平成 28 年度卒業論文

マイケルソン干渉計の制御とデジタルシステムの導入

東京工業大学　物理科　宗宮研究室

13B07060　下井建生

はじめに

重力波とは 100 年前にアルバート · アインシュタインが存在を予言した非常に小さな時空の歪みのことである。この予言から 100 年の間重力波が直接観測されることがなかったが、2016 年にアメリカの重力波観測機関 LIGO がついに検出に成功したことを発表した。解析の結果この重力波 GW150914 は、約 36 太陽質量のブラックホールと約 29 太陽質量のブラックホールの連星が衝突した瞬間に生じたものであるということが分かった。

この結果から今まさに重力波天文学という新たな天文学の分野が拓けようとしている。重力波は電磁波や放射線を観測することでは見ることのできないもの、例えばブラックホールの中身などを直接観測することが期待されており、果ては宇宙の誕生をも見ることができるのではと期待が寄せられている。

しかし、重力波による時空の歪み方は伝播の方向と地上の検出器の向きによってその検出結果が異なってしまう。また、時空の大きさが GW150914 と同程度でも、条件によっては LIGO では雑音と区別ができない場合もある。これらの理由から、LIGO1 つ (LIGO と呼ばれる重力波検出器はアメリカに 2 台あるが) では重力波の解析に限界が生じてしまうのである。そのため、今日では LIGO に限らず、イタリアの VIRGO や日本の KAGRA など地球上の様々な場所で新しい重力波検出器を作成し LIGO と同時稼働させることで様々な重力波を同時に検出することが期待されている。

そんな日本の重力波検出器 KAGRA には現在製作中の出力モードクリーナという装置がある。これは KAGRA の感度を向上させる重要な共振器だが、フィードバック制御なしには稼働することが難しい共振器となっている。そのための制御にはローパスフィルタといった回路を使用するのだが、これにオペアンプなどではなくプログラムされたデジタルシステムを使用してフィードバック制御を行おうという考えがある。アナログ回路にはないデジタルシステムのメリットが注目されたからだ。本研究では、実際にデジタルシステムでプログラムされたフィルタを用いてフィードバック制御が可能かを調べ、その安定性を評価していく。

目次

第1章　一般相対性理論と重力波の解

この章では、Einstein 方程式を線形近似することで重力波の解を示す。

1.1　Einstein 方程式

一般相対論において、4 次元空間内の異なる 2 点間の距離を求めるには計量テンソル $g_{\nu\mu}$ を用いる。重力場のない平坦な時空を Minkowski 時空といい、この空間では計量テンソル $g_{\nu\mu}$ は $\eta_{\nu\mu}$ と表記される。この計量テンソルを行列で書けば以下のように表される。

$$\eta_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

重力場のある時空では計量テンソル $g_{\nu\mu}$ は、以下の Einstein 方程式に従う。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

$G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソル、G は万有引力定数、c は真空中の光速度、$T_{\mu\nu}$ はエネルギー · 運動量テンソルである。

式 (1.2) を Minkowski 時空で示すために書き換えたい。そのためには曲率テンソルという量を用いる。曲率テンソルとは以下の式で表される。

$$R^{\epsilon}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\epsilon}{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\epsilon}{}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\delta}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\mu} - \Gamma^{\delta}{}_{\sigma\mu} \Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\nu} \tag{1.3}$$

$\Gamma^{\epsilon}_{\sigma\nu}$ はクリストッフェル記号といい、

$$\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\mu} \tag{1.4}$$

であるならば、以下の式が成り立つ。

$$\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\nu} = \frac{g^{\epsilon\sigma}}{2}(g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \tag{1.5}$$

曲率テンソルを縮約して作られるテンソルとして、リッチテンソルというものがある。これは以下のように定義される。

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} \tag{1.6}$$

このテンソルは、重力場を決定する Einstein 方程式で現れる。また、このリッチテンソルをさらに縮約して作られる量はスカラー曲率と定義され、以下のように示される。

$$R = g^{\mu\nu} R_{\nu\mu} \tag{1.7}$$

以上の式を用いて次の Einstein テンソルと呼ばれる量が決定される。

$$G^{\mu}_{\ \nu} = g^{\mu\sigma} R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\ \nu} R \tag{1.8}$$

この式から、Einstein テンソルの反変成分を定義すれば、(1.2) の Einstein 方程式を次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= g^{\nu\sigma} R^{\mu}_{\ \sigma} \\ &= g^{\nu\sigma}\left(g^{\mu\epsilon} R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\ \sigma} R\right) \\ &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.2 Einstein 方程式の線形近似

現実で生じうる重力波による距離の変化を考える場合は、重力は弱いものと考えられるので、計量テンソル $g_{\nu\mu}$ は次のように線形近似をして考えてよい。

$$g_{\nu\mu} = \eta_{\nu\mu} + h_{\nu\mu} \quad (|h_{\nu\mu}| \ll 1) \tag{1.10}$$

上の式の線形近似により Minkowski 時空からのずれを用いて導出していく。この近似の範囲では添え字の上げ下げは、η を用いる。

$$h^{\mu}_{\ \nu} = \eta_{\sigma\nu} \tag{1.11}$$

式 (1.5) に式 (1.10) を代入して接続係数を求める。

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\ \nu\lambda} &= \frac{g^{\mu\sigma}}{2}(g_{\sigma\lambda,\nu} + g_{\sigma\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \\ &= \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu} + h_{\sigma\nu,\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma}) \end{aligned} \tag{1.12}$$

これを式 (1.3) で示した曲率テンソルの定義式に代入すると以下のように展開される。

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\ \nu\delta\lambda} &= \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} + h_{\sigma\nu,\lambda\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta}) \\ &\quad - \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\sigma\nu,\lambda\delta} - h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \\ &= \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

これを式 (1.6)、(1.7) に代入することで、リッチテンソル、スカラー曲率が求められる。

$$R_{\nu\sigma} = \frac{\eta^{\delta\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \tag{1.14}$$

$$R = \frac{\eta^{\nu\lambda}\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \tag{1.15}$$

したがって、式 (1.9) で示した Einstein 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} G_{\nu\lambda} &= \frac{\eta^{\delta\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda})\frac{\eta^{\nu\lambda}\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}[h^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + h^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box h_{\nu\lambda} - h_{,\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}(h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \Box h)] \end{aligned} \tag{1.16}$$

ここでは次のような表記を利用している。

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{1.17}$$

さらに、次のような表記を用いる。

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h \tag{1.18}$$

$$\therefore \quad \tilde{h} = \eta^{\mu\nu}\tilde{h}_{\mu\nu} = -h \tag{1.19}$$

これらを式 (1.16) に代入する。

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + \tilde{h}^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box\tilde{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\tilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma}) \tag{1.20}$$

この Einstein 方程式をさらに簡単にするために、次はゲージ変換を行う。以下のような座標変換を考える。

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \tag{1.21}$$

このとき、計量テンソルは次のように展開する。

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta} \\ &= \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial \xi'^\beta}{\partial x'^\nu}\right)(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &= (\delta^\alpha_\mu - \xi^\alpha_{,\mu})(\delta^\beta_\nu - \xi^\beta_{.\nu})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})\delta^\alpha \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \end{aligned} \tag{1.22}$$

同様に、弱い重力場での計量テンソル $h_{\mu\nu}$ もゲージ変換する。

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \tag{1.23}$$

$$h' = h - 2\xi^{\sigma}_{,\sigma} \tag{1.24}$$

ゲージ変換された ${h'}_{\mu\nu}$ を、式 (1.18) のように書き換える。

$$\begin{aligned}\tilde{h}'_{\mu\nu} &= {h'}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h' \\ &= \tilde{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}\end{aligned} \tag{1.25}$$

これより、

$$\tilde{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = \tilde{h}^{\mu}{}_{\nu,\mu} - \Box\xi_{\nu} \tag{1.26}$$

となるので、常に $\tilde{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = 0$ となるようなゲージ ξ^{μ} を選べば、式 (1.20) で与えられたような Einstein テンソルの成分は以下のように表すことができる。

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\Box\tilde{h}_{\mu\nu}}{2} \tag{1.27}$$

従って、式 (1.2)、(1.27) から、線形近似の Einstein 方程式は以下のように求まった。

$$\Box\tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.28}$$

1.3　重力波の解

前節の結果から、重力波の波動解を導出していく。真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ であるから、式 (1.28) は以下のようになる。

$$\Box\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.29}$$

式 (1.29) の解として、一番簡単な波動である単色平面波を用いる。

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \tag{1.30}$$

式 (1.30) を式 (1.29) に代入すると、次の式が得られる。

$$\eta^{\lambda\sigma}k_{\lambda}k_{\sigma}A_{\mu\nu} = 0 \tag{1.31}$$

また、式 (1.30) が常に $\tilde{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = 0$ を満たすような条件は、以下のようになる。

$$\eta^{\lambda\nu}k_{\nu}A_{\mu\lambda} = 0 \tag{1.32}$$

この 2 式から、次の条件が求まる。

$$k^{\sigma}{}_{\sigma} = 0 \tag{1.33}$$

$$k^{\lambda}A_{\mu\lambda} = 0 \tag{1.34}$$

式 (1.33) は、重力波が高速で伝播することを、式 (1.34) は、平面波解 (1.30) が横波であることを表している。さらに式 (1.21) と同様にゲージ変換をする。この変換が $\tilde{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = 0$ を満たすためには、$\Box\xi_{\mu} = 0$ を満たす関数でなければならないので、新たに定数 B_{μ} を用いる。

$$\xi_{\mu} = B_{\mu}\exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \tag{1.35}$$

式 (1.35) を式 (1.23)、(1.24) に代入すると、このゲージ変換は以下のように表せる。

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - i(B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu)\exp(ik_\lambda x^\lambda) \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} h' &= h - i\eta^{\mu\nu}(B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu)\exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -[\eta^{\mu\nu}A_{\mu\nu} + i\eta^{\mu\nu}(B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu)]\exp(ik_\lambda x^\lambda) \end{aligned} \tag{1.37}$$

