卒業論文

偏光解析法を用いたリング共振器の制御

東京工業大学　理学部　物理学科
宗宮研究室

小田部　荘達

平成 30 年 3 月 28 日

概 要

一般相対論においては、質量のある物体が周辺の時空を歪めることによって、重力が生じると解釈する。そして、質量のある物体が加速度運動をすると、その時空の歪みが光速で伝搬する。これが重力波と呼ばれる現象である。しかし、その極めて小さい振幅のために、直接的な検出を行うことは非常に難しい。

重力波の直接的な検出は 2015 年 9 月にアメリカの重力波観測チーム LIGO により為された。GW150914 と命名されたこの重力波信号の発生源は 36 太陽質量と 29 太陽質量を持つ 2 つのブラックホールの合体だと解析され、このような質量をもつブラックホールについての議論は盛んではなかったことから、天文学や宇宙論といった分野に大きな衝撃を与えた。また、2017 年 8 月には連星中性子星合体の重力波信号が LIGO とヨーロッパの重力波観測チーム Virgo によって捉えられ、この信号から推定された重力波の到来方向予測を基にして全波長帯の電磁波による追観測が行われた。その結果、わずか 1.7 秒後にはガンマ線バーストが観測され、続いて 11 時間後に母銀河の外縁部に発見されたキロノヴァの観測は半月間に渡って行われた。これらの複合的な観測から、長年の間謎とされてきた貴金属の合成過程が連星中性子星合体を通じて行われていることが確認された。

このように、重力波の観測は天文学はもちろん原子核物理や重力理論、宇宙論などといった幅広い分野に大きな衝撃を与え続けている。しかし、超新星爆発を波源とする重力波信号を初めとして、重力波信号の観測を期待されている天体現象は数多く存在する。そのために、重力波検出器の感度を向上させる研究や技術開発が世界各地で行われている。

現在重力波検出器として主流なものは、Michelson 干渉計を原理とするレーザー干渉計型重力波検出器である。レーザー干渉計型重力波検出器には光の量子性に起因する雑音による感度の限界が存在する。これを標準量子限界 (SQL) と言い、SQL を突破するために注目されているのが、懸架した鏡で構成される光共振器を離調することで見られる現象である光ばねを用いた重力波信号増幅である。次世代重力波検出器として考えられているものの 1 つに、非線形光学素子を挿入したシグナルリサイクリング共振器における光ばねを利用して広い周波数帯域で高感度を実現するというものがあり、宗宮研究室ではこの技術の原理検証実験が行われている。

この原理検証実験内で特に重要な要素が鏡の懸架系であり、宗宮研究室では特性が優れた懸架系の開発を昨年度行った。本実験は、この懸架系を用いたシンプルかつハイパワーな光共振器で光ばねを観測することを目標とし、その過程を通して原理検証実験で必要となる各要素技術を開発すること目的とする。本研究内では、3 枚の鏡で構成されるリング共振器で、偏光解析法により得られるエラー信号を用いて、

光ばねの観測に必須となる光共振器の安定な制御を実現し、制御系のオープンループ伝達関数の測定を行った。

目 次

第 1 章　重力波 **1**
1.1　一般相対論におけるテンソルの記法 1
1.2　Einstein 方程式 3
1.3　線形化された Einstein 方程式 4
1.4　重力波の解 6
1.5　重力波の具体形 6
1.6　自由質点に対する重力波の影響 7
1.7　ゲージ変換 8

第 2 章　重力波の検出 **11**
2.1　Michelson 干渉計 11
2.2　Michelson 干渉計の重力波に対する応答 12
2.3　Michelson 干渉計の周波数応答 14
2.4　レーザー干渉計における主な雑音源 14
2.4.1　雑音の定式化 15
2.4.2　地面振動雑音 16
2.4.3　散射雑音 17
2.4.4　輻射圧雑音 17
2.4.5　熱雑音 17

第 3 章　共振器と光ばね **19**
3.1　Fabry-Pérot 共振器 19
3.2　光ばね 22
3.3　量子雑音 23
3.3.1　FPMI の感度 24
3.3.2　SRFPMI の感度 26
3.3.3　非線形光学結晶を挿入した SRFPMI の感度 28
3.4　Fabry-Pérot 共振器における光ばね 31

第 4 章　実験の原理 **32**
4.1　負帰還制御 32

4.1.1 負帰還制御の必要性 32
4.1.2 負帰還制御の安定性 34
4.1.3 懸架系の伝達関数 35
4.1.4 アナログ回路の伝達関数 39
4.1.5 アクチュエータの伝達関数 42
4.1.6 フィルタ回路の選定 44
4.2 光学系からの線形信号取得 46
4.2.1 Michelson 干渉計の応答 46
4.2.2 2 枚鏡 Fabry-Pérot 共振器の制御の問題点 47
4.3 偏光解析法 47
4.3.1 リング共振器 48
4.3.2 波長板 50
4.3.3 エラー信号の取得 51
4.4 伝達関数の測定 54
4.4.1 オープンループ伝達関数の測定方法 54
4.4.2 雑音の混入の影響 55

第 5 章 実験 **57**
5.1 実験機器 57
5.2 実験の準備 63
5.3 Michelson 干渉計による計測 64
5.4 固定鏡リング共振器の制御 68
5.5 懸架鏡入りリング共振器の制御 71

第 6 章 まとめと今後の課題 **77**
6.1 光ばねの観測 77
6.2 地面振動雑音の混入 78
6.3 伝達関数の正確な測定 79

第1章　重力波

重力波は時空と物質の状態を結びつける方程式である Einstein 方程式を線形近似することから導出される。

1.1　一般相対論におけるテンソルの記法

相対論においては、時間を空間と同等の物理量だと捉える。通常の空間座標 x, y, z と、時間 t あたりに光が進む距離 ct(c は光速) をまとめて、座標を表すベクトルを

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{1.1}$$

と表す。本章中では、ギリシャ文字で表すインデックス (添え字) は 0,1,2,3 を取るとする。

重力場のない平坦な時空においては、ある 2 つの時空点間の微小距離 $\mathrm{d}s$ は、$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ を用いて

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{1.2}$$

と表せる。ここで、同じ式中で同じインデックスを用いる場合は全ての成分の和を取るようにする (Einstein の縮約記法)。

次のような座標変換を考える：

$$x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x^\nu) = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{1.3}$$

座標変換 (1.3) に対して $\mathrm{d}s^2$ が不変であるとき、すなわち

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu \tag{1.4}$$

を満たすとき、座標変換 (1.3) を Lorentz 変換と呼ぶ。Lorentz 変換は一次変換である：

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \tag{1.5}$$

ある物理量が 4 つの成分 $A^\mu(x)$ を持ち、この成分が座標変換 (1.5) に対して

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \tag{1.6}$$

と変換するとき、A^μ を反変ベクトルという。また、ある物理量が 4 つの成分 $A_\mu(x)$ を持ち、この成分が座標変換 (1.5) に対して

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \tag{1.7}$$

と変換するとき、A_μ を共変ベクトルという。さらに、ある物理量が 4^{n+m} 個の成分を持ち、座標変換 (1.5) に対して

$$C'^{\alpha\beta\cdots}{}_{\mu\nu\cdots}(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}\cdots\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\cdots C^{\gamma\delta\cdots}{}_{\rho\tau\cdots}(x) \tag{1.8}$$

と変換するとき、$C^{\alpha\beta\cdots}{}_{\mu\nu\cdots}$ を n 階反変 m 階共変テンソルという。ここで、$\alpha, \beta, \cdots$ を n 個ある上付きのインデックス、$\mu, \nu, \cdots$ を m 個ある下付きのインデックスだとしている。

重力場の存在する歪んだ時空においても、ある 2 つの時空点間の微小距離は不変である。よって、座標変換 (1.5) 後の時空点間の微小距離を元の座標での時空点間の微小距離で表すと

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \\ &= g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \end{aligned} \tag{1.9}$$

となる。ここで

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\eta_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

で定義される計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ は元の座標系における時空点間の距離、または時空の幾何学を決定する物理量である。$\eta_{\mu\nu}$ は対称テンソルである ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ を満たす) ので、式 (1.9) の定義より $g_{\mu\nu}$ も対称テンソルである：

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{1.11}$$

一般相対論においては、この計量テンソルを用いて、反変ベクトルと共変ベクトルの間に

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \tag{1.12}$$

という関係が成り立つとする。$g_{\mu\nu}A^{\nu}$ は

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}A'^{\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}A^{\sigma} \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}g_{\alpha\beta}\delta^{\beta}_{\sigma}A^{\sigma} \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}g_{\alpha\beta}A^{\beta} \end{aligned} \tag{1.13}$$

となり、確かに共変ベクトルの変換規則 (1.7) を満たす。ここで、δ^{μ}_{ν} は Kronecker のデルタで

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{1.14}$$

である。

また

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu} \tag{1.15}$$

となるように、$g_{\mu\nu}$ の逆行列 $g^{\mu\nu}$ を定める。$g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu} \tag{1.16}$$

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma} \tag{1.17}$$

という関係を満たす。一般のテンソルに対しても、計量テンソルとその逆行列を用いて、インデックスの上げ下げを行うことができる。

また、本章中ではテンソル等に対する偏微分を次のように省略して表す:

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \partial_{\nu}A^{\mu} = A^{\mu}_{,\nu} \tag{1.18}$$

1.2 Einstein 方程式

Einstein 方程式は一般相対論における重力場を記述する方程式であり、その具体形は以下のように表される：

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.19}$$

ここで $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソル、G は万有引力定数、$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。Einstein テンソルは、Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ とリッチスカラー R を用いて

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{1.20}$$

と与えられる。Ricci スカラーは Ricci テンソルのトレースである：

$$R = R^{\mu}_{\ \mu} \tag{1.21}$$

Ricci テンソルは、Riemann テンソル $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa}$ を用いて

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{1.22}$$

と与えられる。Riemann テンソルは、Christoffel 記号 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ を用いて

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} = \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\kappa}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \tag{1.23}$$

と与えられる。Christoffel 記号は、時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma} \right) \tag{1.24}$$

と与えられる。

1.3 線形化された Einstein 方程式

重力場のない平坦な時空においては、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ に一致する。ここでは、重力場が小さく、計量テンソルが平坦な時空からの摂動項を加えた形で表されるとした場合に、重力場の満たす方程式がどのような形を取るのかを考える。この平坦な時空からのずれを $h_{\mu\nu}$ とする：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.25}$$

式 (1.11) から、$h_{\mu\nu}$ は対称テンソルである：

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} \tag{1.26}$$

$h_{\mu\nu}$ やその一階微分・二階微分について、一次の摂動の範囲で各テンソル等を書き下すと、

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} && (1.27)\\
\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\lambda,\nu} + h_{\sigma\nu,\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma}) && (1.28)\\
R^{\mu}{}_{\nu\delta\lambda} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda}) && (1.29)\\
R_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\eta^{\delta\sigma}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda}) && (1.30)\\
R &= \frac{1}{2}\eta^{\nu\lambda}\eta^{\delta\sigma}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda}) && (1.31)
\end{aligned}$$

これらより、Einstein テンソルは

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}[h^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + h^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box h_{\nu\lambda} - h_{,\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}(h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \Box h)] \tag{1.32}$$

と表せる。ここで、h は $h_{\mu\nu}$ のトレースであり

$$h = h^{\mu}{}_{\mu} \tag{1.33}$$

と定義される。また、$\Box$ はダランベルシアンで

$$\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu} \tag{1.34}$$

である。

Einstein テンソルの表式を整理するために、次のように定められる $h_{\mu\nu}$ のトレースリバーステンソル $\tilde{h}_{\mu\nu}$ を用いる：

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{1.35}$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}^{\mu}{}_{\mu} = -h \tag{1.36}$$

$\tilde{h}_{\mu\nu}$ を用いて Einstein テンソルを整理すると

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + \tilde{h}^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box\tilde{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\tilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma}) \tag{1.37}$$

となる。

さらに、以下のように表される Lorentz ゲージ：

$$\tilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta} = 0 \tag{1.38}$$

とトランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ)：

$$\begin{cases} \tilde{h}_{\mu 0} = 0 & (1.39) \\ \tilde{h}^{\mu}{}_{\mu} = 0 & (1.40) \end{cases}$$

をゲージ条件として同時に課す。[1]。式 (1.35) と式 (1.40) から、$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ とできることに注意すると、Einstein テンソルは

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \tag{1.41}$$

となり、線形化された Einstein 方程式が求まる：

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.42}$$

[1]Lorentz ゲージと TT ゲージを同時に課すことができるゲージ変換が存在することは 1.7 節で示す。

1.4　重力波の解

真空中での Einstein 方程式は、$T_{\mu\nu} = 0$ なので

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{1.43}$$

となり、波動方程式の形を取る。この方程式の解として平面波解を考えることができる：

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \tag{1.44}$$

ここで $a_{\mu\nu}$ は重力波の振幅、k_α は波数ベクトルである。式 (1.44) が Einstein 方程式を線形近似することから求まる、重力波の解である。

1.5　重力波の具体形

式 (1.44) は式 (1.26)、式 (1.38)、式 (1.39)、式 (1.40) と式 (1.43) を満たす必要がある。すなわち、$a_{\mu\nu}$ と k_μ は

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= a_{\nu\mu} && (1.45)\\ a_{\mu\nu}k^\nu &= 0 && (1.46)\\ a_{\mu 0} &= 0 && (1.47)\\ a^\mu{}_\mu &= 0 && (1.48)\\ k_\mu k^\mu &= 0 && (1.49) \end{aligned}$$

を満たす。以下では、簡単のために重力波が x^3 軸方向に伝搬する場合を考える。このときの波数ベクトルは

$$\begin{aligned} -k_0 = k_3 &= k && (1.50)\\ k_1 = k_2 &= 0 && (1.51) \end{aligned}$$

と表せる。式 (1.45)〜 式 (1.51) を満たすような平面波解式 (1.44) を行列表示で具体的に表すと、2 つの係数 h_+ と $h_\times$ を用いて

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[-ik(ct - z)] \tag{1.52}$$

となる。この解は + モードと × モードの 2 つの自由度を持ち、それぞれのモードに対する自由質点群の変位は図 1.1 のようになる。

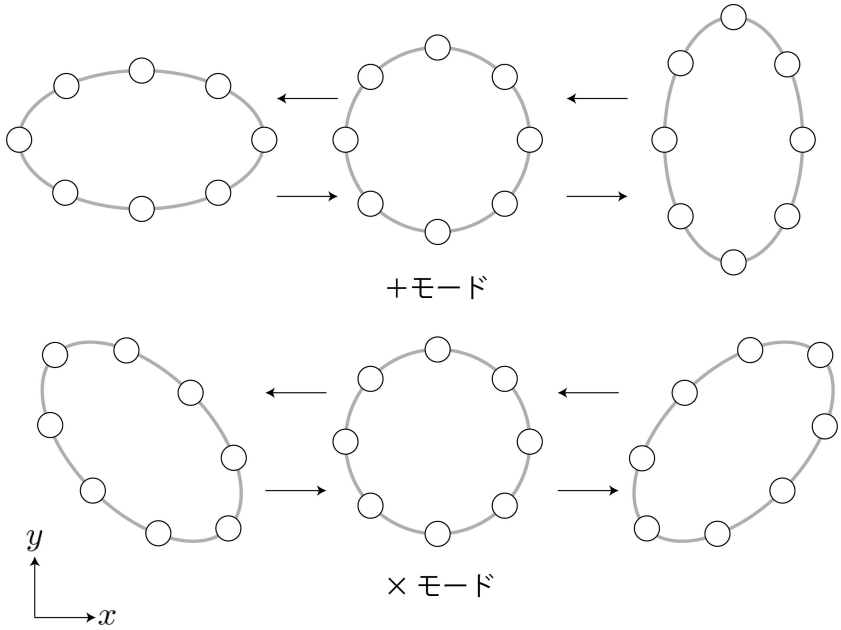

図 1.1: 重力波が入射したときの自由質点群の変位
紙面に垂直な方向から + モードと × モードの重力波がそれぞれ入射したとした。

式 (1.49) は波数ベクトル k_μ がヌルベクトル (光的なベクトル) であることを示している。すなわち、重力波は光速で伝搬する。

式 (1.46) は、平面波の振幅と進行方向が直交していることを示している。すなわち、重力波は横波である。

1.6 自由質点に対する重力波の影響

重力場の存在する歪んだ時空においては、自由質点は次のように表される測地線方程式に従う：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{1.53}$$

