卒業論文

巨視的量子現象の観測に向けたグラファイトの反磁性浮上による鏡懸架システムの開発

東京工業大学
理学院 物理学系 宗宮研究室
18B09092 竹口浩太朗

2022 年 2 月 14 日

要旨

原子など微視的な世界を記述する量子力学であるが、原理的には質量スケールに依らず成立するはずである。特に、微視的な世界では量子力学に特有な現象として重ね合わせ状態と呼ばれる現象が観測される。しかし、実際にはプランク質量を超えるような巨視的な物体の重ね合わせ状態は観測されていない。量子性を失うことをデコヒーレンスと呼び、巨視的な系ではこのデコヒーレンスが起きていると考えられるが、その原因は主に 2 つ考えられている。1 つは、マクロな物質は外部環境と相互作用しやすいからというもので、2 つ目は、ある程度の質量を持つ物体は自身の重力によって量子性を失うという、重力デコヒーレントと呼ばれる現象が原因となるというものである。これらの検証のために、近年は機械光学系を用いて様々な質量スケールの鏡で位置測定実験を行い、振動子に現れる量子現象を観測することが期待されている。このような量子現象の観測のための条件が、鏡の位置測定精度を標準量子限界に到達させることである。従来の懸架線を用いて鏡を吊るす方法では、懸架線の熱雑音により鏡の位置測定精度が制限される。そこで先行研究では反磁性浮上を用いて、石英鏡を直接浮上させたり、グラファイトを浮上させその上に鏡を積載するシステムを考案した。石英鏡では磁気浮上に必要になる磁場が大きく浮上に不利であり、グラファイトはその導電性から渦電流が内部で生じそれによるジュール熱で測定精度が制限されてしまう。先行研究ではリング型の磁石を用いてこの渦電流熱雑音の問題を回避する方式を考えたが、測定された Q 値は 4×10^4 程度であり、標準量子限界に対する古典雑音の比を 3 以上にするための必要 Q 値である 10^6 には足りていない。これは理想的には周方向に一様であるはずのリング型磁石の磁場に偏りがあったためであると考えられる。

そこで本研究では、まずリング型の磁石に対してリング型のグラファイトを採用することで磁場の偏りを平均化しすることを考案した。さらに、グラファイトの幅や厚みを変えて浮上実験と散逸測定を行い、渦電流熱雑音の軽減を図った。また、磁石についてもいくつかの組み合わせを試し、浮上を確かめるとともに最適な磁石とグラファイトの設計について考察した。

目次

1　巨視的量子力学

巨視的な物体の運動が古典力学により記述される一方、量子力学は原子などの微視的な物体の運動を記述する。微視的な世界では、この量子力学に特有な現象として、重ね合わせ状態と呼ばれる現象が観測されるが、巨視的な物質の重ね合わせ状態は観測された例がなく、巨視的な世界でも量子力学が成立するかは未解決問題となっている。物質が量子性を失うことをデコヒーレンスと呼ぶが、微視的な世界で観測される量子性が、巨視的な世界でデコヒーレンスを起こす理由についてはいくつかの理論が提唱されている。1 つは周囲との環境との相互作用しやすいためという説で、他にはある程度の質量を持つ物体は自身の重力によって量子性を失うというもので重力デコヒーレント [1] と呼ばれる。これらの説を検証するため、実験的に巨視的な質量スケールにおける巨視的量子現象の観測が求められている。

1.1　重ね合わせ状態

微視的な世界では粒子が波の性質を持ち、重ね合わせの原理が働く。このことを確認する。実際にシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi \tag{1.1}$$

は線形の偏微分方程式であるから、重ね合わせが成立する。ある量子状態 $|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ がシュレディンガー方程式の解であるとすると、任意の複素数 c_1、c_2 を用いてこれらを重ね合わせた状態

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \tag{1.2}$$

もシュレディンガー方程式の解になっている。

この重ね合わせ状態を観測した有名な実験として二重スリット実験 [2] を紹介する。これはヤングの実験で用いられた光の代わりに、1 個の電子を用いた実験である。実験の様子を図 1.1、1.2[2]

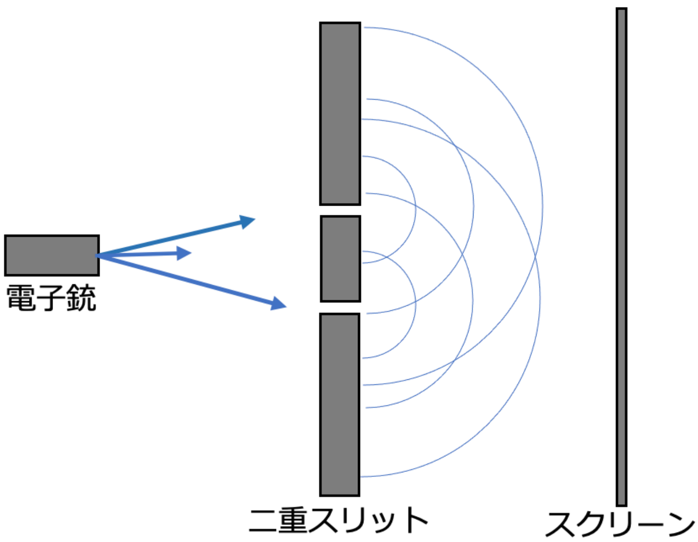


図 1.1: 二重スリット実験

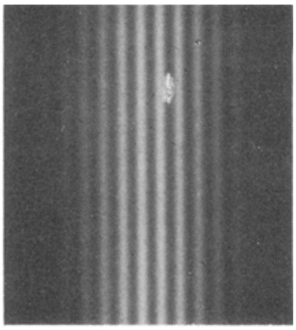


図 1.2: 二重スリット実験 [2]

に示す。この実験では、電子銃から電子をスクリーンに向かって発射して、電子の通り道となる場所に２本のスリットが開けられた板を置き、スクリーンに生じる輝点を観測したものである。するとスクリーンには濃淡の干渉縞が像として描かれ、電子の波動性を示している。この実験は電子を１個ずつ照射しても、同じ結果が得られる。つまりスリットを抜けてスクリーンに生じる電子の状態 $|\psi\rangle$ は、式 (1.2) のように左右のスリットを通り抜けた電子の状態 $|\psi_1\rangle$、$|\psi_2\rangle$ の重ね合わせで表される。このことから干渉縞が重ね合わせ状態によるものであるとわかる。

1.2 デコヒーレンス

以上の重ね合わせ状態は外部の環境との相互作用の影響で壊されてしまうことがある。先程の二重スリット実験を例に考えると、１つの電子が左右どちらのスリットを通過したのかを測定するため、センサーを設置して実験を行うと、スクリーンの干渉縞が失われる。つまりデコヒーレンスが起きたことがわかる。

このような重ね合わせ状態は、巨視的な世界つまりプランク質量スケールを超えるようなスケールでは観測されていない。現在理論的には、量子力学は質量スケールに依存しないと考えられているため、マクロな物質でも重ね合わせ状態は観測されることが予測される。しかし実際には観測されていないという事実は、マクロな質量スケールの物体ではデコヒーレンスが起こるということを示唆される。この理由については主に２つの説があり、１つはマクロな物質は外部の環境と相互作用しやすいからというものである。この場合、古典的雑音が大きいということだから、観測系を外部からの影響が小さくなるよう十分に孤立させれば量子性が観測されるはずである。もう一方は、ある程度の質量を持つ物体は自身の重力によって量子性を失うという、重力デコヒーレントと呼ばれる現象が原因となるという説である。この場合、理論的に提唱されるモデルにおいてデコヒーレンスが起きるまでの時間が時間依存性をもつとするものが複数存在するため、検証のためには様々な質量スケールでの実験を行う必要がある。

1.3 標準量子限界

巨視的な質量スケールで量子現象を観測するには、実験系における振動子の位置測定精度を標準量子限界 (Standard Quantum Limit: SQL) に到達させることが必要になる。SQL を導くハイゼンベルグの不確定性原理は、位置の揺らぎ Δx と運動量の揺らぎ Δp に対して

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.3}$$

と表され、振動子の位置測定精度が制限されることがわかる。

　また振動子の位置を連続測定することを考え、式 (1.3) を換算して SQL における位置のパワースペクトル密度を表すと

$$S_{SQL}(\omega) = \frac{2\hbar}{m\omega^2} \tag{1.4}$$

となる。また χ を振動子の力から変位の感受率とすると

$$S_{SQL}(\omega) = 2\hbar|\chi(\omega)| \tag{1.5}$$

と表せる。

1.4　雑音

1.4.1　量子雑音

　レーザーを用いて位置測定を行うとき、光子数の揺らぎに起因する量子雑音が 2 種類発生する。1 つは散射雑音 (ショットノイズ) と呼ばれ、光を検出する際の光子数の揺らぎにより生じる。もう 1 つは輻射圧雑音と呼ばれ、光が鏡で反射する際に光子数の揺らぎによって鏡が揺れて生じる。これらはレーザー強度に対して逆の依存性を持つため、量子雑音は標準量子限界を超えられない。このことを以下の図 1.3 に示すような Fabry-Perot 共振器を例に示す。

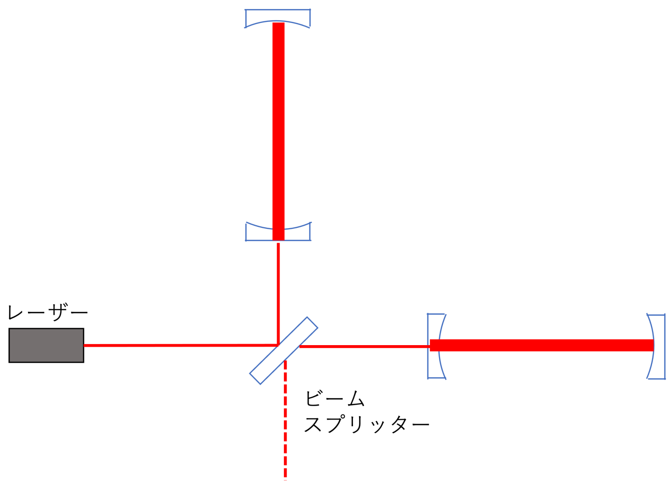


図 1.3: Fabry-Perot 共振器

散射雑音

　散射雑音とは、光検出器に入射するレーザー光自身の持つ光子数の揺らぎが、統計的に位相揺らぎとして捉えられることで生じる雑音である。ここで共振器のキャビティポールを κ、共振器内の光子数を N_p、レーザー光の角周波数を ω_L、共振器長を L、共振器の離調を Δ、振動子の力から変位への感受率を $\chi(\omega)$、振動子の角周波数を ω とすると、散射雑音による鏡の位置変動スペクトル $S_{shot}(\omega)$ は [3]

$$S_{shot}(\omega) = \frac{\kappa L^2}{4N_p\omega_L^2}\left(1 + \frac{(\omega - \Delta)^2}{\kappa^2}\right) \tag{1.6}$$

