

卒業論文

ニューラルネットワークを用いた
複屈折影響下における鏡の姿勢制御

東京工業大学理学院物理学系 宗宮研究室

竹下 賢徳

2024/02/13

概要

日本に建設された重力波検出器である KAGRA には実効的な光路長を伸ばし微弱な重力波信号を捉えるために、Fabry-Perot 共振器が導入されている。共振器に使用される鏡にはサファイア鏡が用いられている。このサファイアには複屈折という性質があり、現在作成された鏡には非一様な複屈折の存在が確認されている。非一様な複屈折が検出器に与える影響として、鏡の角度制御の問題がある。複屈折の非一様性により、光が鏡に当たる位置によって光の強度が変化する。これが制御信号に影響を与え、感度を制限する可能性が指摘されている。本研究の目的は、非一様な複屈折の影響を減らし、検出の妨げとならない程度の精度で鏡の姿勢制御を可能とする手法を確立することである。

本論文で提案する手法は、分割フォトディテクタの情報からニューラルネットワークで鏡の角度を予測し、その情報をもとに姿勢制御を行うというものである。今回は複数の条件下でそれぞれのニューラルネットワークモデルを構築し、異なる制御法との比較を行った。

目次

| | |
|---------------------------------|-----|
| 図目次 | v |
| 表目次 | vii |
| 第 1 章 はじめに | 1 |
| 第 2 章 重力波 | 2 |
| 2.1 Einstein 方程式 | 2 |
| 2.2 線形化 | 3 |
| 2.3 重力波 | 4 |
| 2.4 Michelson 干渉計による重力波の検出 | 4 |
| 第 3 章 レーザー光学 | 7 |
| 3.1 Gaussian ビーム | 7 |
| 3.2 ビームパラメータ | 10 |
| 3.2.1 スポットサイズ $w(z)$ | 10 |
| 3.2.2 ビームウエスト z_0 | 11 |
| 3.2.3 Rayleigh レンジ z_R | 11 |
| 3.2.4 曲率半径 $R(z)$ | 11 |
| 3.2.5 Gouy 位相 $\eta(z)$ | 12 |
| 3.3 Hermite Gaussian モード | 12 |
| 3.3.1 ビームの平行移動と回転移動 | 12 |
| 3.3.2 ビームの行列表現 | 14 |
| 3.4 Fabry-Perot 共振器 | 15 |
| 3.4.1 透過光と反射光 | 15 |
| 3.4.2 Free Spectral Range とフィネス | 17 |
| 3.5 Pound Drever Hall 法 | 17 |
| 3.5.1 エラー信号 | 17 |
| 3.5.2 位相変調 | 18 |
| 3.5.3 サイドバンド光に対する共振器の応答 | 18 |
| 3.5.4 復調 | 19 |
| 3.5.5 共振点付近での PDH 信号 | 19 |

| | | |
|-------|-------------------------|----|
| 3.6 | Wave Front Sensing 法 | 20 |
| 3.6.1 | 反射行列 | 20 |
| 3.6.2 | WFS 信号 | 21 |
| 3.6.3 | PDH 信号と WFS 信号の分離 | 22 |
| 第 4 章 | 複屈折 | 24 |
| 4.1 | 複屈折の理論 | 24 |
| 4.1.1 | 複屈折の記法 | 24 |
| 4.1.2 | 偏光の回転 | 26 |
| 4.1.3 | Jones 行列の一意性と内部の複屈折非一様性 | 27 |
| 4.2 | KAGRA における複屈折問題 | 28 |
| 第 5 章 | ニューラルネットワーク | 29 |
| 5.1 | 教師あり学習 | 29 |
| 5.1.1 | ノード | 29 |
| 5.1.2 | 活性化関数 | 29 |
| 5.1.3 | ニューラルネットワークの原理 | 30 |
| 5.2 | 最適化手法 | 31 |
| 5.3 | Dropout | 32 |
| 5.4 | ミニバッチ学習 | 32 |
| 5.5 | スケーリング | 33 |
| 第 6 章 | 実験 | 34 |
| 6.1 | 光学シミュレーション | 34 |
| 6.2 | 吸収率マップの生成 | 35 |
| 6.3 | データセットの生成 | 36 |
| 6.3.1 | レーザー光の揺らぎの再現 | 36 |
| 6.3.2 | 鏡の角度変化 | 37 |
| 6.4 | ニューラルネットワークによる学習 | 38 |
| 6.5 | 線形制御 | 39 |
| 第 7 章 | 結果 | 41 |
| 7.1 | Gentle Map | 41 |
| 7.1.1 | ニューラルネットワークによる学習 | 41 |
| 7.1.2 | 線形制御との比較 | 42 |
| 7.2 | Steep Map | 44 |
| 7.2.1 | ニューラルネットワークによる学習 | 44 |
| 7.2.2 | 線形制御との比較 | 45 |
| 7.3 | 結果のまとめ | 46 |
| 第 8 章 | 結論 | 48 |

| | | |
|------|------------------|----|
| 付録 A | 開発環境 | 49 |
| A.1 | ハードウェア | 49 |
| A.2 | ソフトウェア | 49 |
| 付録 B | ソースコード | 50 |
| 謝辞 | | 55 |
| 参考文献 | | 57 |

目次

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | 重力波による自由質点の変化 | 5 |
| 2.2 | Michelson 干渉計 | 6 |
| 3.1 | Gaussian ビーム | 10 |
| 3.2 | Fabry-Perot 共振器における電場 | 15 |
| 4.1 | 屈折率楕円体 | 24 |
| 4.2 | 入射光と屈折率楕円体 | 25 |
| 4.3 | 入射光に垂直な面による屈折率楕円体の切断楕円面 | 26 |
| 4.4 | 異なる複屈折性を持つ複数の板を通過する光 | 27 |
| 4.5 | サファイア鏡 (ITMX) の複屈折マップ | 28 |
| 5.1 | ノード | 30 |
| 5.2 | ReLU 関数 | 30 |
| 5.3 | ニューラルネットワークの例 | 31 |
| 5.4 | Dropout | 32 |
| 6.1 | シミュレーション上での Fabry-Perot 共振器 | 35 |
| 6.2 | 作成した吸収率マップ | 36 |
| 6.3 | 訓練データの座標と検証データ、テストデータの座標 | 36 |
| 6.4 | 鏡の回転方向の自由度 | 37 |
| 6.5 | 予測不能な例 (Gentle Map、4 分割 PD、 $n = 10$) | 38 |
| 6.6 | 使用したニューラルネットワークのモデル | 39 |
| 6.7 | 分割フォトディテクタ | 40 |
| 7.1 | Gentle Map、4 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習 | 42 |
| 7.2 | Gentle Map、16 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習 | 42 |
| 7.3 | Gentle Map、4 分割 PD、テストデータを用いた予測値の分布 | 43 |
| 7.4 | Gentle Map、16 分割 PD、テストデータを用いた予測値の分布 | 43 |
| 7.5 | Gentle Map の線形制御で用いたパラメータ | 43 |
| 7.6 | Steep Map、4 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習 | 44 |
| 7.7 | Steep Map、16 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習 | 44 |

| | | |
|------|---|----|
| 7.8 | Steep Map、4分割PD、テストデータを用いた予測値の分布 | 45 |
| 7.9 | Steep Map、16分割PD、テストデータを用いた予測値の分布 | 45 |
| 7.10 | Steep Map の線形制御で用いたパラメータ | 46 |

表目次

| | | |
|-----|--|----|
| 6.1 | マップの特徴 | 35 |
| 6.2 | 学習で使⤁したアルゴリズム | 38 |
| 7.1 | Gentle Map における各モデルの精度 [rad] | 46 |
| 7.2 | Steep Map における各モデルの精度 [rad] | 46 |

第 1 章

はじめに

重力波とは時空の歪みが光速で伝播する現象である。その振幅は非常に小さいため直接的な検出を行うことは難しく、一般相対論によりその存在が予言されてから約 100 年間検出さなかつた。2015 年 9 月 14 日にアメリカの重力波検出器 LIGO によって、初めて重力波が直接検出された [1]。重力波検出器の基本的な原理は Michelson 干渉計である。この装置を用いると時空の歪みは光の位相の変化として検出される。LIGO や日本に建設された重力波検出器 KAGRA などでは Michelson 干渉計の光路に Fabry-Perot 共振器を導入することで干渉計の実質的な光路を伸ばし、重力波の信号を増幅させている。微弱な信号である重力波はノイズに弱く、発生するノイズを減らすためにも検出器の制御の精度を向上させることは重要である。

本論文では共振器の鏡の姿勢制御に対して焦点を当てる。鏡の傾きや位置のずれは共振器内部のレーザーに高次モードを生み出し、ノイズとして感度に影響を与えることがある。したがって、感度に影響を与えない程度まで鏡の姿勢制御の精度を上げることは重力波検出にとって重要である。更に、KAGRA では一軸性結晶であるサファイアで作られた鏡に起因する非一様な複屈折の問題が存在する。これは、レーザー光のゆらぎにより鏡の姿勢制御の信号に影響を与え、その精度を低下させる。

ドイツに建設された重力波検出器 GEO600 では機械学習を用いた制御を導入することで感度を向上させたという研究結果が報告されている [2]。本研究でもニューラルネットワークを用いた制御のシミュレーションを行うことで、非一様な複屈折の影響下における制御の精度を向上させることを目的とする。当研究室における先行研究ではニューラルネットワークの分類モデルを用いた手法が提案された [3]。本論文では回帰モデルによる制御を試みた。また、当研究室において別の手法で非一様な複屈折の影響を軽減するために提案され、現在も並行して研究が進められている線形制御 [4] との比較を行った。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では、一般相対性理論に基づいた重力波の表式を導き、Michelson 干渉計の応答を確認する。第 3 章では、Maxwell 方程式から始まり、Fabry-Perot 共振器における角度制御の手法である Wave Front Sensing 法の原理まで導出する。第 4 章では、KAGRA で用いられるサファイア鏡に存在する複屈折性の理論について述べる。第 5 章では、本研究で用いたニューラルネットワークにおける各手法の理論について述べる。第 6 章では、本研究で行った手順について記述し、第 7 章で実際に実験を行った結果を示し、その考察を記す。最後に第 8 章で本研究の結論をまとめ、今後の課題について述べる。

第 2 章

重力波

重力波はアインシュタインが提唱した一般相対論から記述される物理現象である。ここでは一般相対論を用いて重力波を導出し、Michelson 干渉計の応答を概算する。

2.1 Einstein 方程式

4次元座標上での点を $x^\mu = (-ct, x, y, z)$ とする。4次元座標上の異なる2点、 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の線素を計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

と表す事ができる。重力場のない平坦な空間 (Minkowski 空間) において計量テンソルは Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ と呼ばれ以下のように表される。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

また重力場のある空間において計量テンソルは Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

に従う。ここで、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル、 G は重力定数、 c は光速。Christoffel 記号 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ 、Riemann テンソル $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ 、Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ 、Ricci スカラー R はそれぞれ、

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\lambda g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) \quad (2.4)$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta} \Gamma^\gamma_{\nu\alpha} \quad (2.5)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (2.6)$$

$$R \equiv R^\mu_{\mu} \quad (2.7)$$

のように定義される。

2.2 線形化

弱い重力場における計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を、Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ と摂動項 $h_{\mu\nu}$ の線形和で近似する。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

ここで、 $|g_{\mu\nu}| \ll 1$ である。 $h_{\mu\nu}$ の1次までの範囲では、Christoffel 記号 $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ 、Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ 、Ricci スカラー R はそれぞれ、

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(\partial_\lambda h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha h_{\nu\lambda}) \quad (2.9)$$

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\mu\partial_\alpha h_{\beta\nu} + \partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h_{\beta\alpha}) \quad (2.10)$$

$$R \simeq \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (2.11)$$

のように近似できる。ここで、

$$\square \equiv \eta^{\nu\mu}\partial_\mu\partial_\nu \quad (2.12)$$

$$h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

と定義した。新たに以下を定義する。

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.14)$$

$$\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

これを用いると、式 (2.3) の左辺は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial^\lambda\bar{h}_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial^\lambda\bar{h}_{\mu\lambda} - \square\bar{h}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}) \quad (2.16)$$

となる。ここでゲージ条件として、Lorentz ゲージ

$$\partial_\nu\bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.17)$$

を課すと、Einstein 方程式 (2.3) は、

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

となる。特に、真空中においてエネルギーテンソルは $T_{\mu\nu} = 0$ であるので真空中の Einstein 方程式は

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.19)$$

となる。

2.3 重力波

真空中の Einstein 方程式 (2.19) は波動方程式となっている。波動方程式の解として次の平面波を考える。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (2.20)$$

この平面波が Lorentz ゲージ条件 (2.17) かつ真空中の Einstein 方程式 (2.19) を満たすに条件は、

$$A_{\mu\lambda} k^\lambda = 0 \quad (2.21)$$

$$k_\lambda k^\lambda = 0 \quad (2.22)$$

である。更に、次のトランスバース・トレースレスゲージを課す。

$$\begin{cases} \bar{h}_{\mu 0} = 0 \\ \bar{h} = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

このとき、重力波の進行方向を z 軸にとると式 (2.20) は、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ik(ct - z)] \quad (2.24)$$

となる。 h_+ と h_\times はそれぞれ重力波のプラスモード、クロスモードと呼ばれる。このとき線素 ds^2 を考える。

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (1 + h_+ \cos(-\omega t + kz))dx^2 + (1 - h_+ \cos(-\omega t + kz))dy^2 + 2h_\times \cos(-\omega t + kz)dxdy + dz^2 \quad (2.25)$$

ここで、 $h_\times = 0$ のとき線素は、

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (1 + h_+ \cos(-\omega t + kz))dx^2 + (1 - h_+ \cos(-\omega t + kz))dy^2 + dz^2 \quad (2.26)$$

のようになる。この偏光状態のときは x 軸方向に空間が伸びたとき、 y 軸方向に空間が縮み、 x 軸方向に空間が縮んだときに、 y 軸方向に空間が伸びる。次に $h_+ = 0$ のときは、

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + 2h_\times \cos(-\omega t + kz)dxdy + dz^2 \quad (2.27)$$

この偏光状態においては x 軸及び y 軸に対して $\frac{\pi}{4}$ 傾いた軸で伸び縮みがおこる。重力波による自由質点の変化を図 2.1 に示す。

2.4 Michelson 干渉計による重力波の検出

重力波の空間の歪みを検出するために図 2.2 のような Michelson 干渉計が用いられる。ビームスプリッターへ以下のような電場が入射するときを考える。

$$E_{\text{in}} = E_0 \exp(i\omega_0 t) \quad (2.28)$$

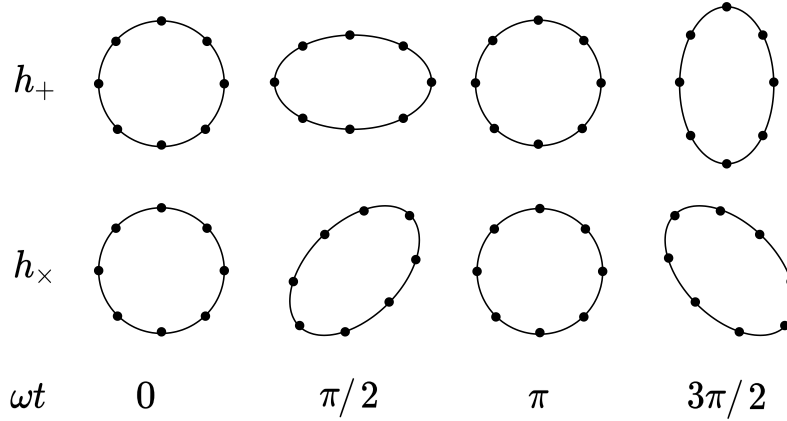


図 2.1: 重力波による自由質点の変化

x, y 方向にそれぞれ分離した光がビームスプリッタで合流したときの光の電場は、

$$E_{\text{out}} = \frac{E_0}{2} (e^{i(-\omega_0 t + \phi_x)} - e^{i(-\omega_0 t + \phi_y)}) \quad (2.29)$$

となる。ここで、 ϕ_x, ϕ_y はそれぞれの腕を往復したときに発生する位相の変化。フォトディテクタで検出される光の強度 $P_{\text{out}} = |E_{\text{out}}|^2$ は、

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{2} P_{\text{in}} (1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \quad (2.30)$$

と計算できる。通常、 $P_{\text{out}} = 0$ となるように調整しておき、重力波により空間が歪んだときのみ信号が発生するよう制御する。

ここで、 z 軸方向からプラスモードの重力波が到来する状況考える。光の速度は任意の慣性系に対して不変なので、光子が進む微小距離 ds は常に 0 。 x 軸方向に進む光を考えると、

$$\left(1 - \frac{1}{2} h(t)\right) c dt = dx \quad (2.31)$$

である。ここで、重力波の角周波数 Ω を用いて、 $h(t) = h_+ \exp(-i\Omega t)$ とした。光が干渉計の x 軸方向の腕のながさ L_x を往復するのに要する時間を δt_x とする。式 (2.31) の両辺を積分して、

$$\frac{2L_x}{c} = \int_{t-\delta t_x}^t \left(1 - \frac{1}{2} h(t')\right) dt' \quad (2.32)$$

すなわち、

$$\delta t_x \simeq \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.33)$$

y 軸方向でも同様に、

$$\delta t_y \simeq \frac{2L_y}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.34)$$

となる。このとき x 軸方向の腕と y 軸方向の腕の位相差は、

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \omega_0(\delta t_x - \delta t_y) \\ &= \frac{2(L_x - L_y)\omega_0}{c} + \frac{\omega_0}{2} \int_{t-\delta t_x}^t h(t')dt' + \frac{\omega_0}{2} \int_{t-\delta t_y}^t h(t')dt' \\ &\simeq \frac{2(L_x - L_y)\omega_0}{c} + \omega_0 \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t')dt'\end{aligned}\quad (2.35)$$

のように表される。ここでは $L \simeq L_x \simeq L_y$ 、 $\delta t_{x,y} \simeq \frac{2L_{x,y}}{c}$ という近似を行った。式 (2.35) の第1項目は重力波が入射していない場合にも生じる位相差であり、第2項目は重力波による位相差 $\delta\phi_{\text{GW}}$ である。 $h(t)$ の逆フーリエ変換