ここで、τ は固有時間である。初期状態に粒子が静止している場合を考える。このとき

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \propto -\Gamma^\alpha_{00} = 0 \qquad (\because h_{\mu 0} = 0) \tag{1.54}$$

となり、初期状態から粒子に加速度は働かずそのまま静止し続けることが分かる。すなわち、1 つの自由質点を観測しても重力波の影響は表れない。

重力波の影響は、2 つの近接した粒子間の固有距離に現れる。2 つの近接した座標をそれぞれ $x^\mu_{(1)} = (0,0,0,0)$、$x^\mu_{(2)} = (0,\epsilon,0,0)$ とする。ただし、ϵ は非常に小さいと

する。ここに式 (1.52) で表される重力波が入射すると、$x^\mu_{(1)}$ と $x^\mu_{(2)}$ 間の固有距離は

$$\begin{aligned}\int_{x_(1)^\mu}^{x^\mu_{(2)}} |g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu|^{\frac{1}{2}} &= \int_0^\epsilon |g_{11}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x^1 \\ &\simeq |g_{11}|^{\frac{1}{2}}\epsilon \\ &\simeq \left\{1+\frac{1}{2}h_{11}\right\}\epsilon \end{aligned} \tag{1.55}$$

となる。すなわち、重力波により 2 つの質点間の固有距離が変化する。次章で詳しく述べるが、レーザー干渉計型重力波検出器ではビームスプリッタとエンドミラー間の固有距離の変化を光の位相変化として観測することで、重力波の波形を読み取る。

1.7 ゲージ変換

この節では、Lorentz ゲージと TT ゲージを同時に課すことができるゲージ変換が存在することを示す。

次のような無限小座標変換を考える：

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{1.56}$$

このときの計量テンソルは、式 (1.8) より

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta^\alpha_\mu - \xi^\alpha_{,\mu})(\delta^\beta_\nu - \xi^\beta_{,\nu})(\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}) \\ &= \eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu} \end{aligned} \tag{1.57}$$

と変換される。これより、$h_{\mu\nu}$ と $\tilde{h}_{\mu\nu}$ の変換は

$$h'_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu} \tag{1.58}$$

$$h' = h'^\mu{}_\mu = h - 2\xi^\mu{}_{,\mu} \tag{1.59}$$

$$\tilde{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\nu_{\mu\nu}h' = \tilde{h}_{\mu\nu}-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu}+\eta_{\mu\nu}\xi^\sigma{}_{,\sigma} \tag{1.60}$$

となる。これを用いて Einstein テンソル (1.37) の変換を考えると、各項が

$$\tilde{h}'^\delta{}_{\lambda,\nu\delta} = \tilde{h}^\delta{}_{\lambda,\nu\delta}-\Box\xi_{\lambda,\nu} \tag{1.61}$$

$$\tilde{h}'^\delta{}_{\nu,\lambda\delta} = \tilde{h}^\delta{}_{\nu,\lambda\delta}-\Box\xi_{\nu,\lambda} \tag{1.62}$$

$$\Box\tilde{h}'_{\nu\lambda} = \Box\tilde{h}_{\nu\lambda}-\Box\xi_{\nu,\lambda}-\Box\xi_{\lambda,\nu}+\eta_{\nu\lambda}\Box\xi^\sigma{}_{,\sigma} \tag{1.63}$$

$$\eta_{\nu\lambda}\tilde{h}'^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} = \eta_{\nu\lambda}(\tilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma}-\Box\xi^\sigma{}_{,\sigma}) \tag{1.64}$$

と計算できることから

$$G'_{\nu\lambda} = G_{\nu\lambda} \tag{1.65}$$

となり、この無限小変換 (1.56) に対し Einstein テンソルは不変であることが分かる。また

$$\tilde{h}'^{\delta\sigma}{}_{,\delta} = \tilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta} - \Box\xi^{\sigma} \tag{1.66}$$

より、ξ^{μ} が波動方程式

$$\Box\xi^{\mu} = 0 \tag{1.67}$$

に従うような無限小変換を考えれば、このゲージ変換 (1.56) に対して Lorentz ゲージ (1.38) を常に満たすようにできると言える。

Lorentz ゲージを課したときの真空中の Einstein 方程式は、式 (1.37) より

$$\Box\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.68}$$

である。式 (1.68) の解を

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \tilde{a}_{\mu\nu}\exp(i\tilde{k}_{\alpha}x^{\alpha}) \tag{1.69}$$

とする。

式 (1.67) の解を

$$\xi^{\mu} = b^{\mu}\exp(i\tilde{k}_{\alpha}x^{\alpha}) \tag{1.70}$$

とおく。ここで $\tilde{k}_{\alpha}$ は式 (1.69) で用いたものと同じ波数ベクトルだとする。このときのゲージ変換 (1.56) 後の $h = h^{\mu}{}_{\mu}$ は、式 (1.59) より

$$h' = -(\tilde{a}^{\mu}{}_{\mu} + 2ib^{\mu}\tilde{k}_{\mu})\exp(i\tilde{k}_{\alpha}x^{\alpha}) \tag{1.71}$$

となる。よって、

$$\tilde{a}^{\mu}{}_{\mu} + 2ib^{\mu}\tilde{k}_{\mu} = 0 \tag{1.72}$$

となるように b^{μ} を選べば、このゲージ変換に対して常に $h = 0$ とできる。

$h = 0$ のとき $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ となるので、$\tilde{a}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$、$\tilde{k}_{\alpha} = k_{\alpha}$ とできる。さらにトレースレス条件 $a^{\mu}{}_{\mu} = 0$ を課すと、式 (1.72) は

$$b^{\mu}k_{\mu} = 0 \tag{1.73}$$

となる。

最後に、ここまでの条件のもとで $h'_{\mu 0} = 0$ とできるゲージ変換が存在することを示す。ゲージ変換後の $h_{\mu\nu}$ を $h'_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu}\exp(ik_{\alpha}x^{\alpha})$ とすると、式 (1.58) より

$$a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} - i(b_{\mu}k_{\nu} + b_{\nu}k_{\mu}) \tag{1.74}$$

となる。よって $a'_{\mu 0} = 0$ となるように定める b_{μ} が、常にトレースレス条件を満たすようなゲージ変換となる条件 (1.73) と、Lorentz ゲージから要請される条件 (1.46) を満たすことを示せばよい。

ここでは、簡単のために 1.5 節と同様に重力波が x^3 軸方向に伝搬する場合 $(-k_0 = k_3 = k, k_1 = k_2 = 0)$ を考える。$b^0 = -b_0, b^3 = b_3$ に注意すると、式 (1.73) より

$$b_0 + b_3 = 0 \tag{1.75}$$

であり、$a'_{\mu\nu} = 0$ となる条件を書き下すと、

$$\begin{aligned}
a'_{00} &= a_{00} + 2ib_0k = 0 && (1.76)\\
a'_{01} &= a_{01} + ib_1k = 0 && (1.77)\\
a'_{02} &= a_{02} + ib_2k = 0 && (1.78)\\
a'_{03} &= a_{03} - i(b_0k - b_3k) = a_{03} - 2ib_0k = 0 \quad (\because \text{式 (1.75) より}) && (1.79)
\end{aligned}$$

である。また、$k^0 = -k_0 = k, k^3 = k_0 = k$ に注意すると、式 (1.46) より

$$a_{00} + a_{03} = 0 \tag{1.80}$$

である。式 (1.76) と式 (1.79) により a_{00} と a_{03} の関係が決定されるが、これは式 (1.80) に矛盾しない。

以上より、Lorentz ゲージと TT ゲージを同時に課すことができるゲージ変換が存在することが分かった。

第2章　重力波の検出

前章で重力波の影響は 2 つの自由質点間の固有距離に現れることを述べた。現在重力波検出器として主流なのは、ビームスプリッタとエンドミラー間の固有距離の変化を光の位相変化として観測するレーザー干渉計型重力波検出器である。

2.1　Michelson 干渉計

現在、重力波検出器として用いられているレーザー干渉計は Michelson 干渉計を原理とする。

図 2.1 のような Michelson 干渉計について考える。レーザーから入射した光はビー

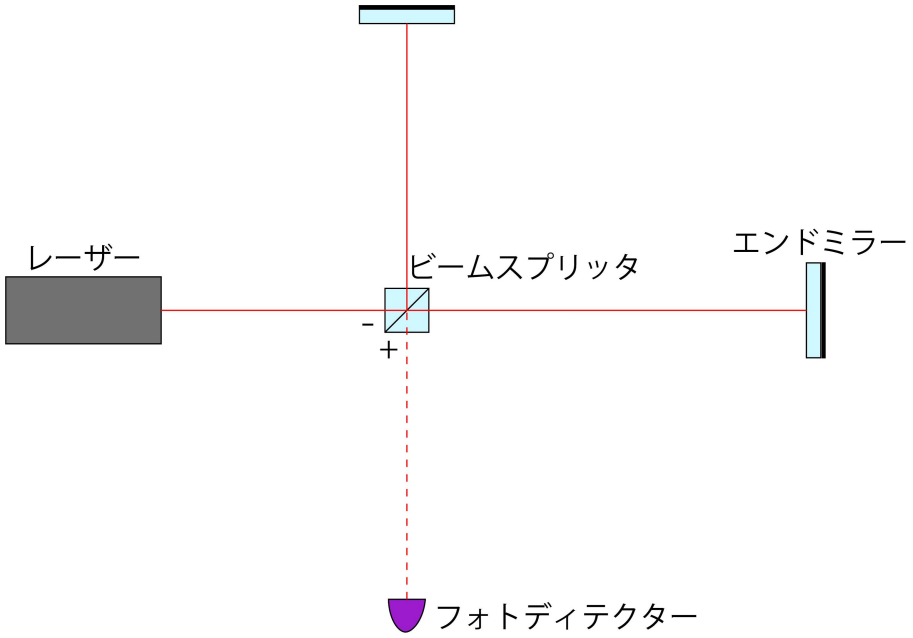

図 2.1: Michelson 干渉計

ムスプリッタにより x 方向と y 方向に分けられ、それぞれの方向に置かれたエンドミラーで反射し、ビームスプリッタで再結合して干渉する。このとき x 方向と y 方

向の腕[1]の長さの違いが位相差となり、フォトディテクターで検出される光の強度が位相差に対応して変化する。

入射レーザー光の電場を

$$E_{\rm in} = E_0 \exp\{i\Omega t\} \tag{2.1}$$

とする。ここで、Ω はレーザー光の角周波数である。x 方向と y 方向の腕の長さをそれぞれ L_x, L_y とすると、レーザー光がそれぞれの腕を往復する間の位相変化はそれぞれ $\phi_x = 2L_x\Omega/c, \phi_y = 2L_y\Omega/c$ なので、フォトディテクターでの電場は

$$E_{\rm out} = \frac{1}{2}E_0 \exp\{i(\Omega t - \phi_x)\} - \frac{1}{2}E_0 \exp\{i(\Omega t - \phi_y)\} \tag{2.2}$$

となる[2] 。実際に測定されるのは $P_{\rm out} = |E_{\rm out}|^2$ で定義されるレーザーのパワー (強度) であり、$P_0 = |E_0|^2$ として

$$P_{\rm out} = \frac{1}{2}P_0(1 - \cos(\phi_-)) \tag{2.3}$$

である。ここで、$\phi_- = \phi_x - \phi_y$ は x 軸方向と y 軸方向の腕の長さの違いにより現れる位相差である。

2.2 Michelson 干渉計の重力波に対する応答

Michelson 干渉計に z 軸方向から+モードの重力波 (式 (1.52) において $h_\times = 0$ としたもの) が入射する場合を考える。このとき、ある 2 つの時空点間の微小距離 $\mathrm{d}s$ は、式 (1.52) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\
&= -(c\mathrm{d}t)^2 + (1 + h_+ \exp\{i(-\omega t + kz)\})\mathrm{d}x^2 + (1 - h_+ \exp\{i(-\omega t + kz)\})\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\
&= -(c\mathrm{d}t)^2 + (1 + h(t))\mathrm{d}x^2 + (1 - h(t))\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

---

[1] ビームスプリッタとエンドミラー間の部分のこと。

[2] パワーを等分する対称なビームスプリッタに対して、入射電場 (2.1) に対し反射した直後と透過した直後の電場をそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\{i(\Omega t + \theta_{\rm r})\}, \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\{i(\Omega t + \theta_{\rm t})\}$ と置けば、重ね合わせの原理とエネルギー保存則から、反射する際の位相変化 $\theta_{\rm r}$ と透過する際の位相変化 $\theta_{\rm t}$ の間には $\theta_{\rm r} - \theta_{\rm t} = \frac{\pi}{2}$ という関係がある [1]。Michelson 干渉計などのビームスプリッタで反射・透過のいずれかが合計 2 回ずつ起こる光学系の場合には、透過する際の位相変化を 0、反射する際の位相変化を片方に対して 0、もう片方に対して π としても同様な結果になるため (Michelson 干渉計の場合は RFL ポート (レーザー側) と AS ポート (出力側) の電場の計算結果が反転してしまうが、制御用信号としてこれを用いる場合にはどちらでも問題ない)、本論文中でビームスプリッタ (対称でないものを含む) を用いる場合にはこのような計算方法を採る。図 2.1 においては y 軸方向にレーザー光が反射する場合に位相が π だけ変化するとしている。

となる。ここで、$h(t) = h_+ \exp\{i(-\omega t + kz)\}$ とした。光の速度は任意の慣性系に対して不変なので、光子が進む微小距離 $\mathrm{d}s$ は常に 0 であり、特に光子が x 軸方向を進行する場合は

$$-(c\mathrm{d}t)^2 + (1 + h(t))\mathrm{d}x^2 = 0 \tag{2.5}$$

である。ここで、$|h(t)| \ll 1$ なので、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0$ のとき

$$\left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) c\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \tag{2.6}$$

とできる。

光子がビームスプリッタと x 軸方向のエンドミラーの間を往復する間に要する時間を Δt_x とすると、式 (2.6) の両辺を積分して

$$\int_{t-\Delta t_x}^{t} \left\{1 - \frac{1}{2}h(t')\mathrm{d}t'\right\} = \frac{2L_x}{c} \tag{2.7}$$

すなわち

$$\Delta t_x = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} h(t')\mathrm{d}t' \tag{2.8}$$

である。また、$|h(t)| \ll 1$ より式 (2.8) の積分の下限を $t - \frac{2L_x}{c}$ とすると

$$\Delta t_x \simeq \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^{t} h(t')\mathrm{d}t' \tag{2.9}$$

となる。光子がビームスプリッタと y 軸方向のエンドミラーの間を往復する間に要する時間 Δt_y は、同様にして

$$\Delta t_y \simeq \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L_y}{c}}^{t} h(t')\mathrm{d}t' \tag{2.10}$$

となる。

以上より、$L \simeq L_x \simeq L_y$ とすると、重力波が入射したときの位相差は

$$\begin{aligned} \phi'_- &= \Omega(\Delta t_x - \Delta t_y) \\ &\simeq \frac{2(L_x - L_y)\Omega}{c} + \Omega\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} h(t')\mathrm{d}t' \\ &= \phi_- + \delta\phi_{\mathrm{GW}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