この式において、$h' = 0$ となるように B_μ を選択すればよい。このような条件を、一般にはトレースレス条件と呼ぶ。このときのトレースレス条件は以下のようになる。

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} \tag{1.38}$$

ここで、簡単のため、重力波が z 方向に伝播している条件で考えてみる。このとき、$-k_0 = k_3 = k$、$k_1 = k_2 = 0$ である。よって、$\tilde{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = 0$ およびトレースレス条件を満たす式が次のように求まる。

$$k(A_{\mu 0} + A_{\mu 3}) = 0 \tag{1.39}$$

$$-A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \tag{1.40}$$

この条件を保ちながら、式 (1.35) がトレースレス条件を保つためには、以下の式を満たす必要がある。

$$B_0 + B_3 = 0 \tag{1.41}$$

以上の条件のもと、ゲージ変換された式 (1.30)$h'_{\mu\nu} = A'_{\mu\nu}\exp(ik_\lambda x^\lambda)$ を式 (1.36) に代入すると、$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu$ が得られる。これに重力波が z 方向に伝播するという条件および式 (1.41) を代入すると、以下の式が得られる。

$$A'_{00} = A_{00} + 2iB_0 k \tag{1.42}$$

$$A'_{01} = A_{01} + iB_1 k \tag{1.43}$$

$$A'_{02} = A_{02} + iB_2 k \tag{1.44}$$

$$A'_{03} = A_{03} - i(B_0 k - B_3 k) = a_{03} - 2iB_0 k \tag{1.45}$$

これらの左辺が 0 になるように B_μ を決めればよい。すると、以下の条件が残る。

$$A_{00} + A_{03} = 0 \tag{1.46}$$

$$A_{11} = -A_{22} \tag{1.47}$$

$$A_{12} = A_{21} \tag{1.48}$$

これらの行列を組み合わせることで、z 方向に伝播する単色平面波の重力波の解が以下に求まる。

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz) \tag{1.49}$$

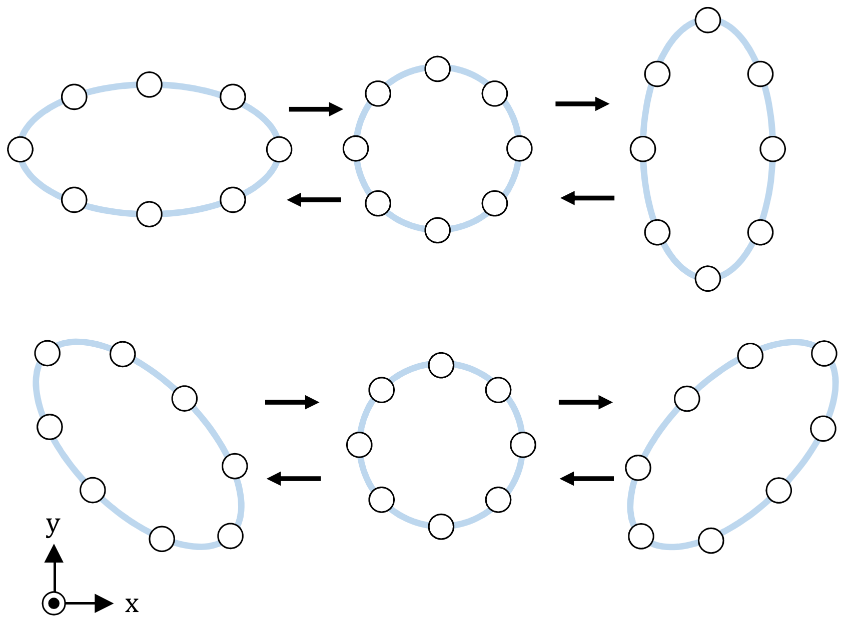

図 1.1: 重力波が入射した時の質点位置の変化。上の図がプラスモード、下の図がクロスモードを表している。

この式で、h_+、$h_\times$ は重力波が持つ 2 つの自由度を示しており、h_+ はプラスモード、$h_\times$ はクロスモードという。このように、適切なゲージをとることで横波でトレースレス条件を満たすことができる。このようなゲージをトランスバース · トレースレスゲージ (略して TT ゲージ) という。

1.4　重力波の影響

次に、重力波による 2 点間の距離の変化を考える。重力以外に力を受けていない自由粒子は次の測地線の方程式に従う。

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\epsilon\nu}\frac{dx^\epsilon}{d\lambda}\frac{x^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{1.50}$$

いま、2 つの自由質点 L_1、L_2 をとる。この 2 点の座標がそれぞれ $(0,0,0,)$、$(L,0,0)$ をとるとき、式 (1.49) で表される重力波が入射したときの L_1、L_2 の固有距離の変化 ΔL は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
\int_{L_1}^{L_2} |g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}} &= \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq |g_{xx}(L_1)|^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq \left[1 + \frac{1}{2}\tilde{h}_{xx}(L_1)\right]L \\
\therefore\ \Delta L &= \frac{1}{2}\tilde{h}_{xx}(L_1)L
\end{aligned} \tag{1.51}$$

以上から、重力波によって 2 点の自由質点の固有距離が変化することが示された。しかし、現実に生じる重力波による質点の変化は非常に小さく、一昨年にアメリカの LIGO が初めて取得した信号も 1m につき 1×10^{21}m ほどの変化でしかなかった。この信号を実際に取得するには非常に小さいため、これまでに様々な検出法が考案されたが、これまで効果的とされてきたのは共振器型検出器とレーザー干渉計型検出器のみである。次の章では、LIGO でも実践され検出に成功したレーザー干渉計型検出器について説明していく。

第2章　重力波の検出

現在未稼働を含めて地上に存在している重力波検出器はすべて前述のレーザー干渉計型の検出器である。これは、レーザー干渉計型検出器は規模を大きくすることでより精度の高い結果を望むことができるからである。この章ではそのレーザー干渉計型検出器の基本設計となるマイケルソン干渉計とその検出方法について述べる。

2.1　マイケルソン干渉計

マイケルソン干渉計とは、アルバート · マイケルソンが発明した最も一般的な干渉縞を観察できる光学装置である。その仕組みは、レーザー光を 2 つの経路に分割し、反射させ再び合流させる。その際、2 つの経路長が異なっていた場合、元のレーザー光に比べて光の強度が変化するというものである。基本となるマイケルソン干渉計の図を以下に示す。

図 2.1 の干渉計に対して、直行する 2 つの光路を x 軸と y 軸にとる。x-y 面に垂直な方向 (z 軸) から横波の重力波 (式 (1.49)) が入射すると、x-y 面内で、x 方向と y 方向が逆向きに伸び縮みをする。これによってマイケルソン干渉計の干渉縞の変化として重力波が観測できるのである。

では、重力波に対する干渉計の応答を求める。いま、z 軸に沿って進む+モードのみの重力波を考え、その振幅を h とする。干渉計の位相変化は光路差に比例するので、式 (1.51) を用いて次のように求める。

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda}(\Delta L_x - \Delta L_y) = \frac{4\pi}{\lambda}hL \tag{2.1}$$

$$\therefore\ \Delta L_x = -\Delta L_y = h\frac{L}{2} \tag{2.2}$$

つまり、L が大きいほど干渉計の光路の変化も大きくなる。しかし、理論的には、光が光路を往復するのにかかる時間 $2L/c$ が重力波信号の半周期より長くなると、その効果が積分されて小さくなってしまう。したがって、重力波の周波数が 1kHz ならば、干渉計の腕の長さ L は 75km で最も感度が良くなる。地上に存在する重力波検出器がどれも大規模なのはこれが理由であるが、75km などとても現実的な大きさではない。なので検出器のマイケルソン干渉計の両腕には Fabry-Perot 光共振器を組み込み、光路内でレーザーを何度も往復させることで光路長を稼いでいるのである。

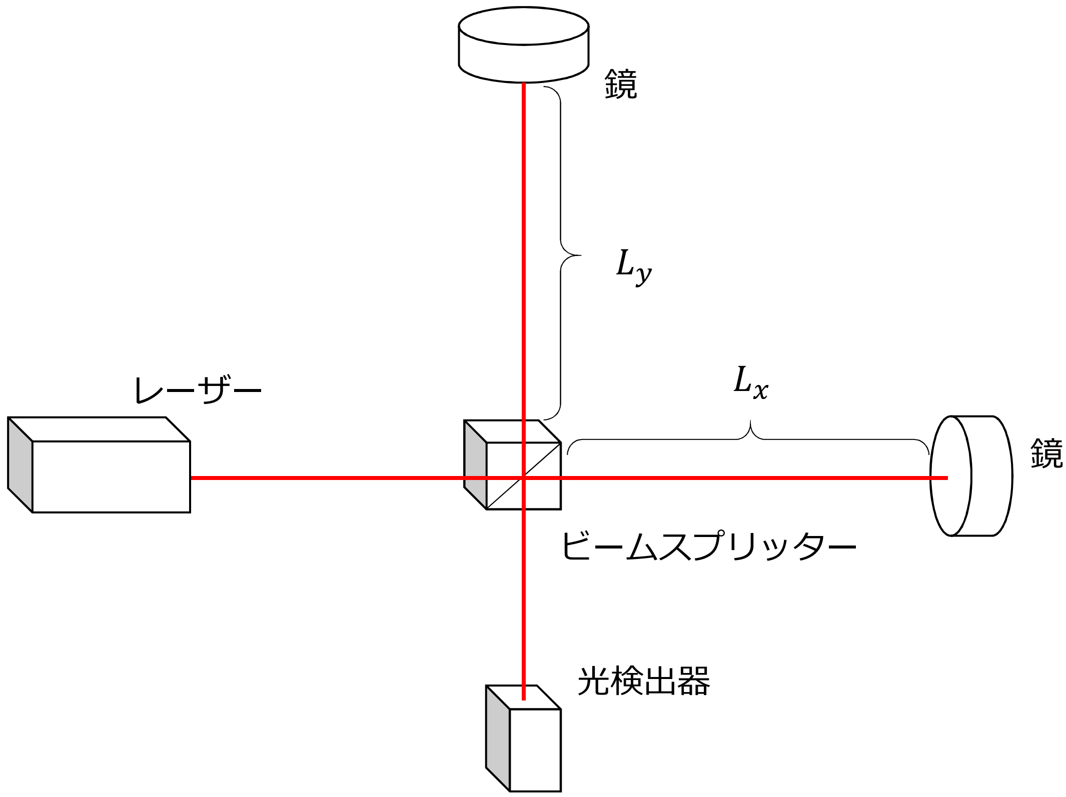

図 2.1: マイケルソン干渉計

2.2　出力モードクリーナー

一口にマイケルソン干渉計といっても、それだけでは非常に小さな信号である重力波は捉えられない。地面振動や熱雑音といったノイズを重力波の振幅未満に抑えることでようやく検出できるのである。そのためには、ノイズを除去するための様々な装置を導入する必要がある。今回はその一つである出力モードクリーナー (Output Mode Cleaner=OMC) について説明する。