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.36)$$

を用いると $\delta\phi_{\text{GW}}$ は、

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{MI}}(\Omega)h(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.37)$$

$$H_{\text{MI}}(\Omega) = \frac{2\omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{L\Omega}{c}\right)e^{-i\frac{L\Omega}{c}} \quad (2.38)$$

と書ける。ここで $H_{\text{MI}}(\Omega)$ は干渉計の重力波に対する周波数応答関数であり、

$$\frac{L\Omega}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (2.39)$$

を満たすとき感度が最も良くなる。例として、周波数が 100Hz の重力波を検出する際に感度を最大となる干渉計の腕の長さは 750km である。KAGRA の腕の長さは 3km 程度なので、3.4 節で紹介するような Fabry-Perot 共振器を用いて実効的な腕の長さを稼いでいる。

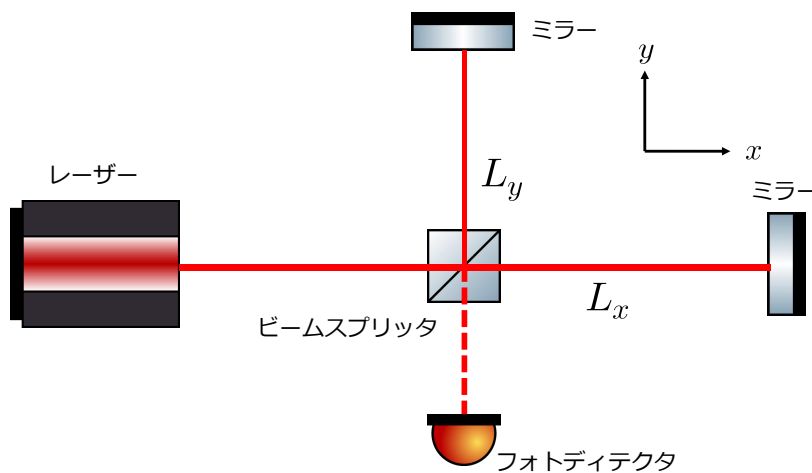


図 2.2: Michelson 干渉計

第3章

レーザー光学

微小な空間の歪みである重力波の検出にはレーザー光を用いる。本章では、Fabry-Perot 共振器の鏡の姿勢制御に必要な知識について記述する。

3.1 Gaussian ビーム

まず、以下の真空中の Maxwell 方程式から Gaussian ビームの導出を行う。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

これらより、電場に関する波動方程式は、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (3.5)$$

のように記述される。電場の進行方向を z 軸方向とし、波動方程式 (3.5) の解として次のような平面波解を仮定する。

$$\mathbf{E}(x, t) = u(x, y, z) \exp\{i(\omega_0 t - k_0 z)\} \quad (3.6)$$

この平面波解 (3.6) を波動方程式 (3.5) へ代入する。計算していくと、この波動方程式は u に関する条件として、

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = 0 \quad (3.7)$$

のように記述できる。計算中では、 $k_0 = \omega_0/c$ を用いた。

ここで波の振幅 u の変化が z 方向に関して緩やかであるという近似、 $|\partial u/\partial z| \ll k_0 u$ を行うと、次の方程式が得られる

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} u = 0 \quad (3.8)$$

この近似は近軸近似と呼ばれ、得られた方程式 3.8 を近軸 Helmholtz 方程式と呼ぶ。この方程式の解の一つである次の Gaussian 分布を考える。

$$u(r, z) = A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \quad (3.9)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3.10)$$

これを近軸 Helmholtz 方程式 (3.8) に代入すると、左辺は

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right\} A(z) \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \\ &= \left(-\frac{k^2}{q^2} A + 2i \frac{k}{q} A - 2ik \frac{dA}{dz} + \frac{k^2}{q^2} A \frac{dq}{dz} r^2 \right) \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] \\ &= \left(\frac{k^2}{q^2} \left(-1 + \frac{dq}{dz} \right) r^2 - 2ik \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} \right) \right) A \exp \left[-i \frac{k}{2q} r^2 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

のように変形できる。この式が全ての x, y に対して恒等的に 0 になるという条件より、次の 2 つの微分方程式が得られる。

$$-1 + \frac{dq}{dz} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} = 0 \quad (3.13)$$

式 (3.12) を解くと、

$$q(z) = z + q_0 \quad (3.14)$$

式 (3.13) は変数分離法により、

$$A(z)q(z) = A_0q_0 \quad (3.15)$$

が得られる。ここで $q_0 = q(0)$ 、 $A_0 = A(0)$ とした。

境界条件としてビームが光軸から十分離れたところでは強度が十分小さい、すなわち $r \rightarrow \infty$ であるとき $|u| \rightarrow 0$ であることを考える。 $|u|$ は、

$$\begin{aligned} |u|^2 &\propto \exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \left(\exp \left[-i \frac{k}{2q(z)} r^2 \right] \right)^* \\ &= \exp \left[-\frac{kr^2}{|q|^2} \text{Im} q \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

よって、 $r \rightarrow \infty$ であるとき $|u| \rightarrow 0$ を満たすには $\text{Im} q > 0$ である必要がある。したがって、 $q(z)$ の虚部を正の定数 z_R とする。

$$q_0 = iz_R \quad (3.17)$$

z_R は Rayleigh レンジと呼ばれるパラメータである。式 (3.14)、(3.15) より $q(z)$ 、 $A(z)$ を書き直すと、

$$q(z) = z + iz_R \quad (3.18)$$

$$A(z) = A_0 \frac{iz_R}{z + iz_R} \quad (3.19)$$

である。これを Gaussian 分布の式 (3.9) に代入すると、

$$u = A_0 \frac{iz_R}{z + iz_R} \exp \left[-i \frac{k}{2(z + iz_R)} r^2 \right] \quad (3.20)$$

のように書ける。係数部分を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{iz_R}{z + iz_R} &= \frac{iz_R(z - iz_R)}{(z + iz_R)(z - iz_R)} \\ &= \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + iz) \\ &= \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \sqrt{z^2 + z_R^2} \exp \left[i \tan^{-1} \frac{z}{z_R} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}} \exp \left[i \tan^{-1} \frac{z}{z_R} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

と書ける。また、Rayleigh レンジ z_R は正の定数であったので、適当な実数 w_0 を用いて、

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} \quad (3.22)$$

と表すことにする。すると、 e の指数部分は、

$$\begin{aligned} -i \frac{k}{2(z + iz_R)} r^2 &= -\frac{k}{2} \frac{i(z - iz_R)}{(z + iz_R)(z - iz_R)} r^2 \\ &= -\frac{1}{w_0^2} \frac{1 + i \frac{z}{z_R}}{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} r^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

と変形できる。したがって、式 (3.20) は以下のように書き直せる。

$$u(r, z) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}} \exp \left[-\frac{1}{w_0^2} \frac{1 + i \frac{z}{z_R}}{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} r^2 + i \arctan \frac{z}{z_R} \right] \quad (3.24)$$

ここで、ビームの特徴を表すパラメータとして、スポットサイズ w 、曲率半径 R 、Gouy 位相 η をそれぞれ次式で定義する。

$$w(z) \equiv w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (3.25)$$

$$R(z) \equiv z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (3.26)$$

$$\eta(z) \equiv \arctan \frac{z}{z_R} \quad (3.27)$$

これらのパラメータを用いて式 (3.24) を書き直すと、

$$u(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w} \exp \left[-\left(\frac{1}{w^2} + i \frac{k}{2R} \right) r^2 + i\eta \right] \quad (3.28)$$

となる。これが Gaussian ビームの一般的な表式である。

ここで、スポットサイズ w はビームの太さを表すパラメータであり、式 (3.25) を見ると $z = 0$ で最小となっているが実際にこの位置は一定ではないのでより一般性をもたせるために z についての平行移動を考え $z \rightarrow z - z_0$ とする。ここで z_0 はビームウエストと呼ばれ、スポットサイズが最小となる位置を表している。この変換を行うとそれぞれのパラメータは、

$$w(z) \equiv w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} \quad (3.29)$$

$$R(z) \equiv (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right] \quad (3.30)$$

$$\eta(z) \equiv \arctan \frac{z - z_0}{z_R} \quad (3.31)$$

となる。これらパラメータは z_0 、 z_R を定めると一意に定まることがわかる。

3.2 ビームパラメータ

ここでは、先程定義でしたビーム特徴を表すパラメータがどのような物理的な意味を持つのかを示す。

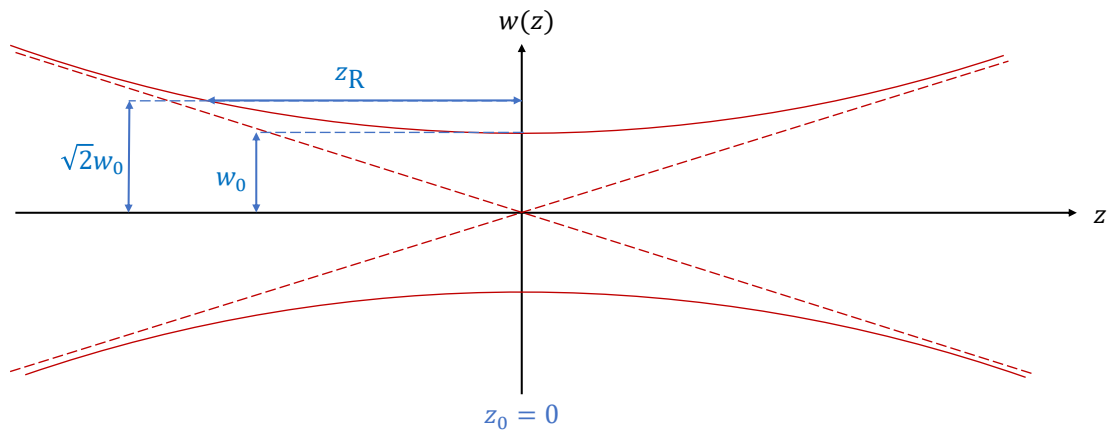


図 3.1: Gaussian ビーム

3.2.1 スポットサイズ $w(z)$

スポットサイズ $w(z)$ は先程も述べた通り、位置 z におけるビームの太さを表す。更に詳しく説明するために、Gaussian ビームの各点での強度 $I(r, z)$ は、

$$\begin{aligned} I(r, z) &= |u(r, z)|^2 \\ &= A_0^2 \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left[-\frac{2r^2}{w^2} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。これは r が大きくなるほど強度が弱くなる Gaussian 分布である。次に z 軸を中心とした半径 r_0 の円内でのパワー $P(r_0)$ は、

$$\begin{aligned} P(r_0) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} I(r, z) r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2 \left(1 - \exp\left[-\frac{2r_0^2}{w^2}\right] \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$r_0 \rightarrow \infty$ のときのパワー P_0 は、

$$P_0 = \frac{\pi}{2} A_0^2 w_0^2 \quad (3.34)$$

である。これと $r_0 = w$ のときのパワーの比率を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{P(w(z))}{P_0} &= 1 - e^{-2} \\ &\simeq 0.864 \end{aligned} \quad (3.35)$$

すなわち $w(z)$ はパワーが約 86.4% 含まれるときの半径である。

3.2.2 ビームウエスト z_0

スポットサイズ $w(z)$ は、

$$w(z) \equiv w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2} \quad (3.29)$$

であった。これは $z = z_0$ のときに最小の値をとり、このときの位置 z_0 をビームウエスト、太さ w_0 をビームウエスト径と呼ぶ。

3.2.3 Rayleigh レンジ z_R

ビームウエストから z_R だけ離れた位置 $z = z_0 \pm z_R$ でのスポットサイズは、式 (3.29) より、

$$w(z_0 \pm z_R) = \sqrt{2} w_0 \quad (3.36)$$

となる。Rayleigh レンジとはビームウエストから離れたときスポットサイズが $\sqrt{2}$ 倍となる距離である。 z_R が長いほどビームは広がりにくくなる。一方で、 z_R を長くすると式 (3.22) より、ビームウエスト径 w_0 が大きくなるのでビームウエストでビームを絞り込みたい場合は z_R を小さくする必要がある。

3.2.4 曲率半径 $R(z)$

曲率半径 $R(z)$ は、

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0}\right)^2 \right] \quad (3.30)$$

での式で表された。ビームウエスト付近での曲率半径と十分遠方での曲率半径は以下のようになる。

$$\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = \infty \quad (3.37)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = z - z_0 \quad (3.38)$$

したがって、ビームはビームスポット付近で平面波、十分遠方では球面波に近似できる。

3.2.5 Gouy 位相 $\eta(z)$

式 (3.28) より、Gouy 位相は Gaussian ビームの位相のずれを表す。Gouy 位相 $\eta(z)$ の表式は、

$$\eta(z) \equiv \arctan \frac{z - z_0}{z_R} \quad (3.31)$$

であったので、位置 z におけるビームウエスト付近の平面波に対する位相のずれを意味している。ビームウエストから z_R だけ離れた位置では $\frac{\pi}{4}$ 、更に離れると最大で $\frac{\pi}{2}$ だけ変化する。

3.3 Hermite Gaussian モード

Gaussian ビームは近軸 Helmholtz 方程式 (3.8) の解として Gaussian 分布を仮定したときのビームであった。この時の解を基本モードと呼ぶ。この節では、Hermite Gaussian モードと呼ばれる更に高次の解まで考える。Hermite Gaussian モードの一般的な表式は Hermite 多項式を用いて次のように表される。

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp(-ik(z - z_0) + i(l + m + 1)\eta) \quad (3.39)$$

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{w^2} - \frac{ikr^2}{2R}\right] \quad (3.40)$$

基本モード ($l = 0, m = 0$) のときは Gaussian ビームであり、

$$U_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp\left[-i(k(z - z_0) - \eta) - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R}\right)\right] \quad (3.41)$$

基本モードを用いて高次モード ($l > 0, m > 0$) は次のように表される。

$$U_{lm}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) U_{00}(x, y, z) \exp[i(l + m)\eta] \quad (3.42)$$

また、Hermite 多項式の直交性より、次の関係が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_l(x) U_m^*(x) dx = \delta_{lm} \quad (3.43)$$

3.3.1 ビームの平行移動と回転移動

以下ではビームの平行移動と回転移動について考える。簡単のためにビームウエストの位置に z 軸の原点をとる ($z_0 = 0$)。このとき、 $w = w_0$ 、 $R = \infty$ 、 $\eta = 0$ であるから、式

(3.41)(3.42) はそれぞれ、

$$U_{00}(x, y, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right] \quad (3.44)$$

$$U_{lm}(x, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right) U_{00}(x, y, 0) \quad (3.45)$$

のように表される。

平行移動

ここではビームの光軸が理想的な状態から平行方向にずれている状態を考える。元の座標系を (x', y', z') とし、そこから x 方向に微小な距離 δx だけ移動した座標系を (x, y, z) とする。00 モードについて、 δx の1次の項まで展開する。

$$\begin{aligned} U_{00}(x, y, z)|_{z'=z_0} &= U_{00}(x' - \delta x, y', 0) \\ &= \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{(x'^2 - \delta x)^2 + y'^2}{w_0^2}\right] \\ &\simeq \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2}\right] \exp\left[\frac{2x'\delta x}{w_0^2}\right] \\ &\simeq \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2}\right] \left(1 + \frac{2x'\delta x}{w_0^2}\right) \\ &= U_{00}(x', y', 0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', 0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

10 モードについても同様の手順で計算する。結果をまとめると、

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', 0) \quad (3.47)$$

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y', 0) \quad (3.48)$$

となる。

回転移動

元の座標系を (x', y', z') とし、 y 軸に平行な直線周りに $\delta\theta$ だけ回転させた座標系を (x, y, z) とする。変換前後の座標系の関係は、回転行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta\theta & \sin \delta\theta \\ -\sin \delta\theta & \cos \delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

と表される。 $z' = 0$ の時を考えているので、

$$x = \cos(\delta\theta)x' \quad (3.50)$$

$$z = -\sin(\delta\theta)x' \quad (3.51)$$

と変換される。00モードについて考える。式(3.40)は、 $w = w_0$ 、 $R = \infty$ より、

$$\begin{aligned} U_0(x, z)|_{z'=0} &\simeq \left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(\cos(\delta\theta)x')^2}{w_0^2}\right] \\ &\simeq \left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{x'^2}{w_0^2}\right] \\ &= U_0(x', 0) \end{aligned} \quad (3.52)$$

ここで、 $\delta\theta$ の2次の項は無視した。次に、位相項について考える。

$$\begin{aligned} \exp[-ikz + i\eta(z)]|_{z'_0=0} &= \exp[ik \sin(\delta\theta)x' + i\eta(-\sin(\delta\theta)x')] \\ &\simeq \exp[ik\delta\theta x'] \exp\left[-i\frac{\delta\theta x'}{z_0}\right] \\ &\simeq 1 + \left(k - \frac{1}{z_0}\right)\delta\theta x' \\ &\simeq 1 + k\delta\theta x' \end{aligned} \quad (3.53)$$

よって、00モードのビームの回転移動については、

$$\begin{aligned} U_{00}(z, y, z)|_{z'=0} &= U_0(x', 0)U_0(y', 0)(1 + ik\delta\theta x') \\ &= U_{00}(x', y', 0) + \frac{ikw_0}{2}\delta\theta U_{10}(x', y', 0) \end{aligned} \quad (3.54)$$

のように表される。10モードについても同様の手順で計算を行いその結果をまとめると以下のようなになる。

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}U_{10}(x', y', 0) \quad (3.55)$$

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}U_{00}(x', y', 0) \quad (3.56)$$

ここで $\alpha_0 = \frac{2}{kw_0}$ とおいた。

導いた4式(3.47)(3.48)(3.55)(3.56)はその座標が理想的な光軸から少しでもずれたビームには00モードと10モードが混ざること示している。

3.3.2 ビームの行列表現

00モードと10モードの係数をそれぞれ α_0, α_1 とするとビームは、

$$E = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.57)$$

のように線形和で表される。ビームが平行移動または回転移動した際の係数を α'_0, α'_1 とおく。まず平行移動については、式(3.47)(3.48)より、次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