である。ここで

$$\delta\phi_{\mathrm{GW}} = \Omega\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} h(t')\mathrm{d}t' \tag{2.12}$$

は重力波の影響による位相変化を表している。

2.3 Michelson 干渉計の周波数応答

次に、Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答を考える。$h(t)$ の逆 Fourier 変換を

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{2.13}$$

とすると、式 (2.12) は

$$\begin{aligned} \delta\phi_{\mathrm{GW}} &= \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}t' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{\mathrm{MI}}(\omega) \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{2.14}$$

となる。ここで

$$H_{\mathrm{MI}} = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \tag{2.15}$$

は角周波数 ω の重力波に対する Michelson 干渉計の周波数応答関数である。式 (2.15) より

$$\frac{L\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \tag{2.16}$$

のとき、Michelson 干渉計の重力波に対する感度が最も良くなることが分かる。例えば周波数が 1kHz の重力波に対しては、$L = 75\mathrm{km}$ のときに最も良い感度を持つことになる。しかし、このような長い腕を持つ Michelson 干渉計を地上に建設することは現実的に難しいため、現在建設されている重力波検出器では、図 2.2 のように腕の部分に Fabry-Pérot 共振器[3]を作り光を何度も往復させることで、実質的な光路長を伸ばしている。

2.4 レーザー干渉計における主な雑音源

重力波と物質の相互作用は非常に微弱であるため、重力波を検出するためには様々な雑音を取り除く必要がある。この節では雑音の表現を定式化した後、重力波の感度を制限する要因になる主な雑音を説明する。

[3]Fabry-Pérot 共振器の詳しい性質については 3.1 節で述べる。

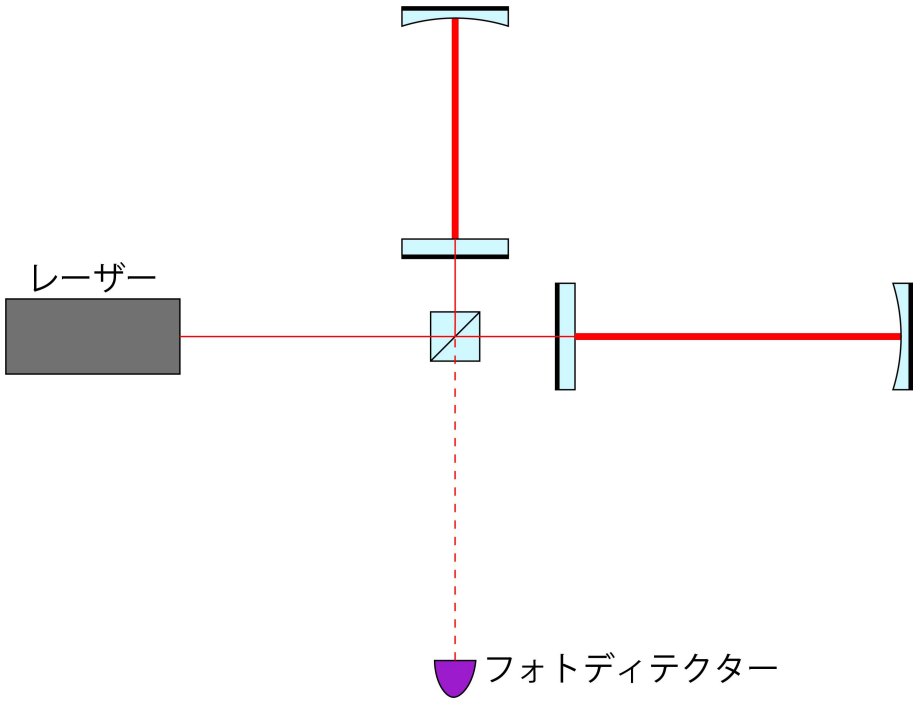

図 2.2: 腕の部分に Fabry-Pérot 共振器を作った Michelson 干渉計

2.4.1 雑音の定式化

ある物理量 $x(t)$ に対する RMS(root mean square) は次のように定義される：

$$\mathrm{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t[x(t)]^2} \tag{2.17}$$

ここで T は測定時間であり、$x(t)$ は測定時間外では 0 だとする：

$$x(t) = 0 \qquad (|t| > T/2) \tag{2.18}$$

RMS を周波数空間で議論するために、次のように Fourier 変換と逆 Fourier 変換を定義する：

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t x(t) e^{-i\omega t} = \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t x(t) e^{-i\omega t} \tag{2.19}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega X(\omega) e^{i\omega t} \tag{2.20}$$

これらを用いると、RMS の二乗は

$$\begin{aligned}
\mathrm{RMS}^2 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t[x(t)]^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t x(t) \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega X(\omega) e^{i\omega t} \\
&= \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega X(\omega) \left(\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t x(t) e^{-i\omega t}\right)^* \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{|X(\omega)|^2}{T} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega P(\omega) \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

と計算できる。ここで

$$P(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{T} \qquad (2.22)$$

はパワースペクトル密度と呼ばれ、測定した物理量 $x(t)$ においてある周波数成分がどれくらい寄与しているのかを表している。雑音の議論には、パワースペクトル密度の平方根で定義される振幅スペクトル密度 $A(\omega)$ が用いられる：

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)} = \frac{|X(\omega)|}{\sqrt{T}} \qquad (2.23)$$

2.4.2 地面振動雑音

地震が起きていないときでも、海岸に打ち寄せる波や人間の活動などが原因で地面は常に振動している。この振幅ペクスペクトル密度は、経験的に

$$\delta x(f)_{\mathrm{vib}} = 10^{-7} \times \left(\frac{1[\mathrm{Hz}]}{f}\right)^2 \qquad [\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \qquad (2.24)$$

程度であることが知られている。地面振動雑音は周波数の二乗に比例して減少するが、地面設置型重力波検出器の低周波数帯の感度を制限する要因となる。実際の重力波検出器では、多段振り子で構成される懸架系の防振効果[4]を用いて地面振動雑音の低減を行う。

[4]懸架系による防振効果については 4.1.3 節で詳しく述べる。

2.4.3 散射雑音

散射雑音はフォトディテクターに入る光子数が統計的に揺らぐことによる雑音である。これは光子数の変化が鏡の変位を介さずに直に位相変化として誤検出される雑音であり、低周波数帯域におけるこの振幅スペクトル密度は次のように表される：

$$\delta\phi_{\mathrm{shot}} = \sqrt{\frac{2h\nu}{\eta P_0}} \tag{2.25}$$

ここで、h は Planck 定数、ν はレーザー光の周波数、η はフォトディテクターの量子効率、P_0 は干渉計に入射されるレーザー光強度である。散射雑音を低減するために、実際の重力波検出器には高出力のレーザー光源を使用する。

2.4.4 輻射圧雑音

光子数の揺らぎが、光子が鏡に与える反作用の変化となることによる雑音が輻射圧雑音である。低周波数帯域におけるこの振幅スペクトル密度は次のように表される：

$$\delta x(f)_{\mathrm{rad}} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi m f^2}\sqrt{\frac{4hP_0}{\pi^4 c\lambda}} \tag{2.26}$$

ここで、$\mathcal{F}$ は干渉計の腕に構成されている Fabry-Pérot 共振器のフィネス[5]、m は鏡の質量、λ はレーザー光の波長である。輻射圧雑音はレーザー光強度に関して散射雑音とトレードオフの関係にあり、鏡の質量を大きくすることによって低減することができる。散射雑音と輻射圧雑音を合わせて量子雑音と呼び、散射雑音と輻射圧雑音のトレードオフの関係から定められるレーザー干渉計型重力波検出器の感度の限界を標準量子限界 (SQL) と言う。

2.4.5 熱雑音

レーザー干渉計は熱浴に接しており、熱浴からの熱振動子の流入によって懸架系や鏡が熱振動を起こしてしまう。この振幅スペクトル密度は、懸架系の熱雑音に対しては

$$\delta x_{\mathrm{sus}} = \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0^2\phi_k(\omega)}{m\omega^5}} \tag{2.27}$$

と表され、鏡の熱雑音に対しては、モデルに応じて

$$\delta x_{\mathrm{mir}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m\omega_0^3 Q}} & (\text{viscus モデル}) \\ \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T\phi_k(\omega)}{m\omega_0^2\omega}} & (\text{structure モデル}) \end{cases} \tag{2.28}$$

[5]フィネスについては 3.1 節で詳しく述べる。

と表される。ここで k_B は Boltzmann 定数、T は熱浴の温度、ω_0 は振動子の共振周波数、$\phi_k(\omega)$ は複素ばね定数、m は質量、Q は Q 値である。

日本の重力波検出器 KAGRA における様々な雑音と、それらを合計したときの感度スペクトルを図 2.3 に示した。

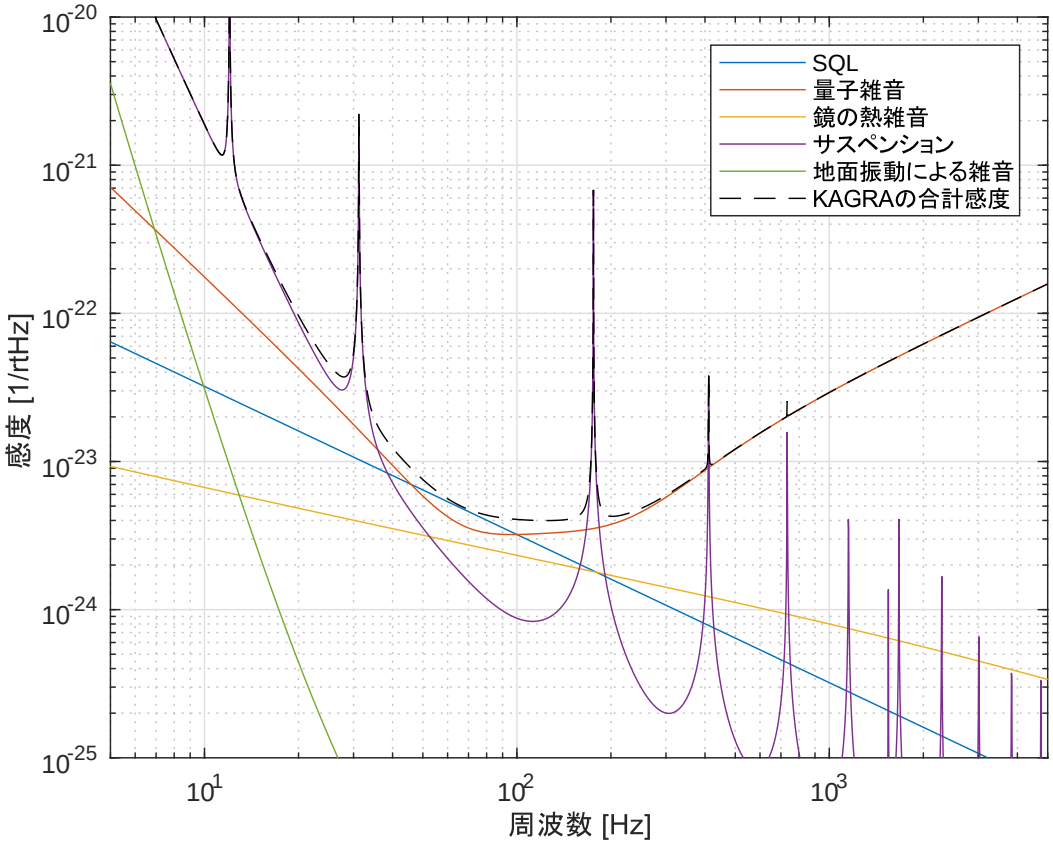

図 2.3: KAGRA の合計感度スペクトル

値が低くなるほど感度が良くなっていると見なす。量子雑音が SQL を突破しているのは、3.2 節で述べる共振器の離調と深い関係がある。

第3章　共振器と光ばね

Michelson 干渉計の実質的な光路長を伸ばす用途を初めとして、レーザー干渉計型重力波検出器には至る所に共振器の技術が用いられている。まず、最もシンプルな形をした共振器である Fabry-Pérot 共振器について考える。

3.1　Fabry-Pérot 共振器

Fabry-Pérot 共振器は向かい合う二枚の鏡で構成される。二枚の鏡の距離が特定の長さであるとき往復する光が多重干渉を起こして強め合い、共振器内部に入射光のパワーを大きく超える光を蓄えることができる。

図 3.1 のような Fabry-Pérot 共振器について考える。レーザーを入射させる側の鏡

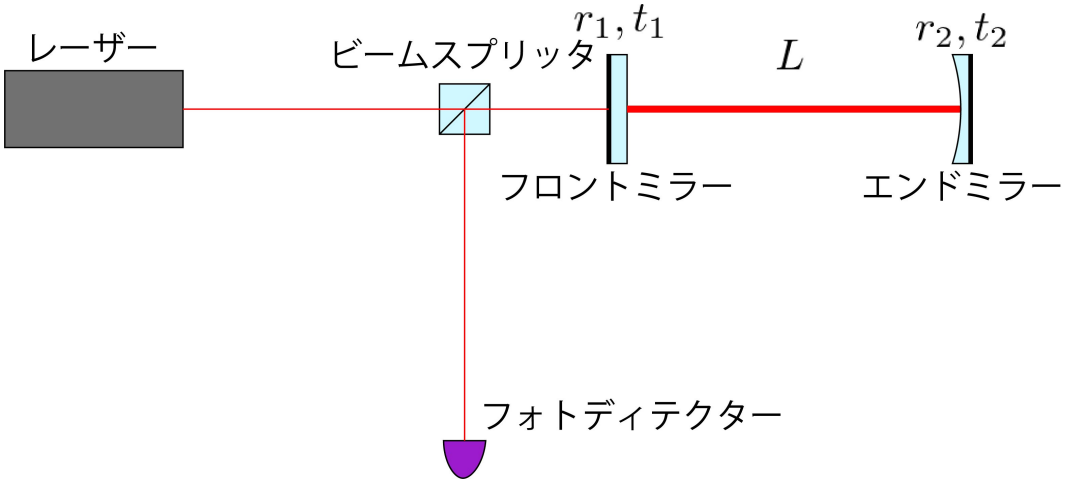

図 3.1: Fabry-Pérot 共振器

(フロントミラー) の振幅反射率・透過率[1]をそれぞれ r_1, t_1、レーザーが透過する側の鏡 (エンドミラー) の振幅反射率・透過率をそれぞれ r_2, t_2 とする。フロントミラーと

[1]振幅反射率・透過率は電場に対する反射率・透過率である。本論文中で単に反射率・透過率と表現する場合にはレーザー光のパワー (強度) に対する反射率・透過率を表すとし、これはそれぞれ $R = r^2, T = t^2$ に対応する。ロス (損失) の無い理想的な鏡の場合には、エネルギー保存則から、これらは $R + T = 1$ を満たす。

エンドミラー間の距離を L とすると、レーザー光が共振器内を往復する間の電場の位相変化は $\phi = 2L\Omega/c$ である。ここで、Ω はレーザーの角周波数である。

フロントミラーから入射させるレーザーの電場を E_0 とすると、共振器で反射する電場 $E_{\rm r}$ と共振器から透過する電場 $E_{\rm t}$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} E_{\rm r} &= -r_1 E_0 + t_1 r_2 t_1 e^{-i\phi} E_0 + t_1 r_2 r_1 r_2 t_1 e^{-2i\phi} E_0 + t_1 r_2 (r_1 r_2)^2 t_1 e^{-3i\phi} E_0 + \cdots \\ &= -r_1 E_0 + t_1^2 r_2 e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r_2 r_1 e^{-i\phi}\right)^n E_0 \\ &= \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_2 r_1 e^{-i\phi}}\right) E_0 \qquad (3.1) \\ E_{\rm t} &= t_1 t_2 e^{-i\phi/2} E_0 + t_1 r_2 r_1 t_2 e^{-i3\phi/2} E_0 + t_1 (r_2 r_1)^2 t_2 e^{-i5\phi/2} E_0 + \cdots \\ &= t_1 t_2 e^{-i\phi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r_2 r_1 e^{-i\phi}\right)^n E_0 \\ &= \frac{t_1 t_2 e^{-i\phi/2}}{1 - r_2 r_1 e^{-i\phi}} E_0 \qquad (3.2) \end{aligned}$$