出力モードクリーナーとは図 2.1 でいうと、ビームスプリッターと光検出器の間に設置する装置で、合流したレーザー光の空間的なモードを整形して、重力波の信号はそのままにノイズを除去する役割を持つ。出力モードクリーナーが取り除くのは、高次モードと呼ばれる形状のレーザー光である。重力波検出器であるLIGO や KAGRA は先ほど説明した Fabry-Perot 光共振器を組み込んだマイケルソン干渉計の形をしており、光共振器内部ではレーザー光は約 1000 回に及ぶ回数往復している。しかし、その過程でレーザー光は鏡表面の凹凸や曲率誤差，角度誤差などによって複雑な光路を通って検出器へ出力されてしまう。こういった光は高次モードと呼ばれ、基本モードのガウシアンビームを光共振器に入射したとしてもその強度分布は変化してしまっている。

出力モードクリーナーの構造を図 2.3 に示す。基本モードと高次モードでは共

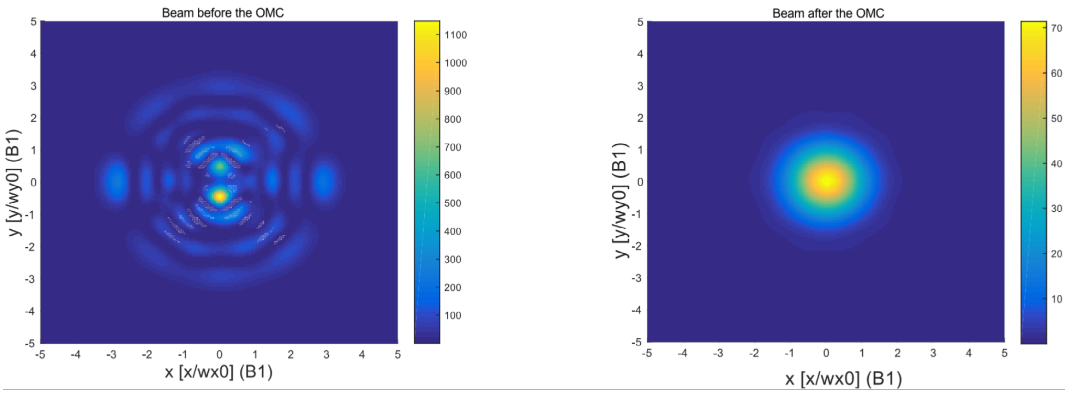

図 2.2: 左の図が出力モードクリーナーに入射する前の高次モードの光。右図が出力モードクリーナーから検出された基本モードの光になっている。

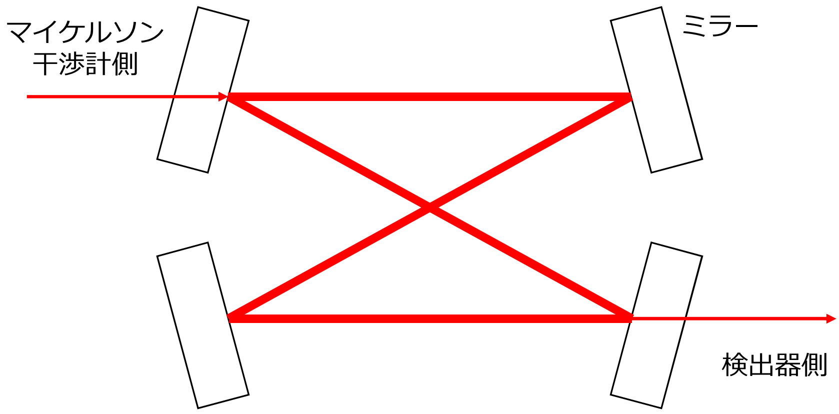

図 2.3: 出力モードクリーナ

振条件が異なるので、この共振器によって高次モードは反射し基本モードのみを透過することができる。基本モードには重力波の情報も含まれているので、この共振器を導入して重力波が取れなくなる心配もない。

第3章　共振器の制御

出力モードクリーナーは精密な共振器であるが故に、干渉計から出力された光の入射位置や入射角が変化すれば正しく動作しなくなってしまう。そのため、マイケルソン干渉計と出力モードクリーナーにはレーザー光の位置と角度の制御をかける必要がある。この章ではその制御の仕組みについて説明する。

3.1　フィードバック制御について

こういった制御を実行するには、干渉計及び共振器の鏡の動きを信号として鏡に送り、位置や角度を修正するという制御の形になる。そのために行う制御の種類にはフィードバック制御が適切である。フィードバック制御とは、出力信号を目標値へ一致させるような制御であり、外乱を修正することができる。以下、フィードバック制御の特性を記述するためにブロック · ダイアグラムを用いる。図 3.1 に単純なブロック · ダイアグラムを示した。A は伝達関数であり、電圧 V_0 の信号がこのブロックに入力されると V_1 が出力されるという図であり、式で表せば以下のようになる。

$$V_1 = A \cdot V_0 \tag{3.1}$$

このブロック · ダイアグラムを使えば、フィードバック制御図は図 3.2 のように簡単に記すことができる。このフィードバック制御の伝達関数は以下の式で示される。

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{H}{1-G} = \frac{H}{1-HF} \tag{3.2}$$

式 (3.2) の右辺はクローズドループゲイン、$G = HF$ をオープンループゲイン、$1+G$ をフィードバック量という。

3.2　フィードバック制御の不安定性

フィードバック制御は出力される信号を返すことで目標値に近づけるのだが、式 (3.2) で $HF = 1$ になってしまうと伝達関数は発散し不安定になって発振状態

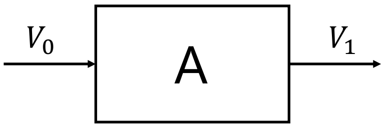

図 3.1: ブロック · ダイアグラム

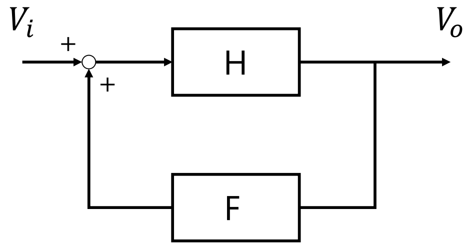

図 3.2: フィードバック制御のブロック · ダイアグラムによる記述

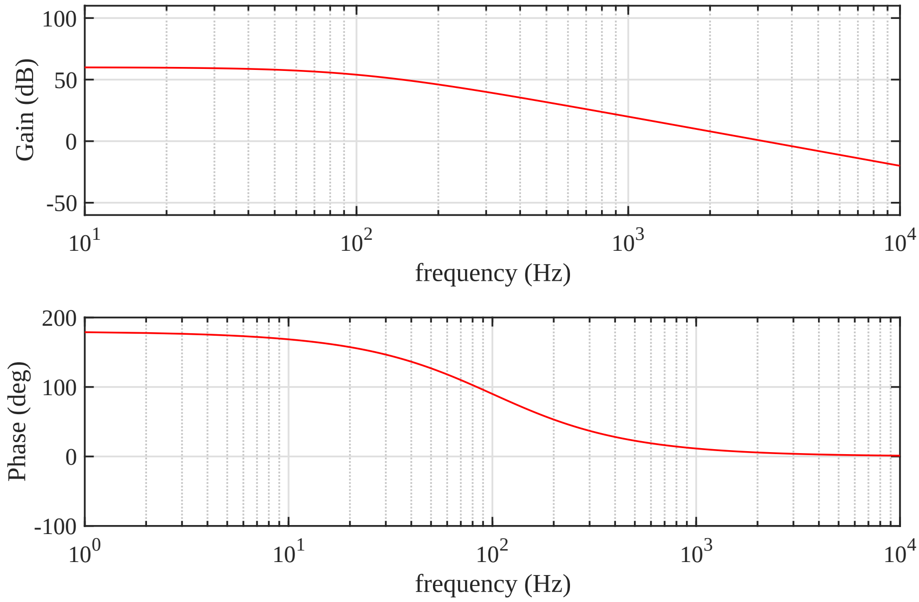

図 3.3: ボード線図

に入ってしまう。本実験での要となる制御の安定性は、このクローズドループゲインが発振しないかという点が指標になっている。それについてオープンループゲイン HF を、ボード線図という、伝達関数のゲイン (絶対値) と位相遅れで表すことで可視化することができる。

例えばオープンループゲイン HF の伝達関数が次のようなカットオフ周波数が 100Hz の二次のローパスフィルタの形になったとする。

$$HF(\omega) = -\frac{10^3}{(1 + i\frac{\omega}{\omega_0})^2} \tag{3.3}$$

$$(\omega_0 = 2\pi \times 100\mathrm{Hz})$$

これをボード線図に書き表すと、図 3.3 のようになる。1 つ目の図はゲイン、2 つ目は位相遅れと呼ばれる。この図を見ると、約 3kHz あたりで伝達関数のゲインが 1 になって、位相遅れが 0 になっている。このとき、式 (3.2) に代入される HF は+1 になり、クローズドループゲインが発振してフィードバック回路が不安定になってしまうということである。これを回避するためには、ゲインを下げて、位