次に回転移動については、式(3.55)(3.56)より、次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

平行移動と回転移動を同時に考える際には、これらの行列をかけあわせる、したがって、ビーム移動の行列表現 $M(\delta x, \delta\theta)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} M(\delta x, \delta\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

ここで、 $\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}$ とおいた。

また、 z 軸を逆行するビームを $U'_{lm}(x, y, z)$ としたときに、

$$\begin{aligned} U'_{lm}(x, y, z) &= U_{lm}(x, y - z) \\ &= U_l^*(x, z)U_m^*(y, z) \exp[ikz - i(l + n + 1)\eta(z)] \\ &= U_{lm}^*(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.61)$$

のように表される。このことから、逆行するビームは順行するビームの複素共役として表される事がわかる。

3.4 Fabry-Perot 共振器

ここまでで、ビームの基本的な性質を定式化した。本節以降では、重力波検出器 KAGRA で用いられている Fabry-Perot 共振器に関する理論について記述する。

3.4.1 透過光と反射光

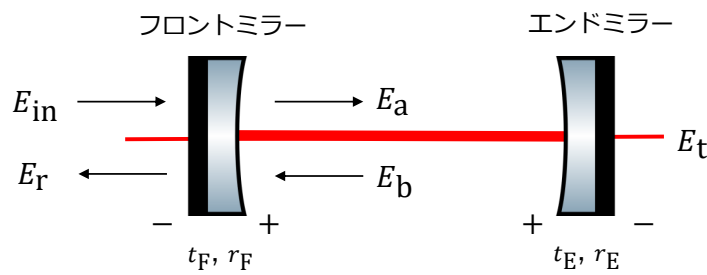


図 3.2: Fabry-Perot 共振器における電場

レーザー光源からの入射光を、

$$E_{in} = E_0 e^{i\omega t} \quad (3.62)$$

とする。フロントミラーに E_{in} が入射したときの反射光 E_r 、透過光 E_t 、共振器内部の電場 E_a 、 E_b はそれぞれ、以下の式で表される。なお、ここでの反射率と透過率は振幅反射率、振

幅透過率表し、反射率は共振器の内側を正の実数と考える。

$$E_a = t_F E_{in} + r_F E_b \quad (3.63)$$

$$E_b = r_E e^{-2i\frac{L\omega}{c}} E_a \quad (3.64)$$

$$E_r = t_F E_b - r_F E_{in} \quad (3.65)$$

$$E_t = t_E e^{-i\frac{L\omega}{c}} E_a \quad (3.66)$$

ここで、 E_a 、 E_b は共振器内部のフロントミラー付近での電場とする。以上の4式は、

$$E_a(\phi) = \frac{t_F}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} E_{in} \quad (3.67)$$

$$E_b(\phi) = \frac{t_F r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} E_{in} \quad (3.68)$$

$$E_r(\phi) = \left(-r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \right) E_{in} \quad (3.69)$$

$$E_t(\phi) = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} E_{in} \quad (3.70)$$

のように変形できる。ここで、 ϕ は以下のようにおいた。

$$\phi = \frac{2\omega L}{c} \quad (3.71)$$

これは、光が共振器内を往復するときの位相変化である。

ここで、共振器を一つの光学素子とみなし、式(3.69)(3.70)より Fabry-Perot 共振器の反射率 $r_{cav}(\phi)$ と透過率 $t_{cav}(\phi)$ を定義すると、

$$r_{cav}(\phi) \equiv \frac{E_r}{E_{in}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \quad (3.72)$$

$$t_{cav}(\phi) \equiv \frac{E_t}{E_{in}} = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \quad (3.73)$$

さらに、反射光強度 P_r と透過光強度 P_t は、

$$P_r = |E_r|^2 = \frac{\{(t_F^2 + r_F^2)r_E - r_F\}^2 + 4r_F r_E (t_F^2 + r_F^2) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{(1 - r_F r_E)^2 \left\{1 + F \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}} |E_{in}|^2 \quad (3.74)$$

$$P_t = |E_t|^2 = \frac{t_F^2 t_E^2}{(1 - r_F r_E)^2 \left\{1 + F \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}} |E_{in}|^2 \quad (3.75)$$

のように計算できる。ここで F は、

$$F \equiv \frac{4r_F r_E}{(1 - r_F r_E)^2} \quad (3.76)$$

のように定義した。透過光強度 P_t が最大となるのは

$$\phi = 2\pi n \quad (3.77)$$

のときである。このとき共振器内部の光の強度も最大となるので、Fabry-Perot 共振器が共振しているという。

3.4.2 Free Spectral Range とフィネス

$\phi = 2\omega L/c$ において、共振器長 L は定数であるとするとき式 (3.75) は、 ω の周期関数となっている。この周期を Free Spectral Range (FSR) という。周期の関係式は、

$$\frac{2L\omega_{\text{FSR}}}{c} = 2\pi \quad (3.78)$$

であるので FSR は、

$$f_{\text{FSR}} = \frac{\omega_{\text{FSR}}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \quad (3.79)$$

となる。

次に、共振ピークの半値全幅を計算する。式 (3.75) で透過光強度が $1/2$ となる ω を f_{FWHM} とすると、

$$\frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\pi L f_{\text{FWHM}}}{c}} = \frac{1}{2} \quad (3.80)$$

のように表される。ここで $f_{\text{FWHM}} \ll f_{\text{FSR}}$ であるならば、

$$\begin{aligned} f_{\text{FWHM}} &\simeq \frac{c}{\pi\sqrt{FL}} \\ &= \frac{(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})c}{2\pi L\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

f_{FSR} と f_{FWHM} の比をフィネス \mathcal{F} といい、次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{FWHM}}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}}{1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

これは共振の鋭さを表す量で、鏡の反射率にのみ依存する。

3.5 Pound Drever Hall 法

前節では共振器の一般的な性質を導いた。本節以降では共振器を制御する原理について述べる。

共振器の長さ方向を制御する手法として、Pound Drever Hall 法 (PDH 法) というものがある。PDH 法の原理は、式 (3.72) より、共振器の反射率が共振器長 L と入射光の周波数 ω に依存することを利用する。入射光に位相変調を加えることで共振周波数から少し外れた周波数の光 (サイドバンド光) を発生させ、これを変調周波数と同じ周波数で復調することによって線形なエラー信号を得るという仕組みである。位相変調には EOM (Electro Optical Modulator) を用いる。

3.5.1 エラー信号

エラー信号とは光学部品の自由度、例えば位置や角度の検出器に対する応答を示した表式である。一般的な手法として、キャリア光の位相に対して変調をかけサイドバンド光を生成し、

検出器で復調を行うことで誤差信号を取得する変調復調方式が主流である。干渉計を安定に制御するためには、目標のパラメーターの値（動作点）の周りでエラー信号が自由度に対して線形である必要がある。

3.5.2 位相変調

今回、角周波数 ω_c の入射光に対して、変調指数 m 、変調周波数 ω_m の位相変調をかける。変調後の光は、 E_{mod} は、

$$\begin{aligned} E_{\text{mod}} &= E_0 \exp[i(\omega_c t + m \sin(\omega_m t))] \\ &= E_0 \exp[i\omega_c t] \exp[im \sin(\omega_m t)] \end{aligned} \quad (3.83)$$

である。ここで位相変調の項 $\exp[im \sin(\omega_m t)]$ については Bessel 関数 $J_n(m)$ を用いて簡潔に表す事ができる。

Bessel 関数の母関数表示は、以下で与えられる。

$$\exp\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) x^n \quad (3.84)$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) &= i \sin \omega_m t \\ \therefore x &= \exp[i\omega_m t] \end{aligned} \quad (3.85)$$

となるので、式 (3.83) を Bessel 関数を用いて書き直すと、

$$E_{\text{mod}} = E_0 e^{i\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp[in\omega_m t] \quad (3.86)$$

となる。さらに、Bessel 関数の無限級数表示は、

$$J_{n \geq 0}(m) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)! s!} \left(\frac{m}{2}\right)^{n+2s} \quad (3.87)$$

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m) \quad (3.88)$$

である。変調指数は十分小さく、 $m \ll 1$ であるとして m の 2 次以降の項を無視すると、式 (3.86) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} E_{\text{mod}} &\simeq E_0 e^{i\omega_c t} \{J_0(m) + J_1(m)(e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t})\} \\ &= E_0 J_0 e^{i\omega_c t} + E_0 J_1 e^{i(\omega_c + \omega_m)t} - E_0 J_1 e^{i(\omega_c - \omega_m)t} \end{aligned} \quad (3.89)$$

第2項と第3項は $\omega_c \pm \omega_m$ で振動するサイドバンド光である。

3.5.3 サイドバンド光に対する共振器の応答

式 (3.72) において共振器長 L を一定であるとして定数とみなし、 $r_{\text{cav}}(\phi) = r_{\text{cav}}(\omega)$ とする。このとき、共振器内部の反射率は入射光の周波数に依存するので、サイドバンド光を含む共振

器の反射光 E_r はそれぞれの周波数の反射光の線形和で表され、

$$E_r = E_0 J_0 r_{\text{cav}}(\omega_c) e^{i\omega_c t} + E_0 J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) e^{i(\omega_c + \omega_m)t} - E_0 J_1 r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m) e^{i(\omega_c - \omega_m)t} \quad (3.90)$$

となる。このとき反射光強度 P_r は、

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 \\ &= \left[J_0^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)|^2 \right] P_0 \\ &\quad + 2J_0 J_1 P_0 [\text{Re}\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\} \cos(\omega_m t) \\ &\quad + \text{Im}\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}^*(\omega_c) r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\} \sin(\omega_m t)] \\ &\quad + f(e^{2i\omega_m t}) \end{aligned} \quad (3.91)$$

のように表される。ここで、 $P_0 = |E_0|^2$ とおいた。この式において第一項は DC (Direct Current) 成分であり共振状態においては 0 となる。第 2 項は RF (Radio Frequency) 成分であり、第 3 項は倍周波項 $\exp[2i\omega_m t]$ を含む項で、PDH 信号を取り出す際には取り除く。

3.5.4 復調

式 (3.91) の強度信号から共振点周りでのエラー信号を得るために変調周波数と同じ周波数 $\sin(\omega_m t)$ か変調周波数から位相を $\pi/2$ ずらした周波数 $\cos(\omega_m t)$ をかけることで復調を行う。このとき倍周波項は無視する（これはローパスフィルタを通す操作に当たる）。

$\sin(\omega_m t)$ で復調した結果は、

$$V_{\text{RF}}^{\text{I}} = J_0 J_1 P_0 \text{Im}\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\} \quad (3.92)$$

$\cos(\omega_m t)$ で復調した結果は、

$$V_{\text{RF}}^{\text{Q}} = J_0 J_1 P_0 \text{Re}\{r_{\text{cav}}(\omega_c) r_{\text{cav}}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{\text{cav}}(\omega_c - \omega_m)\} \quad (3.93)$$

のようになる。

3.5.5 共振点付近での PDH 信号

共振点付近 ($\phi = 2n\pi + \delta\phi$) においては $r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) \simeq r_{\text{cav}}^*(\omega_c - \omega_m) \simeq r_s$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} V_{\text{RF}}^{\text{I}} &\simeq 2J_0 J_1 r_s P_0 \text{Im}[r_{\text{cav}}(\omega_c)] \\ &= 2J_0 J_1 r_s P_0 \text{Im} \left[-r_{\text{F}} + \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} e^{-i\phi}}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}} e^{-i\phi}} \right] \\ &= 2J_0 J_1 r_s P_0 \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} \sin \phi}{1 + (r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2 - 2r_{\text{F}} r_{\text{E}} \cos \phi} \\ &\simeq 2J_0 J_1 r_s P_0 \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{(1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2} \delta\phi \\ &= V_{\text{PDH}} \end{aligned} \quad (3.94)$$

となる。 $\delta\phi$ の係数部分は θ によらない定数であるので、PDH 信号は

$$V_{\text{PDH}} \propto \delta\phi \quad (3.95)$$

のように $\delta\phi$ に比例する線形信号であることがわかる。さらに $\delta\omega = 0$ とすると、

$$V_{\text{PDH}} = 4\pi J_0 J_1 r_s P_0 \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{\lambda(1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2} \delta L \quad (3.96)$$

これが、共振器長に比例したエラー信号である。

3.6 Wave Front Sensing 法

PDH 法が光軸と平行な方向のずれの信号を得る手法であったのに対し、Wave Front Sensing 法 (WFS 法) は光軸と垂直な方向のずれと鏡の回転方向のずれの信号を得る手法である。3.3.1 項の中で述べた通り、ビームの座標のずれは 10 モードの混入を生み出すのだった。WFS 法では共振器の鏡の傾きに応じて発生する 10 モードと 00 モードの干渉を検出することで、エラー信号を得る。

3.6.1 反射行列

00 モードの共振器の反射率は式 (3.72) であった。以下ではモードを区別するために共振器の、00 モードの反射率を r_{00} 、10 モードの反射率を r_{10} とする。式 (3.39) で表されるように 10 モードでは 00 モードに対して Gouy 位相の分だけ位相がずれる。また、Gouy 位相とは式 3.2.5 項のとおり、距離による位相のずれを表すのであった。

Fabry-Perot 共振器を片道進んだときの Gouy 位相を η_{FP} とすると、10 モードの反射率は、

$$r_{10}(\phi) = -r_{\text{F}} + \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} e^{-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})}}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}} e^{-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})}} \quad (3.97)$$

と表される。

00 モードと 10 モードの変換行列を反射行列 $R_{\text{FP}}^{\text{align}}$ として表現すると以下のようになる。

$$R_{\text{FP}}^{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{00} & 0 \\ 0 & r_{10} \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

ここでミスアライメントされた状態、つまり入射光軸と共振器軸が一致しておらず、ずれが生じている状況を考える。このときの反射行列 $R_{\text{FP}}^{\text{miss}}$ は式 (3.60) を用いることで、

$$\begin{aligned} R_{\text{FP}}^{\text{miss}} &= M^*(\gamma_{\text{r}}) R_{\text{FP}}^{\text{align}} M(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{\text{r}}^* \\ -\gamma_{\text{r}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{00} & 0 \\ 0 & r_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{00} - r_{10} \gamma_{\text{r}}^* \gamma^* & r_{00} \gamma + r_{10} \gamma_{\text{r}}^* \\ -r_{00} \gamma_{\text{r}} - r_{10} \gamma^* & -r_{00} \gamma_{\text{r}} + r_{10} \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} r_{00} & r_{00} \gamma + r_{10} \gamma_{\text{r}}^* \\ -r_{00} \gamma_{\text{r}} - r_{10} \gamma^* & r_{10} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.99)$$

のように計算できる。ここで $\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i \frac{\delta\theta}{\alpha_0}$ であり、ずれは微小であるとして γ の 2 次の項は無視した。

入射光が 00 モードのみであるとする。このとき、式 (3.57) において $\alpha_0 = 1$ 、 $\alpha_1 = 0$ であるので、ミスアライメントされた反射光 E_r^{miss} は、

$$\begin{aligned} E_r^{\text{miss}} &= (U_{00} \ U_{10}) \begin{pmatrix} r_{00} & r_{00}\gamma + r_{10}\gamma_r^* \\ -r_{00}\gamma_r - r_{10}\gamma^* & r_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \\ &= \{r_{00}U_{00} + (r_{00}\gamma_r - r_{10}\gamma^*)U_{10}\} E_0 e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (3.100)$$

のように表される。これより、ミスアライメントされた状態の共振器の反射率は次のように表される。

$$r^{\text{miss}} = r_{00}U_{00} + (r_{00}\gamma_r - r_{10}\gamma^*)U_{10} \quad (3.101)$$

3.6.2 WFS 信号

位相変調をかけた光がミスアライメント状態の共振器へ入射した時の反射光を考える。これは、PDH 信号 (3.92) に対して式 (3.101) を代入すれば良く、

$$V_{\text{RF}}^{\text{miss}} = J_0 J_1 P_0 \text{Im}[r^{\text{miss}}(\omega_c) r^{\text{miss}*}(\omega_c + \omega_m) - r^{\text{miss}*}(\omega_c) r^{\text{miss}}(\omega_c - \omega_m)] \quad (3.102)$$

と表されるここで簡略化のため以下を定義する。

$$c_0 \equiv r_{00}(\omega_c)\gamma_r + r_{10}(\omega_c)\gamma^* \quad (3.103)$$

$$s_{\pm} \equiv r_{00}(\omega_c \pm \omega_m)\gamma_r + r_{10}(\omega_c \pm \omega_m)\gamma^* \quad (3.104)$$

これを用いると各周波数での反射率はそれぞれ、

$$r^{\text{miss}}(\omega_c) = r_{00}(\omega_c)U_{00} - c_0U_{10} \quad (3.105)$$

$$r^{\text{miss}}(\omega_c \pm \omega_m) = r_{00}(\omega_c \pm \omega_m)U_{00} - s_{\pm}U_{10} \quad (3.106)$$

のように表される。このとき、ミスアライメントされたエラー信号 $V_{\text{RF}}^{\text{miss}}$ を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} V_{\text{RF}}^{\text{miss}} &= J_0 J_1 P_0 \text{Im}[\{r_{00}(\omega_c)U_{00} - c_0U_{10}\}\{r_{00}(\omega_c + \omega_m)U_{00} - s_+U_{10}\}^* \\ &\quad - \{r_{00}(\omega_c)U_{00} - c_0U_{10}\}^*\{r_{00}(\omega_c - \omega_m)U_{00} - s_-U_{10}\}] \\ &= J_0 J_1 P_0 \text{Im}[r_{00}(\omega_c)r_{00}^*(\omega_c + \omega_m) - r_{00}(\omega_c)r_{00}^*(\omega_c - \omega_m)]|U_{00}|^2 \\ &\quad - J_0 J_1 P_0 \text{Im}[\{s_+^*r_{00}(\omega_c) - c_0^*r_{00}(\omega_c - \omega_m)\}U_{00}U_{10}^*] \\ &\quad + J_0 J_1 P_0 \text{Im}[\{s_-r_{00}^*(\omega_c) - c_0r_{00}^*(\omega_c + \omega_m)\}U_{00}^*U_{10}] \\ &\quad + J_0 J_1 P_0 \text{Im}[c_0s_+^* - c_0^*s_-]|U_{10}|^2 \end{aligned} \quad (3.107)$$