となる。これらより、反射光強度 $P_{\rm r}$ と透過光強度 $P_{\rm t}$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} P_{\rm r} &= |E_r|^2 \\ &= \frac{\left\{(t_1^2 + r_1^2) r_2 - r_1\right\}^2 + 4 r_1 r_2 (t_1^2 + r_1^2) \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \qquad (3.3) \\ P_{\rm t} &= |E_t|^2 \\ &= \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \qquad (3.4) \end{aligned}$$

となる。Fabry-Pérot 共振器の透過光強度を図 3.2 に示す。また、共振器内に蓄えられているレーザー光が強度透過率 t_2^2 の鏡を透過したときのレーザー光の強度が $P_{\rm t}$ であることから、共振器内に蓄えられているレーザー光強度 $P_{\rm cav}$ は

$$\begin{aligned} P_{\rm cav} &= \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \\ &= \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4 r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \qquad (3.5) \end{aligned}$$

と表せる。

式 (3.5) から、ϕ が特定の値を取るときに共振器内のレーザー光の強度が最大になることが分かる。具体的には

$$\phi = 2\pi m \qquad (m = 1, 2, ...) \qquad (3.6)$$

のときであり、このような状態を入射レーザー光と Fabry-Pérot 共振器が共振しているという。入射したレーザー光は共振器内を何度も往復するが、その全ての往復光

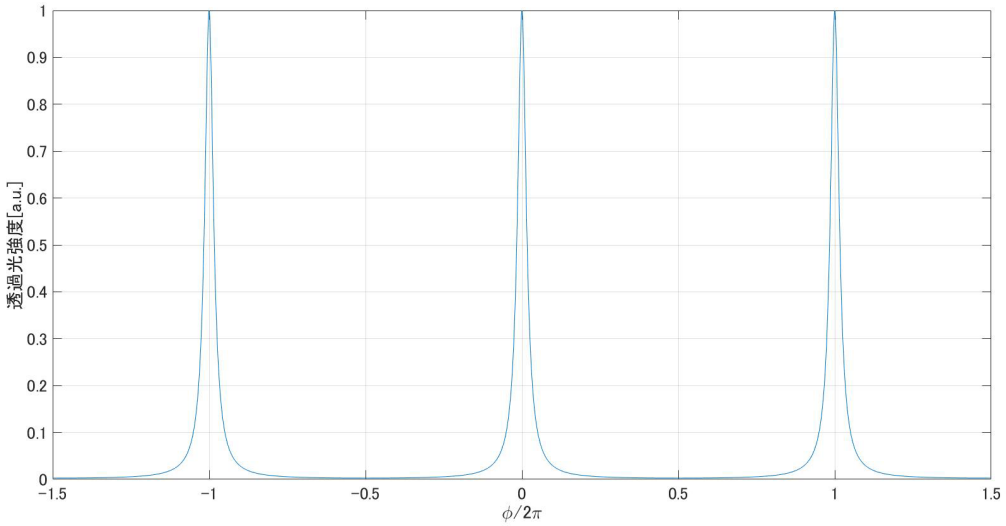

図 3.2: Fabry-Pérot 共振器の透過光強度
$r_1 = r_2 = 0.90$、$t_1 = t_2 = 0.10$ とし、入射光強度 $|E_0|^2$ で規格化した。

が同位相になるようになっていれば、往復する光が多重干渉を起こし、強め合った光が共振器内に蓄えられるのである。$r_1^2 = 0.98, t_1^2 = 0.02, r_2^2 \simeq 1$, として共振器内のレーザー光強度を計算すると、共振条件 (3.6) を満たしているとき、およそ入射光強度の 200 倍の強度を持つ光が共振器内に蓄えられることになる。

また、レーザー光の波長 λ を用いて共振条件 (3.6) を書き換えると

$$2L = m\lambda \tag{3.7}$$

となる。すなわち、共振器の往復長がレーザー光の波長の自然数倍であれば共振するともいえる。

$\phi = 2L\Omega/c$ だったので、(3.5) は共振器長 L またはレーザーの角周波数 Ω を変化させると周期的に変動する。この周期のことをフリースペクトラルレンジ (FSR) といい、L を固定してレーザーの周波数 $\nu = \Omega/2\pi$ について考えると

$$\Delta\phi = \frac{2L \cdot 2\pi\nu_{\mathrm{FSR}}}{c} = 2\pi \tag{3.8}$$

より

$$\nu_{\mathrm{FSR}} = \frac{c}{2L} \tag{3.9}$$

となる。また式 (3.5) のピークの半値半幅 (HWHM) に対応する周波数は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}\sin^2\left(\frac{L\cdot 2\pi\nu_{\mathrm{HWHM}}}{c}\right)} \\ = & \frac{1}{1+\frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}\sin^2\left(\frac{\pi\nu_{\mathrm{HWHM}}}{\nu_{\mathrm{FSR}}}\right)} \\ \simeq & \frac{1}{1+\frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}\left(\frac{\pi\nu_{\mathrm{HWHM}}}{\nu_{\mathrm{FSR}}}\right)^2} \qquad (\nu_{\mathrm{FSR}} \gg \nu_{\mathrm{HWHM}}\text{とした}) \\ = & \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

より

$$\nu_{\mathrm{HWHM}} = \frac{1-r_1r_2}{2\pi\sqrt{r_1r_2}}\nu_{\mathrm{FSR}} \tag{3.11}$$

となる。よって式 (3.5) のピークの半値全幅 (FWHM) に対応する周波数は

$$\nu_{\mathrm{FWHM}} = \frac{1-r_1r_2}{\pi\sqrt{r_1r_2}}\nu_{\mathrm{FSR}} \tag{3.12}$$

となる。

ν_{FSR} と ν_{FWHM} の比はフィネス $\mathcal{F}$ といい、共振のピークの鋭さを表す：

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\mathrm{FSR}}}{\nu_{\mathrm{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{r_1r_2}}{1-r_1r_2} \tag{3.13}$$

鏡の反射率を 1 に近づけるほどフィネスは大きくなり、共振のピークは鋭くなる。通常はこのピークが非常に鋭くなるよう反射率の高い鏡を用いるため、式 (3.10) 中で用いた条件 $\nu_{\mathrm{FSR}} \gg \nu_{\mathrm{HWHM}}$ は妥当だと言える。

3.2 光ばね

光は運動量を持つので、光が鏡で反射する際に鏡は光から力を受ける。この光による力を輻射圧と呼ぶ。この力の大きさは共振器内のレーザー光強度に比例する。懸架している鏡を用いた共振器で、この輻射圧と懸架系による機械的な復元力が結びつくことで見られるようになる現象が光ばねである。懸架した鏡を用いた Fabry-Pérot 共振器における光ばねの定性的な説明を図 3.3 に示した。

共振点から少しずれた地点でレーザー光の輻射圧と懸架系による機械的な復元力が釣り合うようになっている状態を考える。このように共振点から少しずれた地点で共振器をロックすることを離調 (デチューン) するという。このような状態から鏡が左右に動いたときを考える。右側に動いた場合には、機械的な復元力が大きくな

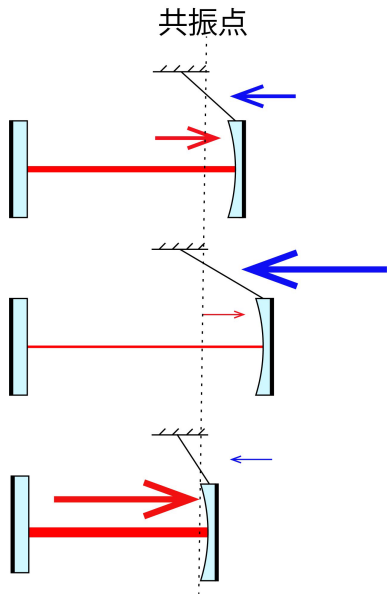

図 3.3: 光ばねの定性的な説明

り鏡は元の位置に戻される。左側に動いた場合にも、共振器が共振点に近づくことになるために光の輻射圧が大きくなり鏡は元の位置に戻される。このように、光の輻射圧を介してどちらに動いても鏡を元の位置に戻そうとする力が働くため、この現象を光ばねと呼ぶ。

重力波は 2 つの自由質点間の固有距離が変化する現象であった。これは、ビームスプリッタを固定した座標系で考えると、エンドミラーが重力波により力を受けていると言い換えることができる。エンドミラーが共振器の一部となっている場合にその共振器を離調すると、光ばねの共振周波数付近で重力波による力、すなわち重力波信号を増幅することができ、その共振周波数付近で自由質点で構成された通常のレーザー干渉計型重力波検出器の感度の限界である SQL を超えることが可能となるのである。このようにして従来の測定限界を超えうる可能性があることから、量子測定の分野で光ばねが注目されている。

3.3 量子雑音

この節では、レーザー干渉計型重力波干渉計の量子雑音について、具体的な計算結果から求まる SQL と、それを突破するほどに感度を改善できる光学系の例を示す。

3.3.1 FPMI の感度

実際の重力波検出器は、腕の部分に Fabry-Pérot 共振器を作り、実質的な光路長を伸ばしているのであった。図 3.4 のような、腕の部分に Fabry-Pérot 共振器を作った Michelson 干渉計 (FPMI) の量子雑音について考える。Fabry-Pérot 共振器の共振器

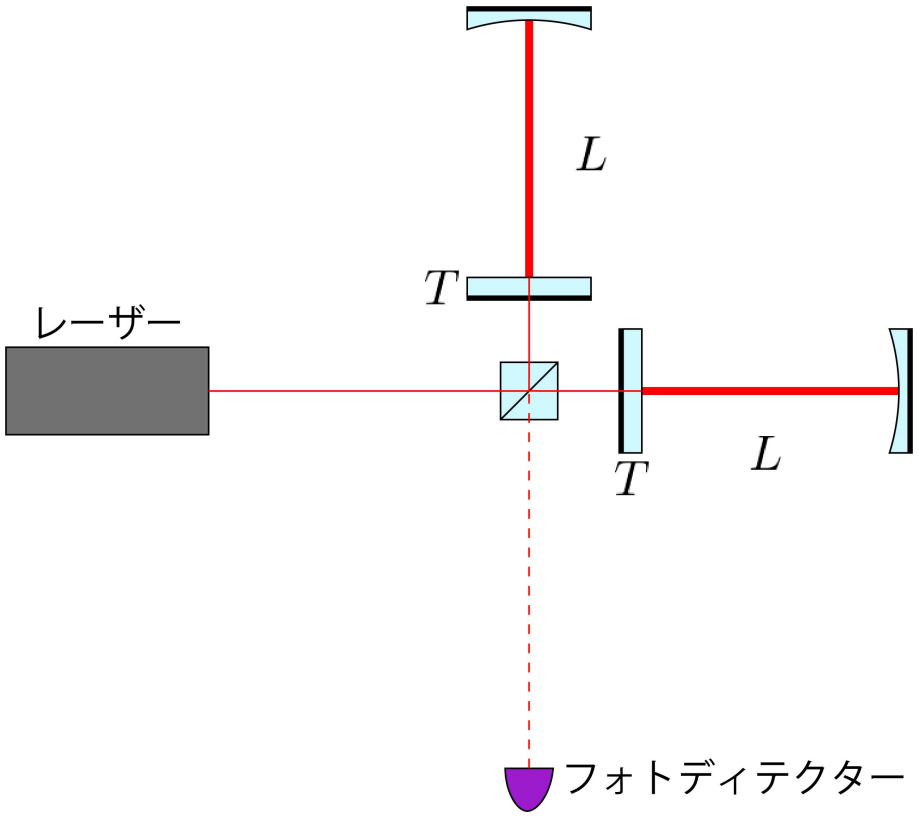

図 3.4: FPMI

長を L、Fabry-Pérot 共振器のフロントミラーの強度透過率を T とする。

重力波検出器の感度は、雑音に対するシグナルの比 (SNR) が 1 となるような位相変化として定義される。量子雑音のみを考慮した、角周波数 ω の重力波に対する FPMI の感度 $\sqrt{S_{h1}}$ は次のように計算される [2]：

$$\sqrt{S_{h1}} = \sqrt{\frac{1+\mathcal{K}^2}{2\mathcal{K}}} h_{\mathrm{SQL}} \tag{3.14}$$

ここで

$$\mathcal{K} = \frac{8P\Omega}{mL^2\omega^2(\gamma^2+\omega^2)} \tag{3.15}$$

$$\gamma = \frac{Tc}{4L} \tag{3.16}$$

$$h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\omega^2L^2}} \tag{3.17}$$

であり、P は入射レーザー光強度、$\Omega = 2\pi c/\lambda$ はレーザーの角周波数、λ はレーザーの波長、m は鏡の質量、$\hbar$ は換算 Planck 定数である。$c = 3.00 \times 10^8$[m/s]、$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$[J·s] であり、以下の計算では全て $L = 3 \times 10^3$[m]、$T = 0.033$、$\lambda = 1064 \times 10^{-9}$[m]、$m = 23$[kg] として計算を行う。

P =100[W]、1k[W]、10k[W] とした場合の FPMI の感度は図 3.5 のようになる。値

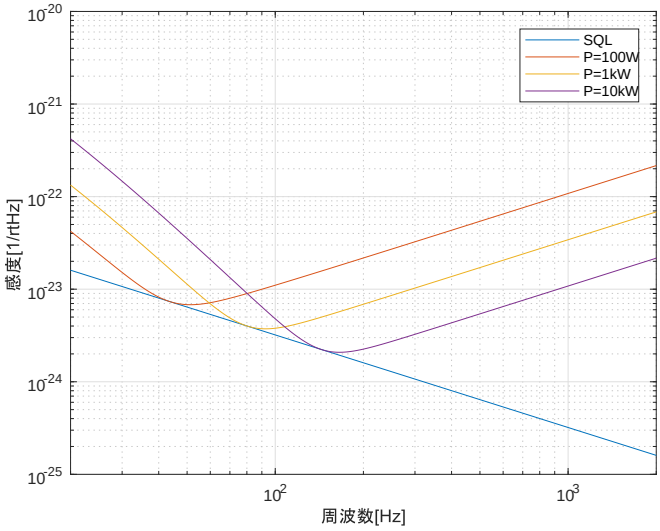

図 3.5: FPMI の感度
各レーザー光強度に対する感度と SQL を示している。

が低くなるほど感度が良くなっていると見なす。レーザー光強度を変更することで、最も感度が良い周波数が変化していっていることが分かる。ただし、式 (3.5) より

$$\sqrt{S_{h1}} = \sqrt{\frac{1+\mathcal{K}^2}{2\mathcal{K}}}h_{\mathrm{SQL}} \geq h_{\mathrm{SQL}} \tag{3.18}$$

という感度の限界が存在する。この h_{SQL} は標準量子限界 (SQL) と呼ばれ、これは自由質点で構成された通常のレーザー干渉計型重力波検出器の感度の限界となる。

3.3.2 SRFPMI の感度

実際の重力波検出器には、フォトディテクターに漏れ出てくる信号を打ち返すような鏡を設置する。この鏡はシグナルリサイクリングミラー (SRM) と呼ばれ、SRM により構成される共振器 (SRC) によって重力波信号の増幅を行う。図 3.6 のような、シグナルリサイクリングを行い腕の部分に Fabry-Pérot 共振器を作った Michelson 干渉計 (SRFPMI) の量子雑音について考える。SRM の振幅反射率と振幅透過率をそれ