と表せる。

輻射圧雑音

輻射圧雑音とは、レーザー光の光子数の揺らぎにより、鏡に光子が衝突することで生じる輻射圧が変化し、鏡が揺らされて生じる雑音である。この輻射圧雑音による鏡の位置変動スペクトル $S_{rad}(\omega)$ は [3]

$$S_{rad}(\omega) = \frac{4N_p\hbar^2\omega_L^2|\chi(\omega)|^2}{\kappa L^2}\left(1+\frac{(\omega-\Delta)^2}{\kappa^2}\right)^{-1} \tag{1.7}$$

と表される。

散射雑音と輻射圧雑音の和である $S(\omega) = S_{shot}(\omega) + S_{rad}(\omega)$ は、共振器のカップリング係数 K を

$$K = \frac{4N_p\hbar\omega_L^2|\chi(\omega|}{\kappa L^2}\left(1+\frac{(\omega-\Delta)^2}{\kappa^2}\right)^{-1} \tag{1.8}$$

とすれば

$$S(\omega) = \frac{S_{SQL}(\omega)}{2}\left(K+\frac{1}{K}\right) \geq S_{SQL}(\omega) \tag{1.9}$$

となるから、散射雑音と輻射圧雑音がトレードオフの関係にあり、その和である量子雑音は標準量子限界以下にはできないことがわかる。

1.4.2 古典雑音

振動子の位置測定精度を標準量子限界に到達させるためには、量子雑音が標準量子限界以下にはできないことから、量子性を覆ってしまうような古典雑音を量子雑音以下に抑える必要がある。そこで、機械光学系で位置測定実験を行った場合に、感度を制限するような雑音について述べる。

地面振動

地面は地震がなくとも常に微小に振動している。この地面振動により鏡が揺らされ変位雑音が生じる。この地面振動のスペクトルは地域差もあるが一般に

$$S_{seismic} \simeq \frac{10^{-8}}{f^2} \tag{1.10}$$

程度である。[9] これは主に低周波数帯で感度を制限する要素になる。地面振動は鏡を懸架して振り子状にすることで防振できる。

残留ガス雑音

機械光学系で位置測定実験を行う場合多くは低圧下で行われる。気体分子の平均自由行程が鏡のスケールに比べて十分大きいとき、空気の粘性による影響は無視できる。一方、真空槽内の残留ガスの気体分子はランダムな熱運動をしており、鏡に衝突することで鏡を揺らし、雑音となる。このときの振動子の Q 値は次のように見積もることができる。[4]

$$Q_{gas} = \frac{Cm\omega_0}{SP_{gas}}\sqrt{\frac{K_BT}{m_{gas}}} \tag{1.11}$$

ただし、C は鏡の形状に依るパラメータで、一般に 1 程度である。また、m は鏡の質量、ω_0 は鏡の共振角周波数、S は鏡の面積、P_{gas} は残留ガスの圧力、m_{gas} は残留ガスの平均質量である。よって鏡を小さく、真空槽内の圧力を低くするほど Q 値は向上できる。

振動子の熱雑音

振動子は熱浴との間で平衡状態となっていて、揺動散逸定理により熱浴へ逃げる振動子のエネルギーの散逸が大きいほど、熱浴から振動子に大きな揺動力が働く。この揺動力が振動子の熱雑音の要因である。このことから熱揺動力による振動子の変位スペクトルを求める。振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -kx - +F(t) \tag{1.12}$$

と表せる。ただし、m は質量、$F(t)$ は外力を表し、バネ定数 k は共振周波数 ω_0 を用いて

$$k = m\omega_0^2 \tag{1.13}$$

と書ける。式 (1.12) をフーリエ変換し、周波数 ω に依存する散逸項 $\phi(\omega)$ をバネ定数の虚部として導入する。すると、

$$m\left[-\omega^2 + (1 + i\phi(\omega))\,\omega_0^2\right] x(\omega) = F(\omega) \tag{1.14}$$

と表せる。この虚部の項は複素バネ定数と呼び、散逸を表す。また $\phi(\omega)$ を損失角と呼ぶ。

この損失角 $\phi(\omega)$ には次のような 2 つのモデルが存在する。1 つは空気抵抗など速度、つまり周波数 ω に比例した減衰力が加わるモデルであり、viscous damping モデルと呼ばれる。もう一方はほぼ一定である structure damping モデルである。特に structure damping に起因する雑音をブラウニアン雑音という。

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\omega_0 Q} & \text{viscous damping モデル} \\ \dfrac{1}{Q} & \text{structure damping モデル} \end{cases} \tag{1.15}$$

ここで無次元量で正数である Q 値を導入した。これはモデルによらず

$$Q = \frac{1}{\phi(\omega_0)} \tag{1.16}$$

として定義される量で、共振周波数 ω_0 における散逸 γ の大きさを表している。この散逸 γ は Q 値を用いてそれぞれのモデルにおいて次のように定義される。

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{2Q} & \text{viscous damping モデル} \\ \dfrac{\omega_0}{2Q\omega} & \text{structure damping モデル} \end{cases} \tag{1.17}$$

次に振動子の外力に対する変位の感受率 $\chi(\omega)$ を求めると、式 (1.14) より

$$\chi(\omega) = \frac{x(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\phi(\omega)\omega_0^2)} \tag{1.18}$$

また揺動散逸定理によると、熱揺動力のスペクトル $S_f(\omega)$ はボルツマン係数 k_B、温度 T、散逸 γ、質量 m を用いて次のように表せる [4]。

$$S_f(\omega) = 4k_B T\gamma m \tag{1.19}$$

よって、熱雑音による振動子の変位スペクトル S_x は

$$S_x(\omega) = |\chi(\omega|^2 S_f(\omega) = \frac{1}{m}\frac{4k_BT\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\phi^2(\omega)\omega_0^4} \tag{1.20}$$

とわかる。

鏡の熱雑音

鏡の熱雑音は、鏡の基材によるものとコーティング膜によるものに分けられる。それぞれのスペクトルは次の通りである。[5][6]

$$S_{sub}(\omega) = \frac{4k_BT}{\omega}\frac{\phi_s}{\sqrt{\pi}\omega_L}\frac{1-\nu_s^2}{Y_s} \tag{1.21}$$

$$S_{cout}(\omega) = \frac{4k_BT}{\omega}\sum_c \frac{d_c\phi_c}{\pi\omega_L^2}\frac{Y_c^2(1+\nu_s)^2(1-2\nu_s)^2+Y_s^2(1+\nu_c)^2(1-2\nu_c)}{Y_s^2Y_c(1-\nu_c^2)} \tag{1.22}$$

ここで、添字の s は鏡の基材、c はコーティング膜を表している。また ϕ は損失角、Y はヤング率、ν はポアソン比、d はコーティング膜の厚さ、ω_L はビーム半径を表す。鏡の基材としては fused silica を用い、コーティングとし $\mathrm{TiO_2-doped\ Ta_2O_3}$ が $N+1$ 層、$\mathrm{SiO_2}$ が N 層の誘電体多層膜を考える。層の厚さは各層の片道の光路長が $\lambda/4$ とすれば反射光は最も強く干渉し合う。屈折率をそれぞれ n_1、n_2、鏡の反射率を r とすると、$2N+1$ 層のコーティング膜の厚み d は

$$d = \frac{\lambda}{4}\left\{\frac{1}{n_1}+\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)N\right\} \tag{1.23}$$

を満たす。

また、鏡の熱雑音はビーム半径 ω_L にも依存するため、ビーム半径 ω_L の満たす条件を考える。ガウシアンビームの規格化された強度分布は

$$P(r) = \frac{2}{\pi\omega_L^2}\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_L^2}\right) \tag{1.24}$$

で表される。鏡の半径が r_0 とすると $r > r_0$ のレーザーパワーが失われるので、その割合は

$$\int_{r_0}^{\infty} 2\pi r P(r)dr = \left[-\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_L^2}\right)\right]_{r_0}^{\infty} = \exp\left(-\frac{2r_0^2}{\omega_L^2}\right) \tag{1.25}$$

とわかる。よって

$$\exp\left(-\frac{2r_0^2}{\omega_L^2}\right) \ll 1-r^2 \tag{1.26}$$

がビーム半径 ω_L の満たす満たすべき条件である。

懸架線の熱雑音

鏡を懸架線で吊るしたとき、２種類の熱雑音が発生する。１つは振り子モードの熱雑音で、懸架線の振り子としての Q 値は [7]

$$Q = \frac{4l}{nr^2}\sqrt{\frac{mg}{\pi Y}}Q_m \tag{1.27}$$

で与えられる。ただし、懸架線の素材の Q 値を Q_m、懸架線の長さを l、本数を n、半径を r、ヤング率を Y、鏡の質量を m、重力加速度を g とする。これより、懸架線は長くまた細くするほど、鏡は重くするほど Q 値は向上する。

また、もう一方の熱雑音として、懸架線自体が弦振動するバイオリンモードと呼ばれる雑音が存在する。懸架線の質量を m_w、音速を $\sqrt{mgl/m_w}$、振り子の共振周波数を $\omega_m = \sqrt{g/l}$ とすると、n 次のバイオリンモードの共振周波数 ω_n は

$$\omega_n \simeq n\pi\omega_m\sqrt{\frac{m}{m_w}} \tag{1.28}$$

であり、換算質量 μ_n は

$$\mu_n = \frac{m}{2}\frac{1+(\omega_n+\omega_m)^2}{\cos^2(\frac{l\omega_n}{\nu})} \tag{1.29}$$

である。これより、懸架線のバイオリンモードによる熱雑音のスペクトルは「」[8]

$$S_v(\omega) = \sum_n \frac{4k_BT}{\mu_n\omega}\frac{\omega_n^2\phi_n}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\phi_n^2\omega_n^4} \tag{1.30}$$

と書ける。ϕ_n は n 次のバイオリンモードの損失角である。よって鏡は重くするほど、懸架線は軽くするほどバイオリンモードは高周波側にずらすことができ、観測上雑音としての影響を軽減できる。

2 反磁性浮上

前章では巨視的量子重ね合わせ現象の観測のため、機械光学系を用いて実験した際に生じうる雑音について述べた。特に懸架線で鏡を吊るすような実験では、mg スケールにおいて標準量子限界への到達が難しい。そこで先行研究 [10][11] では、永久磁石により反磁性体を浮上させることで懸架線による熱雑音を回避しうる鏡の指示方法を開発した。中島氏は永久磁石上に直接石英鏡を浮上させることで、実験的に約 1mg の石英鏡を浮上させることに成功した。また小川氏は石英よりも大きな浮上力をもつグラファイトを浮上させることで、小川氏よりも大きな質量スケールの鏡の浮上を成功させた。特に小川氏は次章で説明する渦電流熱雑音を低減させるため、リング型の磁石を採用した。しかし、リング型磁石における周方向の磁場のばらつきにより、グラファイトが特定の場所でダンピングされ、渦電流が誘起されることが考えられた。そこで本研究ではリング型のグラファイトをリング型磁石の上に浮上させることで、石英以上の浮上力を確保しつつ、リング型磁石の磁場のばらつきの平均化を試みた。本章では、反磁性体の磁気浮上の原理について述べる。