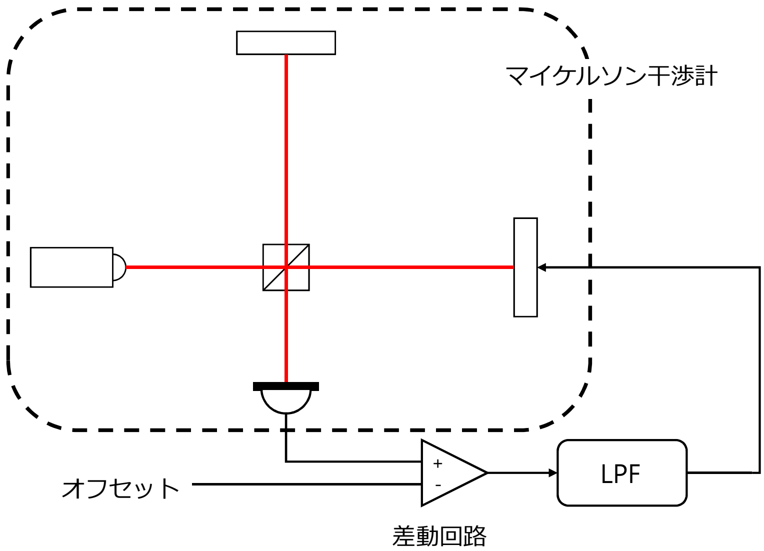

図 3.4: マイケルソン干渉計の制御図.1

相遅れが 0 になるより早くゲインを 1 に到達させるといった対策を考える必要が生じてくる。

3.3 マイケルソン干渉計の制御

本論文では出力モードクリーナーへのデジタルシステム導入の足掛かりのため、同じように動作点への制御が必要なマイケルソン干渉計を用いて制御実験を行っている。マイケルソン干渉計を用いるのは、共振器と干渉計における動作点への引き込みの難易度の違いからである。図 3.4 に最も簡単なマイケルソン干渉計の制御図を記す。

マイケルソン干渉計のミラーの位置が微小に変動すると、検出器に入る光強度は光路長差が 1 波長変わるたびに明暗を繰り返す。この際、ミッドフリンジ付近が光路長変化に対する干渉計の強度変化が最大になり、かつ光路長の変化の向きで信号の増減が異なるので、オフセットをかけてミッドフリンジでエラー信号が 0 になるようにする。これをここに適切なフィルタを通すことで、エラー信号が生じると常にミッドフリンジへ引き込まれるようなフィードバック制御がされるのである。

図 3.4 の LPF はローパスフィルタであり、低周波のエラー信号のみを増幅するために入っている。この仕組みは理論上は問題ないが、実際に実験を行うと、光には強度雑音があり、オフセットが一定でもミッドフリンジでのエラー信号が 0 ではなくなり、揺らぎが生じてしまう場合がある。これを防ぐために図 3.6 のような制御図を設計する。これならばレーザー光の強度が半化しても 2 つの信号は同様に変化するので、ミッドフリンジは 0 になり続け強度雑音は生じなくなる。また、周波数雑音を低減するために、干渉計の両腕の長さは等しくされている。

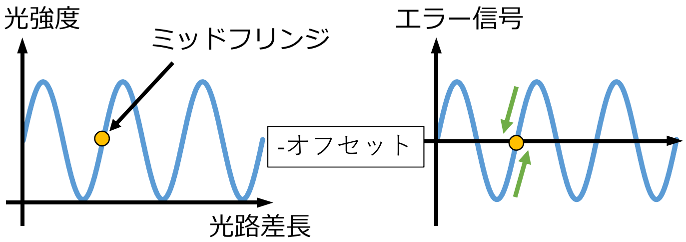

図 3.5: 出力されるエラー信号

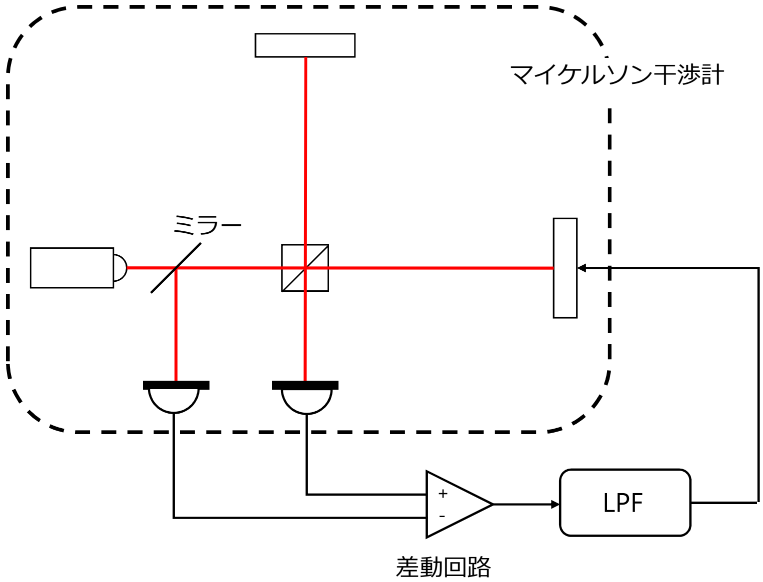

図 3.6: マイケルソン干渉計の制御図.2

第4章　デジタルフィルタ

ここまではデジタルシステムを抜きにした制御の話をしてきたが、本実験の主目的はデジタルシステムの導入である。デジタルフィルタとは、ある周波数帯域の信号を通過させ、その帯域外の信号を阻止するフィルタをプログラミング言語などのデジタルシステムで開発されたものであり、オペアンプや抵抗などを用いて作られたものはアナログフィルタと呼ばれる。この章ではデジタルシステムの特性および基本的な考え方を示し、理論的に製作が可能なデジタルフィルタを紹介していく。

4.1　デジタルシステムの基本

デジタルシステムは入力されたアナログ信号を一定の時間間隔でサンプリングしデジタル信号へと変換する。(このときのサンプリングした点数は、サンプリング周波数と言って、1 秒間に何点離散信号を取得したかで表される。) つまりデジタル信号は当然離散時間信号であり、連続時間信号であるアナログ信号とは表式が異なる。

次式に離散時間正弦波信号を定義する。

$$x[n] = A\cos(\omega_0 T_0 n + \phi) \tag{4.1}$$

ω_0やϕといった表示は連続時間信号と同じである。n は時刻を表す整数 $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ であり、無次元量である。T_0 はサンプリング周波数の周期にあたり、n と n+1 の時間幅を表している。この周期はデジタルシステム固有の値である (整数倍に増やすことができても、減らすことはかなわない)。本論文では sin 波と cos 波を正弦波信号と総称する。

4.1.1　離散時間 LTI システム

離散時間正弦波信号である式 (4.1) は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} x[n] &= \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ &\quad + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \end{aligned} \tag{4.2}$$

ただし、$\delta[n]$ は次の式を満たす。

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

式 (4.2) からわかるように、$x[n]$ は、時間推移された単位インパルス信号 $\delta[n-k]$ の線形結合で表現することができる。線形結合ということは、式 (4.2) の $x[n]$ があるデジタルシステムに入力され $y[n]$ が出力されるとすると、右辺のそれぞれのインパルス信号に対応するシステムの応用を計算し総和をとれば、出力 $y[n]$ を計算することができるということである。実際に入力 $\delta[n-k]$ に対応するシステムの応用を $h_k[n]$ とする (これをインパルス応答と呼ぶ。) と、次式が得られる

$$\begin{aligned} y[n] &= \cdots + x[-2]h_{-2}[n] + x[-1]h_{-1}[n] + x[0]h_0[n] \\ &\quad + x[1]h_1[n] + x[2]h_2[n] + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \end{aligned} \tag{4.3}$$

つまり、$y[n]$ を出力する際、$x[n]$ に $x[n-1]$ を加算するというように、直前の離散信号の情報を付与できるということである。

また、システムの特性が時間によって変化しない、すなわち任意の k に対して入力 $\delta[n-k]$ に対する応答を $h[n-k]$ と書けるならば、インパルス応答は

$$h_k[n] = h[n-k] \tag{4.4}$$

と記述することができる。このような特性をシステムの時不変性 (time-invariant property) という。

以上から、入力 $x[n]$ に対する出力は式 (4.3) に式 (4.4) を代入することで次のように書き換えられる。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{4.5}$$

この式は離散時間線形時不変システム、通称離散時間 LTI システム (Linear Time-Invariant system) と呼ばれる入力関係を記述する式である。$x[n]$ を離散時間 LTI システムの入力信号、$y[n]$ を出力信号と呼ぶ。式 (4.5) 右辺の演算をたたみ込みといい、次のように式 (4.5) を表記することができる。

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{4.6}$$

4.1.2 z 変換

前章でフィードバック回路の伝達関数をボード線図に描き起こす際にはラプラス変換を用いて式 (3.3) を導出した。ラプラス変換は、連続時間フーリエ変換をよ

り広いクラスの信号に適応できるように拡張できるものと解釈でき、実際にボード線図のゲイン遅れはラプラス変換を利用することで求めることができている。離散時間信号でも、連続時間の場合と同様な拡張が可能である。それが z 変換である。以下に離散時間信号 $x[n]$ の z 変換 $X[n]$ とおき、その定義式を示す。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{4.7}$$

ただし、z は複素変数である。いま $z = e^{i\omega T_0}$ とすれば、大きさ 1 の複素変数に対して、右辺は $x[n]$ のフーリエ変換となり、$X(z)$ は引数が ω の関数となる。こうすることでデジタルフィルタのゲインと位相遅れの周波数応答を求めることができる。

4.2 デジタルシステムの特性

デジタルフィルタにはアナログフィルタにはない利点が多く存在するが、注意点や問題点も同様に存在する。それらを以下に示す。

- デジタルフィルタの利点
  - 回路の構成はメモリ上で行われるので、ハードウェア化が容易であり、小型化、大量生産が可能である。また、メモリを書き換えるだけでフィルタの係数値も簡単に書き換えられる。
  - アナログ回路のような温度変化や経年変化による特性の変化が存在しない。
  - 回路内の雑音を考慮する必要がない。
  - アナログフィルタでは存在しない回路を作ることができる。例えば後述する本実験で用いた FIR フィルタなどがデジタル特有のものである。
- デジタルフィルタの問題点
  - デジタルフィルタの係数量子化による特性の誤差、演算結果の丸目や切り捨てによる誤差といった、アナログ回路にはなかったあたらしい誤差が生まれる可能性がある。
  - リミットサイクルと呼ばれる一定入力に発生する発振現象が起きる可能性がある。
  - アナログフィルタに比べて大きな遅延が生じやすい。本実験でデジタルフィルタで制御可能かどうかが決まる要因としてはこれが大きい。