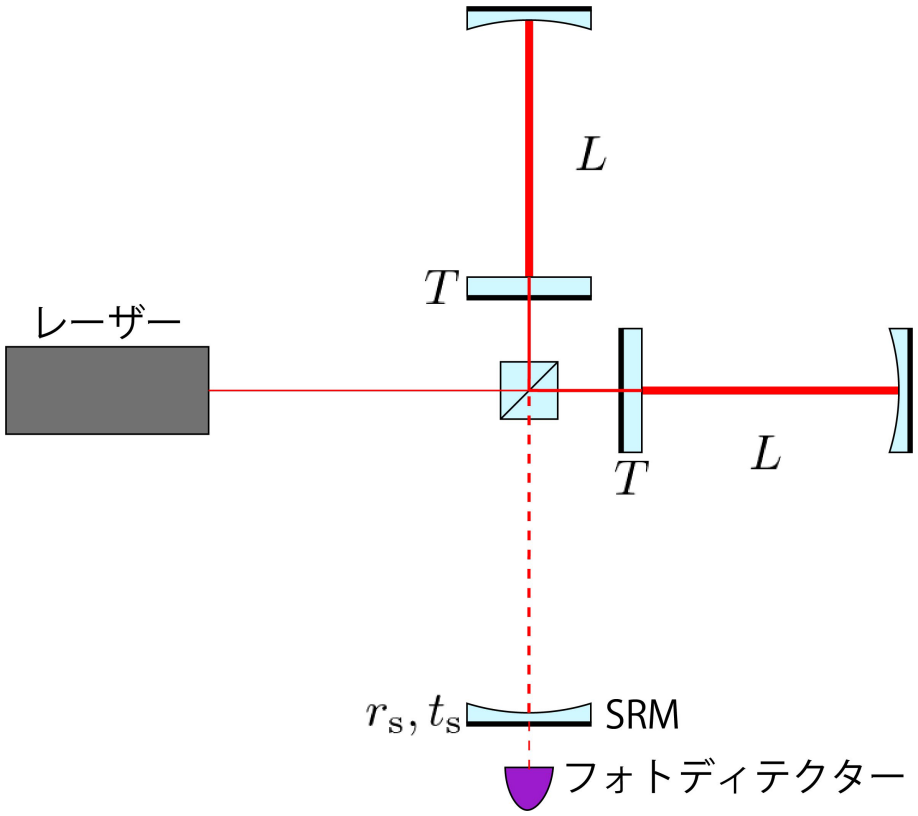

図 3.6: SRFPMI

ぞれ r_s、t_s とする。

量子雑音のみを考慮した、角周波数 ω の重力波に対する SRFPMI の感度 $\sqrt{S_{h2}}$ は次のように計算される：

$$\sqrt{S_{h2}} = \sqrt{\frac{|C_{21}|^2 + |C_{22}|^2}{2t_s^2 |D_2|^2 \mathcal{K}}} h_{\mathrm{SQL}} \tag{3.19}$$

ここで

$$C_{21} = t_s^2(\sin 2\phi - \mathcal{K}\cos^2\phi) \tag{3.20}$$

$$C_{22} = (1+r_s^2)\left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2}\sin 2\phi\right) - 2r_s\cos 2\beta \tag{3.21}$$

$$D_2 = -(-1+r_s e^{2i\beta})\cos\phi \tag{3.22}$$

$$\beta = \arctan(\omega/\gamma) \tag{3.23}$$

であり、ϕ はレーザー光が SRC を往復する間の電場の位相変化である。$\mathcal{K}$、γ、$h_{\rm SQL}$ はそれぞれ式 (3.15)、(3.16)、(3.17) で定義される。以下の計算では全て $P = 10$k[W]、$r_s = 0.95$、$t_s = 1 - r_s^2$ とする。

FPMI と、SRC が共振状態である ($\phi = 0$) 場合の SRFPMI との感度の比較を図 3.7 に示した。低周波数帯域での感度は改善しているが、高周波数帯域の感度は SRC 内

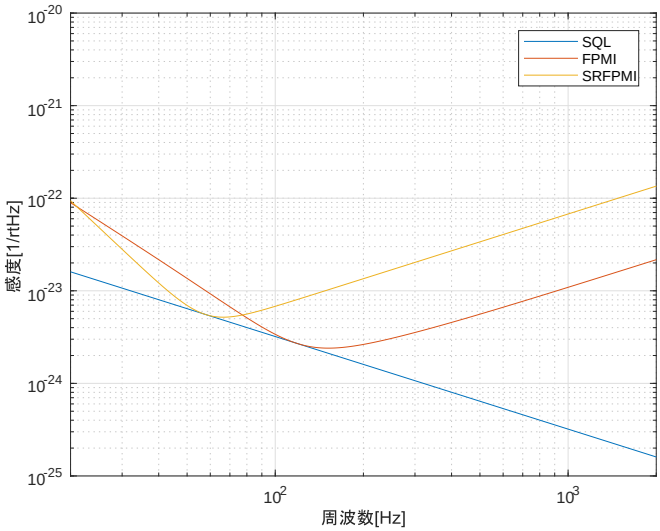

図 3.7: FPMI と SRFPMI の比較

で信号が弱めあうために悪化している。

一方で SRC が反共振状態となるように ($\phi = \pi/2$) した場合には SRC 内で弱めあう前に信号を取り出すことが可能となる。さらに、この状態から SRC の離調を行うと、感度が良い周波数帯域は制限されるが、狭い周波数帯域で高感度を実現できる。

$\phi = \pi/2 - 0.3$、$\pi/-0.4$、$\pi/-0.5$ とした場合の SRFPMI の感度は図 3.8 のようになる。狭い帯域ながら感度が改善し、極々狭い帯域では SQL も超えていることが分かる。SRC で構成されている光ばねによって鏡のダイナミクスが変更されているために、自由質点で構成された通常のレーザー干渉計型重力波検出器の感度の限界を超えることが出来ているのである。図 3.8 に見られる低周波側のディップが光ばねの

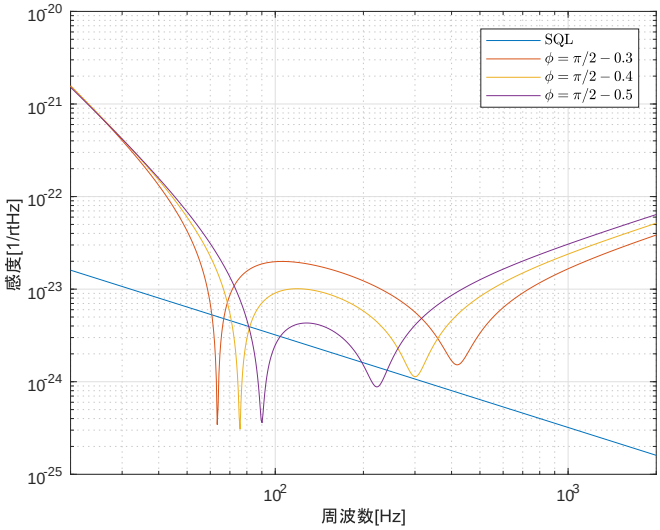

図 3.8: 離調を行った SRFPMI の感度

共振周波数に対応している。このときの光ばねの共振角周波数は

$$\omega_{\rm OS} = \sqrt{\frac{8P\omega_0 \sin 2\phi}{mL^2\gamma^2[(r_{\rm s} + 1/r_{\rm s}) - 2\cos 2\phi]}} \tag{3.24}$$

と表せる。

3.3.3 非線形光学結晶を挿入した SRFPMI の感度

SRC を離調することで狭い帯域ながら感度を改善できることが分かった。図 3.8 に示したように、離調角を変化させることで光ばねの共振周波数を変更でき、感度の良い帯域を変更することができる。しかし、このように離調角を変化させても高周波数帯域における感度の改善は期待できない。この問題を解決するために提案されたのが、SRC 内に非線形光学素子を挿入することによる信号増幅である [3]。図 3.9 のように、非線形光学素子を挿入した SRPFMI の量子雑音について考える。非線形光学素子にはポンプ光を入射させ、光パラメトリック発振によるシグナル光の増幅を行う。この増幅効果を表すスクイージングファクタを s とする。

量子雑音のみを考慮した、角周波数 ω の重力波に対する非線形光学素子を挿入した SRFPMI の感度 $\sqrt{S_{h3}}$ は次のように計算される：

$$\sqrt{S_{h3}} = \sqrt{\frac{|C'_{21}|^2 + |C'_{22}|^2}{2t_s^2|D'_2|^2\mathcal{K}}} h_{\rm SQL} \tag{3.25}$$

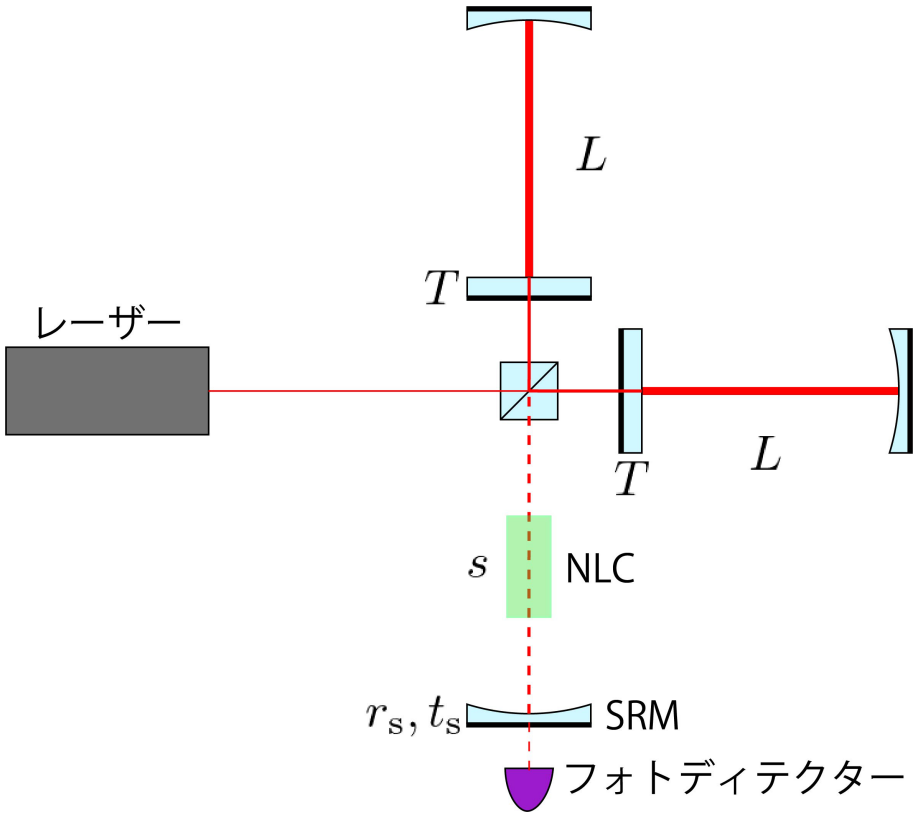

図 3.9: 非線形光学素子を挿入した SRFPMI

ここで

$$C'_{21} = t_s^2\left(\frac{1+s^2}{2}\sin 2\phi - \mathcal{K}\cos^2\phi\right) \tag{3.26}$$

$$C'_{22} = (1+r_s^2)\left(\frac{1+s^2}{2}\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2}\sin 2\phi\right) - 2sr_s\cos 2\beta + \frac{1-s^2}{2}t_s^2 \tag{3.27}$$

$$D'_2 = -(-1+sr_s e^{2i\beta})\cos\phi \tag{3.28}$$

$$\tag{3.29}$$

であり、$\mathcal{K}$、h_{SQL}、β はそれぞれ式 (3.15)、(3.17)、(3.23) で定義される。
$s = 10^{-0/20}$、$10^{-3/20}$、$10^{-6/20}$、$10^{-10/20}$ とした場合の非線形光学素子を挿入した SRFPMI の感度は図 3.10 のようになる。広い周波数帯域で感度が改善しており、特に

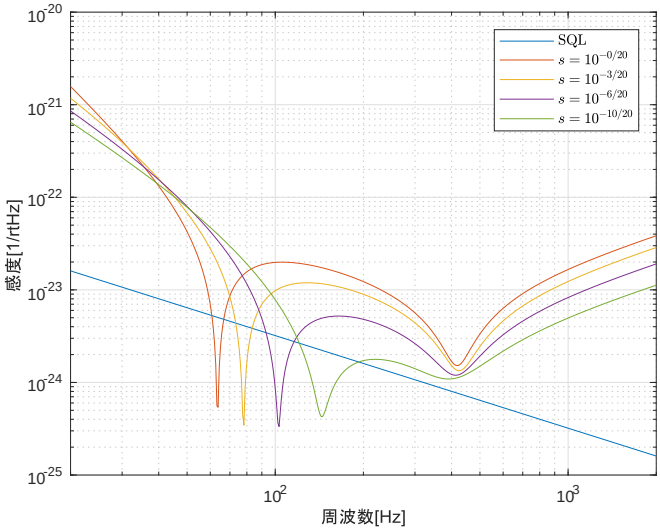

図 3.10: 非線形光学素子を挿入した SRFPMI の感度

離調角は高周波側のディップの周波数が一致するように調整しており、それぞれ $\phi = \pi/2 - 0.3$、$\pi/2 - 0.32$、$\pi/2 - 0.4$、$\pi/2 - 0.51$ である。

$s = 10^{-10/20}$ の場合には広い周波数帯域で SQL を突破していることが分かる。このときの光ばねの共振角周波数は

$$\omega'_{\mathrm{OS}} = \sqrt{\frac{8(P/s)\omega_0\sin 2\phi}{mL^2\gamma^2[(r_s+1/r_s)-(s+1/s)\cos 2\phi]}} \tag{3.30}$$

と表せる。

宗宮研究室ではこの光学系[2]の原理検証実験が行われている。本実験の目的は、この原理検証実験で必要となる各要素技術を開発することである。

[2]宗宮研究室で行われている実験の光学系はマイケルソン干渉計の腕に Fabry-Pérot 共振器を作らない SR 干渉計 (SRMI) である。

3.4 Fabry-Pérot 共振器における光ばね

本実験の目標は、シンプルかつハイパワーな光共振器である Fabry-Pérot 共振器における光ばねを観測することである。

Fabry-Pérot 共振器において光ばねが構成されているときの、実効的な共振角周波数 $\omega_{\rm eff}$ は次のように求められる [4]：

$$\omega_{\rm eff} = \sqrt{\omega_0^2 + K(\omega_{\rm eff})/m} \tag{3.31}$$

ここで、ω_0 は懸架系の機械的な共振周波数、m は鏡の質量であり、光ばねのばね定数 $K(\omega)$ は

$$K(\omega) = K_0 \frac{[1+(\delta/\gamma)^2-(\omega/\gamma)^2]}{[1+(\delta/\gamma)^2-(\omega/\gamma)^2]^2+4(\omega/\gamma)^2} \tag{3.32}$$

$$K_0 = \frac{128\pi P(\delta/\gamma)}{T^2 c\lambda}\frac{1}{1+(\delta/\gamma)^2} \tag{3.33}$$

$$\gamma = \frac{Tc}{4L} \tag{3.34}$$

と表される。ここで、P は入射レーザー光の強度、T はフロントミラーの強度透過率、λ はレーザーの波長、L は共振器長、δ は規格化された離調角周波数である。$\omega_{\rm eff}$ は $\delta \approx 0.5\gamma$ のときに最大となる。本実験のセットアップのパラメータ ($m = 2\times10^{-4}$[kg]、$P = 0.05$[W]、$T = 0.02$、$\lambda = 1064\times10^{-9}$[m]、$L = 0.25$[m]) を用いると、$\delta = 0.5\gamma$ のとき、おおよそ $\omega_{\rm eff} = 600$[rad/sec] となる。

