間発表のときにも内容を指導して頂きました。本研究においても python のプログラムやシェルスクリプトのコードを書いてくださり、そのおかげで研究をスムーズに進めることができました。研究の内容にも数多くのアドバイスをして頂きました。

M1の竹口さんには実験の見学の時に朝早くから付き合ってくださいました。シミュレーションの簡単な手法も教えて頂きました。

M1の白倉さん、武田さんには輪講のときにお世話になりました。輪講では数多くの議論に付き合ってください、そのおかげで理解を深めることができました。

M1のDiegoさんには本研究の手法についていっしょに議論して頂きました。また日常的に居室で会話に付き合ってくださいました。

同期の羽場くんにはさまざまな場面で助力して頂きました。輪講ではお互いにわからなかったところを議論し、院試では共に問題を解きあって一日中議論しました。わからない問題に対し

て取り組む姿勢を教えてくださいました。日頃から研究に対する刺激をもらって、自分の研究へのモチベーションとすることができました。

新潟大学の小山さんには FINESSE の計算に関してたくさんの助力をいただきました。特に BeamDetector コマンドの部分を考えてもらいました。

他にも物理学系の他の研究室の友人たちとはお互いの研究の内容を語り合ったり、ときには励ましあったりして学生生活を有意義に過ごすことができました。

最後に大学で学ばせてくれる機会を作ってくれた家族に感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] A. Einstein, Die feldgleichungen der gravitation, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin) , 844 (1915).
- [2] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, [Phys. Rev. Lett.](#) **116**, 061102 (2016).
- [3] F. Acernese *et al.*, Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector, [Classical and Quantum Gravity](#) **32**, 024001 (2014).
- [4] H. Grote and (for the LIGO Scientific Collaboration), The status of GEO 600, [Classical and Quantum Gravity](#) **25**, 114043 (2008).
- [5] and T. Akutsu *et al.*, KAGRA: 2.5 generation interferometric gravitational wave detector, [Nature Astronomy](#) **3**, 35 (2019).
- [6] 立原浩輝, 深層学習を用いた鏡の姿勢制御について, 修士論文, 東京工業大学 (2022).
- [7] 阿部誉, 透過位相誤差分布を使用したサファイア鏡の複屈折推定の検証, 修士論文, 東京工業大学 (2022).
- [8] H. Kogelnik and T. Li, Laser beams and resonators, [Proceedings of the IEEE](#) **54**, 1312 (1966).
- [9] K. Somiya, E. Hirose, and Y. Michimura, Influence of nonuniformity in sapphire substrates for a gravitational wave telescope, [Phys. Rev. D](#) **100**, 082005 (2019).
- [10] H. Wang, Study of birefringence effects with realistic mirror maps, in *KAGRA F2F meeting* (28 Aug, 2021).