2.1 磁性

電子の磁気モーメントにより一般に物質は外部の磁場から何らかの影響を受ける。この磁気モーメントは電子の回転運動に起因すると考えられ、電子のスピン運動によるものと、軌道運動によるものに分けられる。

電子のスピンによって生じるスピン磁気モーメント μ_{spin} を考える。電子は自転しており、その角運動量は $\hbar\boldsymbol{s}$ と書ける。このときスピン磁気モーメント μ_{spin} は、電子の g 因子の $g(\simeq 2)$、ボーア磁子 μ_B を用いて

$$\mu_{spin} = -g\mu_B\boldsymbol{s} \tag{2.1}$$

と表せる。ただしボーア磁子 μ_B とは、電気素量 e、電子の質量 m_e を用いて

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \tag{2.2}$$

として表される、電子の固有磁気モーメントである。

また、電子の軌道運動による軌道磁気モーメント μ_{orbit} を考える。電子の軌道角運動量は $\hbar\boldsymbol{l}$ と表され、これとボーア磁子用いて

$$\mu_{orbit} = -\mu_B \boldsymbol{l} \tag{2.3}$$

と表される。

単位体積あたりの磁気モーメントを磁化 $\boldsymbol{M}$ といい、体積を V とすれば

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{V}\sum_i \boldsymbol{\mu_i} \tag{2.4}$$

と表せる。また真空中に磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が存在するとき、物体の磁化 $\boldsymbol{M}$ と外部磁場 $\boldsymbol{H}$ を用いて

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{2.5}$$

と書ける。横軸に $\boldsymbol{H}$、縦軸に $\boldsymbol{B}$ をとったグラフを B-H 曲線という。物質に外部磁場 $\boldsymbol{B}$ をかけたとき

$$\boldsymbol{M} = \frac{\chi}{\mu_0}\boldsymbol{B} \tag{2.6}$$

だけ物質が磁化されたとすると、比例係数の χ を単位体積あたりの磁化率という。

2.2 磁性の分類

物質の磁気的な性質を分類するのに磁化率 χ を使うと便利である。以下でその分類を行う。

常磁性体

前節で述べたように、物体を構成する原子や分子は、その中の電子の軌道角運動量やスピン角運動量に基づく磁気モーメントを持っている。外部磁場がなければ物体中の原子や分子はランダムな熱運動をしており、それらの磁気双極子は不規則な方向を向いている。これにより巨視的には平均値はゼロになる。この物体に外部磁場がかかると内部の磁気双極子は外部磁場の方向に整列し、磁化される。このときの磁化率が $\chi > 0$ ではあるが、1 に比べて極めて小さいものを常磁性体と呼ぶ。気体では酸素などがこの性質を有しており $\chi \simeq 10^{-6}$ 程度、固体では白金族の元素などがこの性質を有しており $\chi \simeq 10^{-4}$ 程度の大きさをもつ。[12]

強磁性体

磁石に引き付けられるような性質を持つ鉄、ニッケル、コバルトなどは強磁性体と呼ばれる。これらの物質の磁化率は $\chi > 0$ であり、1 に比べて極めて大きい。鉄の場合その値は $\chi \simeq 10^4$ 程度である。[12] 常磁性体の場合、外部磁場に晒されることで磁化されるが、外部磁場を取り除くことで磁化は消える。一方、強磁性体の場合、外部磁場を取り除いても磁化が残り、永久磁石となることがある。このような強磁性の機構を説明するため、鉄を例にして述べる。鉄の内部は図 2.1 のように磁区と呼ばれる領域に分かれている。

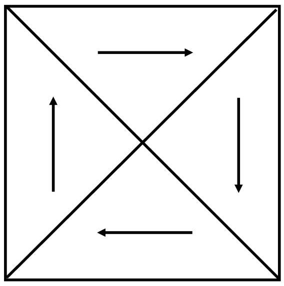


図 2.1: 磁区

同じ磁区内では磁気モーメントの向きは揃っていて、外部磁場のない場合、それぞれの磁区の磁気モーメントの向きはクーロン相互作用によりランダムな向きを向いているため、巨視的には打ち消されている。ここで外部磁場をかけると、クーロン相互作用が破れそれぞれの磁区内の磁気モーメントは外部磁場と同じ方向を向いていき、図 2.2 のように全ての磁区内の磁気モーメントが外部磁場と同じ方向を向いたところで飽和する。

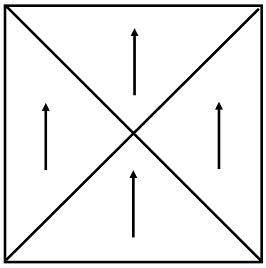


図 2.2: 永久磁化

また、外部磁場の作用により磁区の壁の移動が起き、全体の体積は増していく。図 2.1 の状態よりも図 2.2 の状態の方がエネルギー的に高く不安定であるが、磁区の壁の移動が困難な磁気的に硬い材質であるとき、外部磁場により無理に壁を移動させると、外部磁場を取り除いたときには移動した磁区の壁は簡単には戻らなくなる。これが永久磁化の現象である。

永久磁石の B-H 曲線は次の図 2.3 のようになり、自発磁化をもつ。

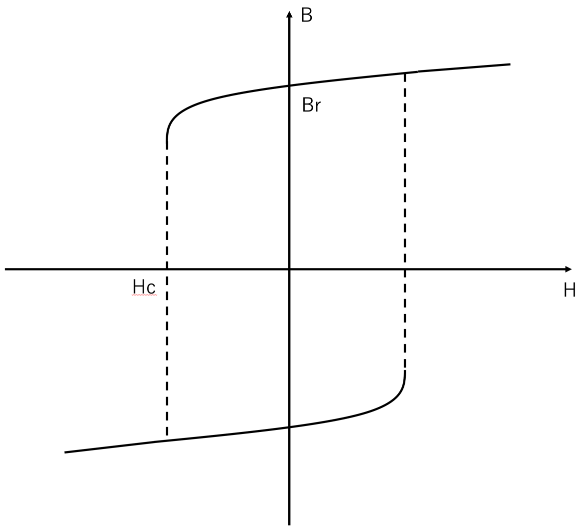
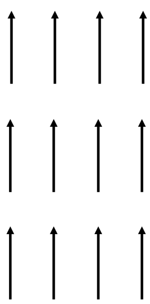


図 2.3: 永久磁石の B-H 曲線

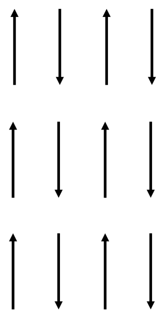
外部磁場がゼロのときの磁束密度を残留磁束密度 (B_r) といい、磁束密度をゼロにするのに必要な外部磁場の大きさを保持力 (H_c) という。

反強磁性

電子のスピンの向きが図 2.4b のように交互に逆向きに整列する場合、強磁性のように自発磁化は持つものの、部分的な磁化はお互いに打ち消しあい、全体としては磁化はなく常磁性を示す。



(a) 強磁性



(b) 反強磁性

反磁性

物体の構成原子が磁気モーメントを持たない場合、外部から磁場を加えると内殻の電子に外部磁場を打ち消すような渦電流が発生し、外部磁場の方向と反対向きに磁化が生じる。磁化率は $\chi < 0$ であり、多くの無機化合物や有機化合物が当てはまる。

2.3 浮上原理

T.Earnshaw は、自由空間において重力、静電気力、磁力などの逆 2 乗則に従う任意の力、またはその組み合わせが作用する場合、安定した平衡点を持たない可能性があることを示した [13]。これを Earnshaw の定理と呼ぶ。外部磁場の印加された空間では常磁性体など $\chi > 0$ となる磁化率を持つ物体は磁場が最大となる場所に移動し、安定に浮上できない。一方 $\chi < 0$ の磁化率をもつ反磁性体の物体は、磁場の極小領域でトラップされ、安定して浮上できる。このことを示す。

まず自由空間で時間変化しない磁束密度 $\boldsymbol{B}$ はラプラス方程式に従うことを確認する。ベクトル解析の公式より

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \tag{2.7}$$

であり、また時間変化のない Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.8}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} \tag{2.9}$$

である。ただし μ は透磁率、$\boldsymbol{j}$ を電流密度とした。自由空間において電流はゼロであるから式 (2.7) に式 (2.8)(2.9) を代入して

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.10}$$

を得る。つまりラプラス方程式に従うことがわかる。

体積 V の磁性体に外部から静的な磁場 $\boldsymbol{B}$ をかけたときのエネルギーを求める。磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ に外部磁場 $\boldsymbol{B}$ をかけると磁気モーメントのもつポテンシャルエネルギーは

$$U_m = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{2.11}$$

であるから、磁性体全体では $-Vd\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B}$ を積分すればよく

$$\begin{aligned} U &= -\int_0^B V d\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B} \\ &= \frac{\chi V}{\mu_0} \int_0^B \boldsymbol{B} d\boldsymbol{B} \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \boldsymbol{B}^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

と求まる。これより磁性体が外部磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\boldsymbol{\nabla} U \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B}^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。

このような時間変化しない外部磁場 $\boldsymbol{B}$ を用いて磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ をもつ磁性体を浮上させることを考えると、安定点ではポテンシャルが極小である必要があるので

$$\boldsymbol{\nabla}^2 U > 0 \tag{2.14}$$

であることが条件である。そこで式 (2.10)(2.11) を代入すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2 U &= -\boldsymbol{\nabla}^2(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}) \\ &= -\mu\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

となりポテンシャルが極小点を持たないことがわかる。つまり、磁性に関わらず自由空間において静的な外部磁場を用いて粒子を安定に浮上させることはできない。これを Earnshaw の定理と呼ぶ。

次に体積 V をもつ磁性体を浮上させることを考える。同様の安定な浮上に要求される条件式 (2.14) に式 (2.10)(2.12) を代入すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2 U = &\quad -\frac{\chi V}{2\mu_0}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B}^2 \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0}\left[2\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_i}\right)^2 + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B}\right] \\ &= -\frac{\chi V}{2\mu_0}\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_i}\right)^2\end{aligned} \tag{2.16}$$

を得る。これより $\chi < 0$ である反磁性体ならば安定した浮上の条件式 (2.14) を満たし、静的な外部磁場により安定した浮上し得ることがわかる。

さらに体積 V の反磁性体の密度を ρ_m として、これが安定に浮上する必要十分条件を考える。重力は z 軸の負の方向に働くとすると、必要十分条件は浮上位置において以下が成り立つことである。

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}_i}{\partial x_i} < 0 \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{F} = 0 \tag{2.18}$$

これに式 (**??**) を代入して整理すると、

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{B}_i^2}{\partial x_i^2} > 0 \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}^2 = \frac{2\mu_0\rho_m g}{\chi}\boldsymbol{e}_z \tag{2.20}$$

となる。ただし $\boldsymbol{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルであり、g は重力加速度を表す。