ここで RF 信号 (3.107) における第 1 項の $|U_{00}|^2$ の係数は式 (3.92) と一致しており、PDH 信号である。第 2 項と第 3 項は 00 モードと 10 モードの干渉を表しており、これが WFS 信号 V_{WFS} である。第 4 項は γ の 2 次を含むので無視する。

WFS 信号を c_0 、 s_{\pm} を展開して記述する。共振点付近 ($\phi = 2n\pi + \delta\phi$) においては $r_{00}(\omega_c) = r_{00}^*(\omega_c)$ 、 $r_{\text{cav}}(\omega_c + \omega_m) \simeq r_{\text{cav}}^*(\omega_c - \omega_m)$ であることを用いて、(3.103)、(3.104) より、

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}} &\simeq J_0 J_1 P_0 \text{Im}[\{[r_{00}(\omega_c - \omega_m)\gamma_r + r_{10}(\omega_c - \omega_m)\gamma^*]r_{00}(\omega_c) \\ &\quad - [r_{00}(\omega_c)\gamma_r + r_{10}(\omega_c)\gamma^*]r_{00}(\omega_c - \omega_m)\}U_{00}^*U_{10} \\ &\quad - \{[r_{00}(\omega_c - \omega_m)\gamma_r^* + r_{10}(\omega_c - \omega_m)\gamma]r_{00}(\omega_c) \\ &\quad - [r_{00}(\omega_c)\gamma_r^* + r_{10}(\omega_c)\gamma]r_{00}(\omega_c - \omega_m)\}U_{00}U_{10}^*] \end{aligned} \quad (3.108)$$

これを計算すると、

$$V_{\text{WFS}} = 2J_0J_1P_0 \operatorname{Re}[r_{10}(\omega_c - \omega_m)r_{00}(\omega_c) - r_{10}(\omega_c)r_{00}(\omega_c)] \operatorname{Im}[\gamma^*U_{10}U_{00}^*] \quad (3.109)$$

となり、 $\operatorname{Im}[\gamma^*U_{10}U_{00}^*]$ について考える。 $\gamma^* = \frac{\delta x}{w_0} - i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}$ であるので、

$$\operatorname{Im}[\gamma^*U_{10}U_{00}^*] = \operatorname{Im}[U_{10}U_{00}^*] \frac{\delta x}{w_0} - \operatorname{Re}[U_{10}U_{00}^*] \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \quad (3.110)$$

$$U_{00}^*U_{10} = U_0^*(x)U_0^*(y)U_1(x)U_0(y) \exp[i\eta] \quad (3.111)$$

ここで、(3.39) を用いた。したがって WFS 信号の表式は以下ようになる。

$$V_{\text{WFS}} = J_0J_1P_0R_0U_0^*(x,z)U_0^*(y,z)U_1(x,z)U_0(y,z) \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta - \frac{\delta\theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) \quad (3.112)$$

$$R_0 = 2 \operatorname{Re}[r_{10}(\omega_c - \omega_m)r_{00}(\omega_c) - r_{10}(\omega_c)r_{00}(\omega_c - \omega_m)] \quad (3.113)$$

3.6.3 PDH 信号と WFS 信号の分離

エラー信号は PDH 信号と WFS 信号の和で表される。

$$V_{\text{RF}}^{\text{miss}} = V_{\text{PDH}} + V_{\text{WFS}} \quad (3.114)$$

これらを分離して長さ方向の信号である PDH 信号と角度方向の信号である WFS 信号を別々に取得したい。式 (3.40) より、

$$U_0(x,z) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{x^2}{w^2} - \frac{ikr^2}{2R} \right] \quad (3.115)$$

$$U_1(x,z) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{2x}{w} \exp \left[-\frac{x^2}{w^2} - \frac{ikr^2}{2R} \right] \quad (3.116)$$

であった。つまり、WFS 信号 (3.112) は x に関する奇関数である。フォトディテクタ (PD) は領域内で取得した信号について積分を行うので単一の PD を用いた場合、WFS 信号は 0 になる。このとき PDH 信号のみを取り出すことができる。

また、WFS 信号の抽出には左右に分割された PD を用いる。長さ制御を行い PDH 信号を 0 にした上で、分割 PD による左右の信号の差を取ることで WFS 信号を取得する手法を用いる。求まる信号強度 P_{WFS} は、

$$\begin{aligned} P_{\text{WFS}} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}} - \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}} \\ &= 2J_0J_1R_0 \int_0^\infty dx U_0^*(x,z)U_1(x,z) \int_{-\infty}^\infty dx U_0^*(y,z)U_1(y,z) \\ &= 2J_0J_1R_0 \int_0^\infty dx U_0^*(x,z)U_1(x,z) \end{aligned} \quad (3.117)$$

これを計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx U_0^*(x,z)U_1(x,z) &= \sqrt{\frac{4}{\pi w^2(z)}} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \exp \left[-\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned} \quad (3.118)$$

となるので、最終的な WFS 信号強度は、

$$P_{\text{WFS}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} J_0 J_1 P_0 R_0 \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta - \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) \quad (3.119)$$

となる。適当な Gouy 位相 η を選ぶことで δx の $\delta \theta$ どちらかの線形なエラー情報を得る事ができる。

第 4 章

複屈折

4.1 複屈折の理論

複屈折とは、物質中を光が伝播する際に光の偏光状態によって、2つの光線に分けられ、各方向で異なる速度で進む現象である。この現象は通常、非等方性のある物質で観測され、KAGRA に用いられたサファイアもこの性質をもつ一軸性結晶である。本章では、複屈折の記法について述べた後、複屈折による偏光の回転について述べ、現在 KAGRA で起きている複屈折問題について指摘する。

4.1.1 複屈折の記法

複屈折を記述するために図 4.1 のような屈折率楕円体を考える。これは最も高い屈折率を持つ方向、最も低い屈折率を持つ方向、この2つに直行する方向の3方向を主軸とした楕円体であり、軸の長さが屈折率の大きさに対応している。複屈折性を持つ物質に光が入射した場合、入射光の光軸に対して垂直な面で楕円体を切断し、切断面の楕円の短軸と長軸の長さに対応した屈折率が観測されることになる。

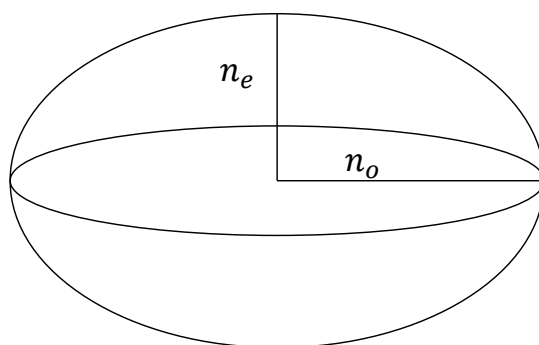


図 4.1: 屈折率楕円体

本章ではサファイアに主眼を置いた議論を行う。サファイアは一軸性結晶と呼ばれ、最も高い屈折率 n_e による軸と最も低い屈折率 n_o を半径とする面で屈折率楕円体が描かれる。一軸性結晶の持つ軸を c 軸と呼び、 c 軸に平行な光に対しては複屈折性を示さない。これは、光軸

に垂直な切断面が円となるためである。

図 4.2 のように一軸性結晶に光軸が c 軸に対して ϕ だけ傾いた光が入射した場合を考える。入射光の光軸に対して垂直な面での楕円体の切断面の短軸を高速軸、長軸を低速軸と呼ぶ (屈折率の大きさと光の速度は反比例するため)。一軸性結晶では入射光がどのような傾きでも切断面と c 面 (c 軸に対して垂直な楕円面、一軸性結晶の場合は円) が交わるため、切断面の楕円の低速軸方向の長さは、常に最も高い屈折率である n_o である。

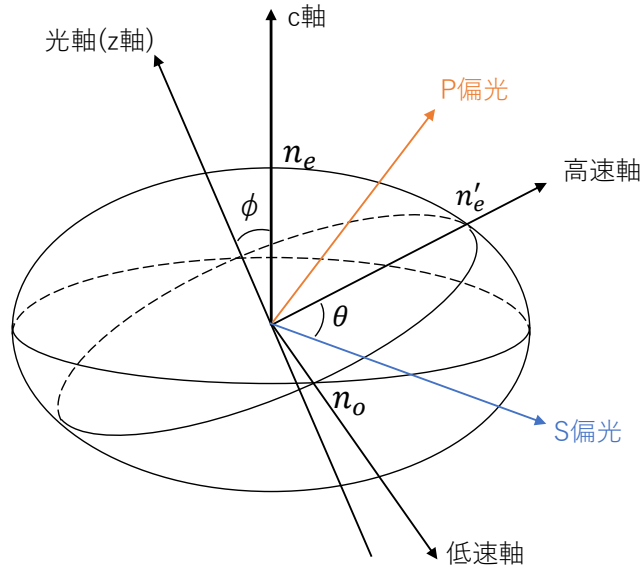


図 4.2: 入射光と屈折率楕円体

ここで、光軸と c 軸を含むように屈折率楕円体を切断した楕円面を考えることにより n'_e と ϕ の関係は、

$$\frac{1}{n'_e} = \frac{\cos^2 \phi}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \phi}{n_e^2} \quad (4.1)$$

のように表される。

次節で偏光の回転を議論する際に必要となるパラメータは n_o と n'_e 、そして S 偏光方向と高速軸のなす角 θ である。 n_o に関しては一軸性結晶の物質固有の値であり既知である。したがって、 n'_e と θ の 2 自由度の値を求めることが重要となる。ここで、 n'_e の代わりに、

$$\Delta n \equiv n'_e - n_o \quad (4.2)$$

が用いられることがある。これは、低速軸、高速軸方向にそれぞれ平行な直線偏光が入射したとき (つまり $\theta = \frac{n\pi}{2}$ のとき) に分かれた 2 つの光の位相差は Δn を用いて、

$$R = \frac{2\pi d \Delta n}{\lambda} \quad (4.3)$$

と表されるからである。ここで、 λ は入射光の波長、 d は試料の厚さである。

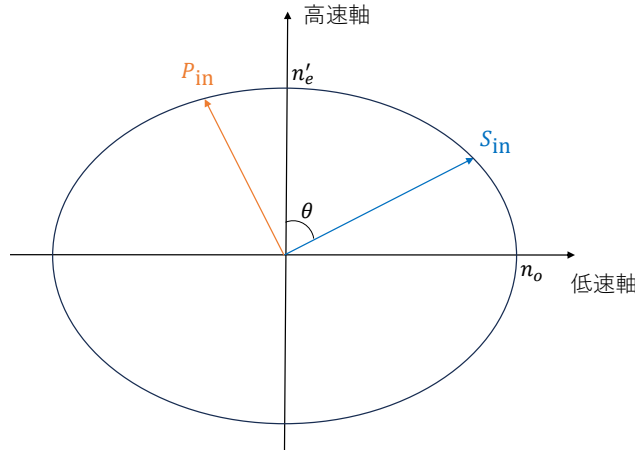


図 4.3: 入射光に垂直な面による屈折率楕円体の切断楕円面

4.1.2 偏光の回転

光の偏光状態を記述するために Jones 計算法を用いる。これは光の電場の複素振幅の x 成分と y 成分を二次元の Jones ベクトル \mathbf{V} で記述し、光学素子の効果を 2×2 の Jones 行列 \mathbf{M} で記述する手法である。光が光学素子を通過するとき、その出射光の偏光は光学素子の Jones 行列と入射光の Jones ベクトルの積となる。入射光の x 成分が S 偏光、 y 成分が P 偏光となるように軸をとると Jones ベクトル \mathbf{V} は、

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} S_{in} \\ P_{in} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

のように表される。この光が光学素子を透過したときの光の偏光 \mathbf{V}' は、光学素子の Jones 行列 \mathbf{M} との積であり、

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} S_{out} \\ P_{out} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V} \quad (4.5)$$

のようになる。

次に、一様な複屈折性を持つ物体の Jones 行列 $M(\Delta n)$ は次式で表される。

$$M(\Delta n) = \begin{pmatrix} \exp\left[i\frac{2\pi\Delta nd}{\lambda}\right] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left[i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] \begin{pmatrix} \exp\left[i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

ここで定数倍部分 $\exp\left[i\frac{2\pi\Delta nd}{\lambda}\right]$ は偏光を考える上で影響はないため無視する。S 偏光方向の軸に対して高速軸が θ 傾いている状態を考えると Jones 行列 $M(\theta, \Delta n)$ は、

$$\begin{aligned} M(\theta, \Delta n) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\left[i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-i\frac{\pi\Delta nd}{\lambda}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi\Delta nd}{\lambda} - i \cos 2\theta \sin \frac{\pi\Delta nd}{\lambda} & -i \sin 2\theta \sin \frac{\pi\Delta nd}{\lambda} \\ -i \sin 2\theta \sin \frac{\pi\Delta nd}{\lambda} & \cos \frac{\pi\Delta nd}{\lambda} + i \cos 2\theta \sin \frac{\pi\Delta nd}{\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

のように表される。

ここで、入射される光が純粋な S 偏光のみである $\mathbf{V} = (S_{in}, 0)^T$ のような状況を考える。この入射光が複屈折物質を往復した際の偏光状態は、式 (4.7) との内積を計算して、

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} S_{out} \\ P_{out} \end{pmatrix} = S_{in} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi\Delta n d}{\lambda}} \cos^2 \theta + e^{-i\frac{\pi\Delta n d}{\lambda}} \sin^2 \theta \\ -i \sin \frac{\pi\Delta n d}{\lambda} \sin 2\theta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

となる。これは、入射される光が純粋な S 偏光であっても複屈折性により偏光が回転され P 偏光成分が発生することを表している。

4.1.3 Jones 行列の一意性と内部の複屈折非一様性

前節の計算では光路上では一様な複屈折 ($\Delta n, \theta$) をもつという仮定で計算を進めた。しかし、非一様な複屈折の議論の際には光路上での複屈折が一様ではない、すなわち光が物質を進むにつれて複屈折が変化することも考慮するべきである。このとき、図 4.4 のように、複数の板を透過するモデルを考える。このとき、偏光の計算はそれぞれの Jones 行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} S_{out} \\ P_{out} \end{pmatrix} = M(\theta_1, \Delta n_1, d_1) M(\theta_2, \Delta n_2, d_2) \cdots M(\theta_m, \Delta n_m, d_m) \begin{pmatrix} S_{in} \\ P_{in} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

どのように計算する必要がある。しかし、Jones 行列はそれぞれ正則で行列式が 1 であるため、入射光と出射光の偏光状態さえ定まれば以下の式を満たすパラメータ $\theta, \Delta n$ が必ず存在する。したがって、単一の Jones 行列 $M(\theta, \Delta n, d)$ を用いて計算を進めても問題はない。

$$M(\theta, \Delta n, d) = M(\theta_1, \Delta n_1, d_1) M(\theta_2, \Delta n_2, d_2) \cdots M(\theta_m, \Delta n_m, d_m) \quad (4.10)$$

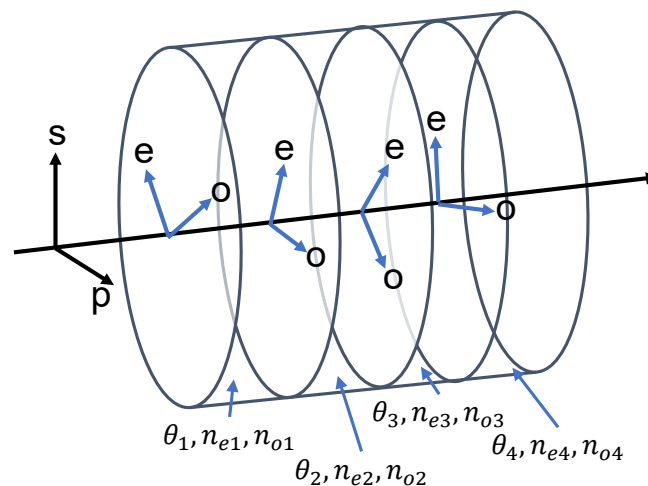


図 4.4: 異なる複屈折性を持つ複数の板を通過する光 [5]

4.2 KAGRA における複屈折問題

共振器から出てきた光は逆行波の防止のため Faraday isolator を通り、一部の偏光以外は遮断される。KAGRA では S 偏光のみをあつかうことになっており P 偏光は損失となる。実際にフロントミラーを通過した光には予定されていた誤差よりも多くの P 偏光が確認され、これは共振器に用いられているサファイア鏡の複屈折性によるものだと考えられる。

また、複屈折分布が非一様であることからビームが鏡に当たる位置の変化に従って混入する P 偏光の割合は変化する。この変化は共振器に入射する光の強度を変化させる。つまりこれは、3.5 節以降で示したような線形なエラー信号に対してレーザー光の位置の依存性を与え、制御の精度を低下させる。これが KAGRA の感度を制限する可能性が指摘されている。

図 4.5 は KAGRA で用いられているサファイア鏡の複屈折マップである。左の Mirror map: theta は式 (4.8) における θ であり、右の Mirror map: alpha は α_- を次のようにおいたものである。

$$\alpha_- = -\frac{\pi \Delta n d}{\lambda} \quad (4.11)$$

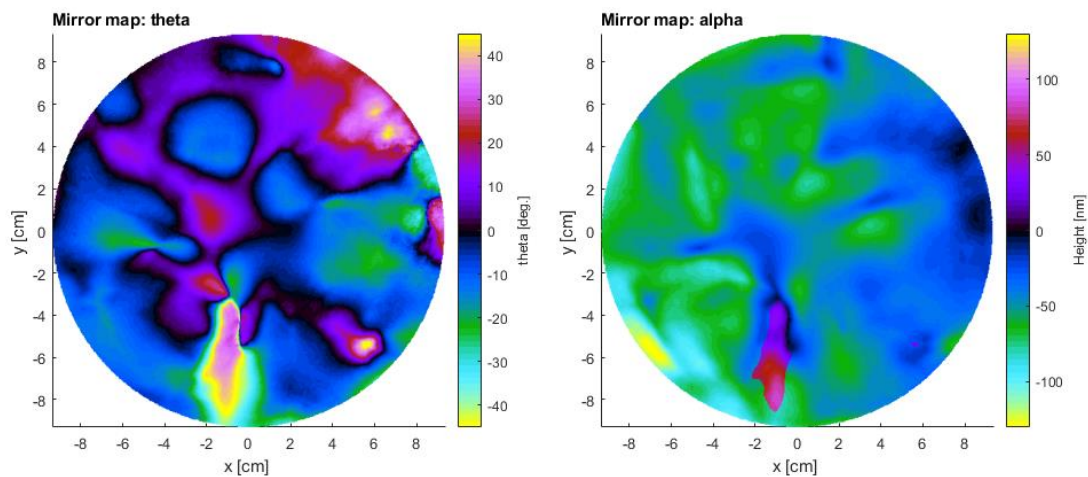


図 4.5: サファイア鏡 (ITMX) の複屈折マップ [6]