第4章　実験の原理

光ばねを観測するためには、共振器長を非常に厳密な距離に保っておかなければならない。そのために用いられる手段が負帰還制御である。

4.1　負帰還制御

4.1.1　負帰還制御の必要性

式 (3.7) より、共振器長を変化させた際に共振のピークが現れる間隔は $\Delta L = \lambda/2$ である。この間隔のことを 1 フリンジと呼ぶ。目標としている実験系では離調角を 0.1 度の精度で変化させる [5] ため、鏡を 3600 分の 1 フリンジ程度の範囲に留めておかなければならない。地面振動や周囲の空気の揺らぎなどによる外乱を抑え込み、この精度を達成するために、鏡に対して負帰還制御を行う。

制御理論においては、光学系・フィルター回路・鏡を動かす駆動系 (アクチュエータ) といった各要素を伝達関数を用いて表現する。伝達関数 $T(\omega)$ は、ある要素に対する周波数領域における入力信号 $X(\omega)$ と出力信号 $Y(\omega)$ の比である：

$$T(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{4.1}$$

この関係を図式に表したものが図 4.1 に示すようなブロック線図である。

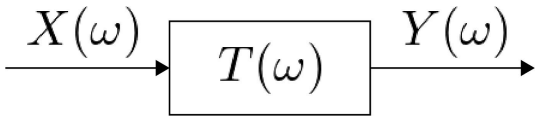

図 4.1: ブロック線図

複数の要素を連結して用いる場合は、入力信号 $X(\omega)$ と最終的な出力信号 $Y(\omega)$ の比は、各要素の伝達関数の積で表せる：

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = T_1(\omega)T_2(\omega)\cdots T_n(\omega) \tag{4.2}$$

光学系に対する負帰還制御は、鏡が外乱により動かされた信号を読み取り、鏡が元の位置に戻るよう信号をフィードバックすることで行われる。ただし、得られた信号をそのままフィードバックすると大抵の場合は制御系に不安定性が現れるため、得られた信号をこの不安定性を解消するように設計されたフィルターに通す必要がある。

例として、図 4.2 のように、Fabry-Pérot 共振器に対し負帰還制御を行うことを考える。Fabry-Pérot 共振器の伝達関数を $H(\omega)$、フィルター回路の伝達関数を $F(\omega)$ と

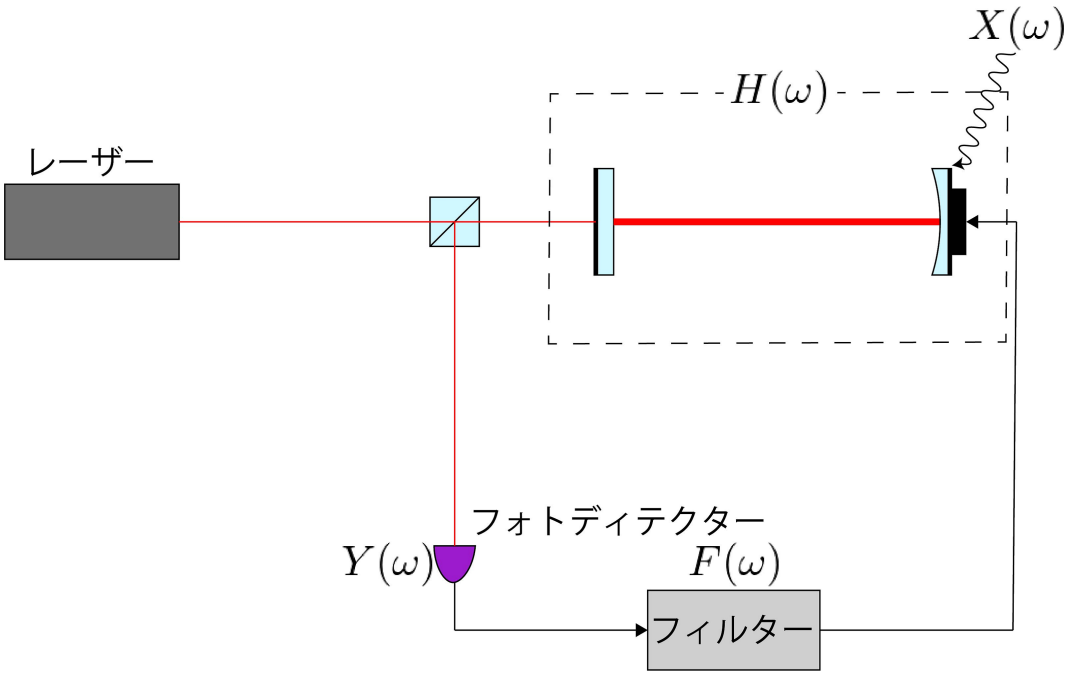

図 4.2: Fabry-Pérot 共振器に対する負帰還制御

し、鏡に加わる外乱を $X(\omega)$、フォトディテクターで観測される Fabry-Pérot 共振器の反射光 (出力) を $Y(\omega)$ とする。便宜上、この出力は鏡の変位に比例するような信号になっているとする。また、フィルター回路の出力信号を Fabry-Pérot 共振器に帰還させる際には、得られた信号を打ち消すように -1 倍してから返すようにする。これをブロック線図で表すと図 4.3 のようになる。このときの出力信号は

$$\begin{aligned} Y &= HX - FHY \\ &= \frac{H}{1+FH}X \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。また、このとき鏡では制御により入力信号 $X(\omega)$(外乱) が抑え込まれており、この鏡での実効的な入力 $\tilde{X}(\omega)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X - FH\tilde{X} \\ &= \frac{1}{1+FH}X \end{aligned} \tag{4.4}$$

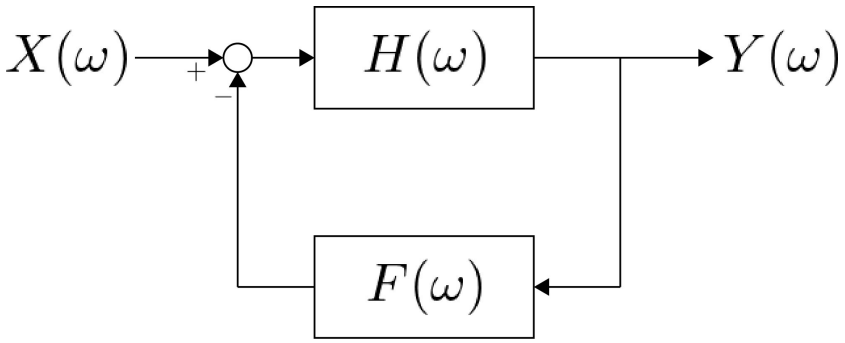

図 4.3: 負帰還制御のブロック線図

となる。ここで、$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ をオープンループ伝達関数と呼び、$|G(\omega)|$ をオープンループゲイン (OLG) と呼ぶ。OLG が十分大きい周波数帯域においては

$$\tilde{X} \approx \frac{1}{G}X \tag{4.5}$$

となるため、外乱を OLG 分の 1 にまで抑え込めることが分かる[1]。

4.1.2 負帰還制御の安定性

OLG は周波数に依存する複素関数であり、ゲイン $|G(\omega)|$ と位相 $\theta(\omega)$ を用いて

$$G(\omega) = |G(\omega)|e^{i\theta(\omega)} \tag{4.6}$$

と表せる。式 (4.4) より、$|G(\omega)| \gg 1$ と見なせる周波数帯域では $\tilde{X} \approx X/G$ となり外乱を抑え込むことが出来るが、$|G(\omega)| \ll 1$ と見なせる周波数帯域では $\tilde{X} \approx X$ となり外乱を抑え込むことは出来ない。この制御の可否の指標となる $|G(\omega)| = 1$ を満たす周波数のことをユニティゲイン周波数という。

式 (4.4) より、$G(\omega) = -1$ となる周波数が存在すれば、すなわちユニティゲイン周波数における位相が $\theta(\omega) = \pi$ となれば、ユニティゲイン周波数における入力が無限大に増幅されてしまうことが分かる。このときの鏡はユニティゲイン周波数で強制振動されることになり、共振点などの特定の位置に留めることはできない。$G(\omega) = -1$ となる周波数が存在している制御系を不安定な制御系と呼ぶ[2]。

光学系や懸架系、またはアクチュエータの伝達関数を変化させることは難しいため、ユニティゲイン周波数、またはユニティゲイン周波数における位相をフィルタ

[1]ただし、重力波信号も外乱と同様に OLG 分の 1 に抑え込まれてしまう。実際の地面設置型重力波検出器において地面振動雑音の低減を行う際に重要な役割を果たすのは多段振り子で構成される防振系であり、負帰還制御は鏡の位置を特定の位置に留めるための補助的な手段として用いられる

[2]より厳密には、一巡伝達関数で書き表せるときの制御系の安定性は、ナイキストの安定判別法を用いて議論する必要がある。

の伝達関数で変化させることで、制御系の不安定性を解消する。本実験においては、フィルタはオペアンプを用いたアナログ回路で実装する。

制御系の安定性を議論する際には、図 4.4 のような Bode 線図を用いると便利である。Bode 線図は 2 つのグラフから構成され、縦軸は上のグラフがゲイン[3]、下のグラフが位相となっている。横軸はどちらも常用対数を取った周波数である。

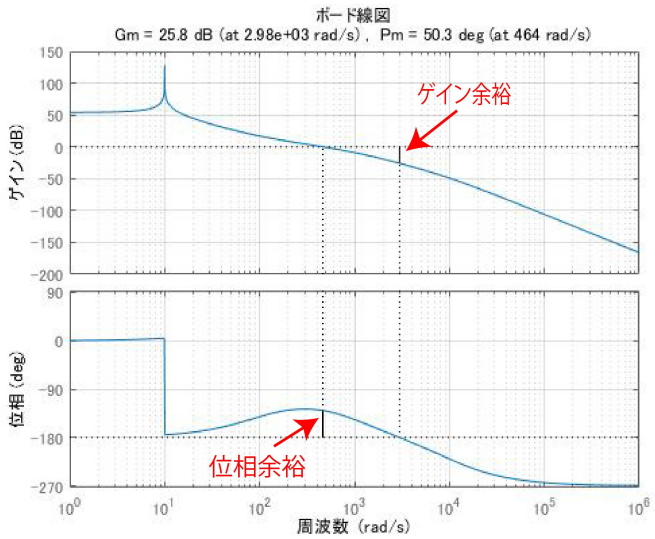

図 4.4: Bode 線図の例

ユニティゲイン周波数における位相に 180° を加えたものを位相余裕、位相が −180° となる周波数におけるゲインをゲイン余裕と呼ぶ。この 2 つは制御系の安定性の指標になる。

4.1.3 懸架系の伝達関数

懸架されている鏡に振動や制御信号を伝えるときの伝達関数を、運動方程式を Fourier 変換することから導出する。

図 4.5 のように、質量 m の鏡が長さ L のワイヤーで懸架されている単振り子を考える。ワイヤーと天井の接点を x、ワイヤーと鏡の接点を y とする。このときの鏡の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mg}{L}(y-x) - \Gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y-x) \tag{4.7}$$

[3]Bode 線図中のゲインは dB 表記 ($20\log_{10}|G(\omega)|$) で表す。dB 表記はレベル表現の 1 つで、音響学などでよく用いられる。例えば 120dB は 10^6 倍の増幅率を表す。

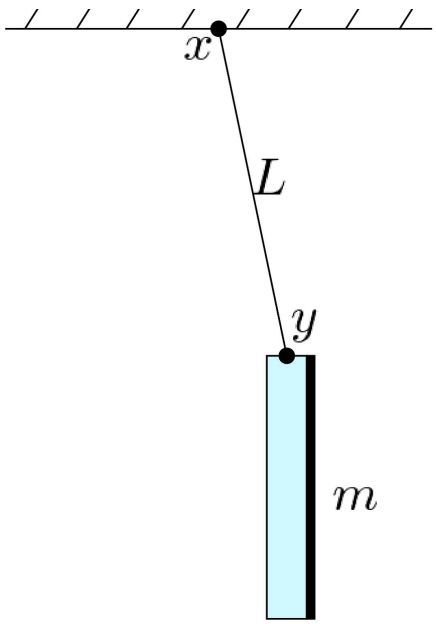

図 4.5: 単振り子

である。ここで、Γ は鏡に働く速度に比例する抵抗力の係数 (ダンピング係数) である。$\omega_0^2 = g/L$,$\gamma = \Gamma/2m$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2(y-x) - 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y-x) \tag{4.8}$$

となる。Fourier と逆 Fourier 変換を

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t x(t) e^{-i\omega t} \tag{4.9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega X(\omega) e^{i\omega t} \tag{4.10}$$

とすると、x の時間微分に対する Fourier 変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\ &= [x(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\ &= i\omega X(\omega)\end{aligned} \tag{4.11}$$

となる。よって、(4.8) 式の両辺を Fourier 変換すると

$$-\omega^2 Y(\omega) = -\omega_0^2(Y(\omega) - X(\omega)) - 2i\gamma\omega(Y(\omega) - X(\omega)) \tag{4.12}$$

となる。この単振り子の場合、地面振動は天井からワイヤーを伝わり鏡を揺らすので、伝達関数は $Y(\omega)/X(\omega)$ で表せる。よって、この単振り子の伝達関数は

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2} \tag{4.13}$$

である。

$Q = \omega_0/2\gamma$ で定められる無次元量は Q 値と呼ばれ、振り子の伝達関数における共振のピークの鋭さを表す。Q 値が十分大きい ($Q \gg 1$) 場合、振り子の伝達関数 (4.13) のゲインは、周波数帯域ごとに

$$\left|\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\right| = \begin{cases} 1 & (\omega \ll \omega_0) \\ Q & (\omega \approx \omega_0) \\ \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 & (\omega \ll Q\omega_0) \\ \frac{Q\omega_0}{\omega} & (\omega \gg Q\omega_0) \end{cases} \tag{4.14}$$

と表せる。すなわち共振周波数 ω_0 が低く Q 値が高ければ、$\omega_0 < \omega \ll Q\omega_0$ という広い帯域で周波数の二乗に比例する防振効果を得ることができることが分かる。この場合の伝達関数を Bode 線図で表すと図 4.6 のようになる[4]。

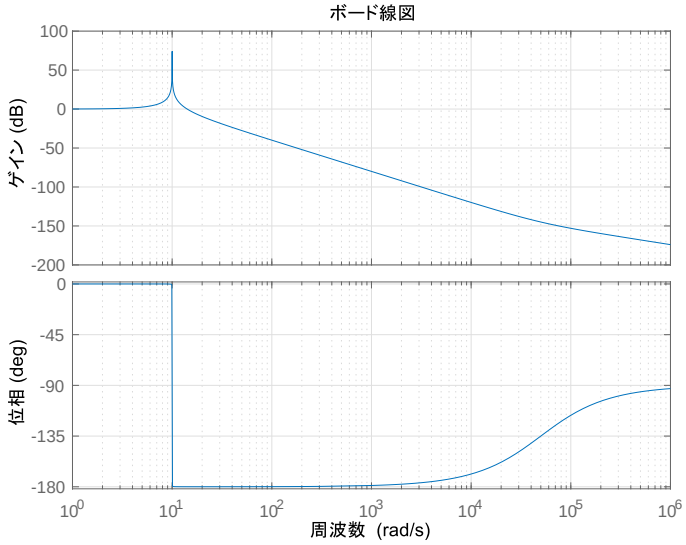

図 4.6: 単振り子の伝達関数
$\omega_0 = 10$[rad/s]、$\gamma = 10^{-3}$[rad/s] とした。

[4] この図では横軸が角周波数になっており、簡単のため $\omega_0 = 10$[rad/s] としたが、実際に用いた懸架系の共振周波数は 11[Hz] ほど、すなわち角周波数に直すと 70[rad/s] 程度である。