特にこれを円筒座標系における z 軸上に浮上させることを考えると、上記の必要十分条件は

$$\frac{\partial^2 B_r^2}{\partial r^2} > 0 \quad \text{水平方向の安定性} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2 B_z^2}{\partial z^2} > 0 \quad \text{垂直方向の安定性} \tag{2.22}$$

$$F_z = \frac{\chi}{\mu_0}\left(B_z\frac{\partial B_z}{\partial z} + B_r\frac{\partial B_r}{\partial z} - B_r\frac{\partial B_z}{\partial r}\right) - \rho_m V g = 0 \quad z\ \text{軸方向の釣り合い} \tag{2.23}$$

と表される。よって水平方向の安定性のためには z 軸からずれると磁場が大きくなるような系が必要で、浮上のためには磁場と磁場勾配の積の絶対値を大きくする必要がある。この磁場と磁場勾配の積である $B_z\frac{\partial B_z}{\partial z} + B_r\frac{\partial B_r}{\partial z}$ を本論文では磁場因子と呼び、X と表すことにする。磁場因子 X に $B_r\frac{\partial B_z}{\partial r}$ を含めないのは、後述するようにリング型の磁石を用いることで、理想的には径方向に磁場に偏りが無く無視できるほど小さいからである。

反磁性体の浮上にはスケーリング則が成り立つ。[14]　原点に設置した磁化 $\boldsymbol{M}$、体積 V の磁石により位置 $\boldsymbol{r}$ にある反磁性体を浮上させる場合を考える。位置 $\boldsymbol{r}$ における磁場は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0 V}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}\right) \tag{2.24}$$

と書ける。ここで全体のスケールを任意の正数 k 倍する。つまり、位置が $\boldsymbol{r'} = k\boldsymbol{r}$、体積が $V' = k^3 V$ と変換される。ただし磁化 $\boldsymbol{M}$ は不変である。このとき位置 $\boldsymbol{r'}$ における磁場は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B'}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{\mu_0 V'}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r'^3} - \frac{3(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r'})\boldsymbol{r'}}{r'^5}\right) \\ &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{2.25}$$

となり、不変であることがわかる。よって磁場因子 X は

$$X' = \frac{X}{k} \tag{2.26}$$

となり、$\frac{1}{k}$ 倍される。よってスケールが小さいほど浮上力が大きくなり、浮上に有利であることがわかる。

2.4　主な反磁性体の磁化率

代表的な反磁性体の磁化率と密度、浮上に必要な磁場因子 X を表 2.1 に示す。

表 2.1: 主な反磁性体の磁化率 [16]

	磁化率 $-\chi(\times 10^{-6})$	密度 ρ [g/cm^3]	磁場因子 $X[-\mathrm{T}^2/\mathrm{m}]$
熱分解グラファイト	450	2.3	62
グラファイト	160	2.3	170
ビスマス	160	9.8	730
石英	14	2.2	2000
ダイヤモンド	22	3.5	2000
窒化ケイ素	9	3.2	4400
銀	24	10.5	5400
金	35	19.3	6900
鉛	15	11	8900
シリコン	3.3	2.3	8900
銅	9.7	9.0	11000

グラファイトは浮上に必要な磁場因子 X が小さく、石英を直接浮上させる場合と比べても浮上により有利で、より大きな質量スケールの鏡を搭載できるというメリットがある。しかし、第**??**章で後述するが、磁気浮上を採用することにより渦電流熱雑音という雑音が浮上体に生じる。これは電気抵抗率に反比例するため、電気抵抗率の小さい導電性のグラファイトを採用する場合、次節で説明するような磁石の配列に工夫が必要になる。

2.5 磁石の配列と形状

2.3 節で説明した通り、安定した浮上には磁場分布が大変重要である。時間変化のない空間的に変化する磁場を永久磁石を並べることで生成することを考えると、磁場因子 X を見て分かる通り高い磁場勾配を作るような配列が重要である。そこで用いられるのがハルバッハ配列と呼ばれる磁極配列である。磁極の向きが互いに逆になるように磁石を配列すると (図 2.5)、局所的に磁場勾配の大きな領域が生成できる。

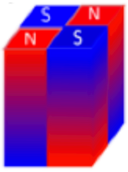


図 2.5: 互いに反対の磁極配列 [11]

また、図 2.6 のように磁極の向きを回転させるように並べると、一方の側に磁束が集中し逆側には磁束がキャンセルされる [17]。これを線形ハルバッハ配列と呼ぶ。しかしこれは浮上体の磁石に対する幅方向の動きを制限することはできない。

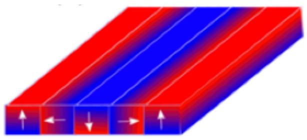


図 2.6: 線形ハルバッハ配列 [11]

図 2.7 に示すような二次元ハルバッハ配列を繰り返し、一方の側に磁束を集中させて逆側の磁束を少ない磁石でキャンセルすることで、より大きな磁場を作ることができる [19]。ただしこの配列の組み立てには接着が必要になる。

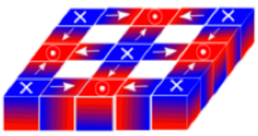


図 2.7: 2 次元ハルバッハ配列 [11]

ここまで強い浮上力を確保するための磁石の配列を紹介したが、本研究で用いるグラファイトは導電性で渦電流熱雑音の影響が大きくなる。この渦電流熱雑音は第??章で後述するように水平方向の磁場勾配に比例する。そのため、グラファイトを採用するためには水平方向に一様な磁場を永久磁石により生成する必要がある。そこで次の図 2.8 」ようなリング状の磁石の配列を採用することで、水平方向に一定で垂直方向に大きな磁場と磁場勾配を作ることができる。

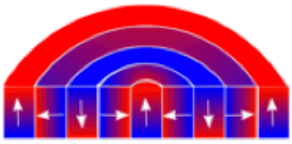


図 2.8: リング型ハルバッハ配列 [11]

ただしリング型にすると磁極が径方向を向いた磁石が製作困難であるため、本研究では図 2.9 のような、磁極を交互に反転するような配列を用いた。

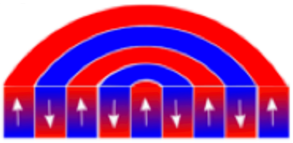


図 2.9: リング型かつ互いに反対の磁極配列 [11]

しかしこれにより式 (2.21) で計算したような水平方向の安定性が失われる。浮上できても水平方向の支持力が働かず、干渉系を組む際には制御のための静電アクチュエータが必要になる。

先行研究では、図 2.10 のような磁石を用い、これを磁石 A と呼ぶ。

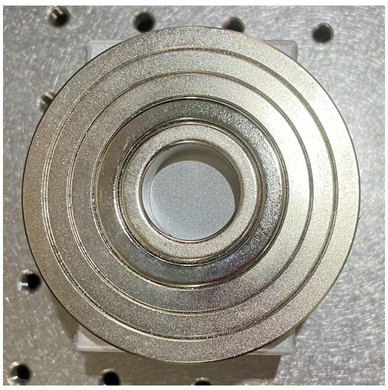


図 2.10: 磁石 A

磁極の向きは図 2.9 のように交互に反転したような磁石である。1 番内側のグラファイトの直径が 20mm で、リングの幅は全て 5mm である。これを用いて先行研究では磁石の 3 層目の上空に 5mm×3mm×1mm のグラファイトを浮上させた。本研究ではこのリング型磁石をを引き続き利用した。またこの磁石と別に、図 2.11 や図**??** のような小型で 2 層で構成されたリング型磁石を用いた。

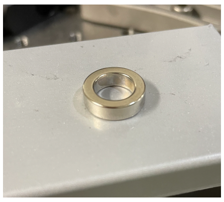


図 2.11: 磁石 B

図**??** の磁石は外径 14 mm 内径 9 mm 厚み 4mm で、図**??**は直径 9mm 厚み 4mm の磁石である。この 2 つを組み合わせて磁石 B を作る。これを 2 重に積み重ねたものを磁石 C と呼ぶ。磁極の向きは互いに逆になっている。これらの小型の磁石を用いるのは、2.3 節で述べたようにスケーリング則が成り立つため小型の方が浮上に有利であるという点と、第 3.1 章で後述するように小型である方が渦電流熱雑音が小さくなることが予測されるためである。

2.6 グラファイトの形状

先行研究ではリング型の磁石 A の上空に直方体 (5mm×3mm×1mm) のグラファイトを浮上させた。シャドーセンシング法を用いた Q 値測定では、4×10^4 程度であり、標準量子限界に対する古典雑音の比を 3 以上にするための必要 Q 値である 10^6 には足りていない。またグラファイトはポテンシャルの谷にトラップされ、外力を加えない状態で減衰振動をしていた。これは理想的には周方向に一様であるはずのリング型磁石の磁場に偏りがあったためであると考えられる。

そこで本研究では、リング型の磁石に対してリング型のグラファイトを採用することで磁場の偏りを平均化することを考案した。特に磁石 A は既製品であるため、理論的には一様であるはずのリング型磁石の磁場にに、周方向に偏りがあったことが考えられる。リング型磁石に対して中心を揃えて浮上させることで、リング型のグラファイトを貫く磁束が同径部分については均すことができると考えた。実際に浮上に利用したグラファイトは次の通りである。

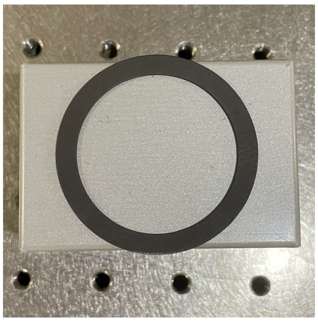


図 2.12: グラファイト a

図 2.13: グラファイト b

図 2.12 のグラファイト a は外径 50 mm 内径 40 mm 厚み 0.5 mm で、磁石 A に対応して浮上させた。図 2.13 のグラファイト b は外径 8.5 mm 内径 7.5 mm 厚み 1 mm で、磁石 B、C に対応して浮上させた。

2.7 浮上シミュレーション

磁石 A の 3 層目の上空に対応させるようにグラファイト a を浮上させたときの浮上位置をシミュレーションにより計算した。磁場の計算にはロスアラモス国立研究所が開発した電磁場シミュレーションソフトである Poisson Superfish を用い、得られた磁場マップの情報から MATLAB を利用して計算した。Poisson Superfish は 2 次元または軸対称の物体を対象に扱うことができ、本研究ではリング型の対称性を生かして、リング型磁石の高さ方向に平行かつ中心を通るような断面の磁場マッピングし、同様にしてグラファイトの浮上高さを計算した。各磁石の作る磁場マップのシミュレーションコードを以下のソースコード 1 に示す。磁石 B や C のソースコードは同様であるため省略する。