第5章

ニューラルネットワーク

ニューラルネットワークとは人間の脳の仕組みを模倣した機械学習モデルである。この章では主に本研究で用いた手法について述べる。

5.1 教師あり学習

機械学習は教師あり学習、教師なし学習、強化学習の3つに分類できる。教師あり学習は、正解のラベルを含むデータをモデルに学習させ、学習させたモデルを用いて未知のデータにおける正解の値を予測する手法である。このとき正解の値は目的変数と呼ばれ、目的変数を予測するために使用する変数のことを説明変数と呼ぶ。

教師あり学習は大きく回帰問題と分類問題の2種類に分けられる。回帰問題では目的変数が連続的な値であり、それを予測する問題のことを指す。分類問題は目的変数があらかじめ決められたラベルに対応した離散的な値であり、各データがどのラベルに近いかを予測し分類する問題のことを指す。本研究で用いたニューラルネットワークも教師あり学習に分類される。

5.1.1 ノード

ノードはニューラルネットワークの最小単位であり、図 5.1 のように表される。ニューラルネットワークが人間の脳の仕組みを模倣したモデルであることから人工ニューロンとも呼ばれる。ノードの内部での計算は以下の式で表される。

$$y = \varphi \left(\sum_i w_i x_i + b \right) \quad (5.1)$$

ここで w_i は重み、 b はバイアスであり、これは学習の中で更新されるパラメータである。また、 φ は活性化関数と呼ばれる非線形関数である。この活性化関数によりニューラルネットワークは非線形性を持つ。

5.1.2 活性化関数

活性化関数にはステップ関数、シグモイド関数、ReLU 関数など様々な種類が存在する。ここでは本研究で用いた、SeLU 関数について述べる。SeLU(Scaled Exponential Linear Units)

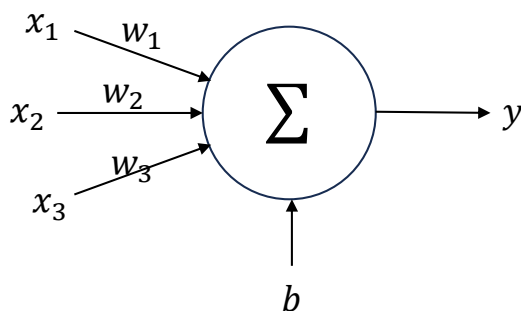


図 5.1: ノード

は ELU(Exponential Linear Units) という元となった関数に λ をかけた関数であり、

$$y = \begin{cases} \lambda x & (x \geq 0) \\ \lambda \alpha (e^x - 1) & (x < 0) \end{cases} \quad (5.2)$$

のように表される。 $x < 0$ の領域において非線形性を持っており、これがニューラルネットワークに非線形性を与える。SeLU はデータを平均 0、標準偏差 1 の近くに保つ特性を持ち安定した学習を可能にさせる。

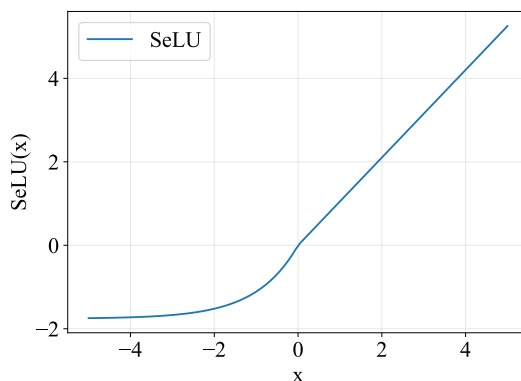


図 5.2: SeLU 関数

5.1.3 ニューラルネットワークの原理

ニューラルネットワークは図 5.3 のように、ノードとそれをつなぐエッジからなる。最初の層は入力層、最後の層は出力層、その間は中間層または隠れ層と呼ばれる。入力ノードがすべての出力ノードと結合されるような層を全結合層と呼ばれる。入力層で与えられた x_i について各ノードで計算を行いながら最終的に出力層で、ある値 \hat{y} が出力される。この値 \hat{y} が正解の値である y に近づくように各パラメータを更新していくというのがニューラルネットワークの原理である。パラメータを更新する過程では同じ訓練データが何度も繰り返し用いられる。訓練データを何回用いたかを表す数をエポック (epoch) と呼ぶ。

機械学習モデルの予測精度を定量的に測る指標として損失関数というものがある。損失関数には様々な種類が存在するが、一般的には回帰問題では平均二乗誤差 (MSE)、分類問題では交差エントロピー誤差がよく用いられる。平均二乗誤差は以下のような式で表される。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (5.3)$$

ただ、訓練データの誤差さえ小さくなればよいモデルであるというわけではない。ニューラルネットワークの学習の際には過学習 (overfitting) と呼ばれる現象がよく起こる。これはモデルが訓練データに対して過度に適合し、未知のデータに対する予測精度が低下してしまう現象のことである。モデルが過学習しているかの指標とするために訓練データとは異なる検証データを用意する。訓練データに基づいて更新したパラメータが、検証データでも同様に有効であるかを確かめるためである。十分に誤差が低下し、学習が終わったモデル評価するために訓練データ、検証データとは別のテストデータを用意し、そのデータを用いて最終的なモデルの評価を行うのが一般的である。

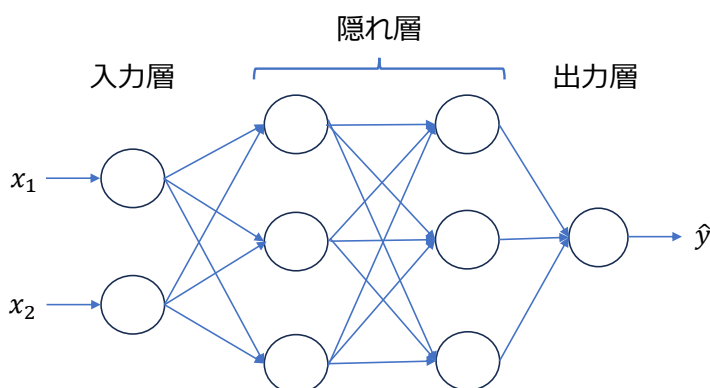


図 5.3: ニューラルネットワークの例

5.2 最適化手法

学習中であるパラメータ (重みとバイアス) における損失関数を求めた後、その値を小さくする方向へパラメータを更新する。パラメータを更新する方向を決めるのが最適化アルゴリズムである。以下の式のような勾配法に基づくアルゴリズムが一般的に用いられる。

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1} - \eta \nabla \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}) \quad (5.4)$$

η は学習率と呼ばれるハイパーパラメータ (人間が事前に決める値) である。値が大きほど早く学習するが、最適解を飛び越えてしまう可能性がある。逆に値が小さすぎると、最適解にたどり着かない可能性がある。学習率などのハイパーパラメータは学習の中で試行錯誤しながら最適な値を探す必要がある。

勾配法に基づいた最適化アルゴリズムには、SGD、Momentum、AdaGrad、RMSProp、Adam などがあり、本研究では Momentum と RMSProp の特徴を併せ持つ Adam を採用する。

5.3 Dropout

ニューラルネットワークの過学習を抑制する手段として、Dropout というものがある。これは図 5.4 のようにニューラルネットワーク内のノードをランダムに選び、そのノードに対する重みを 0 にして無効化する手法である。

これは各エポックにおいて、無効化するノードをランダムに選んでいることから、学習ごとに毎回違うモデルを用いているという見方もできる。ニューラルネットワークに Dropout を導入することで特定のノードやエッジに依存しすぎない汎化性能の高いモデルの生成に役立つ。

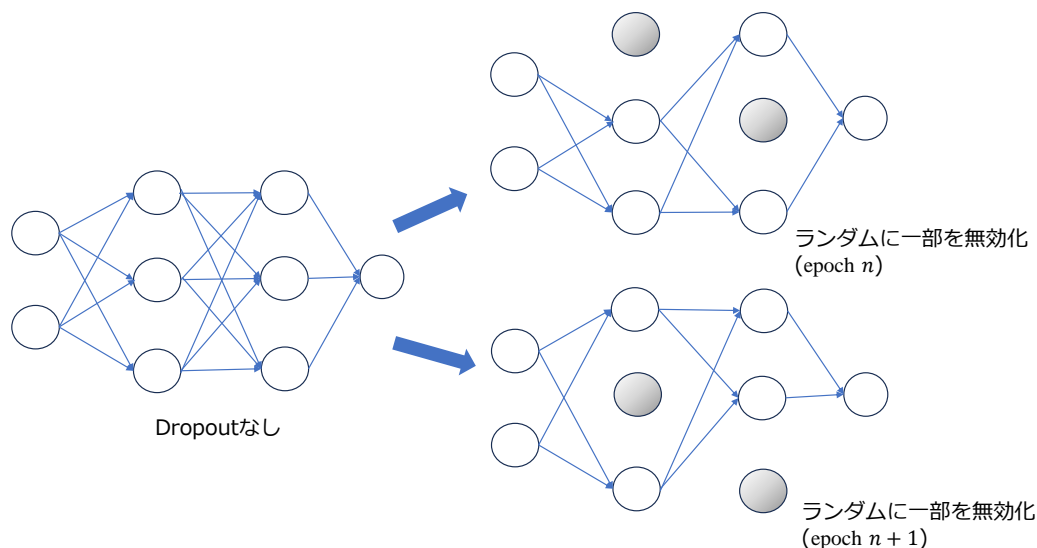


図 5.4: Dropout

5.4 ミニバッチ学習

教師あり学習においては、訓練データを用いて学習を行うのだった。学習とは訓練データに対する損失関数を求め、その値を小さくするようなパラメータを探し出すということ。損失関数の計算の際、訓練データを全て用いて計算することも可能である。これをバッチ学習という。しかし、この方法だとデータ数が多くなるほど膨大な時間を要する。そこで訓練データの一部を無作為に取り出し、そのデータを用いて学習を行う手法がある。これをミニバッチ学習という。ミニバッチ学習は学習時間の圧縮の他に、訓練データをランダムに選ぶことから過学習の抑制という側面も持っている。

5.5 スケーリング

機械学習を用いる際には、データの前処理が重要となる。機械学習には単位の概念がなく、値の大きさのみを判断基準とする。そのため、異なる特徴量の間で基準を統一しなければ、ただ値の大きいデータのみが優先されるといったことが起きてしまう。異なるデータ間で基準を統一させるための作業をスケーリングという。スケーリングの手法として、代表的なものは正規化 (Normalization) と標準化 (Standardization) である。正規化は、

$$x' = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (5.5)$$

のような式でデータを最小値を 0、最大値を 1 として基準を揃える。

一方で標準化は、平均 μ 、標準偏差 σ として、

$$x' = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (5.6)$$

のようにして平均値を 0、標準偏差を 1 に揃える。

第6章

実験

本研究の実験手順は以下のとおりである。

1. KAGRA の共振器を模した光学シミュレーションの設計
2. 非一様な複屈折の効果を再現した吸収率マップの作成
3. 光学シミュレーションによるデータセットの作成
4. データセットを用いて鏡の角度を予測するニューラルネットワークモデルを作成
5. 得られた結果を従来の手法である線形制御と比較

以下ではそれぞれの手順の詳細について記述する。

6.1 光学シミュレーション

本研究では、光学シミュレーションライブラリ「FINESSE 2」[7]を用いた。シミュレーションのセットアップは、図 6.1 のような Fabry-Perot 共振器とした。各パラメータは KAGRA のものを参考とした [8]。共振器を構成するミラーとしてフロントミラーとエンドミラーがあるが、それぞれに HR 面 (High Reflectivity) と AR 面 (Anti Reflectivity) がある。これをシミュレーション上で再現するために AR 面用のミラーと HR 面用のミラーをおいた。後述する吸収率マップはフロントミラーの AR 面用のミラーに貼り付ける。

共振器のミラー間距離は 3000 m とし、レーザー光のビームウェストは $z_0 = 1500$ m、Rayleigh レンジは $z_R = 774.59$ m とした (波長は $\lambda = 1064$ nm)。このパラメータを用いたときのビームの半径を確認しておく。式 (3.22)(3.29) より、フロントミラーの位置を z_F として、 $w_0 \simeq 1.62$ cm、 $w(z_F) \simeq 3.53$ cm 程度であった。

3.6.3 項で述べた通り、角度の信号を得るには分割 PD が必要であった。したがって、シミュレーション上でも分割 PD を再現した設定を使用した。分割数による比較をするため 4 分割と 16 分割 PD を用意し、それぞれのデータで角度予測を行うものとする。

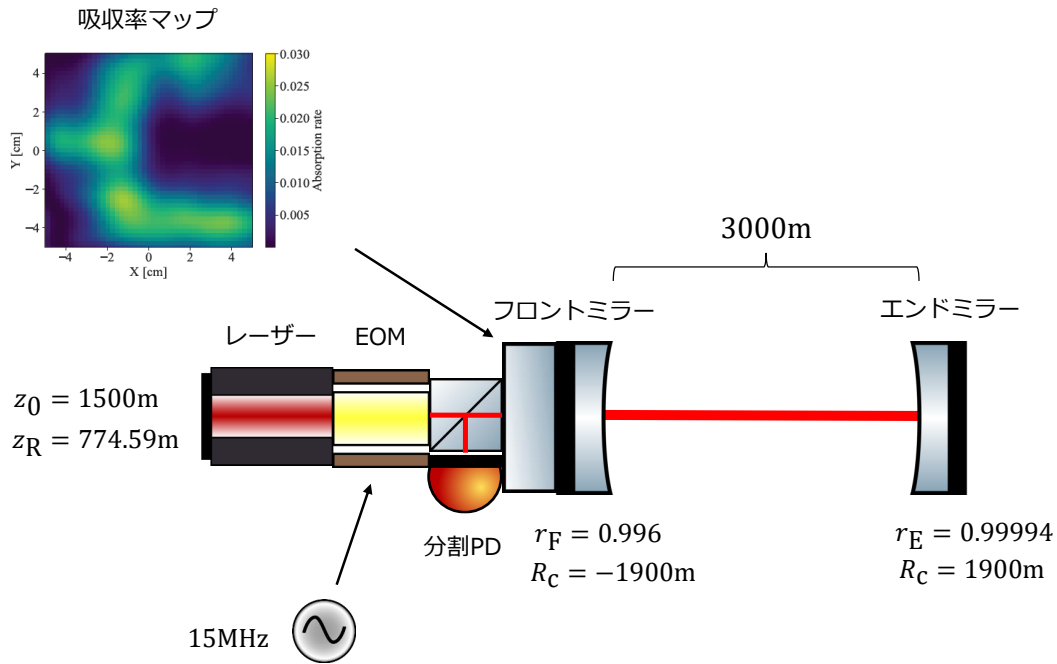


図 6.1: シミュレーション上での Fabry-Perot 共振器

6.2 吸収率マップの生成

非一様な複屈折の効果を再現するために吸収率マップを作成する。吸収率マップは、Python の random モジュールを用いて生成を行った。マップ生成に用いたアルゴリズムはソースコード B.2 に記載した。

前節で求めたようにフロントミラーにおけるビームの半径は約 3.5 cm であった。KAGRA の鏡は直径 22 cm だが、シミュレーションに用いるマップのサイズは一辺 10 cm の正方形程度の大きさがあれば十分である。本研究では図 6.2a、図 6.2b の 2 つのマップを作成した。なお、どちらのマップも 1 マスの長さは等しく 2.2 mm である。

この 2 つのマップの特徴を表 6.1 にまとめる。図 6.2a の吸収率マップは勾配が小さく吸収される光量も少ない。このマップを Gentle Map と呼ぶことにする。一方、図 6.2b の吸収率マップは勾配が大きく吸収される光量も多い。このマップを Steep Map と呼ぶことにする。

なお、光の強度が減少する割合は鏡の傾きが 0 rad において吸収率マップを使用したときと使用していないときに得られるフォトディテクタの信号の比から求めた。

表 6.1: マップの特徴

| 吸収率マップの名称 | 光の強度が減少する割合 | 勾配 |
|------------|-------------|-----|
| Gentle Map | 約 0.96 % | 緩やか |
| Steep Map | 約 1.8 % | 急 |

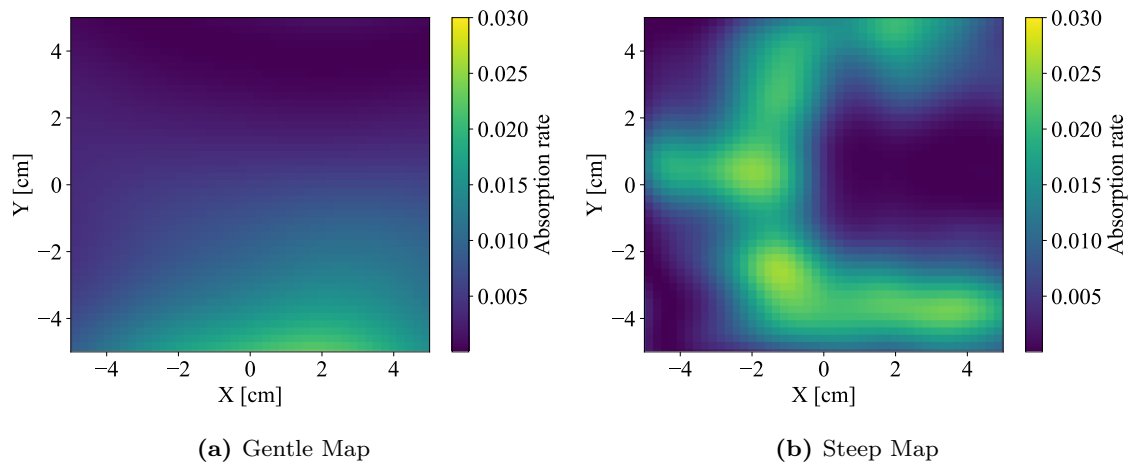


図 6.2: 作成した吸収率マップ

6.3 データセットの生成

6.3.1 レーザー光の揺らぎの再現

目標はレーザー光の中心座標が揺らいでいたとしても、角度を予測できるモデルを作成することである。訓練用のデータと検証、テスト用のデータにこの効果を盛り込むため、データを作成する際にレーザー光の中心座標を複数する。その全てについてシミュレーションを実行し、データセットを作成する。