すでに重力波を観測したアメリカの LIGO ではマイケルソン干渉計の制御にもデジタルフィルタが用いられている。マイケルソン干渉計の制御ならばノイズが限りなく低減された回路を作らなければならないが、その条件においてデジタルフィルタの経年劣化がない点と、回路内の雑音がない点が役に立っている。

4.3　デジタルフィルタの表現

4.3.1　周波数応答関数

デジタルフィルタは典型的な離散時間 LTI システムであるので、式 (4.5) と式 (4.6) で次のように関係づけられる。

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]u[m] = h[n] * u[n] \tag{4.8}$$

ここで、$h[n]$ はフィルタの応答係数であり、値の増減をここで変える。m はフィルタの次数と呼ばれる。式 (4.8) を z 変換するとデジタルフィルタの伝達関数 $H(z)$ が求められる。いかにその式を示す。

$$y(z) = H(z)u(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}} u(z) \tag{4.9}$$

この伝達関数 $H(z)$ において、$n_b = 0$、すなわち

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}} \tag{4.10}$$

のとき、デジタルフィルタは無限インパルス応答フィルタと呼ばれるものになる。簡単のため $b_0 = 1$ としている。以降本論文ではこのフィルタは IIR(Infinite Impulse Response) フィルタと呼ぶ (式 (4.9) の形をしていても IIR とみなす)。

また、$n_a = 0$、すなわち

$$H(z)u(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b} \tag{4.11}$$

となるときは、有限インパルス応答フィルタと呼ばれる。以降は FIR(Finite Impulse Response) フィルタと呼ぶ。ここで $z = e^{i\omega T_0}$ とおけば、式 (4.11) 伝達関数は周波数応答関数となるので、アナログフィルタと同じようにローパスフィルタやハイパスフィルタとして稼働させせることが可能になる。また、この周波数応答関数の絶対値と位相特性を見れば、図 3.3 のような形で表すことも可能になる。

4.3.2　デジタルフィルタの設計仕様

デジタルフィルタは matlab の Filter Builder という機能を使えば設計仕様を任意に設定してシミュレーションをすることができる。図 4.1 にデジタルフィルタの設計仕様で設定することができる周波数および振幅のパラメーターを示す。図の青線はローパスフィルタの一例である。ω_p より低い周波数では高い周波数帯に比べて減衰がない。この帯域を通過帯域という。そして、ω_p〜ω_s の帯域を遷移帯域、ω_s より高い帯域を阻止帯域と呼ぶ。通過帯域リップルとは通過帯域での許容される誤差の幅、阻止帯域減衰量は通過帯域の最小値と阻止帯域の最大値の差である。Filter Builder では ω_p、ω_s、通過帯域リップルまたは阻止帯域減衰量などを設定できる。

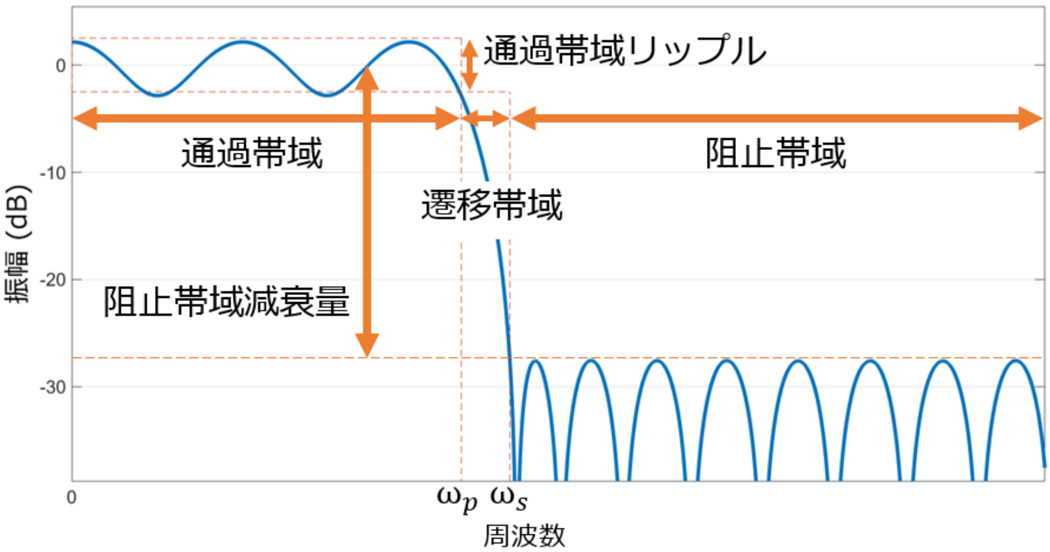

図 4.1: フィルタの設計仕様

4.4 デジタルフィルタの実現

すでに述べたように、デジタルフィルタは FIR フィルタと IIR フィルタに大別される。まずはそれぞれの利点と不利点について述べ、どちらを使用するかの基準を示していく。

- FIR フィルタの利点
  - 常に安定性が保証されている
  - 完全直線位相特性を実現できる
  - リミットサイクル発振を生じない
  - 基本が積和演算なのでフィルタの実装化に適している。
- FIR フィルタの不利点、問題点
  - 精度の高いフィルタを作る際には、フィルタ次数を高く選ぶ必要があるためハードウェア量が増大する。
  - 位相遅れが大きい。
  - フィルタ設計を行う場合、反復計算が必要である。
- IIR フィルタの利点
  - フィルタ次数が少なくて良いため、ハードウェア量が少なめである。
  - 全域通過回路を実現できる。
- IIR フィルタの不利点、問題点

– リミットサイクル不安定を生じやすい。
– 極が存在するため不安定になる可能性がある。
– 群遅延の歪みが大きい

FIR と IIR フィルタの選定基準

- フィルタの安定性の保証、直線位相特性の確保、そしてリミットサイクル発振などの回避を目的とする場合 ⟹FIR フィルタ
- ハードウェア量を減らし、フィルタの応答を早くしたい場合 ⟹IIR フィルタ

これらの選定基準を踏まえて、出力モードクリーナーを制御するためのフィードバックに組み込むことを考え、本実験ではより安定性の高い FIR フィルタを用いることにする。

4.4.1 FIR フィルタの実現

FIR フィルタの回路実現を図 4.2 に示す。図において、回路はデータの時刻サンプルをシフトする遅延器 (図では z^{-1} で表記)、信号を計数倍する係数増倍器 (図では係数を h_i で表記)、そして信号の加算を行う加算器で構成されており、この 3 つをデジタル回路の基本素子と呼ぶ。また、図で示した通り、デジタルシステムでの計算は z 変換される前の式 (4.1) で示した離散時間正弦波信号を用いるのだが、式 (4.11) のように FIR フィルタは線形結合なので z 変換しても $y[n]$ の式の形は変わらず、伝達関数の形の式でプログラムを組むことが可能になっている。(IIR フィルタではこうはいかない。)

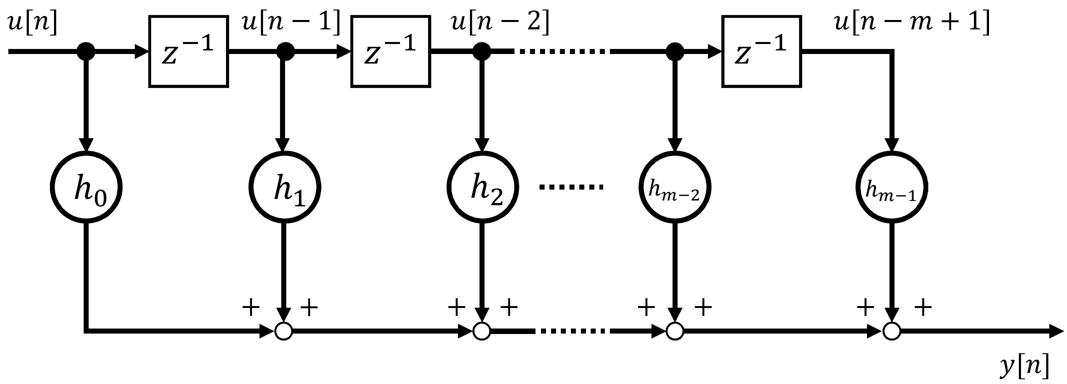

図 4.2: FIR フィルタの回路実現

4.4.2　FIR フィルタの遅延特性

FIR フィルタでローパスフィルタやハイパスフィルタを作ろうとすれば、自然とそのインパルス応答 $h_k[n]$ は中心対称、すなわち

$$h[n] = h[m-1-n], \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.12}$$

を満たす必要がある。なぜなら、離散信号の重ね合わせである FIR フィルタの設計は、フーリエ変換に基づいているからである。そういった特性があるならば、FIR フィルタは周波数応答関数 $H(e^{i\omega T_0})$ から位相特性を求めるまでもなく、サンプリング周波数とフィルタの次数 m でその遅延特性が見えてくるのである。まず、デジタルフィルタはインパルス応答が中心対称で、かつ以下の式を満たしているとき、直線位相特性を持つ。

$$\theta(\omega) = argH(e^{i\omega T_0}) = \alpha\omega \tag{4.13}$$

そして、FIR フィルタはフィルタの次数 m の偶奇によらず次の条件を満たしている。

$$H(e^{i\omega T_0}) = e^{-i\omega\frac{n-1}{2}} \times (\omega \text{ の実関数}) \tag{4.14}$$