Listing 1: 磁石 A の磁場マップ

```
Diamagnetic Levitation

&reg kprob = 0,
mode = 0,
icylin = 1,
xreg = 5
kreg = -1,300
kmax = 50
yreg = -2, 3
lreg = -1,10,300
lmax = 8

nbslo = 0,
nbsup = 0,
nbslf = 0,
nbsrt = 0 &

&po x = 0., y = -5. &
&po x = 20., y = -5. &
```

```
&po x = 20., y = 5. &
&po x = 0., y = 5. &
&po x = 0., y = -5. &

&reg mat =2 ,mshape = 1, mtid = 1 &
&po x = 1., y = 0. &
&po x = 1., y = -1. &
&po x = 1.5, y = -1. &
&po x = 1.5, y = 0. &
&po x = 1., y = 0. &

&reg mat = 3 ,mshape = 1, mtid = 2 &
&po x = 1.5, y = 0. &
&po x = 1.5, y = -1. &
&po x = 2., y = -1. &
&po x = 2., y = 0. &
&po x = 1.5, y = 0. &

&reg mat = 4 ,mshape = 1, mtid = 3 &
&po x = 2., y = 0. &
&po x = 2., y = -1. &
&po x = 2.5, y = -1. &
&po x = 2.5, y = 0. &
&po x = 2., y = 0. &

&reg mat = 5 ,mshape = 1, mtid = 4 &
&po x = 2.5, y = 0. &
&po x = 2.5, y = -1. &
&po x = 3., y = -1. &
&po x = 3., y = 0. &
&po x = 2.5, y = 0. &

&reg mat = 6 ,mshape = 1, mtid = 5 &
&po x = 3., y = 0. &
&po x = 3., y = -1. &
&po x = 3.5, y = -1. &
&po x = 3.5, y = 0. &
&po x = 3., y = 0. &


&mt mtid = 1
aeasy = 90,
gamper = 1,
hcept = -10800, bcept = 12800. &

&mt mtid = 2
```

```
aeasy = 270,
gamper = 1,
hcept = -10800, bcept = 12800. &

&mt mtid = 3
aeasy = 90,
gamper = 1,
hcept = -10800, bcept = 12800. &

&mt mtid = 4
aeasy = 270,
gamper = 1,
hcept = -10800, bcept = 12800. &

&mt mtid = 5
aeasy = 90,
gamper = 1,
hcept = -10800, bcept = 12800. &
```

ただし、磁石の磁場の強さを表す磁石の材料に固有の値として、保磁率 tcept、hcept として磁石を購入した二六製作所 [15] の数値を用いた。またその磁束線を視覚的に表示した図を以下の図 2.14 に示す。

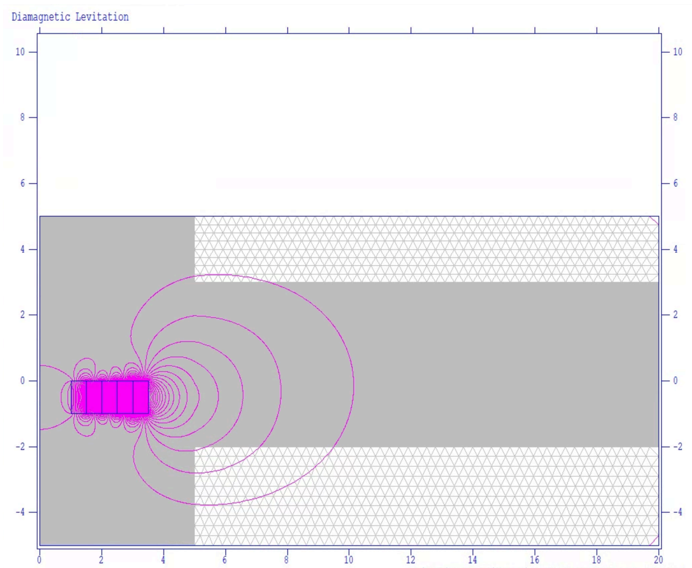


図 2.14: 磁石 A の磁場マップ

図は磁石 A の断面を表したものであり、その他の磁石 B、C も同様であるため省略する。

また磁場マップから浮上力を求め、重力で規格化させてグラフとして出力した。縦軸が浮上力と重力の比で、横軸が高さであるため、縦軸の比が 1 となる高さを読み取れば浮上高さが予測できる。それぞれの磁石に対応するグラファイトを浮上させた場合のグラフを以下の図 2.15、2.16、2.17 に示す。

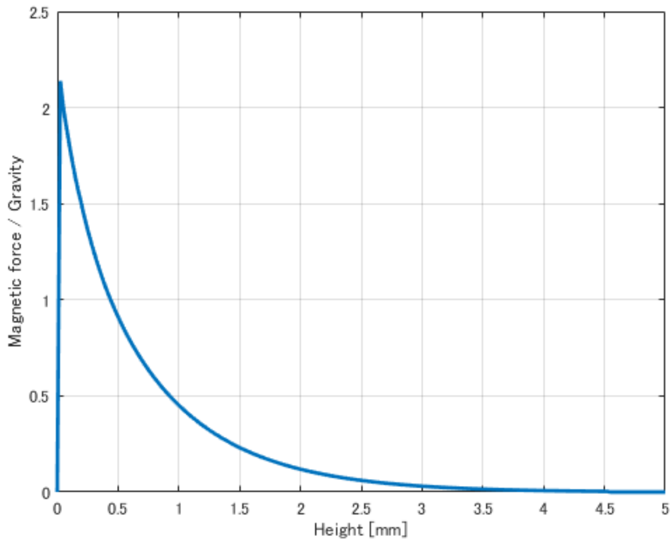


図 2.15: グラファイト a を磁石 A に浮上させたときのの浮上高さ

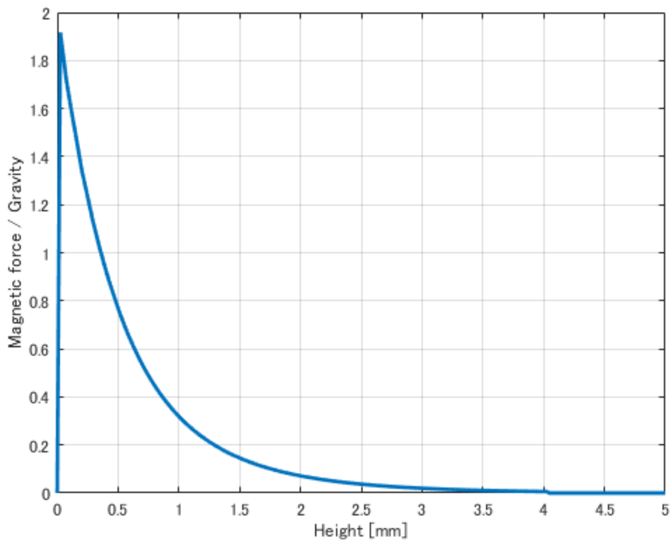


図 2.16: グラファイト b を磁石 B に浮上させたときのの浮上高さ

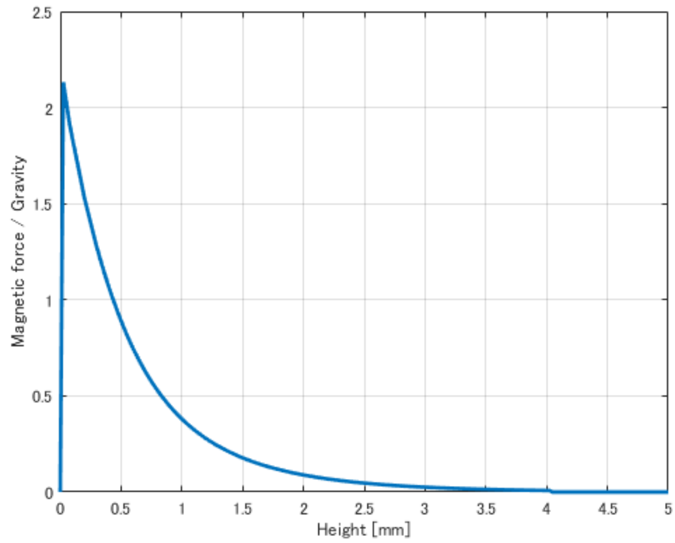


図 2.17: グラファイト b を磁石 C に浮上させたときのの浮上高さ

またその際に使用した MATLAB のコードについてもソースコード 2 に示す。

Listing 2: グラファイト a の浮上高さのシミュレーション

```
%% ファイルの読み込み
filename = 'levi_a.TXT';
startRow = 3;

formatSpec = '%10f%18f%14f%14f%14f%14f%14f%14f%f%f%[^\n\r]';

fileID = fopen(filename,'r');

textscan(fileID, '%[^\n\r]', startRow-1, 'WhiteSpace', '', 'ReturnOnError', false, '
    EndOfLine', '\r\n');
dataArray = textscan(fileID, formatSpec, 'Delimiter', '', 'WhiteSpace', '', 'TextType',
     'string', 'ReturnOnError', false);

fclose(fileID);
%% インポートした配列を列変数名に割り当てる
R = dataArray{:, 1};
Z = dataArray{:, 2};
Br = dataArray{:, 3};
Bz = dataArray{:, 4};
B = dataArray{:, 5};
A = dataArray{:, 6};
dBzdr = dataArray{:, 7};
dBrdz = dataArray{:, 8};
Field = dataArray{:, 9};
```

```
%% 一時変数のクリア
clearvars filename startRow formatSpec fileID dataArray ans;は毎回変更する値

%\\\\\

l=5; %方向のデータ領域 rmm\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
h=5; %方向のデータ領域 zmm\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
r1=20; グラファイト内径の半径 %mm\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
r2=25; グラファイト外径の半径 %mm\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
d=0.5; グラファイトの厚み %mm\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
M=0/1000; グラファイトに搭載する鏡の質量の総和 %に仮定 g\\\\\\\\\\\\\\\
g=9.8; 重力加速度%
mu0=1.26e-6; 空気中の透磁率 %
chi=16e-5; グラファイトの磁化率 %
rho=2.2e3; グラファイトの密度 % kg/m^3
V=((r2/1000)^2 -(r1/1000)^2)*pi*d/1000; リング型グラファイトの体積 % m^3
m=rho*V; リング型グラファイトの質量 %
BrT=Br/10000; 単位をテスラに換算 %
BzT=Bz/10000; 単位をテスラに換算 %
Nr=200;  z を固定した時の r のデータ数= %方向のステップの細かさ r\\\\\\\\\\\\\
Nz=200;  r を固定した時の z のデータ数= %方向のステップの細かさ z\\\\\\\\\\\\\

Z_m=reshape(Z,[Nz+1,Nz+1]); 列の配列を %1[Nz+1,Nzの行列化 +1]
Zm=Z_m(1,:); %をダブりなく配列化 Z
BrTm=reshape(BrT,[Nr+1,Nr+1]); 列の配列を %1[Nr+1,Nrの行列化 +1]
BzTm=reshape(BzT,[Nz+1,Nz+1]); 列の配列を %1[Nz+1,Nzの行列化 +1]
dz=(Zm(2)-Zm(1))/100; %方向のデータ間隔をメートルに換算 z


dBrTdz=zeros(Nr+1,Nz+1);
dBzTdz=zeros(Nr+1,Nz+1);
for j=1:Nz
    for i=1:Nr+1
        dBrTdz(i,j) = (BrTm(i,j+1)-BrTm(i,j))./dz;  r 方向の磁場勾配 %
        dBzTdz(i,j) = (BzTm(i,j+1)-BzTm(i,j))./dz;  z 方向の磁場勾配 %
    end
end
dBzTdz(:,Nz+1) = 0; 最後は引き算できないので別で定義 %
dBrTdz(:,Nz+1) = 0; 最後は引き算できないので別で定義 %

F=zeros(Nr+1,Nz+1);
for i=1:Nr+1
    for j=1:Nz+1
        F=((BzTm.*dBzTdz+BrTm.*dBrTdz).*chi)./mu0;%(z,r)における単位体積当たりの力
```

```
    end
end

w=Nz*(d/h);
F_s=zeros(1,Nz+1);
for j =1:Nz+1-w データの領域の高さを%としたことによる h グラファイト厚は d w=Nz*(d/h)
        Fs=0;
        for k=j:j+w
            for i=1:Nr+1
                Fs=Fs+F(i,k);
            end
        end
    F_s(j+1)=Fs;
end

Fave=F_s./((Nr+1)*(w+1)); 高さ %のときのグラファイトの断面積にかかる浮力の平均 j

plot(Zm.*10,-Fave./((m+M)*g/V),'LineWidth',2) グラフの出力 %
grid on
xlabel('Height [mm]')
ylabel('Magnetic force / Gravity') 鏡の体積や磁化率を考慮していないことに注意 %
```