今回はレーザー光の中心座標が約 1 mm の円の中で変化するような状況を想定した。初期のレーザー光の中心座標を (0, 0) とし、図 6.3 に示すような座標を考える。訓練データには $16 \times 24 = 384$ 個、検証データとテストデータには $16 \times 23 = 368$ 個の座標を設定した。

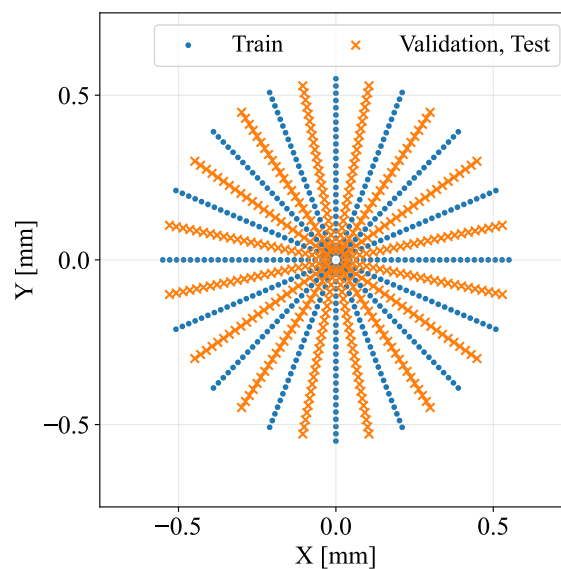


図 6.3: 訓練データの座標と検証データ、テストデータの座標

6.3.2 鏡の角度変化

これらの各座標について、エンドミラーの角度を 0 rad の周りで変化させながら、6.1 節で述べた光学シミュレーションを実行しすることでデータセットの作成を行う。鏡を制御する際の回転方向には図 6.4 のように y 軸周りの回転 (pitch) と z 軸周りの回転 (yaw) の 2 自由度が存在する。ここでは、問題を簡単にするために z 軸周りの回転のみを考え、 y 軸周りの回転は 0 rad に固定した。

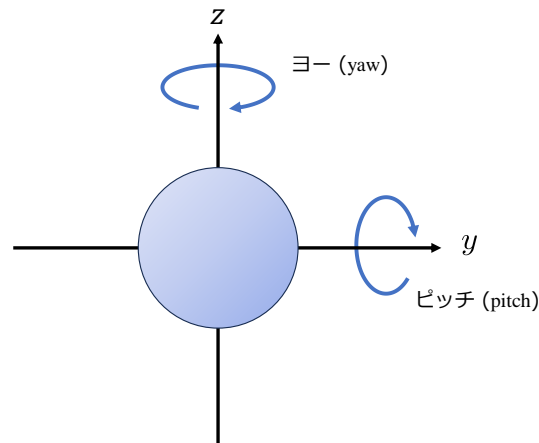


図 6.4: 鏡の回転方向の自由度

エンドミラーの角度変化は以下のように定めた。ここで、 $n > 0$ とする。

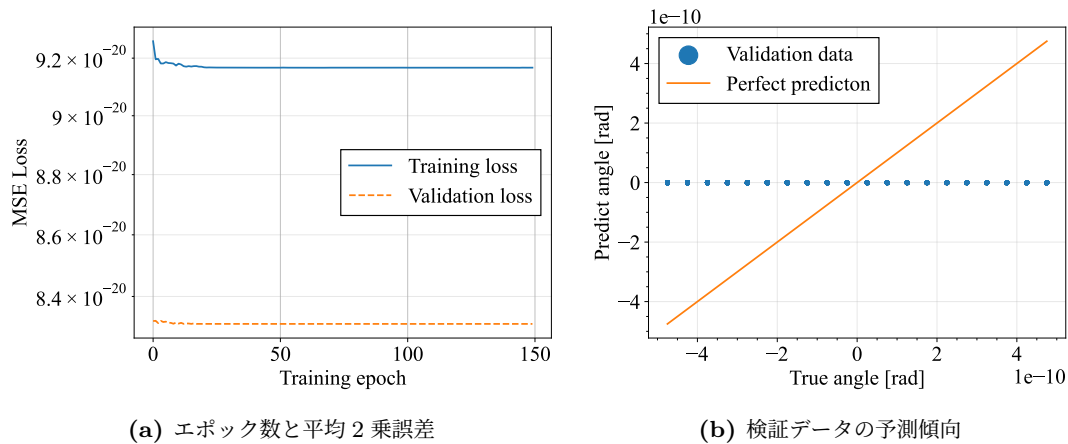
- 訓練データは、 $\pm 5 \times 10^{-n} \text{ rad}$ の間で $5 \times 10^{-(n+1)} \text{ rad}$ の間隔で変化させる。
- 検証データは、 $\pm 4.75 \times 10^{-n} \text{ rad}$ の間で $5 \times 10^{-(n+1)} \text{ rad}$ の間隔で変化させる。
- テストデータは、 0 rad のデータとする。

ある n を設定して作成したデータセットをニューラルネットワークに学習させ、予測が可能ということがわかったら制御の精度を高めるため、変化させる角度を $n' = n + 1$ として 1 桁ずつ小さくしていく。これを繰り返す、角度を小さくしていくと予測が不能になる n' があるので、このときの n を採用する。

それぞれの座標について角度を変化させるため、訓練データには $384 \times 21 = 8064$ 個、検証データには $368 \times 20 = 7360$ 個、テストデータには $368 \times 1 = 384$ 個のデータが存在することになる。また、分割フォトディテクタによる信号を説明変数、エンドミラーの角度を目的変数とする。このとき、4 分割 PD の場合は 4 個の説明変数、16 分割 PD の場合は 16 個の説明変数となり、目的変数はどちらも 1 つの角度である。また、分割 PD の信号に対してスケールングとしてそれぞれ標準化操作を施した。

予測不能な例を図 6.5 に示しておく。これは Gentle map を使用し、角度を $\pm 5 \times 10^{-10} \text{ rad}$ の間で変化させたときの結果である。図 6.5a は学習中の訓練誤差を表しているがエポックが進んでも平均 2 乗誤差 (MSE Loss) がほとんど変化していない。図 6.5b は横軸を正解の傾き、縦軸を検証データから予測した傾きとした散布図である。 $y = x$ の直線上に乗っているのが

完璧に予測できた理想的な状態であるが、この図では検証データの予測値が等しく 0 rad に漸近してる。このような結果が得られた場合は $\pm 5 \times 10^{-10}$ rad では有意な学習ができていないとみなし、角度を $\pm 5 \times 10^{-9}$ rad の間で変化させたときの結果を最終的なモデルとして採用する。



(a) エポック数と平均 2 乗誤差

(b) 検証データの予測傾向

図 6.5: 予測不能な例 (Gentle Map、4 分割 PD、 $n = 10$)

6.4 ニューラルネットワークによる学習

今回使用したニューラルネットワークのモデルを図 6.6 に示す。linear は全結合層である。また、学習の際に使用したアルゴリズムについては表 6.2 にまとめた。学習率は $\eta = 10^{-3}$ としたが Pytorch の ReduceLRonPlateau というスケジューラーを用い、学習の途中で変化させた。エポック数はどのデータでも訓練誤差の変化が微小となる十分に学習できているとみなせる 150 とした。

16 分割 PD を用いた場合、Input は 16 次元であるからパラメータ (重みとバイアス) の総数は次のような計算により、

$$(16 + 1) \times 128 + (128 + 1) \times 64 + (64 + 1) \times 16 + (16 + 1) \times 4 + (4 + 1) = 11545 \quad (6.1)$$

11545 個である。4 分割 PD を用いた場合は、

$$(4 + 1) \times 128 + (128 + 1) \times 64 + (64 + 1) \times 16 + (16 + 1) \times 4 + (4 + 1) = 10009 \quad (6.2)$$

10009 個である。

表 6.2: 学習で使用したアルゴリズム

| | |
|-----------|--------------------|
| 最適化アルゴリズム | Adam |
| 学習方法 | ミニバッチ学習 (バッチサイズ 8) |
| 損失関数 | 平均二乗誤差 (MSE) |

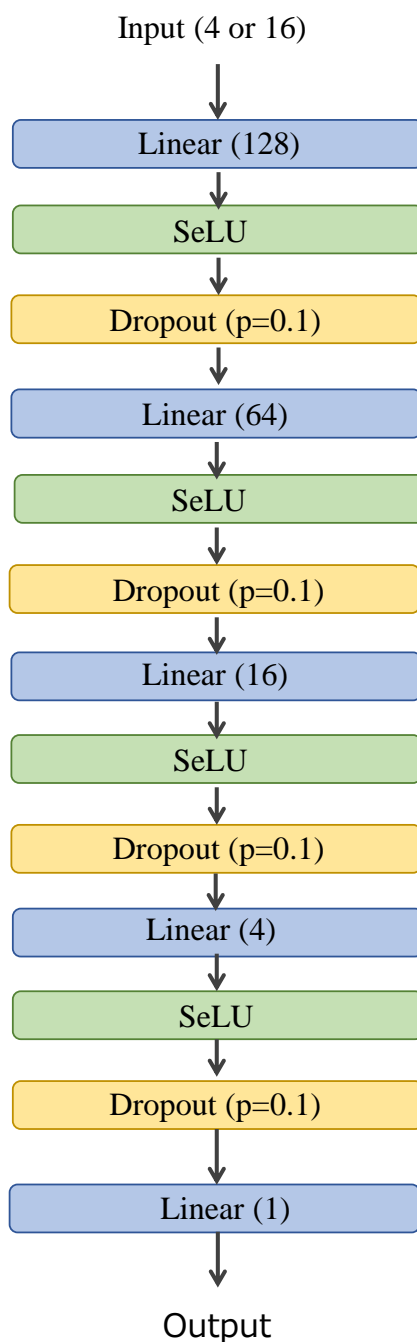


図 6.6: 使用したニューラルネットワークのモデル

6.5 線形制御

当研究室ではニューラルネットワークとは別の手法で角度制御の精度を向上させる研究が行われている [4]。以下ではその手法について述べる。

まず、分割フォトディテクタの出力が図 6.7 のような x_i であるとする。このとき、それぞれの x_i に対してパラメータ a_i をかける。分割フォトディテクタの左の領域を足し合わせたもの

と右の領域で足し合わせたものの差を取る。16分割フォトディテクタのときは次の式のような操作である。

$$y = \sum_{i=0}^7 a_i x_i - \sum_{i=8}^{15} a_i x_i \quad (6.3)$$

通常この値は $a_i = 1$ のときに $y = 0$ となるが、非一様な複屈折の影響下では $y \neq 0$ である。 $y = 0$ に近づけるようにパラメータ a_i を定めることで、できるだけ複屈折の影響によるビーム位置の依存性を小さくするというのが、この手法の考え方である。パラメータ a_i を求める際には、Python のライブラリである `scipy` の `optimize.least_squares` メソッドを用い、最小二乗法による最適化を行った。このときのパラメータの数は分割数そのままであり4分割PDでは4個、16分割PDでは16個である。

鏡の角度と式 (6.3) における y には 0 rad 付近で線形な関係があるとし、これを制御信号として鏡の角度を制御する。最適化によって得られたパラメータを 0 rad のテストデータと 5×10^{-10} rad だけ傾けたデータに対してそれぞれ適用した。この2つから制御信号の傾きを計算し、その傾きを用いて制御信号の x 切片を求めることで最適化後の制御角度を求めることとする。用いたコードはソースコード B.4 である。

| | | | |
|-------|-------|----------|----------|
| x_3 | x_7 | x_{11} | x_{15} |
| x_2 | x_6 | x_{10} | x_{14} |
| x_1 | x_5 | x_9 | x_{13} |
| x_0 | x_4 | x_8 | x_{12} |

(a) 16分割

| | |
|-------|-------|
| x_1 | x_3 |
| x_0 | x_2 |

(b) 4分割

図 6.7: 分割フォトディテクタ

第7章

結果

Gentle Map と Steep Map、それぞれについて4分割 PD と 16分割 PD でニューラルネットワークに学習させたときの結果を示す。また、それぞれについて線形制御との比較を行った。

7.1 Gentle Map

7.1.1 ニューラルネットワークによる学習

図 7.1 は 4 分割 PD のときの結果、図 7.2 は 16 分割 PD のときの結果である。

図 7.1a、図 7.2a はエポック数に対する平均 2 乗誤差の関係を表している。4 分割 PD の方が 16 分割 PD よりも学習の収束に必要なエポック数が少ない事がわかる。一般的に訓練誤差は、検証データによるものよりも学習に用いた訓練データの誤差のほうが小さくなる。しかし、これらの図ではどちらも検証データの誤差のほうが小さい値となっている。これは、Dropout による影響が考えられる。訓練データの誤差の計算に用いたモデルでは Dropout により一部のノードが無効化されている。一方、検証データの誤差の計算には全てのノードを用いたモデルが用いられる。そのパラメータの差が精度の差となり、このデータに現れているのではないかと考えられる。

図 7.1b、図 7.2b は横軸を正解の角度、縦軸を検証データから予測した角度とした散布図である。各データが $y = x$ の直線上に乗っている状態の時、完璧な予測できている。これらを比較すると 4 分割 PD に比べ、16 分割 PD では各角度での予測値の広がり大きい。このことは、16 個の説明変数で学習させたモデルの方がレーザー光の中心座標というノイズに対して弱いという見方ができる。これは、説明変数が増えたことで訓練データの座標について過学習してしまい、テストデータの座標に対応できなかったためではないかと考えられる。

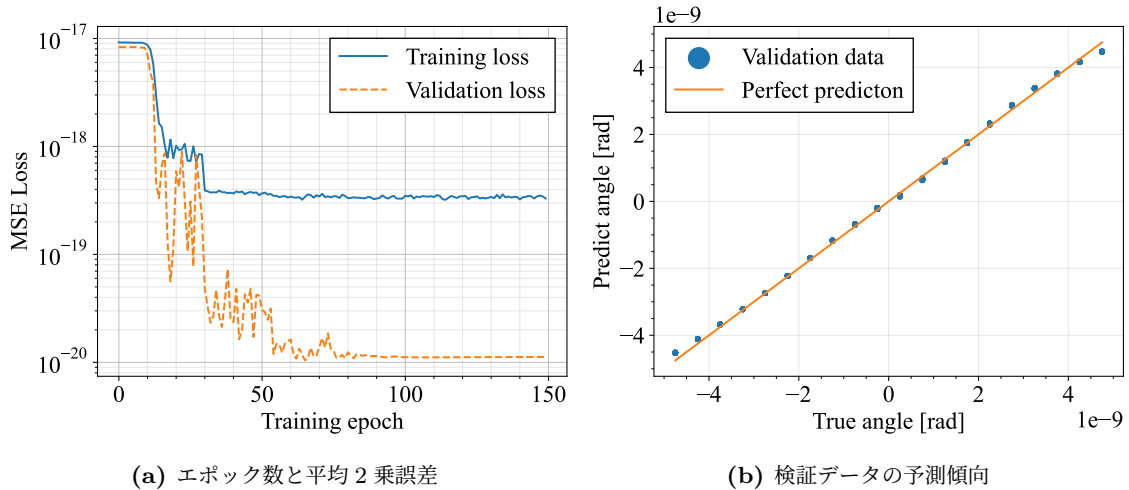


図 7.1: Gentle Map、4 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習

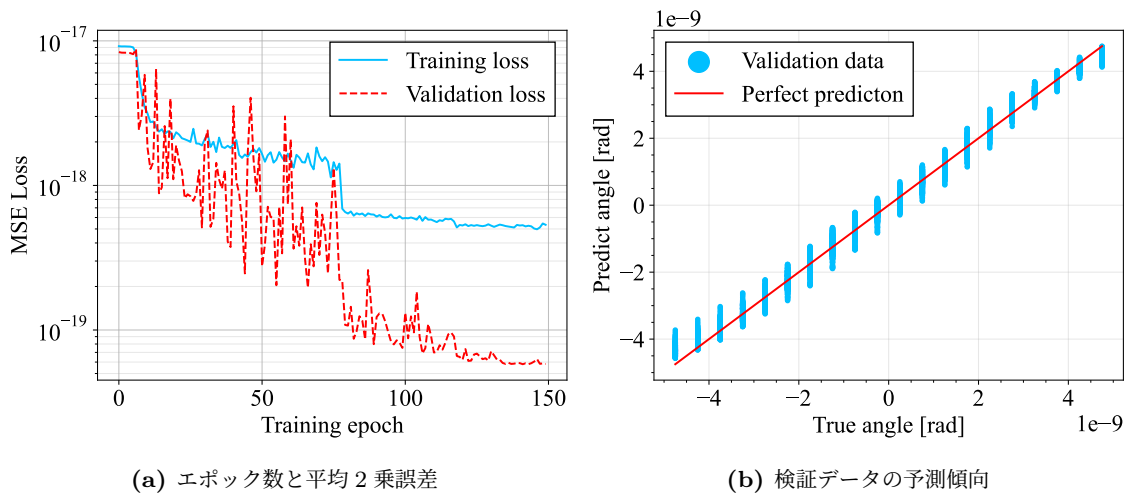


図 7.2: Gentle Map、16 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習

7.1.2 線形制御との比較

次に線形制御との比較を行う。図 7.3、図 7.4 は角度が 0 rad であるテストデータを用いてニューラルネットワークによるモデルから予測した角度と線形制御の手法で予測した角度の比較である。ニューラルネットワークでは $10^{-10} \sim 10^{-11}$ rad、線形制御では $10^{-10} \sim 10^{-13}$ rad 付近であると予測を示している。