位相特性 $\theta(\omega)$ は右辺の第一項にのみ依存しているので、式 (4.14) は

$$\theta(\omega) = \alpha\omega, \qquad \alpha = \frac{n-1}{2} \tag{4.15}$$

と書き換えられ、これは式 (4.13) を満たしていることがわかる。すなわち、FIR フィルタの位相遅れは直線状になることがわかる。

また、FIR フィルタによる周波数 ω の信号の位相遅れは次式で表すことができる。

$$\frac{m}{2} \times \frac{\omega}{\omega_0} \times 180 \quad [deg] \tag{4.16}$$

m はフィルタの次数、ω_0 はサンプリング周波数である。

4.4.3　IIR フィルタの実現

IIR フィルタの回路実現を図 4.3 に示す。IIR フィルタを離散時間信号 $y[n]$ で表そうとすると、$n_a = n_b = 2$ として、次のように表される。

$$y[k] = -a_1y[k-1] - a_2y[n-2] + b_0u[k] + b_1u[k-1] + b_2u[k-2] \tag{4.17}$$

伝達関数を求めると、

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \\ &= b_0 + \frac{(b_1 - b_0a_1)z^{-1} + (b_2 - b_0a_2)z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

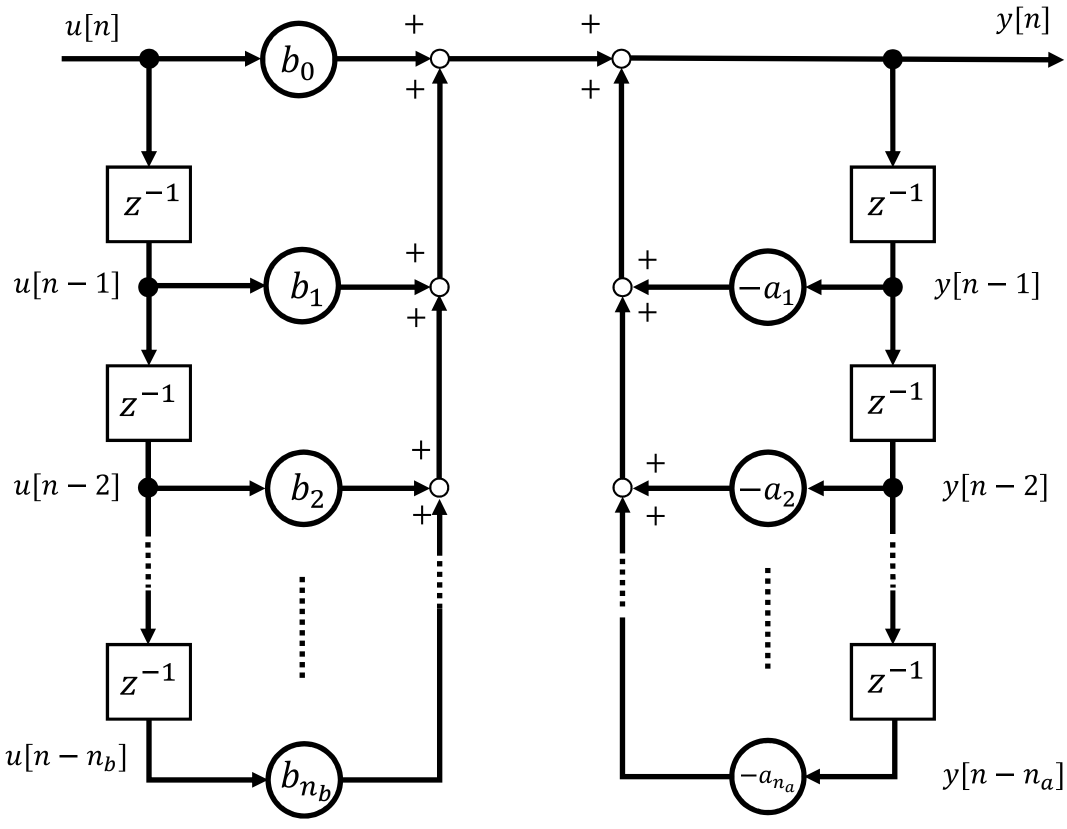

図 4.3: IIR フィルタの回路実現

が得られるが、これをプログラミングで設計しようとすると FIR ほどには単純には示せない。以下にその設計方法を示す。

いま、状態変数ベクトルを次のように定義する。

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

これによって、式 (4.18) の伝達関数を次のような状態空間表現に変換することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}u[k] \\ y[k] &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] + du[k] \end{aligned}$$

ただし、次の等式を満たす。

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{c} = \begin{bmatrix} b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad d = b_0$$

これは現代理論制御における可制御正準系という実現形式である。この状態空間表現をプログラムのコードに入力することによってによって式 (4.18) の伝達関数のように振る舞う IIR 回路が得られる。ここでは 2 次系の例を示したが、n 次系に対しても同様に回路実現を行うことができる。

第5章　実験

本実験ではフィードバック制御を用いたデジタルローパスフィルタの性能評価が目的である。そのための基準がフィードバック信号を正確にかつ一定以下の位相遅れの範囲でどれだけ安定したフィードバック制御ができるかが評価内容になっている。実験ではマイケルソン干渉計のフィードバック制御にデジタルフィルタを組み込み、そのオープンループゲインのゲインと位相遅れを測定した。なおここでは、マイケルソン干渉計の制御が成功したとみなすのは、3 分間制御が崩れない状態と設定する。

5.1　実験機器

本実験で使用した主要な機器を以下に挙げる。

1. デジタル機器

   - RTC-6000
     本実験の核となるデジタルフィルタをダウンロードする装置。ソフトウェア開発製品の Visual Stuio 内で C#言語を用いてプログラムしたデジタルフィルタをここにダウンロードすることでデジタルフィルタとして振舞うことができる。デジタルフィルタのサンプリング周波数はこの機器固有のもので、10kHz になっている。
   - AD 16-64(LPCI)LA
     入力されたアナログ信号をデジタル信号に変換する。RTC-6000 の PCI バスに差し込まれた 16bit のインターフェースボード。
   - DA 16-8(LPCI)L
     RTC-6000 の内部で処理されたデジタル信号をアナログ信号に変換して出力する。こちらも RTC-6000 の PCI バスに差し込まれている。
   - ATP-32F
     アナログ信号を入力するための BNC 端子台。この装置から AD 16-64(LPCI)LA を通して RTC-6000 に入力される。
   - ADC-68M/96F
     入力信号用のシールドケーブル。AD 16-64(LPCI)LA と ATP-32F では接続端子が異なっているので、このシールドを通す必要がある。

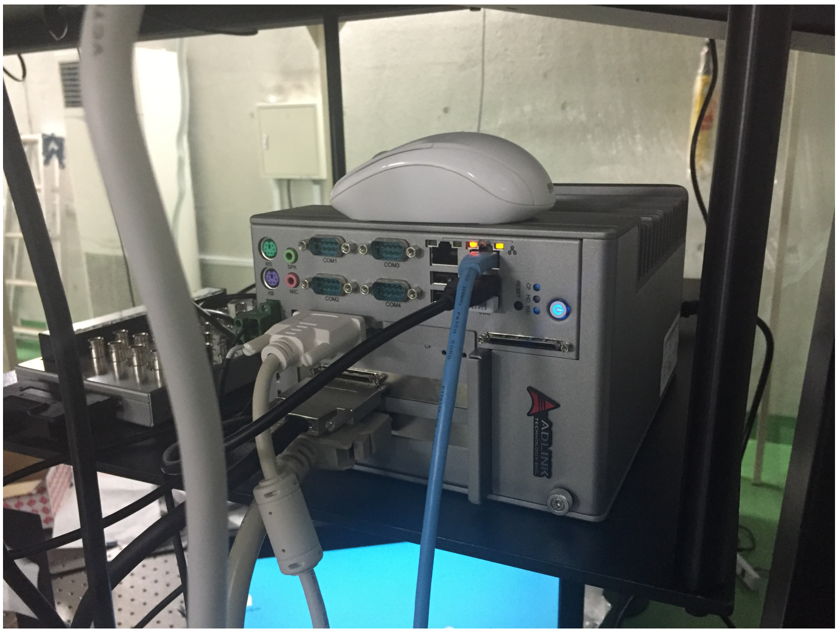

図 5.1: 実験に利用した RTC-6000

- PCA-50PS
  出力用信号用のシールドケーブル。DA 16-8(LPCI)L に接続して、BNC 端子に接続することで、BNC ケーブルに接続し他の装置へ出力信号が送れるようになる。

2. 光学素子

   - レーザー光源
     HeNe レーザーを使用している。波長は 633nm、最大出力は 4mW のものを使用している。
   - ピエゾ素子
     内部を流れる電圧によって伸縮する素子。本実験のマイケルソン干渉計の制御は図 3.6 の形で行われるが、先端に鏡を接着したピエゾ素子にローパスフィルタから返ってきたフィードバック信号を入力することで、鏡の位置を調整する仕組みとなっている。ピエゾ素子の伸縮度は 1.35×10^{-7}m/V となっている。

3. SR560
   本実験は宗宮研究室では初めての試みとなっており、試験段階となっている。なので、デジタルフィルタのみで制御のためのローパスフィルタにするのではなく、フィードバックの可不可に関わる 1kHz までの周波数応答をデジタルフィルタに任せ、それ以上の周波数帯ではアナログフィルタで減衰した状態で実験を行った。SR560 は、遮断周波数 1kHz のローパスフィルタの役割を担っている。

また、以後アナログフィルタによる制御という言葉が登場するが、これはSR560 がローパスフィルタの役割を果たしている状態を指す。

5.2 実験準備

最初に、RTC-6000 にデジタルフィルタをダウンロードする。以下に自作したデジタルフィルタの入力信号 $u[n]$ と出力信号 $y[n]$ の関係を示す。

$$\begin{aligned} y[n] &= -3(h_0u[n+10] + h_1u[n+9] + h_2u[n+8] + h_3u[n+7] + h_4u[n+6] \\ &\quad + h_5u[n+5] + h_6u[n+4] + h_7u[n+3] + h_8u[n+2] + h_9u[n+1] \\ &\quad + h_{10}u[n] + h_{11}u[n-1] + h_{12}u[n-2] + h_{13}u[n-3] \\ &\quad + h_{14}u[n-4] + h_{15}u[n-5] + h_{16}u[n-6] + h_{17}u[n-7] \\ &\quad + h_{18}u[n-8] + h_{19}u[n-9] + h_{20}u[n-10]) \\ &= -3\sum_{m=0}^{20} h_m u[n-m+10] \end{aligned} \tag{5.1}$$