ただし MATLAB の計算は全磁石やグラファイトの組み合わせで、グラファイトの寸法などの一部の引数以外同様であるから、磁石 A とグラファイト a の組み合わせの場合のみ示す。

2.8 浮上検証実験

実際に浮上するかを検証するため、以下の図 2.18 のように実験のセットアップを組んだ。

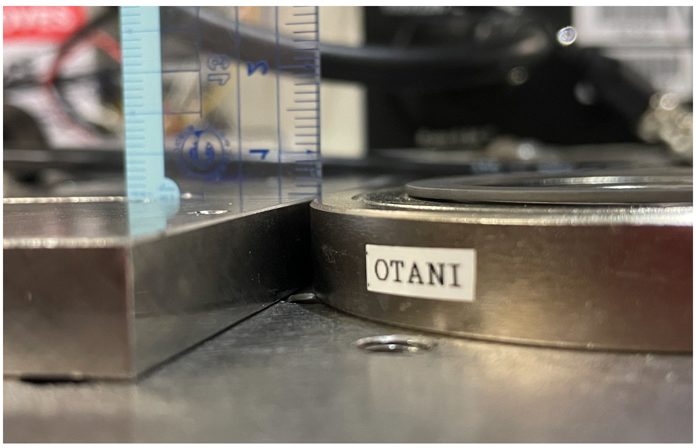


図 2.18: グラファイト a が磁石 A の上に浮上している様子

図は磁石 A にグラファイト a を浮上させたもので、横から撮影したものを拡大した様子を示す。この図から写真のピクセルと対応して浮上の高さを求める。ものさしの 1mm が 30 ピクセルであり、磁石とグラファイ

トの底面の間が 12 ピクセルであることから、浮上の高さはおよそ 0.4mm であることがわかる。また同様にして撮影したグラファイト b を磁石 B、C に浮上させたときの様子は次の通り。

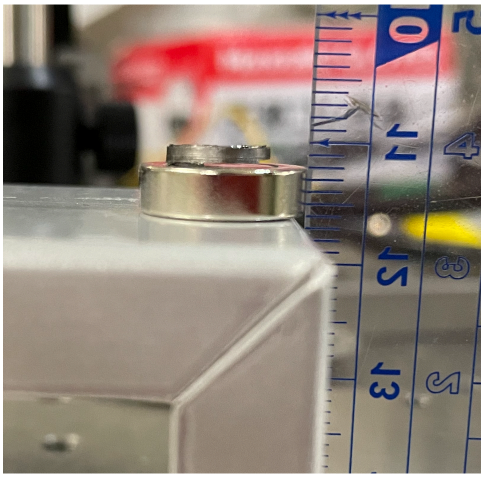


図 2.19: グラファイト b が磁石 B の上に浮上している様子

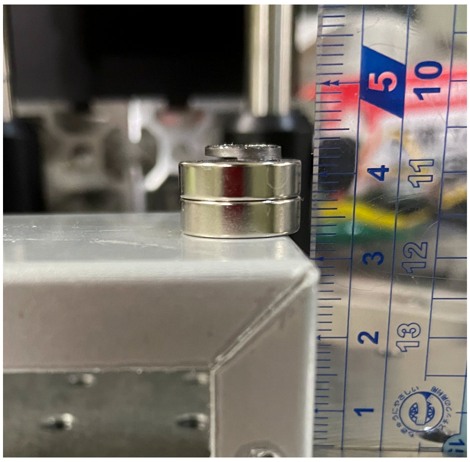


図 2.20: グラファイト b が磁石 C の上に浮上している様子

得られた浮上高さを以下の表 2.2 に示す。

表 2.2: 各磁石とグラファイトの組み合わせの浮上高さ

	磁石 A とグラファイト a	磁石 B とグラファイト b	磁石 C とグラファイト b
高さ [mm]	0.4 ± 0.09	0.45 ± 0.08	0.59 ± 0.08

ただし、系統誤差としてピクセルの読み取り誤差分を 2 ピクセルとして計算した。これより、理論的に求められるように鉛直方向に磁場が強いほど浮上力が強いことと、スケーリング則が働いていることが確認できた。ただし、この測定は磁石と物差しの遠近などの関係から浮上高さの数値は正確性を欠く。また図 2.19、2.20 か

らわかるように、グラファイト b の形状に偏りがある。これは、グラファイト b は元々 10mm 角のグラファイトを削って製作され、その小ささゆえに非常に繊細で触るたびにグラファイト粉が生じる程であったからである。この形状の偏りにより、グラファイトに働く浮上力にも偏りが生じていたことが考えられる。

また、より大きな浮上力を確保するため、外径 22mm 内径 14mm 厚み 4mm の磁石と外径 14mm 内径 9mm 厚み 4mm の磁石を組み合わせ、外径 15.25mm 内径 14.75mm 厚み 0.5mm のグラファイトを浮上させた。しかしこれは水平方向に安定せず、浮上させることができなかった。グラファイトの寸法をこの大きさにしたのは、磁石同士の境界部分からややずらした場所の方が鉛直方向の磁場勾配が大きく、磁場因子 X の値が大きくなると考えたからである。しかし、2 層目の磁石の中心部分にポテンシャルの谷間があり、境界部分からリングのやや外側では水平方向外向きに力が働くため、グラファイトを浮上させることができなかったと考えられる。一方、磁石 B、C に対してグラファイト b は 1 層目のやや内側に位置するため、ポテンシャルの谷間に落ちる向き、つまり水平方向内向きに力が働き、安定したと考えられる。これにより、理論的に予測された外に向かって磁場が大きくなるような系で水平方向に安定するということが、リング内の局所的なポテンシャルの山と谷においても同様に成り立つことが確かめられた。

そこで、本実験で浮上に成功したグラファイト b よりも強い浮上力を確保しつつ、水平方向に安定させ、その上 3.1 で後述するようにグラファイトの幅を狭くして渦電流熱雑音の影響を軽減する方策として、5 層の磁石を用意して幅の狭いグラファイトを 2 層目と 3 層目の境界部からやや 2 層目寄りの内側と 4 層目と 5 層目の境界部からやや 4 層目寄りの内側にそれぞれ浮上させ、これらを連結させる方法を試したい。これは 2 層目と 3 層目の境界部からやや 2 層目寄りの内側と 4 層目と 5 層目の境界部からやや 4 層目寄りの内側が、それぞれ浮上力が高くかつ水平方向の力がリングの中央方向に働くために水平方向にも安定すると考えられ、また幅の広いグラファイト 1 つではなく分割することでグラファイト 1 つあたりの幅を狭くすることができる利点がある。以下の図はその模式図である。

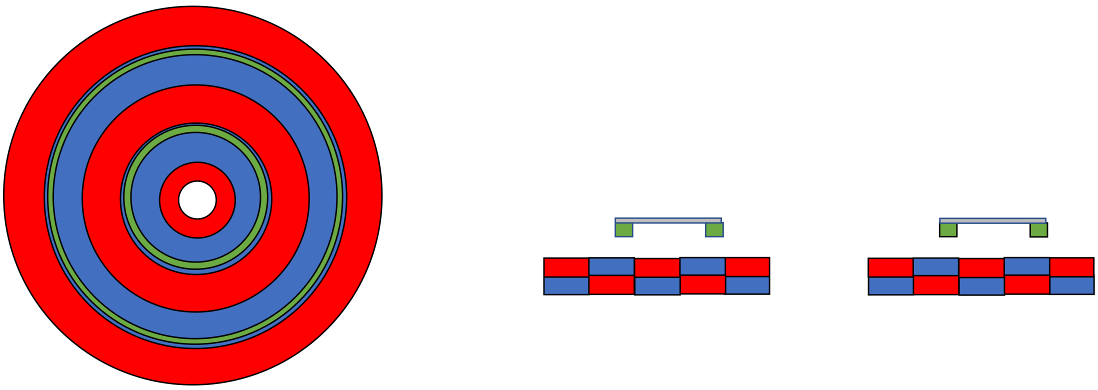


図 2.21: 考案中のグラファイトの模式図

3　磁気浮上における雑音

3.1　渦電流熱雑音

磁石に対して磁性体を動かすことで渦電流が生じる。この渦電流が生み出すジュール熱によりグラファイトが振動し、位置測定上の雑音源となる。本実験で用いる磁気懸架システムは軸対称であり、浮上体のグラファイトもリング型で軸対称である。よって円柱座標系 (r, z, ϕ) に対して渦電流は ϕ 方向に流れる。この渦電流の作るジュール熱と、その散逸を計算する。あるループ面を貫く磁束を $\Phi(r, z)$ とすると、磁束の変化により生じる誘導起電力は

$$V(r, z) = -\frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial t} \tag{3.1}$$

と表される。位置 (r, z) における磁束密度の z 成分を $B_z(r, z)$、電場の ϕ 成分を $E_\phi(r, z)$、電流密度の ϕ 成分を $j_\phi(r, z)$、電気抵抗率を ρ とすると

$$\Phi(r, z) = 2\pi \int_0^r B_z(r', z) r' dr' \tag{3.2}$$

$$V(r, z) = 2\pi r E_\phi(r, z) \tag{3.3}$$

$$E_\phi(r, z) = \rho j_\phi(r, z) \tag{3.4}$$

が成り立つから、これらを用いて渦電流の電流密度は

$$j_\phi(r, z) = -\frac{1}{\rho r} \int_0^r \frac{\partial B_z(r', z)}{\partial t} r' dr' \tag{3.5}$$