4 分割 PD でニューラルネットワークの方が精度が高いのに対し、16 分割 PD では線形制御の方が精度が上回った。また、最終的に一番高い精度が得られたのは 16 分割 PD で線形制御を用いた場合であった。

なお、このとき線形制御の際に用いたパラメータは式 (7.1)、式 (7.2) に示した。これらは図 6.7 のような場合における信号 x_i の係数である。

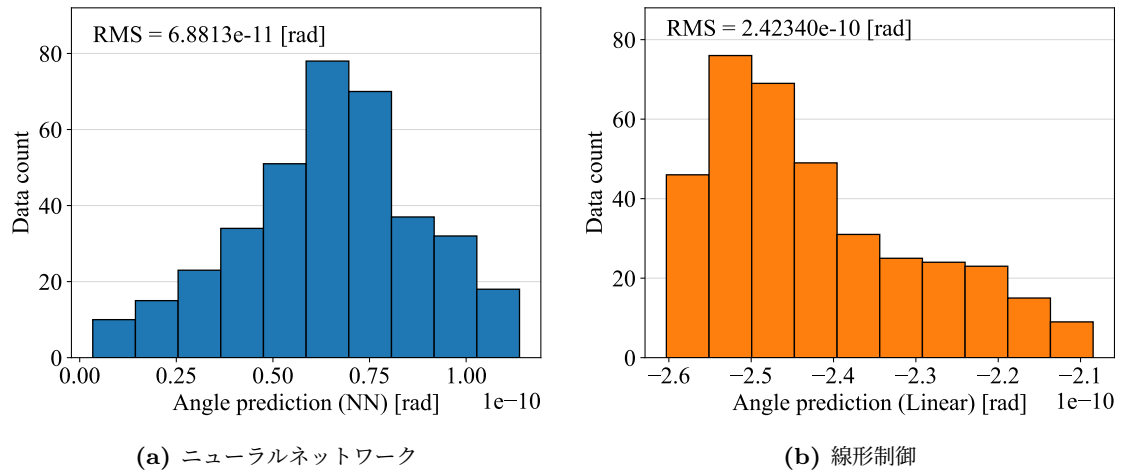


図 7.3: Gentle Map、4 分割 PD、テストデータを用いた予測値の分布

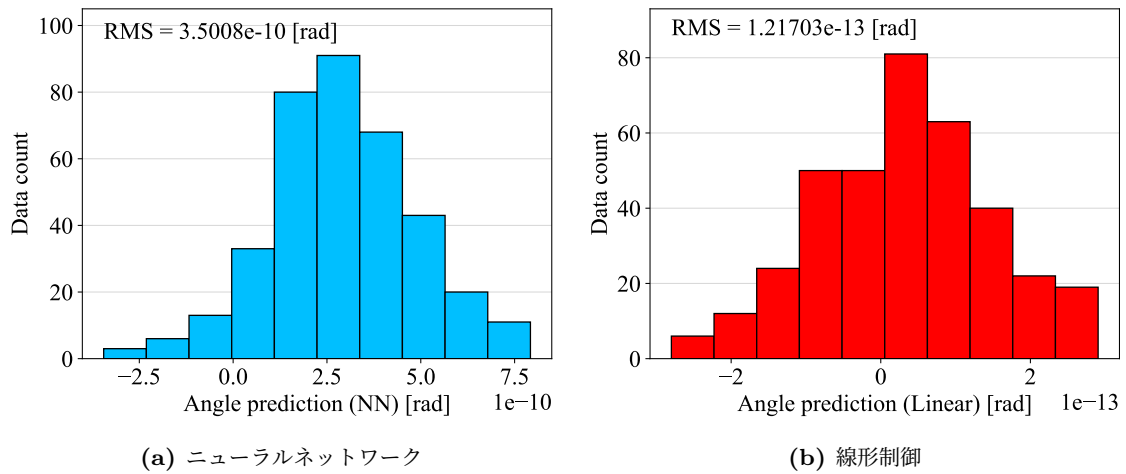


図 7.4: Gentle Map、16 分割 PD、テストデータを用いた予測値の分布

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 138.02022209 & -126.70252849 \\ -126.72855393 & 137.99419561 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.84177994 & 5.85307583 & 5.84657697 & 5.84968462 \\ 5.83640445 & 5.83867748 & 5.83844954 & 5.8435412 \\ 5.84354991 & 5.8475524 & 5.84695066 & 5.84644732 \\ 5.8365232 & 5.83895599 & 5.83479339 & 5.84801411 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

図 7.5: Gentle Map の線形制御で用いたパラメータ

7.2 Steep Map

7.2.1 ニューラルネットワークによる学習

次に、Steep Map でニューラルネットワークに学習させたときの結果を図 7.6、図 7.7 に示す。図 7.6b、図 7.7b によると、0rad 付近で実際の値と予測値の誤差が大きくなるという傾向が見られる。また、Gentle Map では 16 分割 PD の方が各角度での予測値の広がりが大きかったのに対し、Steep Map では 4 分割 PD の方が広がり大きいようである。Gentle Map に比べ、Steep Map では勾配が急になったことで問題がより複雑になり、説明変数の数が増えたことによるモデルの表現力の向上が過学習による精度の低下を上回ったのではないかと考えられる。

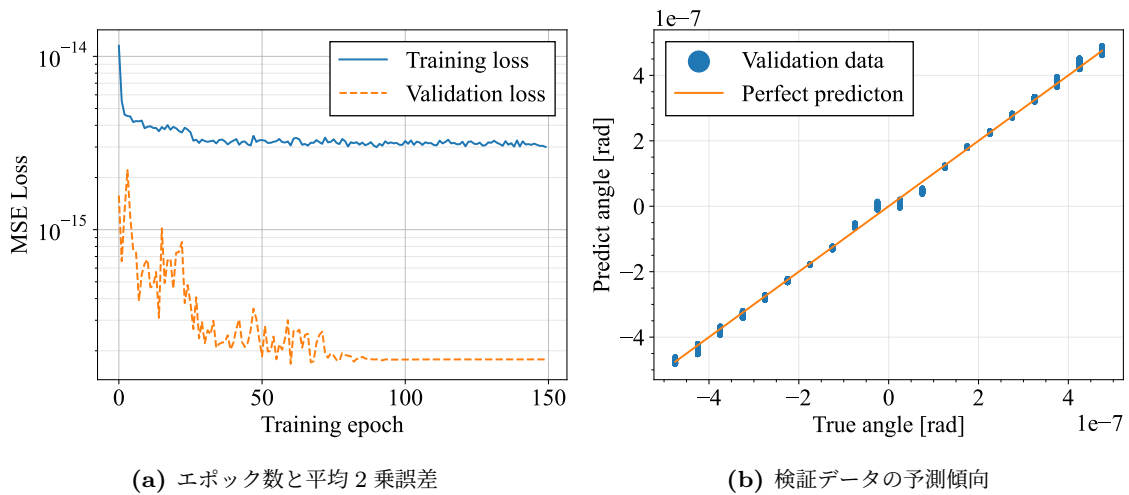


図 7.6: Steep Map、4 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習

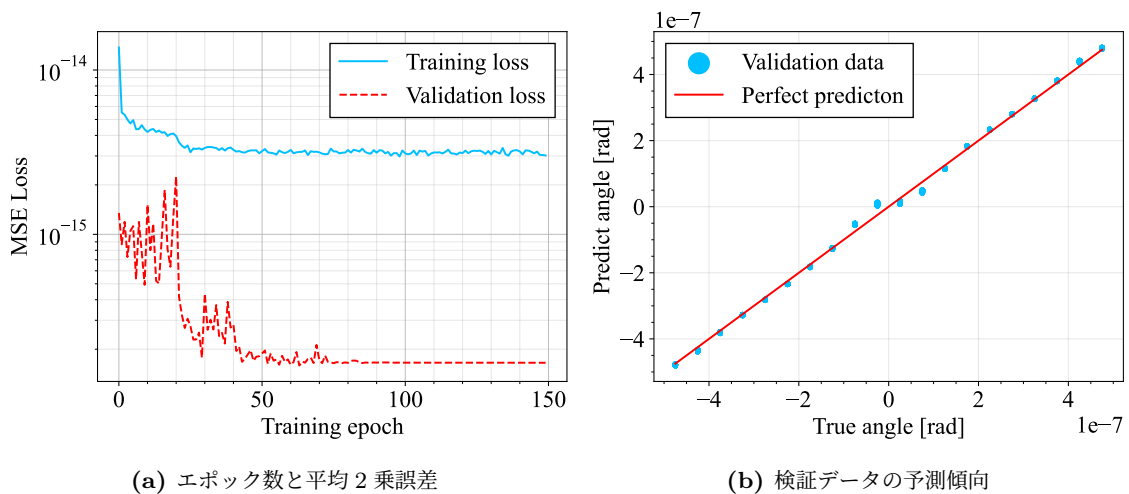


図 7.7: Steep Map、16 分割 PD、ニューラルネットワークによる学習

7.2.2 線形制御との比較

Gentle Map のときと同様に、線形制御との比較を図 7.8、図 7.9 に示した。Steep Map では、いずれにおいても線形制御の精度を超えることはできなかった。この結果には次のような原因が考えられる。線形制御では角度変化を行わず 0 rad にのみ近づくようなパラメータを求めたのに対して、ニューラルネットワークでは変化させた各角度での誤差が最小となるパラメータを求めた。そのため、0 rad でのデータを用いたときの予測精度の比較では線形制御の方が有利な比較となっているのではないだろうか。

また、このマップにおいては、ニューラルネットワークでも 4 分割 PD より 16 分割 PD の精度が上回り、線形制御では 2 桁ほど精度が向上している。これは、Steep Map のように勾配が急になるような吸収率マップほど 4 分割から 16 分割に変数を増やしたときの表現力の向上の影響を大きく受けるのではないかと考えられる。

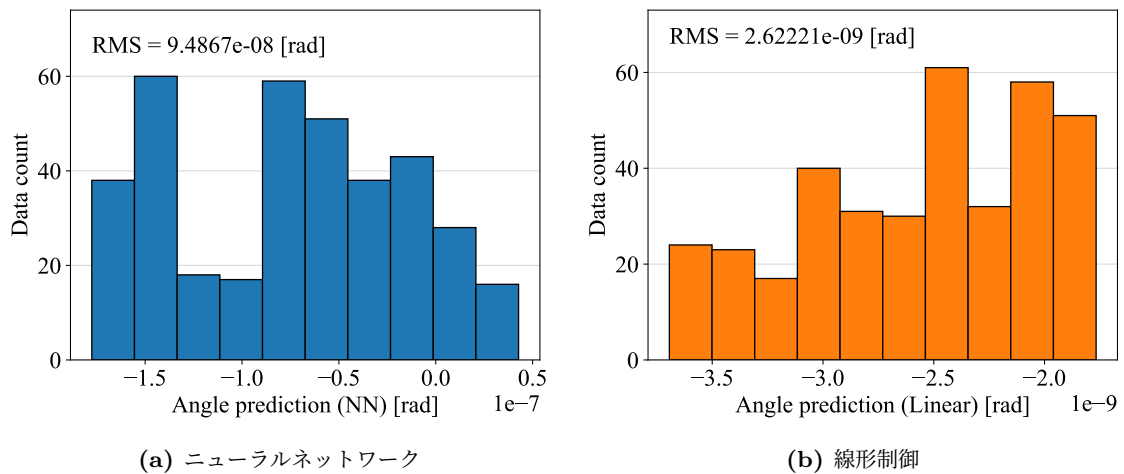


図 7.8: Steep Map、4 分割 PD、テストデータを用いた予測値の分布

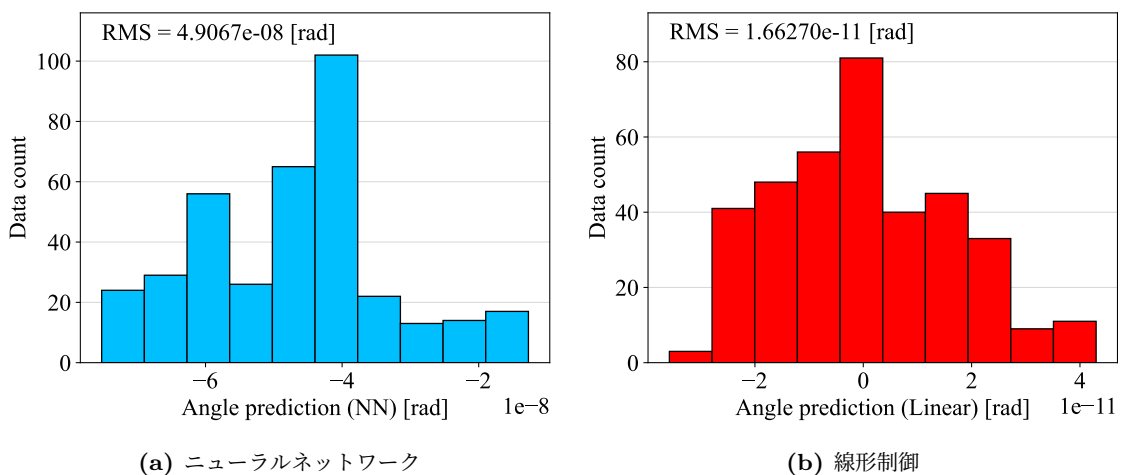


図 7.9: Steep Map、16 分割 PD、テストデータを用いた予測値の分布

なお、このとき線形制御の際に用いたパラメータは以下の式 (7.3)(7.4) に示した。

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23.30248021 & 5.78230157 \\ 5.78414641 & -23.30056762 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3267.86407932 & 1154.14083215 & -82.38130606 & 1554.87166618 \\ 2000.46388492 & -599.1967146 & 379.76893413 & -1845.9201791 \\ -1844.72349331 & 378.92993406 & -600.03093609 & 2001.64844871 \\ 1553.22709211 & -81.19556494 & 1155.33307716 & -3269.56215323 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

図 7.10: Steep Map の線形制御で用いたパラメータ

7.3 結果のまとめ

最後に、本研究で示した結果を表 7.1、表 7.2 にまとめる。精度は 0 rad のテストデータを用いたときに得られた角度の予測値の二乗平均平方根とする。本研究で得られた結果は以下の 3 点である。

- いずれのマップでも最大の精度得られるのは 16 分割 PD を用いた線形制御であった。
- ニューラルネットワークは 4 分割 PD と 16 分割 PD であまり精度の差は見られなかったが、線形制御では分割数を増やすことで大きく向上した。
- 全体の傾向として Gentle Map よりも Steep Map の方が制御の精度が悪く、非一様な複屈折の効果が大きい程、制御の精度が悪くなることを示した。

表 7.1: Gentle Map における各モデルの精度 [rad]

| | ニューラルネットワーク | 線形制御 |
|----------|------------------------|------------------------|
| 4 分割 PD | 6.88×10^{-11} | 2.43×10^{-10} |
| 16 分割 PD | 3.50×10^{-10} | 1.28×10^{-13} |

表 7.2: Steep Map における各モデルの精度 [rad]

| | ニューラルネットワーク | 線形制御 |
|----------|-----------------------|------------------------|
| 4 分割 PD | 9.49×10^{-8} | 2.62×10^{-9} |
| 16 分割 PD | 4.91×10^{-8} | 1.66×10^{-11} |

手法によって分割数の影響が異なる原因としては以下が考えられる。ニューラルネットワークのパラメータ数は、4 分割とき 10009 個、16 分割 PD のときは 11545 個と 4 分割の場合で

も十分な大きな数存在する。一方、線形制御では分割数を増やすことでパラメータの数が4から16へ増えるため、表現幅が広がり制御が大きく向上するのではないかと考える。

また、今回の実験では復調をしていないフォトディテクタの信号を用いた。実際に角度制御を行う際には復調によって得られる線形な制御信号が必要である。特に、本研究では線形制御において、鏡の傾きとフォトディテクタ信号の左右の差には0rad付近で線形な関係があるとして角度を求めている。実際に復調を行い線形な制御信号を得たうえで最適化を行うことで、より妥当な比較値が得られると考える。

第 8 章

結論

本論文では吸収率マップマップの影響下でもフォトディテクタの情報から角度を予測できるニューラルネットワークのモデルを作成した。データの処理方法や共振器のセットアップを見直すことで先行研究 [3] では成功しなかった回帰モデルの作成に成功した。また、当研究室で並行して研究が進められている線形制御との比較を行ったが、0 rad 周りの制御では従来の線形制御の精度のほうが上回っていた。更に妥当な比較を行うためには復調した信号を用いることが必要であると考えた。

また、異なる 2 つの吸収率マップを試すことで、非一様な複屈折の分布や勾配によって角度制御に与える影響の大きさが異なることを示した。4 分割フォトディテクタと 16 分割フォトディテクタで制御した結果についても比較を行い、ニューラルネットワークでは分割数による違いは僅かであったが、線形制御を用いる場合には分割数を増やすことでより高い精度が得られることを示した。

本研究の最終的な目標は現存するサファイア鏡の非一様な複屈折の影響下において、機械学習を用いることで感度を制限しない程度の精度まで鏡の角度を制御することである。したがって、実際のサファイア鏡の複屈折マップ (図 4.5) を光学シミュレーションに導入し同様の実験を行い、その精度を検討することを今後の課題とする。

また、今回は鏡の傾きを 1 つのパラメータで表したが、実際に回転方向には 2 つの自由度が存在する。角度のパラメータを増やすことで制御にどのような影響が現れるかの検証も行う必要があるだろう。

付録 A

開発環境

本研究の開発環境を以下に記す。

A.1 ハードウェア

- CPU: AMD Ryzen 5 3600 6-Core Processor 3.59Hz
- GPU: GeForce RTX 2060
- Memory: 32GB

A.2 ソフトウェア

- OS: Ubuntu 22.04.3 LTS
- Python: 3.9.18
- Finesse: 2.3.1
- Pykat: 1.2.94
- CUDA: 11.5
- Numpy: 1.26.0
- pandas: 2.1.1
- Pytorch: 2.1.0
- SciPy: 1.11.2