次に、鏡に直接力 F を加える場合を考える。このときの運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_0^2 y - 2m\gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F \tag{4.15}$$

であり、Fourier 変換変換して整理すると

$$\frac{Y(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} = \frac{1}{m}\frac{1}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2} \tag{4.16}$$

となる。これは力から変位への伝達関数であり、Bode 線図で表すと図 4.7 のようになる。特に、振り子の共振周波数以上の帯域では

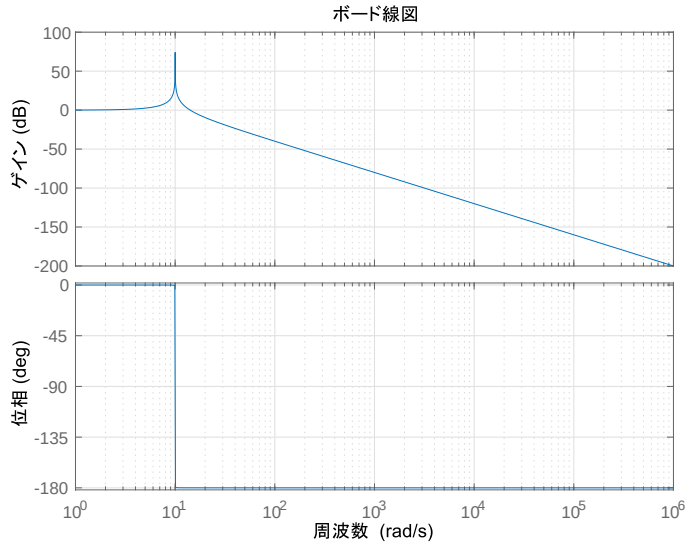

図 4.7: 単振り子の力から変位への伝達関数
$\omega_0 = 10[\mathrm{rad/s}]$、$\gamma = 10^{-3}[\mathrm{rad/s}]$ とし、$m\omega_0^2 = 1$ となるように適当に無次元化した。

$$\frac{Y(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} = -\frac{1}{m\omega^2} \qquad (\omega \gg \omega_0) \tag{4.17}$$

であることから、位相は $-180°$ である。すなわち、振り子に力を加えるような要素がループ含まれる系に対する OLG のユニティゲイン周波数がこの帯域にあれば、適切な位相保障[5]を施さない限りその制御系は発振する。

[5]位相保障回路については 4.1.4 節で詳しく述べ、この回路を用いた位相保障方法については 4.1.6 節で詳しく述べる。

4.1.4　アナログ回路の伝達関数

オペアンプを用いたアナログ回路では、広い周波数帯域で理想的なローパスフィルタやハイパスフィルタなどを実現できる。

ローパスフィルタとハイパスフィルタの伝達関数はそれぞれ次のように表される：

$$H_1(\omega) = K_1 \frac{1}{1 + i\omega T_1} \tag{4.18}$$

$$H_2(\omega) = K_2 \frac{1}{1 + 1/(i\omega T_2)} \tag{4.19}$$

ここで、K_1、K_2 はそれぞれの通過域でのゲイン、T_1、T_2 はフィルタの時定数である。伝達関数を Bode 線図で表すと、それぞれ図 4.8 と図 4.9 のようになる。ローパスフィ

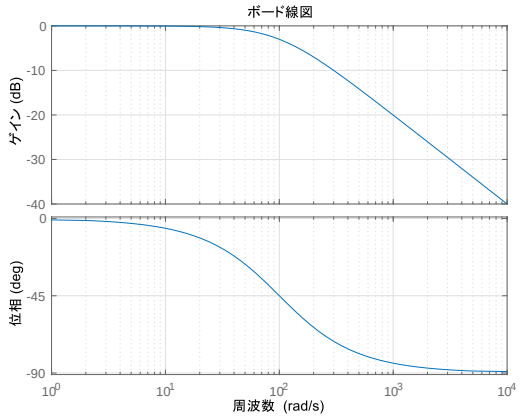

図 4.8: ローパスフィルタの伝達関数
$K_1 = 1$、$T_1 = 0.01$[rad/s] とした。

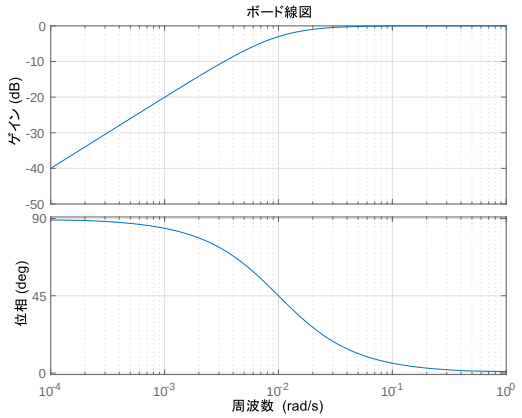

図 4.9: ハイパスフィルタの伝達関数
$K_2 = 1$、$T_2 = 0.01$[rad/s] とした。

ルタは時定数の逆数の角周波数付近から位相が遅れ始め、ハイパスフィルタは時定数の逆数の角周波数付近まで位相が進んでいることが分かる。

オペアンプを用いたローパスフィルタとハイパスフィルタの回路図はそれぞれ図 4.10 と図 4.11 のようになる。 K_1、T_1、K_2、K_2 は、それぞれ

$$K_1 = -\frac{R_2}{R_1} \tag{4.20}$$

$$T_1 = R_2 C_1 \tag{4.21}$$

$$K_2 = -\frac{R_4}{R_3} \tag{4.22}$$

$$T_2 = R_3 C_2 \tag{4.23}$$

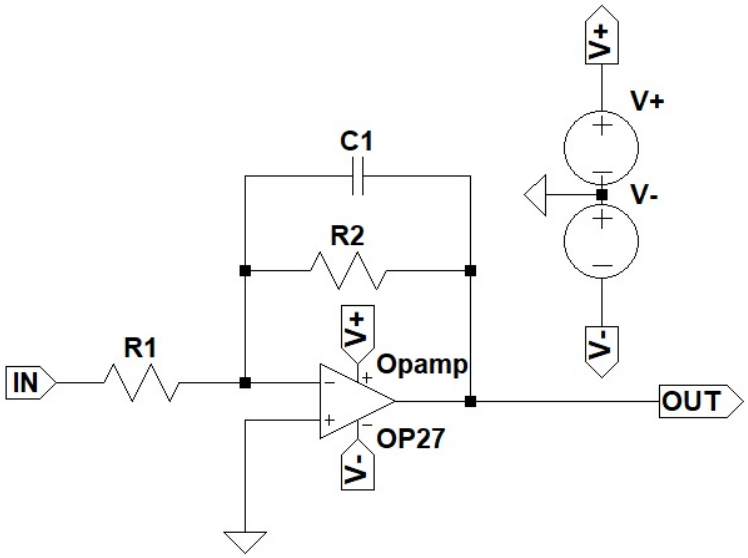

図 4.10: ローパス回路

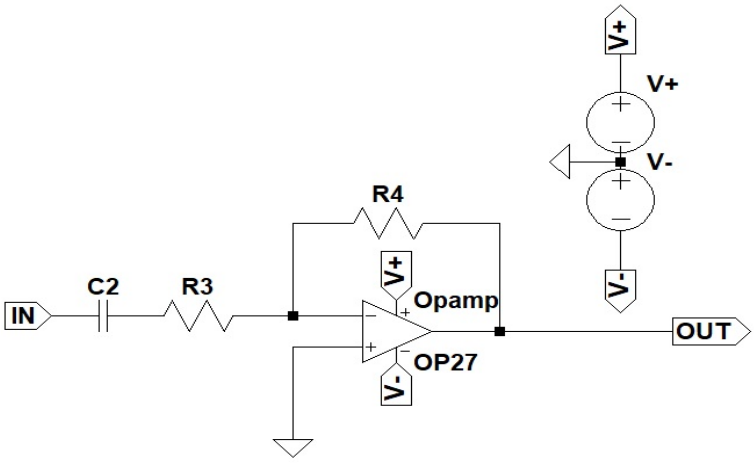

図 4.11: ハイパス回路

と表せる[6]。伝達関数の次数が変化する境目となる周波数のことをカットオフ周波数と呼び、ローパスフィルタ・ハイパスフィルタそれぞれに対して

$$f_{\text{cutoff-lowpass}} = \frac{1}{2\pi T_1} = \frac{1}{2\pi R_2 C_1} \tag{4.24}$$

$$f_{\text{cutoff-highpass}} = \frac{1}{2\pi T_2} = \frac{1}{2\pi R_3 C_2} \tag{4.25}$$

である。

伝達関数の分子が 0 になる角周波数を零点 (ゼロ)、分母が 0 になる角周波数を極 (ポール) と呼ぶ[7]。1 つの零点と 1 つの極を持つフィルターを考える：

$$H_3(\omega) = K_3 \frac{1 + i\omega T_3}{1 + i\omega T_4} \tag{4.26}$$

1 ゼロ・1 ポールフィルタに対して、$T_3 > T_4$ を満たすときは位相進み保障フィルタ、$T_4 < T_3$ を満たすときは位相遅れ保証フィルタと呼ぶ。ここでは位相進み保障フィルタについて考える。位相進み保障フィルタの伝達関数は図 4.12 のようになる。角周

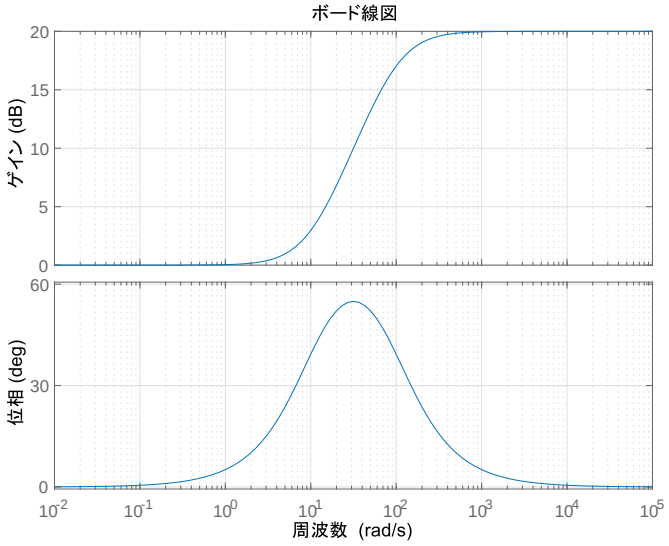

図 4.12: 位相進み保障フィルタの伝達関数
$K_3 = 1$、$T_3 = 0.1$、$T_4 = 0.01$ とした。

波数 $1/T_3$ から $1/T_4$ の帯域のみで位相が進んでいることが分かる。

オペアンプを用いた位相進み保障フィルタの回路図は図 4.13 のようになる。K_3、

[6] これらは反転増幅型の回路なので、十分周波数が低い帯域の位相はローパス回路が 180°、ハイパス回路が 270° となる。

[7] 式 (4.18) は 1 つの極を持つ。これを特に 1 次のローパスフィルタなどと呼ぶ。式 (4.13) は 1 つの零点と 2 つの極を持ち、$\omega_0 < \omega \ll Q\omega_0$ の帯域では 2 次のローパスフィルタ、$\omega \gg Q\omega_0$ の帯域では 1 次のローパスフィルタとして振る舞う。

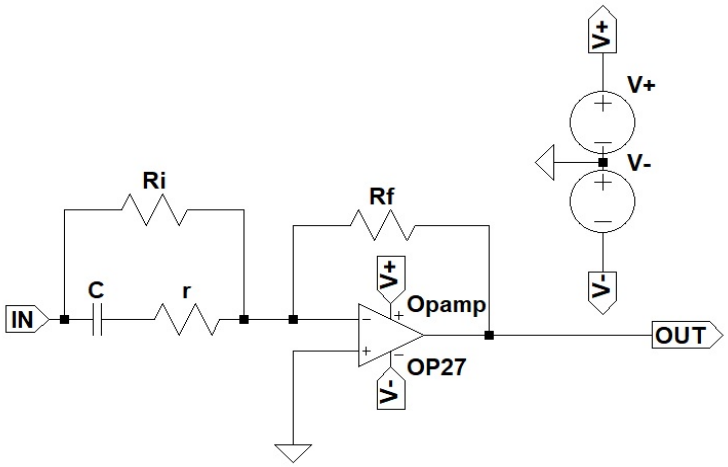

図 4.13: 位相進み保障回路

T_3、T_4 は、それぞれ

$$K_3 = -\frac{R_\mathrm{f}}{R_\mathrm{i}} \tag{4.27}$$

$$T_3 = C(R_\mathrm{i} + r) \tag{4.28}$$

$$T_4 = Cr \tag{4.29}$$

と表せる。

4.1.5 アクチュエータの伝達関数

鏡を動かす駆動系 (アクチュエータ) として、本実験ではピエゾ素子とコイルを用いた。

ピエゾ素子は、圧電効果を利用した電圧を掛けると伸縮する素子のことである。懸架系を用いない系では、鏡にピエゾ素子を張ったもので共振器長を変更できるようにした。ピエゾ素子はキャパシタであり、等価回路は図 4.14 のようになる。ここで、R は直前の回路の出力後の抵抗、C はピエゾ素子の静電容量である。この回路の伝達関数は、OUT 側に電流が流れ込まないと近似すると

$$\frac{V_\mathrm{out}}{V_\mathrm{in}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \tag{4.30}$$

となり、1 次のローパス特性を示す。

懸架系を用いた系では、コイルと鏡に張った磁石によるアクチュエータ (コイル・マグネットアクチュエータ) を用いた。これは、懸架系の Q 値が大きいことから地面振動が共振周波数付近で大きく増幅されてしまい、ピエゾ素子では可動域が足りず

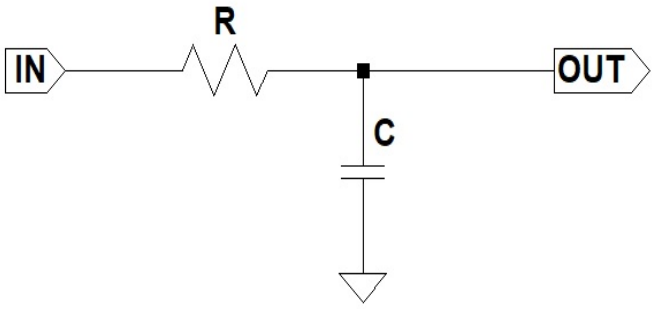

図 4.14: ピエゾ素子の等価回路

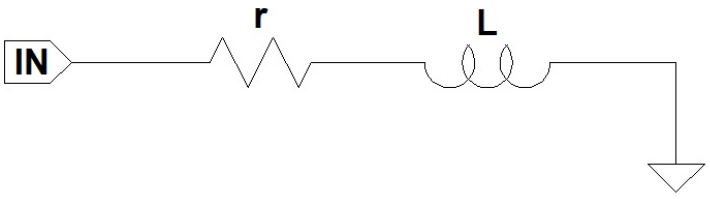

図 4.15: コイルの等価回路

制御状態に引き込めないためである。コイルの等価回路は図 4.15 のようになる。ここで、r はコイルの内部抵抗、L はコイルのインダクタンスである。入力電圧 V_{in} とコイルに流れる電流 I の関係は

$$\frac{I}{V_{\mathrm{in}}} = \frac{1}{r + i\omega L} \tag{4.31}$$

であり、コイルに流れる電流と鏡に働く力 F の関係は、Biot-Savart の法則より

$$\frac{F}{I} = \frac{q_{\mathrm{m}} N}{2a} = \beta \tag{4.32}$$

である。ここで、q_{m} は鏡に張り付けた磁石の磁荷、N はコイルの巻き数、a はコイルの半径であり、コイルは銅線が同一箇所に巻きつけていると見なし、コイルの半径に比べコイルと磁石の距離は十分近いとした。β は周波数に依存しない定数である。式 (4.31) と式 (4.32) 式より、入力電圧と鏡に働く力の関係は

$$\frac{F}{V_{\mathrm{in}}} = \frac{\beta}{r} \frac{1}{1 + i\omega L/r} \tag{4.33}$$