と表せる。これが作るジュール熱 P は

$$P = 2\pi\rho \int\int r dr dz j_\phi^2(r, z) \tag{3.6}$$

となる。

このジュール熱 P を散逸 γ に変換する。感受率 χ を逆ラプラス変換することで鏡のインパルス応答は

$$x(t) \propto \sin(\omega_m t) \tag{3.7}$$

これを時間微分して速度は

$$v(t) \propto -\gamma \exp(-\gamma t) \sin(\omega_m t) + \omega_m \exp(-\gamma t) \cos(\omega_m t) \tag{3.8}$$

のように減衰する。$\sin(\omega_m t) = 0$ となるような時刻を考えて $v(t) = v_0 \exp(-\gamma t)$ とおき、系のエネルギーのうち弾性エネルギーの時間微分を考えると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} k x^2(t)\right) \propto k \exp(-\gamma t) \sin(\omega_m t) v(t) = 0 \tag{3.9}$$

となるため、エネルギーの散逸はすべて運動エネルギーの散逸に変換される。

$$\begin{aligned} P &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2(t)\right) \\ &= m\gamma v^2(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

が成り立つ。よって、式 (3.5)(3.6)(3.10) を用いれば磁場の変化から散逸が計算できる。

次にグラファイト内部に生じる渦電流の散逸を求める。グラファイトを浮上させる付近の磁場 $B(r,z)$ は

$$B(r,z) = B_0 + \frac{\partial B}{\partial r} r \tag{3.11}$$

で近似できるため、これを用いて計算すると、グラファイト内部に生じる渦電流の作るジュール熱の散逸は

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)^2 r_0^2}{8\rho\rho_m} \tag{3.12}$$

となる。ただし r_0 は渦電流の半径、ρ_m はグラファイトの密度を表す。

リング型のグラファイトを採用することで、リング全体では磁石の磁場の偏りを平均化できて、リング型グラファイト直径と同様の直径を持つような渦電流は軽減できる。一方、局所的な磁場の偏りが作る渦電流が生じ、この渦電流の直径の最大がリング型グラファイトの幅に対応する。式 (3.12) より、渦電流の生み出す熱雑音の散逸は渦電流の半径の 2 乗に比例するため、リング型グラファイトの幅を狭くすることで生じうる渦電流を小さくし、渦電流熱雑音の散逸を軽減できると考えられる。

3.2 その他の雑音

グラファイトの反磁性浮上による懸架システムを用いる場合、地磁気や周囲の電子機器などによる環境磁場の変動がグラファイトと相互作用し、グラファイトを振動させ雑音源となる。そこで永久磁石の作る磁場 B_{mag} と環境磁場 B_{env} に分けて雑音を計算する。グラファイトが地場から受ける力は

$$F = \frac{\chi V}{\mu_0}(B_{mag} + B_{env})\left(\frac{\partial B_{mag}}{\partial x} + \frac{\partial B_{env}}{\partial x}\right) \tag{3.13}$$

である。磁場とグラファイトが地場から受ける力をその平均値と揺らぎ成分で表すと

$$B_{mag} = \overline{B_{mag}} + \Delta B_{mag} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial B_{mag}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial B_{mag}}{\partial x}} + \Delta\frac{\partial B_{mag}}{\partial x} \tag{3.15}$$

$$B_{env} = \overline{B_{env}} + \Delta B_{env} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial B_{env}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial B_{env}}{\partial x}} + \Delta\frac{\partial B_{env}}{\partial x} \tag{3.17}$$

$$F = \overline{F} + \Delta F \tag{3.18}$$

と書ける。これを代入して力の揺らぎ成分のみ表すと

$$\Delta F \simeq \frac{\chi V}{\mu_0}\left(\overline{B_{mag}}\Delta\frac{\partial B_{mag}}{\partial x} + \overline{\frac{\partial B_{mag}}{\partial x}}\Delta B_{mag} + \overline{\frac{\partial B_{mag}}{\partial x}}\Delta B_{env} + \overline{B_{mag}}\Delta\frac{\partial B_{env}}{\partial x}\right) \tag{3.19}$$

を得る。第 1 項と第 2 項は磁石の磁場変動に起因する項であり、磁石の熱雑音を表す。一方、第 3 項と第 4 項は環境磁場の変動に起因する項であり、環境地場雑音を表す。

4 散逸測定実験

4.1 減衰する回転運動の散逸

注目する運動が並進運動であったとき、式 (1.14) に式 (1.16)(1.17) を代入して逆フーリエ変換することで、運動方程式は散逸 γ を用いて次のように表せた。

$$m\ddot{x} = m\gamma\dot{x} - kx \tag{4.1}$$

散逸 γ の含まれる第 1 項が減衰項である。いま、注目する運動として回転運動を並進運動の場合と対応させて考える。復元力がないとき回転の運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = -\gamma I\dot{\theta} \tag{4.2}$$

と書ける。ただし I は慣性モーメントを表す。これより散逸 γ は

$$\gamma = -\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \tag{4.3}$$

と表せる。また復元力として回転角 θ に比例するトルク $k\theta$ が加わった場合、回転の運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = -\gamma I\dot{\theta} - k\theta \tag{4.4}$$

と書ける。この弾性定数 k は

$$k = I\omega^2 \tag{4.5}$$

であるから、グラファイトを制御するために外部からの復元力として静電アクチュエータを導入して、周波数 f の振動子を作成すれば、この振動子の Q 値は

$$Q = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{2\pi f}{\gamma} \tag{4.6}$$

と求められる。

4.2 角速度の測定方法

本節では実際にどのようにして角速度を測定し、またその時間微分を計算したのかを示す。

まず、磁石や回転させるグラファイトを浮上させた時点で、机や台の傾きによる重力の影響を軽減するため、図 4.1 のように水準器で水平をとった。

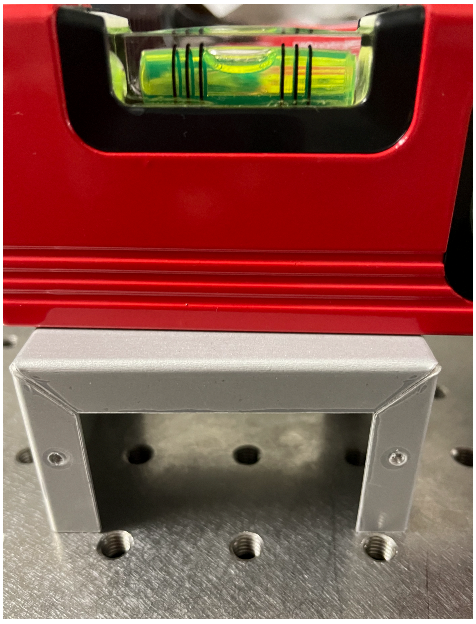


図 4.1: 水準器

水平をとった台の上に磁石を乗せ、その上にグラファイトを浮上させる。使用する磁石とグラファイトは浮上が確認できた、磁石 A、B、C とグラファイト a、b の組み合わせで浮上させる。次に浮上させたグラファイトを手で回転させて初速度を与えて、その回転が減衰していく様子を録画する。その間気流の影響を軽減するため、図 4.2 のような 10cm×10cm×10cm のプラスチック製の箱で覆った。

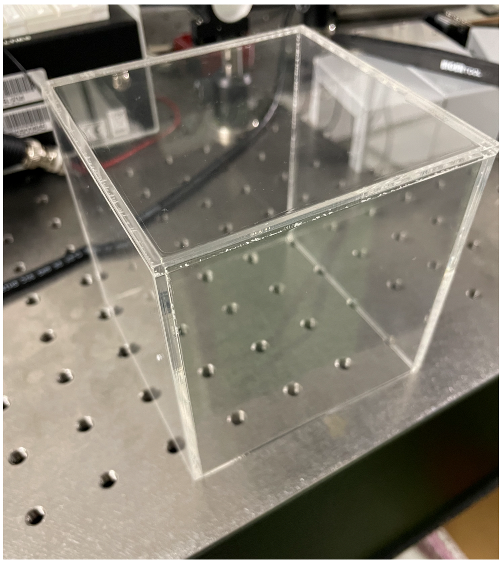


図 4.2: 気流を遮断するためのケース

これにより、録画した動画をフレーム単位 (1/30 秒) で読み取り、グラファイトが一周するのにかかる時間を各回転目ごとに記録し、その時間で 2π[rad] を割って角速度を得る。これを時間を横軸にしたグラフにプロッ

トし、フィッティングした近似曲線の関数を微分することでそれぞれの角速度における微分係数を求め、その比から散逸を計算して結果を得た。

4.3 角速度変化の測定と散逸の計算

まず磁石 A とグラファイト a の組み合わせのとき、角速度の変化は次の図 4.3 のようになった。

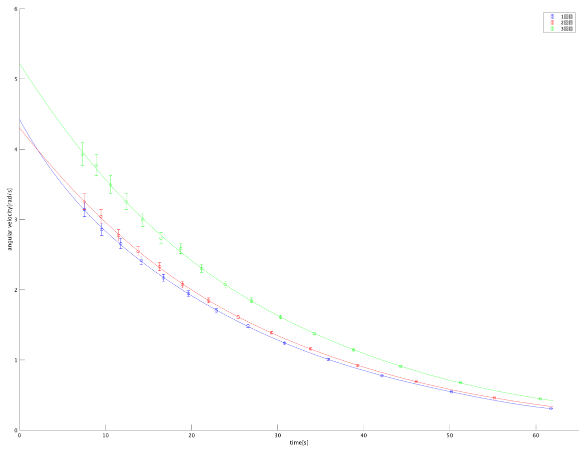


図 4.3: 磁石 A とグラファイト a の組み合わせにおける角速度変化

このフィッティングした関数から角速度の時間微分 $\ddot{\theta}$ を求め、散逸 γ を計算すると

表 4.1: 磁石 A とグラファイト a の散逸

	1 回目	2 回目	3 回目	平均
散逸 [Hz]	0.04057±0.0006	0.04036±0, 0008	0.04008±0.0009	0.04034

となる。動画から読み取る際に 1 フレーム (= 1/30 秒) の読み取り誤差があったと考えられるため、誤差はそれぞれの回で ±0.0006、±0, 0008、±0.0009 程である。