付録 B

ソースコード

主要なコードを以下に記す。

ソースコード B.1: 光学系のセットアップ

```

1 # ===== Constants =====
2 const fsb1 15M
3 const mfsb1 -15M
4
5 # ===== Input optics =====
6 l i1 1 0 n0
7 s s_eo0 0 n0 n1
8 mod eom1 $fsb1 0.15 2 pm 0 n1 n2
9
10 s s_eo1 0 n2 n3
11 bs pickoff 0.001 0.999 0 45 n3 dump n4 n5
12 s s0 0 n4 nlar #add
13
14 m ARx 0 1 0 nlar nlar2 #add
15 s s_eo2 0 nlar2 n6
16
17 m ITM 0.996 4e-4 90 n6 n7
18 s cl 3000 n7 n8
19 m ETM 0.99994 6e-5 90 n8 n9
20
21 s gouy_phase_tuner 0 n5 REFL
22
23 attr ITM Rc -1900
24 attr ETM Rc 1900
25
26 cav cav1 ITM n7 ETM n8
27
28 maxtem 5
29 gauss* input i1 n0 -1500 774.5966692414834
30 yaxis abs:deg
31
32 map ARx MIRROR_MAP
33 conf ARx interpolation_method 2
34 conf ARx integration_method 1
35
36 # ===== Output optics =====
37 attr ETM xbeta TILT
38 attr gouy_phase_tuner g 90 #optimized
39
40 beam ccd REFL
41 xaxis ccd x lin -2 2 3
42 x2axis ccd y lin -2 2 3

```

ソースコード B.2: ランダムに吸収率を決定するコード

```

1 def get_absorption_rate(x, y, seed):
2     random.seed(seed)
3     result = 0
4     for nx in range(1, 11):
5         for ny in range(1, 11):

```

```

6         r1, r2, r3 = random.random(), random.random(), random.random()
7         result += r1 * np.cos(nx*np.pi*x + r2*np.pi) * np.cos(ny*np.pi*y + r3*np.pi
            ) / (nx*nx*ny*ny)
8     return result

```

ソースコード B.3: レーザーの中心座標を生成するコード

```

1  import numpy as np
2  import csv
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  r_step = 1e-2
6  r_max = 2.5e-1 # l = 2.2mm
7  r_min = r_step
8
9  theta_divisions = 16
10 theta_max = 2 * np.pi
11 theta_min = 0
12
13 r_values = np.arange(r_min, r_max, r_step)
14 theta_values = np.linspace(theta_min, theta_max, theta_divisions, endpoint= False)
15 polar_grid = np.array([(r, theta) for r in r_values for theta in theta_values])
16 cartesian_coordinates = np.column_stack((polar_grid[:, 0] * np.cos(polar_grid[:, 1]),
            polar_grid[:, 0] * np.sin(polar_grid[:, 1])))
17
18 csv_data = np.zeros((polar_grid.shape[0], 4))
19 csv_data[:, 0:2] = polar_grid
20 csv_data[:, 2:4] = cartesian_coordinates
21
22 with open(csv_file_train, mode='w', newline='', encoding='utf-8') as file:
23     writer = csv.writer(file)
24     writer.writerows(csv_data)
25
26 offset_r = r_step / 2
27 r_max_v = round(r_max + offset_r - r_step, 3)
28 r_min_v = round(r_step + offset_r, 3)
29
30 offset_theta = 2 * np.pi / 2 / theta_divisions
31 theta_max_v = 2 * np.pi + offset_theta
32 theta_min_v = offset_theta
33
34 r_values_v = np.arange(r_min_v, r_max_v, r_step)
35 theta_values_v = np.linspace(theta_min_v, theta_max_v, theta_divisions, endpoint= False
            )
36 polar_grid_v = np.array([(r, theta) for r in r_values_v for theta in theta_values_v])
37 cartesian_coordinates_v = np.column_stack((polar_grid_v[:, 0] * np.cos(polar_grid_v[:,
            1]), polar_grid_v[:, 0] * np.sin(polar_grid_v[:, 1])))
38
39 csv_data_v = np.zeros((polar_grid_v.shape[0], 4))
40 csv_data_v[:, 0:2] = polar_grid_v
41 csv_data_v[:, 2:4] = cartesian_coordinates_v
42
43 with open(csv_file_v, mode='w', newline='', encoding='utf-8') as file:
44     writer = csv.writer(file)
45     writer.writerows(csv_data_v)

```

ソースコード B.4: 線形制御により角度を推定するコード

```

1  import sys
2  import os.path
3
4  import numpy as np
5  import pandas as pd
6  from scipy import optimize
7  import matplotlib.pyplot as plt
8  from matplotlib.ticker import ScalarFormatter
9
10 slope = 0.0005
11 PD_size = 2
12 PD_size = int((PD_size**2)/2)
13
14 def fit_func(params, x_arr):
15     return -np.dot(params[:PD_size], x_arr[:PD_size]) + np.dot(params[PD_size:], x_arr[
            PD_size:])

```

```

16
17 def calc_mean_left_sum(params, x_arr):
18     return np.mean(np.dot(params[:PD_size], x_arr[:PD_size]))
19
20 def calc_mean_right_sum(params, x_arr):
21     return np.mean(np.dot(params[PD_size:], x_arr[PD_size:]))
22
23 def calc_slope(params, x_arr_1, x_arr_2):
24     return (fit_func(params, x_arr_2) - fit_func(params, x_arr_1)) / slope
25
26 if __name__ == '__main__':
27     df = pd.read_csv(sys.argv[1])
28     df = df * (10 ** 8)
29     ini_params = np.ones(PD_size * 2)
30     result = optimize.least_squares(fit_func, ini_params, bounds=(-1000, 1000), args=(
31         df.T,))
32     optimized_params = result.x
33
34     if len(sys.argv) == 4:
35         df_test = pd.read_csv(sys.argv[2])
36         df_005 = pd.read_csv(sys.argv[3])
37         file_path = os.path.splitext(sys.argv[1])[0]
38         optimized_const = np.sqrt(np.mean(np.square(fit_func(ini_params, df_005.T) /
39             fit_func(optimized_params, df_005.T))))
40         optimized_params_1 = optimized_params * optimized_const
41
42         print('\noptimized parameters:\n', optimized_params_1)
43         print(f'average slope: {np.mean(calc_slope(optimized_params_1, df_test.T,
44             df_005.T)):.3e}')
45         print(f'average offset angle: {np.sqrt(np.mean(np.square(fit_func(
46             optimized_params_1, df_test.T) / (calc_slope(optimized_params_1, df_test.T,
47             df_005.T))))):.3e}') #[urad]
48
49         print(f'average slope: {np.mean(calc_slope(ini_params, df_test.T, df_005.T))
50             :.3e}')
51         print(f'average offset angle: {np.sqrt(np.mean(np.square(fit_func(ini_params,
52             df_test.T) / (calc_slope(ini_params, df_test.T, df_005.T))))):.3e}') #[
53             urad]

```

ソースコード B.5: 光学シミュレーションを実行するコード

```

1 import argparse
2 import itertools
3 from multiprocessing import Pool
4 import os
5
6 import pandas as pd
7 import numpy as np
8 from pykat import finesse
9 from tqdm import tqdm
10
11
12 def get_arguments():
13     parser = argparse.ArgumentParser()
14     parser.add_argument('-k', '--kat_file', type=str, required=True, help='base kat
15         file')
16     parser.add_argument('-m', '--map_file', type=str, help='mirror map text filename')
17     parser.add_argument('-t', '--max_tilt', type=float, default=5e-7, help='maximum
18         tilt')
19     parser.add_argument('-s', '--step', type=float, default=1e-8, help='step size of
20         tilt')
21     parser.add_argument('-c', '--mis_center', action='store_true', help='mis centering
22         (default: False)')
23     parser.add_argument('-o', '--out_file', type=str, required=True, help='output file'
24         )
25     args = parser.parse_args()
26     valid_args(args)
27     return args
28
29 def valid_args(args):
30     if args.mis_center and not args.map_file:
31         raise ValueError('Please set --map_file if you want to use --mis_center')
32
33 def get_original_center(map_file):
34     lines = open(map_file, 'r').readlines()
35     for line in lines:

```

```

31     if line.startswith('% Optical center (x,y):'):
32         xc, yc = tuple(map(float, line.split(':')[1].strip().split()))
33         return xc, yc
34
35 def change_optical_center(map_file, map_tmpfile, new_xc, new_yc):
36     lines = open(map_file, 'r').readlines()
37     with open(map_tmpfile, 'w') as file:
38         for line in lines:
39             if line.startswith('% Optical center (x,y):'):
40                 file.write(f'% Optical center (x,y): {new_xc} {new_yc}\n')
41             else:
42                 file.write(line)
43
44 def run_finesse(base):
45     kat = finesse.kat()
46     kat.verbose = False
47     kat.parse(base)
48     out = kat.run()
49     return out
50
51 def simulate(args):
52     tilt, xc, yc, base = args
53     base_tilted = base.replace('TILT', str(tilt))
54     out = run_finesse(base_tilted)
55     return [out.z.flatten().tolist() + [tilt, xc, yc]]
56
57 def simulate_miscenter(args):
58     map_file, tilt, xc, yc, base, r, theta = args
59     tmp_map_file = f'./tmp/{map_file[:-4]}_{tilt}_{xc}_{yc}.txt'
60     change_optical_center(map_file, tmp_map_file, xc, yc)
61     base_tilted = base.replace('TILT', str(tilt)).replace('MIRROR_MAP', tmp_map_file)
62     out = run_finesse(base_tilted)
63     os.remove(tmp_map_file)
64     return [out.z.flatten().tolist() + [tilt, xc, yc] + [r, theta] ]
65
66 if __name__ == '__main__':
67     data = pd.read_csv(f'csv/train_start0.01_stop0.25_step0.01_div16.csv', header=None)
68     .values
69
70     args = get_arguments()
71     num_step = int(2 * args.max_tilt / args.step) + 1
72     xc, yc = get_original_center(args.map_file) if args.map_file else (-1, -1)
73
74     if args.map_file:
75         base = open(args.kat_file, 'r').read()
76         # one map
77         if not args.mis_center:
78             base = base.replace('MIRROR_MAP', args.map_file)
79         # no map
80     else:
81         base = ''
82         with open(args.kat_file, 'r') as f:
83             for line in f:
84                 if not line.startswith('map ITM') and not line.startswith('conf ITM'):
85                     base += line
86
87     pool = Pool()
88     results = []
89     if args.mis_center:
90         args_list = [(args.map_file, -args.max_tilt+i*args.step, xc+data[j, 2], yc+data
91             [j, 3], base, data[j, 0], data[j, 1]) \
92             for i in range(num_step) for j in range(data.shape[0])]
93         with tqdm(total=len(args_list)) as t:
94             for result in pool.imap_unordered(simulate_miscenter, args_list):
95                 results.append(result)
96                 t.update(1)
97     else:
98         args_list = [(-args.max_tilt+i*args.step, xc, yc, base) for i in range(num_step
99             )]
100         with tqdm(total=len(args_list)) as t:
101             for result in pool.imap_unordered(simulate, args_list):
102                 results.append(result)
103                 t.update(1)
104
105 out_arr = np.squeeze(results)

```

ソースコード B.6: 使用したニューラルネットワーク

```
1 class NeuralNetwork(nn.Module):
2     def __init__(self):
3         super(NeuralNetwork, self).__init__()
4         self.flatten = nn.Flatten()
5         self.linear_relu_stack = nn.Sequential(
6             nn.Linear(pixel, 128),
7             nn.SELU(),
8             nn.Dropout(p=0.1, inplace=False),
9             nn.Linear(128, 64),
10            nn.SELU(),
11            nn.Dropout(p=0.1, inplace=False),
12            nn.Linear(64, 16),
13            nn.SELU(),
14            nn.Dropout(p=0.1, inplace=False),
15            nn.Linear(16, 4),
16            nn.SELU(),
17            nn.Dropout(p=0.1, inplace=False),
18            nn.Linear(4, 1),
19        )
20
21     def train_model(net, dataloaders_dict, criterion, optimizer, num_epochs):
22         net.to(device)
23         torch.backends.cudnn.benchmark = True
24         for epoch in range(num_epochs):
25             print('Epoch {}/{}'.format(epoch+1, num_epochs), end='\t')
26             for phase in ['train', 'valid']:
27                 if phase == 'train':
28                     net.train()
29                 else:
30                     net.eval()
31                 epoch_loss = 0.0
32                 epoch_corrects = 0
33                 for inputs, labels in dataloaders_dict[phase]:
34                     inputs = inputs.to(device)
35                     labels = labels.to(device)
36                     optimizer.zero_grad()
37                     with torch.set_grad_enabled(phase == 'train'):
38                         outputs = net(inputs)
39                         loss = criterion(outputs, labels)
40                         _, preds = torch.max(outputs, 1)
41                         if phase == 'train':
42                             loss.backward()
43                             optimizer.step()
44                         epoch_loss += loss.item() * inputs.size(0)
45                 epoch_loss = epoch_loss / len(dataloaders_dict[phase].dataset)
46                 if phase=='train':
47                     print('{} Loss: {:.10f}'.format(phase, epoch_loss), end='\t')
48                     trainLoss.append(epoch_loss)
49                 elif phase=='valid':
50                     print('{} Loss: {:.10f}'.format(phase, epoch_loss))
51                     validLoss.append(epoch_loss)
52                 scheduler.step(epoch_loss)
```

謝辞

多くの方々のご支援があり、本卒業論文を完成させることができました。この場を借りて感謝を述べさせていただきます。

指導教員である宗宮健太郎准教授には、本研究を進めるにあたり指針となる助言を何度もいただきました。また、ゼミなどで行われている議論の中で重力波について多くのことを学ばせていただきました。

東京都市大学の高橋弘毅先生には、ミーティングを通じて機械学習の基本的な考え方などを学びました。開催していただいた機械学習のワークショップでは多くの興味深いテーマについて聞くことができました。

原田健一先生には、実験室で行っている光学系について詳しく教えていただきました。多くの部品から成る複雑な光学系に圧倒されたことを覚えています。

D2の阿部さんには、本論文を執筆する際に複屈折についての参考文献を詳しく解説を乗せて送って頂きました。

D1の鈴木さんには、率先して研究室のイベントを開いて頂き、自分も楽しく参加させて頂きました。

卒業生のElonさんには、研究を引き継ぐにあたって必要なコードを、解説を載せて譲って頂きました。

M2の白倉さんには、配属したての頃にレーザー光学の基礎的な知識を教えていただきました。計画的に実験を行い、適宜資料としてまとめる研究の進め方は参考にさせて頂くべきだと感じています。

M2の笹岡さんには、右も左もわからない研究をはじめたての頃から本論文の執筆に至るまであらゆる面でご助力頂きました。自分の研究が忙しいのにもかかわらず常に私のことを気にかけて下さり、とても助けになりました。

M2の竹口さんには、配属したての頃に装置の設計を手伝わせて頂き、その時に自分で考え、研究を進める楽しさを感じました。また、日常会話の中で研究室の先輩として有益な情報を色々と教えていただいたように思います。

M2の武田さんは、同じ理論系で研究室にいる時間が長いこともあり、日常的に会話に付き合っていました。研究の際の息抜きになっていたと思います。

M2のDiegoさんには、研究を始めるときの環境の構築を快く手伝って頂きました。また、日常的に英語に触れる機会をいただきました。

M1の羽場さんは、研究テーマが近いこともあり、私がよく質問させて頂いた際にも毎回快く答えて頂きました。また、シミュレーションの際に必要なコードをいくつか送って頂きま

した。

輪講でご一緒した Sapna さんには、英語で道筋を立てて説明する能力などを間近で見させて頂きました。

Junlang さんには、ゼミを通じて以前研究していたテーマについて話して頂き、その内容がとても興味深いものでありました。

同期の井殿君とはこの1年間で多くの時間を共にしました。同じ立場として授業や研究生活についての情報共有を行い、院試の際には共に夜遅くまで議論しました。常に前向きな姿勢で努力をする井殿君の存在に大きな刺激を頂きました。

最後に、この場書き切れなかった多くの皆様に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [2] N. Mukund, J. Lough, A. Bisht, H. Wittel, S. Nadji, C. Affeldt, F. Bergamin, M. Brinkmann, V. Kringel, H. Lück, *et al.*, Neural sensing and control in a kilometer-scale gravitational-wave observatory, *Phys. Rev. Appl.* **20**, 064041 (2023).
- [3] Y. Hou, *Control system for mirror tilting by deep learning*, Master's thesis, Tokyo Institute of Technology (2023).
- [4] 田中颯, *非一様な複屈折の影響下における鏡の姿勢制御法の開発*, 卒業論文, 東京工業大学 (2023).
- [5] Y. Aso, *How to generate a birefringence map from TWE maps taken with linearly polarized light ?*, Tech. Rep. T2113368-v2 (2021).
- [6] H. Wang, Simulation of birefringence with current KAGRA ITMs, in *KAGRA F2F meeting* (2023).
- [7] D. D. Brown and A. Freise, *Finesse*, The software and source code is available at <http://www.gwoptics.org/finesse>.
- [8] K. Somiya, E. Hirose, and Y. Michimura, Influence of nonuniformity in sapphire substrates for a gravitational wave telescope, *Phys. Rev. D* **100**, 082005 (2019).
- [9] 安東正樹, *Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御*, Master's thesis, 東京大学 (1996).
- [10] 立原浩輝, *深層学習を用いた鏡の姿勢制御について*, 修士論文, 東京工業大学 (2022).
- [11] 阿部誉, *透過位相誤差分布を使用したサファイア鏡の複屈折推定の検証*, 修士論文, 東京工業大学 (2022).
- [12] 笹岡聖也, *ニューラルネットワークを用いた重力波の到来方向推定*, 卒業論文, 東京工業大学 (2022).
- [13] 羽場大起, *新しい姿勢制御法開発のための光共振器の制御実験*, 卒業論文, 東京工業大学 (2023).
- [14] 道村唯太, *Wavefront Sensor 法の原理* (2011).