これは FIR フィルタの形をしている。m はデジタルフィルタの次数である。このデジタルフィルタは z 変換によって次のような伝達関数 $H(e^{i\omega T_0})$ を持つことが示される。

$$H(e^{i\omega T_0}) = -3\sum_{m=0}^{20} h_m (e^{i\omega T_0})^{-m} \tag{5.2}$$

T_0 はサンプリング周波数の周期である。このときの係数 h_i は次のようになっている。

$$\begin{aligned} h_0 = h_{20} &= 0.0416 \\ h_1 = h_{19} &= 0.0246 \\ h_2 = h_{18} &= 0.0308 \\ h_3 = h_{17} &= 0.0371 \\ h_4 = h_{16} &= 0.0433 \\ h_5 = h_{15} &= 0.0491 \\ h_6 = h_{14} &= 0.0543 \\ h_7 = h_{13} &= 0.0586 \\ h_8 = h_{12} &= 0.0618 \\ h_9 = h_{11} &= 0.0638 \\ h_{10} &= 0.0645 \end{aligned}$$

この値は、matlab の FilterBuilder によって導出した値を有効数字三桁で表した値である。この伝達関数によるデジタルフィルタは図 5.2 のような周波数応答を見せる。このローパスフィルタを図 3.6 に組み込んだ実験図を図 5.3 に示す。発振器

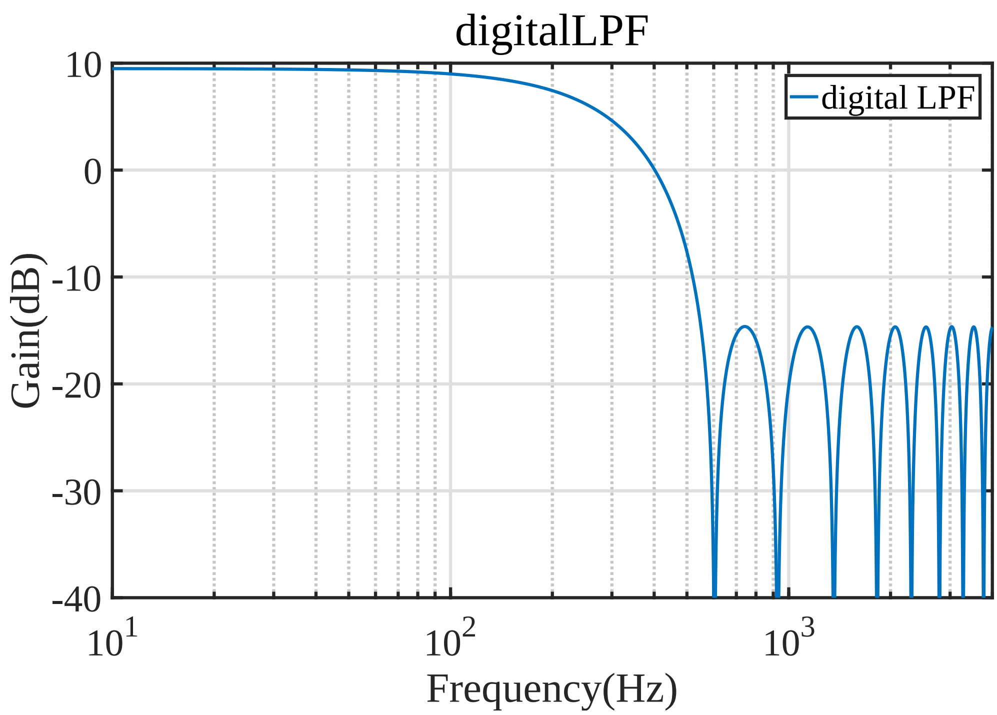

図 5.2: 自作したデジタルローパスフィルタの周波数応答

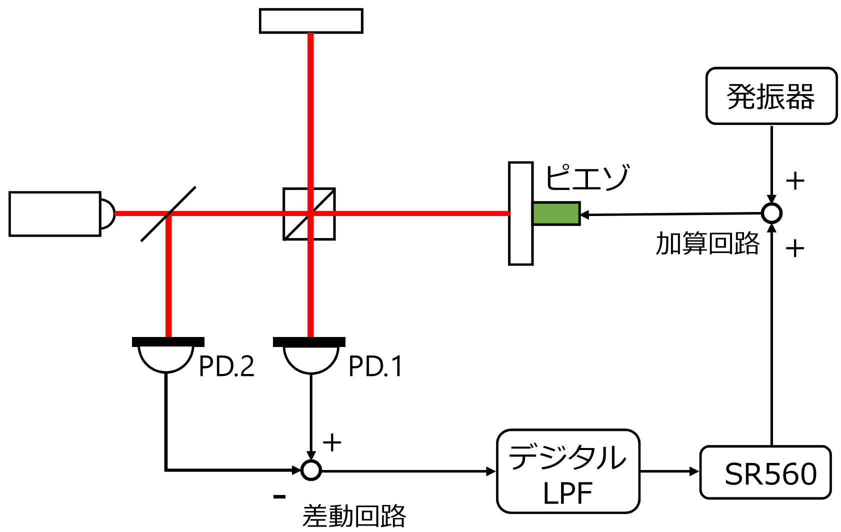

図 5.3: 実験のセットアップの概略図

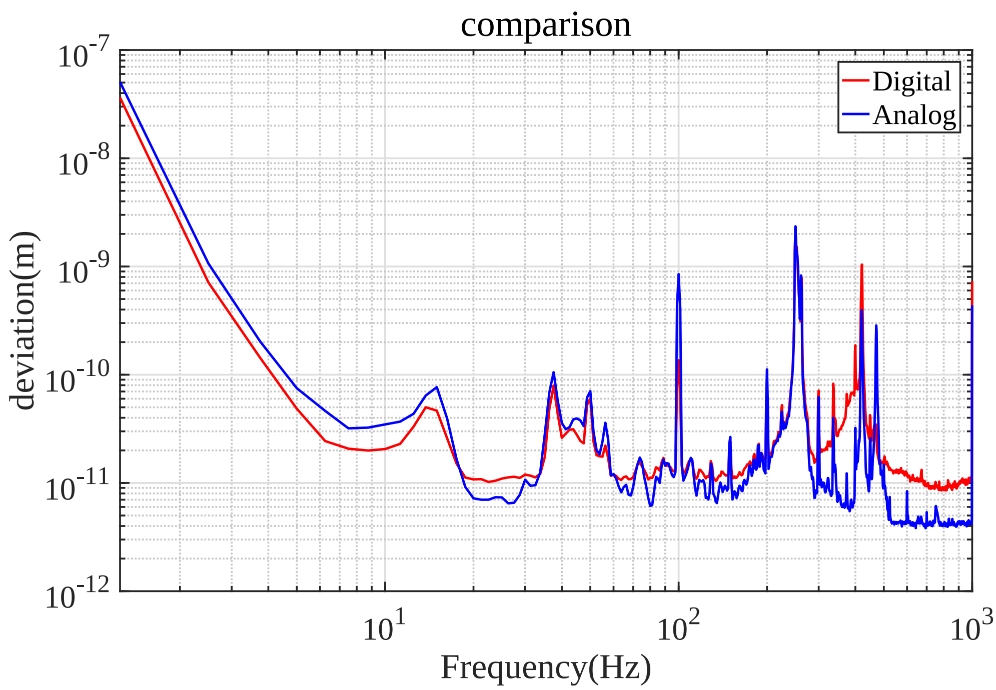

図 5.4: デジタルフィルタとアナログフィルタによる制御感度の比較

はピエゾの伸縮のキャリブレーションのために使っている。また、図中の加算回路、および減算回路はオペアンプ (OP27) を使ったアナログ回路である。

5.3　実験結果

5.3.1　アナログフィルタによる制御との感度比較

結果から述べると、デジタルフィルタでもマイケルソン干渉計の制御は成功し、3 分以上制御が崩れることはなかった。図 5.4 にデジタルフィルタによる制御状態とアナログ回路のみの制御状態の感度を比較した図を示す。

この図は、マイケルソン干渉計の腕の距離がグラフの値より大きな値ずれればそれを恒常的なノイズ以外のものとみなすということであり、信号の時間変化を見ていればその変化を視覚的にとらえることができるのである (重力波検出器は、100Hz 帯での値を 1m あたり 10^{-21}m まで下げることで観測が可能になる)。図を見る限りでは、アナログフィルタによる制御とデジタルフィルタでの制御では周波数帯によっては違いがあるが、大きな変化にはなっていない。この点から、デジタルフィルタによってフィードバック信号を離散信号として処理をしてもフィードバックしたい情報が失われることはないということが分かった。

しかし、デジタルフィルタの制御を行う際、周囲のファンの音などが妨げとなって制御が安定しない場合がある。アナログフィルタの制御ではファンの音が生じていても制御状態は安定している。つまり、フィードバックの感度では並んでも

安定性では劣っているということがわかる。ここで、3 章で述べたフィードバック制御の不安定性を参考にしてデジタルフィルタの安定具合を調べていく。

5.3.2 デジタルフィルタによる制御の安定具合

デジタルフィルタによる制御状態のオープンループゲインをボード線図に示すことでその安定性を推し量ることができる。図 5.3 によるフィードバック図を図 3.2 のようにブロック H と F にまとめたい。すると、次のように区分することができる。

- ブロック H
  1. マイケルソン干渉計本体
  2. 差動回路
- ブロック F
  1. デジタル LPF
  2. SR560

よってオープンループゲイン G=HF を求めるにはまずはクローズループゲイン (式 (3.2)) にブロック F を掛けた値 $\frac{HF}{1-HF}$ を求める必要があるのだが、そのためには SR560 と加算回路の間の信号をスペクトラムアナライザで調べればよい。クローズループゲインの結果を図 5.5 に示す。これをオープンループゲイン HF に示しなおす。結果を図 5.6 に示す。この伝達関数を見ると、遮断されていない低周波数帯と遮断された高周波数帯の信号の大きさの差は 20 数 dB、すなわち電圧の大きさは高周波数帯では 10 分の 1 程度の減衰になっている。アナログフィルタで制御するならばもっと大きな差が見込め、それに比べるとやはり安定性に乏しいことが見て取れる。