また同様に磁石 B とグラファイト b の組み合わせと磁石 C とグラファイト b の組み合わせの場合がそれぞれ次の図 4.4、4.5

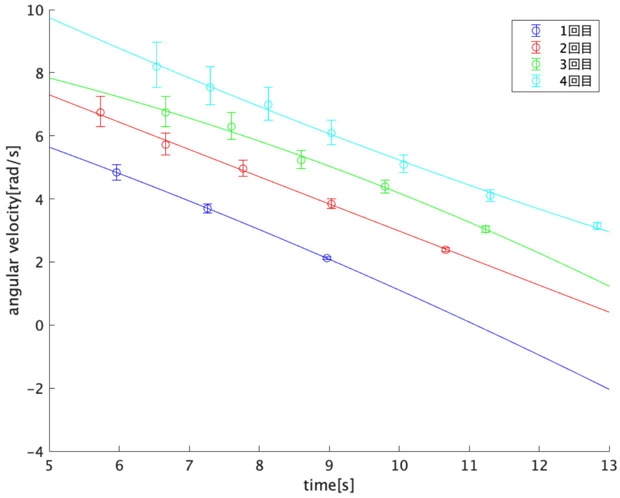


図 4.4: 磁石 B とグラファイト b の組み合わせにおける角速度変化

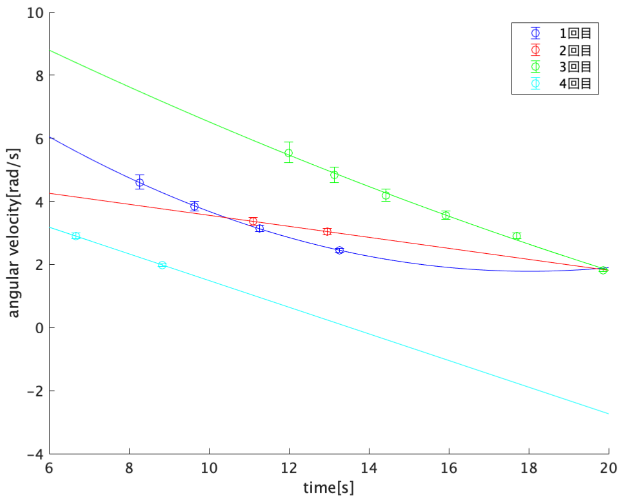


図 4.5: 磁石 C とグラファイト b の組み合わせにおける角速度変化

散逸はそれぞれ

表 4.2: 磁石 B とグラファイト b の散逸

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	平均
散逸 [Hz]	0.29058±0.01	0.207586±0.009	0.22207±0.009	0.15338±0.009	0.229759

表 **4.3:** 磁石 C とグラファイト b の散逸

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	平均
散逸 [Hz]	0.12387±0.004	0.54620±0.003	0.13497±0.004	0.17938±0.02	0.24610

同様に磁石 B とグラファイト b における誤差は、それぞれの回で ±0.01、±0.009、±0.009、±0.009 程であった。また磁石 C とグラファイト b における誤差は、それぞれの回で ±0.004、±0.003、±0.004、±0.02 程である。

表 4.2、4.5 を見ると、磁石 B とグラファイト b の組み合わせの 1 回目や磁石 C とグラファイト b の組み合わせの 2 回目など、数値が大きくずれている測定が複数ある。これはグラファイトを回転させる際に十分な初期速度を与えられず、測定の回数が少なくなってしまい、フィッティングした関数などが実際の挙動と乖離してしまったからであると考えられる。そこで特に測定回数の少なかった磁石 B とグラファイト b の組み合わせにおける 1 回目、磁石 C とグラファイト b の組み合わせの 2 回目と 4 回目をそれぞれ除外して平均を改めて計算すると、

表 **4.4:** 修正した平均の散逸

	磁石 B とグラファイト b	磁石 C とグラファイト b
平均の散逸 [Hz]	0.19434	0.12942

となる。

まず、全体の寸法の異なるグラファイト a を用いた場合とグラファイト b を用いた場合で比較する。理論的には、幅が狭く生じる渦電流の半径がより小さくなるグラファイト b の方が渦電流熱雑音の影響が小さく、散逸の値は小さくなるはずである。しかし、本実験の結果はグラファイト b の散逸の方が 3 ～ 5 倍程度悪化している。これは、主にグラファイト b の測定に問題があったためであると考えられる。グラファイト a がオーダーメイドで製作されたものであるのに対して、グラファイト b は既製品を加工して製作されたものである。グラファイト b は元々 10mm 角のグラファイトを削って製作され、その小ささゆえに非常に繊細で触るたびにグラファイト粉が生じる程であった。これが原因でグラファイトに偏りがが生じてしまい、等速の円運動でなかったことが考えられる。また、グラファイト b を浮上させる際に生じたグラファイトのエッジ部分のバリが磁石に接触して抵抗を受けていた可能性も考えられる。

次に、磁石の厚みのみが相違点である磁石 B と磁石 C を用いた場合でそれぞれ比較する。修正した散逸で比較すると、磁石 C の方が散逸の値が小さくなった。これは、磁石を重ねることで磁場の水平方向の偏りが僅かに解消され、渦電流の影響が軽減されたことが考えられる。ただし、先程と同様にグラファイト b が繊細で測定に誤差があった可能性も考えられるため、テスラメータなどを用いて磁束密度の測定を行いたい。

4.4 ダンピングの振動中心

回転させたグラファイトは時間経過とともに次第に停止する。そこで、台の向きを約 90° ずつ回転させながら静止したグラファイトの位置を測定し、相関がないか調べた。複数回グラファイトが停止した位置を測定したところ、台を回転させた場合もさせなかった場合も回転の停止した位置はランダムであった。よって、グラファイトの停止位置と台の向きには相関はなく、アナログの水準器では排除しきれない机や台の傾きは無視で

きることがわかった。

5　結論と今後の課題

本実験では、様々な磁石とグラファイトで浮上を確認し、浮上する組み合わせで散逸の測定を行った。浮上に関しては、水平方向の安定性が問題になり、グラファイトがポテンシャルの谷間にあったとしても、中心方向に力が働かない限り安定しないことがわかった。散逸に関しては、グラファイトの形状に偏りが生じていたなどの理由から、リング型グラファイトの幅が小さいことによる渦電流熱雑音の低減は確認できなかった。ただし、磁石の厚みを増やすことで散逸の値を小さくできる可能性を示すことができた。

今後の課題としては、幅の狭いグラファイトで渦電流の低減ができるかを再度検証するため、より浮上力の大きく形状の偏りのないグラファイトで実験を行う必要がある。また本実験は気流を遮断するために箱で覆ったものの、空気中で行ったために空気抵抗などの影響を強く受けていると考えられる。そこで真空槽内で実験を行い、その他の雑音源の影響を小さくして測定したい。さらに、グラファイトの幅を狭くしつつ浮上力を確保する方法として、グラファイトを複数の層に分け、より幅の狭いグラファイトを磁石の浮上に有利な地点で浮上させ、これらを接着して 1 つのグラファイトをして使用する方法を検証したい。また本実験では Q 値の測定はできなかったため、復元力を与えるための静電アクチュエータを開発し、Q 値の測定を行いたい。

参考文献

[1] Roger Penrose. On gravity’s role in quantum state reduction. General relativity and gravitation, Vol. 28, No. 5, pp. 581 – 600, 1996.

[2] C. Jonsson. Electron Diffraction at Multiple Slits. Am. J. Phys., vol. 42, no. 1, p. 4, 1974.

[3] Markus Aspelmeyer, Tobias J Kippenberg, and Florian Marquardt. Cavity optome- chanics. Reviews of Modern Physics, Vol. 86, No. 4, p. 1391, 2014.

[4] P. R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. Phys. Rev. D 42 1990 2437-2445.

[5] G. M. Harry, A. M. Gretarsson, P. R. Saulson, S. E. Kittelberger, S. D. Penn, W. J. Startin et al. Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings. Classical and Quantum Gravity 19 2002 897-917.

[6] Y. Levin. Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach. Phys. Rev. D 57 1998 659-663.

[7] 小森健太郎. 巨視的振動子の遠隔光冷却. 修士論文, 東京大学, 2016.

[8] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健. 重力波をとらえる 存在の証明から検出へ. 京都大学学術出版会 (1998).

[9] D. Shoemaker, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Maischberger and A. Ru ¨ diger. Noise behavior of the Garching 30-meter prototype gravitational-wave detector. Physical Review D 38 1988 423-432.

[10] 中島良介. 巨視的量子力学の検証に向けた鏡の磁石懸架システムの開発. 修士論文 (2020).

[11] 小川潤, 巨視的な系における量子力学の検証に向けた磁気浮上による鏡の支持方法の開発, 修士論文, (2021)

[12] 砂川重信, 理論電磁気学, 紀伊國屋書店, (2019)

[13] Trans Earnshaw. Cambridge philos. Soc, Vol. 7, No. 97, p. 1824, 1842.

[14] Orphee Cugat, Jerome Delamare, and Gilbert Reyne. Magnetic micro-actuators and systems (magmas). IEEE Transactions on magnetics, Vol. 39, No. 6, pp. 3607 – 3612, 2003.

[15] 株式会社二六製作所 HP. https://www.26magnet.co.jp/database/ associated-data/no2.html.

[16] William M. Haynes. CRC Handbook of Chemistry and Physics, 97th Edition. CRC Press, 2021

[17] Salauddin M, Park J Y. Design and experiment of human hand motion driven electromagnetic energy harvester using dual Halbach magnet array. Smart Mater Struct, 2017, 26: 035011

[18] Ku ¨ stler G. Extraordinary levitation height in a weight compensated diamagnetic levitation system with permanent magnets. IEEE Trans Magn, 2012, 48: 2044 ˆˆ e2 ˆˆ 80 ˆˆ 932048

[19] Barrot F, Sandtner J, Bleuler H. Acceleration sensor based on diamagnetic levitation. In: In- ternational Symposium on Vibration Control of Nonlinear Mechanisms and Structures. Munich, 2005.130: 81 ˆˆ e2 ˆˆ 80 ˆˆ 9390

謝辞

本論文を完成させるにあたり、多くの方のご協力を賜りました。この場でお礼申し上げます。

指導教員の宗宮先生には本研究のみならず研究生活においても大変お世話になりました。磁気浮上における磁石やグラファイトの設計にあたり何度も助言をいただきました。特に 2022 年 1 月に私が新型コロナに感染してしまい、時間的余裕のないなか磁石やグラファイトの発注などをしてくださったおかげで、回復後スムーズに実験を行うことができました。また想定と異なりグラファイトが浮上しないなどのトラブルが相次ぐなか、的確なアドバイスを頂き実験を実施することができました。また修士 2 年の栗林さんには、プログラミングの不慣れな私に磁気浮上のシミュレーションに関する考え方やコードの書き方など多くを教わりました。実験室でお会いする機会の多かった鈴木海堂さんには、研究の進捗などを気にかけていただき、また研究生活の過ごし方についてアドバイスを頂きました。鈴木孝典さんとは居室でプログラミングを書いているときなどにお会いして、研究の進捗や新型コロナ感染から回復した後の体調などを気にかけて頂きました。ゼミにおける現状報告等でも栗林さんをはじめ、原田先生、博士課程の小田部さん、修士 2 年の阿部さん、立原さん、修士 1 年の鈴木海堂さん、鈴木孝典さん、Yilun さんにはたくさんの質問や助言を頂き、研究内容への理解が一層深まりました。また、特に原田先生と同期の笹岡君には私が新型コロナに感染するにあたり、濃厚接触者となってしまい大変ご迷惑をおかけしました。最後に新型コロナに感染し落ち込んでいた私を精神的にサポートしてくれた友人と、さらに金銭的にも支えてくれた家族に感謝します。

改めて皆様に感謝申し上げます。誠にありがとうございました。