この結果を改善したいが、図5.6のゲインと位相遅れを見てみると、およそ 300Hz 程度でゲインは 1 になっているのだが、位相遅れはおよそ 400Hz 程度で 180 度回転してしまっている。(3 章では 180 度から 0 度になったときに式 (3.2) の分母が発散して不安定になっているが、今回はデジタルフィルタの伝達関数が式 (5.2) で示したように-1 をかけて反転させているので 0 度から-180 度になったときに HF=+1 になりクローズループゲインの分母が発散するのである。)

この状態でデジタルフィルタのゲインを上げる (式 (5.2) における係数 3 を増加する) とゲインが 1 になる周波数帯が 400Hz に接近してしまい、発振の可能性が高くなる。そのため、これ以上の改善は難しくなっていく。

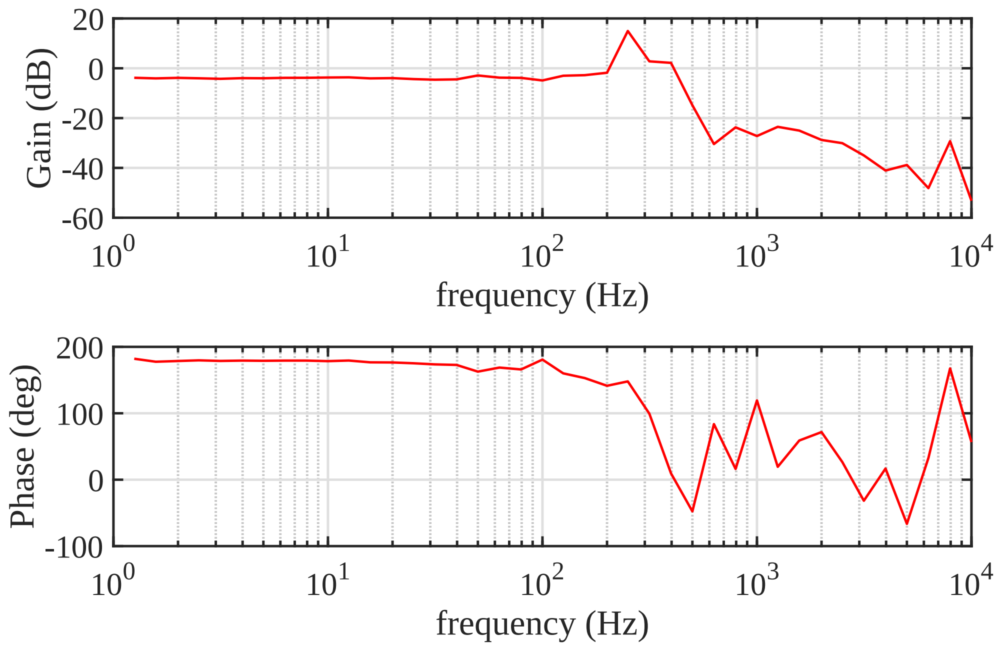

図 5.5: $\dfrac{HF}{1-HF}$ の伝達関数

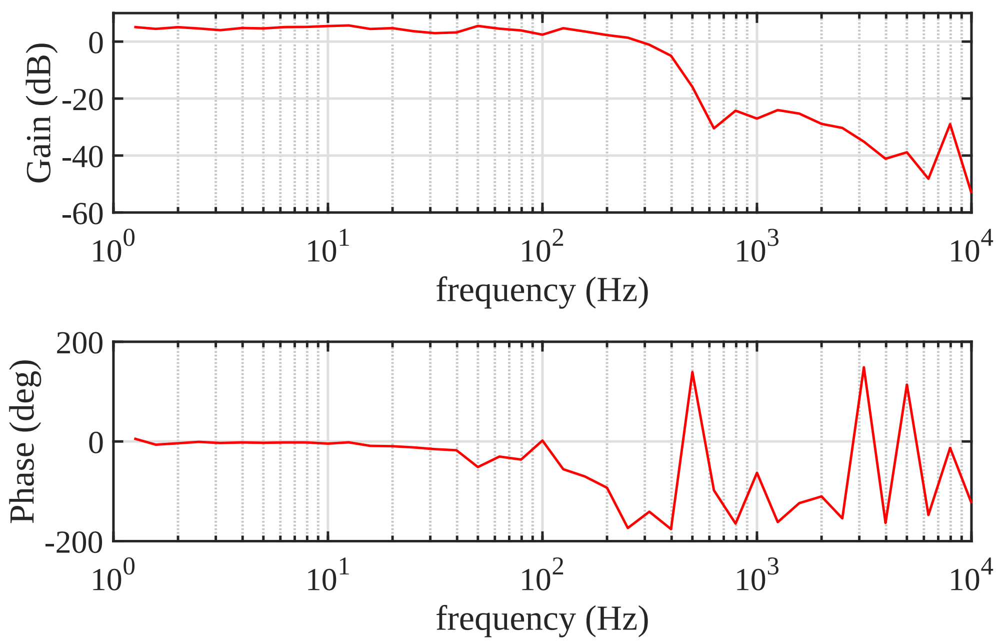

図 5.6: オープンループゲイン HF の伝達関数

第6章　結論と今後の課題

本研究では IIR フィルタに比べて安定性の高い FIR フィルタを利用してマイケルソン干渉計の制御が可能かどうかに始まり、その制御の安定性の測定を行った。結果、FIR フィルタでアナログフィルタと同等の感度の制御ができたが、安定性ではアナログフィルタには劣ってしまうことが分かった。制御ができるという時点でアナログフィルタからデジタルフィルタに替えるメリットはあるが、鏡を用いた制御を常に稼働させるのならば、この制御装置はクリーンルームに常駐し常にファンがかかっているというのが理想的な稼働状況である。しかし、FIR フィルタの制御はファンの音に影響を受けるほど安定性に欠ける。この現状ではアナログフィルタを用いて制御をしたほうがメリットが多いというのがこの実験の結論である。

今後の課題としては、FIR フィルタの新たな改善策の思案と、IIR フィルタの導入である。FIR フィルタにおいては、現状発振しない限界のゲインを再現しており、遮断周波数を小さくすると位相遅れが大きくなるという関係もあり改善が中々難しくなっている。FIR フィルタを例えばローパスフィルタとして実用するならば、アナログローパスフィルタよりも早く立ち下がる必要がありなおかつ位相の遅延が稼働に影響を及ぼさない場所が理想である。フィードバック制御に組み込むならば、やはり現状の問題点を打ち破る新しい改善が必要になってくる。

IIR フィルタは不安定になる見込みが多く今回は作製を見送ったが、位相の遅れ方が FIR フィルタと異なるためため今直面している問題の打破は期待できる。しかし IIR フィルタはすでに述べたように FIR に比べると不安定になっており、そのためインパルス応答 a_n、b_n の小数点以下の値が重要になってくる。だが、今回実験のために導入したデジタルフィルタとなる RTC-6000 は信号を出力する際 16bit 符号なしの整数で出力するため、プログラム内で整数値に変換された入力値にインパルス応答 a_n、b_n をかけても出力信号では小数点以下が切り捨てられてしまう。このため IIR フィルタが正しく稼働しない可能性が高い。これを解決するためには、固定小数点演算の概念を導入し、小数点以下の値も残したまま値を出力しなければならない。これが今回作製を見送った理由の一つである。

関連図書

[1] 日本物理学会「宇宙を見る新しい目」日本評論社 (2004)

[2] 森北出版株式会社「制御工学　フィードバック信号の考え方」斉藤制海　徐粒　共著 (2015)

[3] 岩波出版「レーザー物理入門」下田光一　著 (1983)

[4] 川村静児「やさしいレーザー干渉計」 http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/KOHO/HIGHLIGHT/KYODO/2004-W-01/ppr/eri0411-02kawamura.pdf

[5] 東京電機大学出版局「MATLAB によるデジタル信号とシステム」足立修一　著 (2002)

謝辞

本卒論を完成させるにいたって様々な方の助けがありました。最後に皆様に感謝の意を述べようと思います。

指導教員の宗宮健太郎先生にはデジタルシステムという今まで触れてこなかった全く新しい分野を示していただき、そのための実験装置まで新たに揃えていただきました。最初はテーマの理解から実験への導入に至るまで今までの常識が通じず、右も左も分からなかったため先生には私の相談や質問を何度も聞いていただきました。先生の助力がなければこの論文は完成することはなかったでしょう。1 年間指導を賜ったことに感謝します。そして、この論文が宗宮研究室において、デジタルシステムという新たな実験手法の確立の助けになったのなら幸いです。

マイクロネットの小柳正久さんには、デジタルシステムの実用化という最も大事な部分において専門の立場から多くの助けをいただきました。お話を聞くことができたのはわずかでしたが、研究室にある装置の理解を深めることができたのは小柳さんあってのものでした。

研究室の先輩方にも何か躓くたびに何度も助けられてきました。修士 2 年の片岡さんには回路の作り方やレーザーの扱い方、データの取得方法まで、教えていただいたこと全てが実験を行う上で欠かせないものでした。また実験室でお会いすることが最も多かったので、何度も実験の不備を指摘していただき、求められていた結果を出すことができました。同じく修士 2 年の熱田さんにはプログラミング言語に疎い私がデジタルフィルタを作成する際にご指導していただきました。そのおかげで実験でデジタルフィルタをうまく使うことができるようになりました。また、修士 1 年の粕谷さん、柳沼さんにもわからない点をよく答えていただいたり、発表練習の度、自分の理解不足を教えてくれるような鋭い質問をいただき刺激になりました。同期の久富君とはコロキウムの発表直前などで気が滅入っている時にはよく話し込み、結果それが気分転換となり研究が進むことがよくありました。

そして、どんな時も自分のやっていることを信じて、常に健康でいられるように気を遣ってくれていた両親にも感謝の意を述べます。両親の支えがあったからこそこうして卒論を完成させられてことを心に刻んでいきます。

最後に、ここに述べた皆様に改めて感謝の意を示します。本当にありがとうございました。