となり、こちらも 1 次のローパス特性を示す。

4.1.6 フィルタ回路の選定

4.1.5 節で、ピエゾ素子とコイルのどちらを用いたアクチュエータも 1 次のローパス特性を示すことが分かった。式 (4.18) より、ローパス特性を示す要素による位相の遅れは十分周波数が高い帯域でも $-90°$ であり、この要素のみでは制御系の不安定性は現れない。しかし、電圧・力を変位に変換する際にさらなる位相遅れが生じるため、フィルタ回路を用いて制御系の不安定性を解消する必要がある。

ピエゾ素子はキャパシタに印加した電圧に比例して伸縮する素子だが、高周波帯で機械共振のピークが存在し、位相が急激に遅れる。入力電圧から変位への伝達関数の簡略化した予想図が図 4.16 である。3k[rad/s] に機械共振のピークが存在するとし、十分周波数が低い帯域でゲインが 20dB になるよう適当に無次元化した。この場合の UGF は 3k[rad/s] 程度に存在し、そのときの位相は $-180°$ 程度なのでこの制御系は不安定になる。そこで、この機械共振のピーク付近でゲインが 0dB を下回るように入力電圧の直後にローパスフィルタを加える。カットオフ角周波数が 100[rad/s] のローパスフィルタを加えたときの伝達関数は図 4.17 のようになり、100[rad/s] ほどにある UGF での位相を $-180°$ 以上に出来ていることが分かる。

コイル・マグネットアクチュエータは鏡を懸架している場合に用いるので、入力電圧から変位への伝達関数は、式 (4.16) と式 (4.33) より

$$\frac{Y}{V_{\mathrm{in}}} = \frac{\beta}{rm} \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2} \frac{1}{1 + i\omega L/r} \tag{4.34}$$

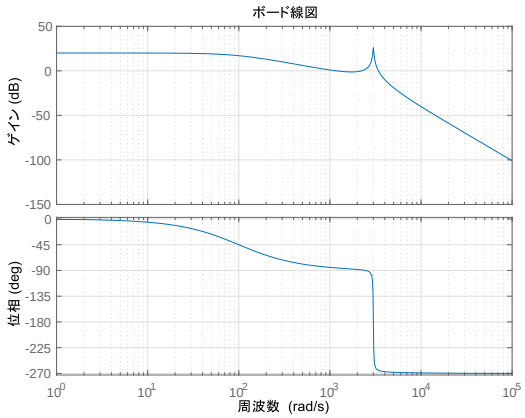

図 4.16: ピエゾ素子を用いたアクチュエータの伝達関数 (予想図)

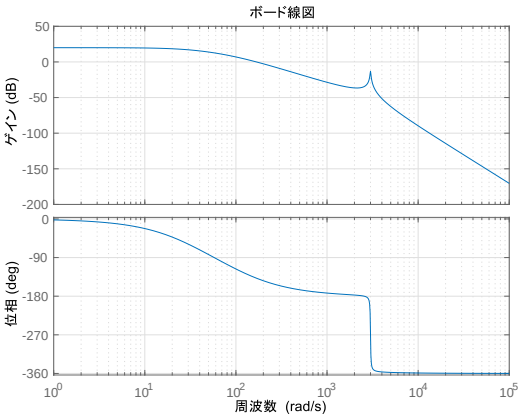

図 4.17: ローパスフィルタを加えたときの伝達関数 (予想図)

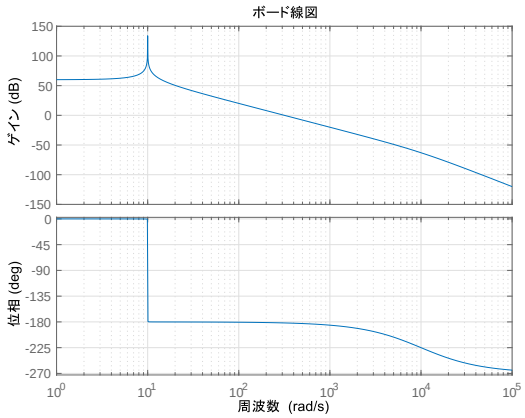

図 4.18: 鏡を懸架し、コイル・マグネットアクチュエータを用いた場合の伝達関数

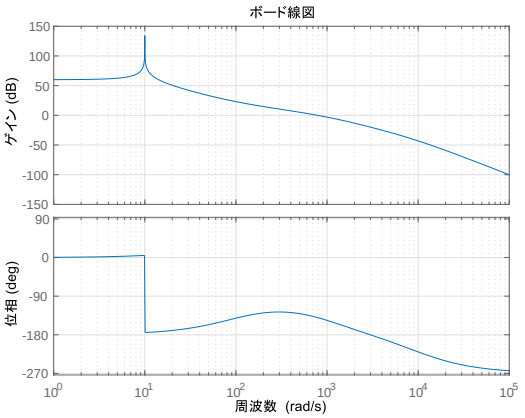

図 4.19: 位相進み保障フィルタを加えたときの伝達関数

となり、Bode 線図で表すと図 4.18 のようになる。コイルによるローパスフィルタのカットオフ角周波数を 10^4[rad/s] とし、十分周波数が低い帯域でゲインが 60dB になるよう適当に無次元化した。UGF は 300[rad/s] 程度にあり、そのときの位相は $-180°$ 程度なのでこの系は不安定になる。式 (4.13) より、懸架系に伝わった雑音は共振周波数付近で増幅されるため、地面振動などを抑え込むためには共振周波数において被制御下にある必要がある。ピエゾ素子を用いた場合と同様に、全体のゲインを下げた上でカットオフ周波数が懸架系の共振周波数より低いローパスフィルタを用いることで共振周波数以前に UGF を作り、制御系の不安定性を解消することを考えることはできるが、この場合には共振周波数で OLG が 0dB 以下になるので地面振動などを抑え込むことはできない。そこで、共振周波数以降の位相が $-180°$ となる帯域で位相を進めることにより、位相余裕を作ることを考える。4.1.4 節で考えたフィルターのうち位相を進めるものはハイパスフィルタと位相進み保障フィルタがあったが、ハイパスフィルタを用いると共振周波数以下の帯域におけるゲインを下げることになり、制御による抑え込みが弱くなってしまうので、ここでは位相進み保障フィルタを用いる。100[rad/s] から 1k[rad/s] の範囲で位相を進める位相進み保障フィルタを加えたときの伝達関数は図 4.19 のようになり、700[rad/s] ほどにある UGF での位相を $-180°$ 以上に出来ていることが分かる。

4.2 光学系からの線形信号取得

4.1 節で、アクチュエータとフィルター回路を合わせて用いることにより UGF での位相を $-180°$ 以上に出来ることが分かった。後は、光学系からロックしたい位置の周りで鏡の変位に比例する信号を取り出すことができれば、その光学系に対して負帰還制御を行うことができる。この節では、まず Michelson 干渉計からの線形信号取得について考え、次に 2 枚鏡から構成される Fabry-Pérot 共振器に対して通常の信号取得では負帰還制御が不可能であることを見る。

4.2.1 Michelson 干渉計の応答

光学系からの線形信号取得の例として、Michelson 干渉計の応答について考える。式 (2.3) より、Michelson 干渉計の AS ポート (出力側) のレーザーの強度は

$$P_{\mathrm{AS}} = \frac{1}{2}P_0(1 - \cos(\phi_-)) \tag{4.35}$$

であった。同様に計算すると、RFL ポート (レーザー側) に返ってくるレーザー強度は

$$P_{\mathrm{RFL}} = \frac{1}{2}P_0(1 + \cos(\phi_-)) \tag{4.36}$$

であり、これらを差し引きすると[8]

$$P_{\mathrm{diff}} = P_{\mathrm{RFL}} - P_{\mathrm{AS}} = P_0 \cos(\phi_-) \tag{4.37}$$

となる。$\phi_- = (2n \pm \frac{1}{2})\pi$ (n は整数) のとき、この強度の傾きは

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{diff}}}{\mathrm{d}\phi_-}\right|_{\phi_-=(2n\pm\frac{1}{2})\pi} = \mp P_0 \tag{4.38}$$

となり、$\phi_- = 2(L_x - L_y)\Omega/c$ に比例した信号、すなわち鏡の変位に比例した信号 (エラー信号) になっていることが分かる。よって、ミッドフリンジ[9]に Michelson 干渉計をロックすることが可能である。

4.2.2 2 枚鏡 Fabry-Pérot 共振器の制御の問題点

2 枚鏡で構成される Fabry-Pérot 共振器の反射光・透過光強度の傾きは、式 (3.3) と式 (3.4) より、共振点 $\phi = 2\pi m$ ($m = 1, 2, ...$) の周りでは 0 である。すなわちこれは鏡の変位に比例する信号ではなく、これらの信号を用いても共振点でのロックは不可能である。

共振器からエラー信号を得る方法として最も一般的なのは位相変調器 (EOM) を用いた Pound-Drever-Hall(PDH) 法[10]だが、今回は奇数枚の鏡から構成される共振器で可能となる偏光解析法によりエラー信号を取得した。

4.3 偏光解析法

偏光解析法は、P 偏光と S 偏光の振幅反射率の違いから片方の光を非共振成分とし、これを参照光として用いることで鏡の変位の情報を得る手法である [6]。偏光解析法による線形信号取得を行うためには、共振器を奇数枚の鏡で構成する必要がある。

[8]実際にはフォトディテクターから出力される強度に比例する信号を差動回路で差し引きする。

[9]$\phi_- = (2n \pm \frac{1}{2})\pi$ のとき、AS ポートのレーザーの強度は入射光強度の半分になっていることが分かる。このような状態をミッドフリンジと呼ぶ。また、AS ポートのレーザーの強度が入射光強度と等しくなるような状態をブライトフリンジ、0 になるような状態をダークフリンジと呼ぶが、P_{diff} はこのどちらの地点の周りでも鏡の変位に比例する信号ではないので、本節で述べている手法ではこれらの状態にはロックできない。実際の重力波検出器では強度雑音の影響を減らすために、ダークフリンジにロックする。

[10]EOM により共振器で共振しないサイドバンドを作り、これを参照光として用いることで鏡の変位の情報を得る手法。PDH 法を用いれば Michelson 干渉計をブライトフリンジやダークフリンジにロックすることも可能である。

4.3.1 リング共振器

3 枚以上の鏡から構成される共振器をリング共振器と呼ぶ。図 4.20 のような 3 枚の鏡から構成されるリング共振器について考える。共振器の一周長を L とすると、共

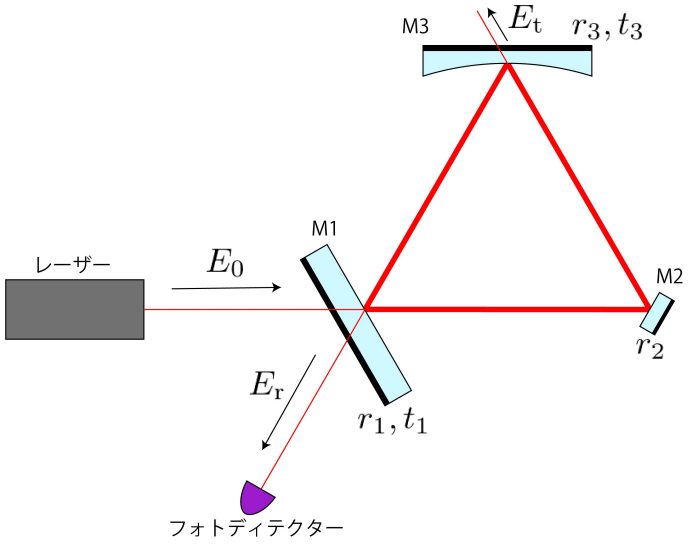

図 4.20: リング共振器

振器を一周する間の電場の位相変化は $\phi = L\Omega/c$ となる。また、M1→M2→M3 と光が進む間の位相変化を $\phi' = l\Omega/c$ とする。

共振器で反射する電場 E_r と共振器から透過する電場 E_t は、式 (3.1)、式 (3.2) と同様に

$$E_r = \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}}\right) E_0 \tag{4.39}$$

$$E_t = \frac{t_1 t_3 e^{-i\phi'}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}} E_0 \tag{4.40}$$

となり、反射光強度、透過光強度はそれぞれ

$$P_r = \frac{\{(t_1^2 + r_1^2) r_2 r_3 - r_1\}^2 + 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2 + 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \tag{4.41}$$

$$P_t = \frac{(t_1 t_3)^2}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2 + 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \tag{4.42}$$

となる。共振条件は

$$\phi = 2\pi m \qquad (m = 1, 2, ...) \tag{4.43}$$

であり、$\nu_{\rm FSR}$ とフィネスは

$$\nu_{\rm FSR} = \frac{c}{L} \tag{4.44}$$

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{1 - r_1 r_2 r_3} \tag{4.45}$$

である。

ここではP偏光とS偏光のどちらに対しても振幅反射率が同じとして計算したが、実際にはこれらには差異がある。光が屈折率が異なる媒質に入射するときの振幅反射率と振幅透過率は、Fresnelの公式より、P偏光とS偏光に対してそれぞれ

$$r^{\rm P} = \frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)} \tag{4.46}$$

$$r^{\rm S} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{4.47}$$

$$t^{\rm P} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} \tag{4.48}$$

$$t^{\rm S} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{4.49}$$

である。ここで α は入射角、β は屈折角である。入射角が十分小さいときには $r^{\rm P} \approx -r^{\rm S}$、$t^{\rm P} \approx t^{\rm S}$ とでき、これを改めてそれぞれ r、t と定義する。リング共振器からの透過光強度は、式 (4.42) よりP偏光とS偏光に対してそれぞれ

$$P_{\rm t}^{\rm P} = \frac{(t_1 t_3)^2}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2 + 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \tag{4.50}$$

$$P_{\rm t}^{\rm S} = \frac{(t_1 t_3)^2}{(1 + r_1 r_2 r_3)^2 - 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)} |E_0|^2 \tag{4.51}$$

となる[11]。P偏光に対して共振条件を満たしているとき ($\phi = 2\pi m$)、透過光強度は

$$P_{\rm t}^{\rm P}\big|_{\phi=2\pi m} = \frac{(t_1 t_3)^2}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2} |E_0|^2 \tag{4.52}$$

$$P_{\rm t}^{\rm S}\big|_{\phi=2\pi m} = \frac{(t_1 t_3)^2}{(1 + r_1 r_2 r_3)^2} |E_0|^2 \tag{4.53}$$

となり、それぞれの鏡の振幅反射率が1に十分近ければ $P_{\rm t}^{\rm P} \gg P_{\rm t}^{\rm S}$ であることが分かる。すなわちS偏光に対しては反共振となり、これを参照光として用いることができる。

[11] 式 (3.4) より、2枚鏡で構成される Fabry-Pérot 共振器では $P_{\rm t}^{\rm P} = P_{\rm t}^{\rm S}$ となることが分かる。一般に共振器が偏光選択性を持つのは、奇数枚で構成されるリング共振器のときである。

4.3.2 波長板

偏光解析法では 1/2 波長板と 1/4 波長板を用いるので、これらの光学素子を用いる際の計算法として便利である Jones 行列についてまとめておく。

波長板に入射する光の電場の振幅を、P 偏光成分と S 偏光成分に分けて

$$\boldsymbol{E}_0 = \begin{pmatrix} E^{\mathrm{P}} \\ E^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

のようにベクトルで表す。波長板の低速軸が P 偏光軸に対して θ だけ反時計向きに傾いているとすると、入射電場振幅は高速軸/低速軸の基底で

$$\boldsymbol{E}'_0 = \begin{pmatrix} E^{\mathrm{fast}} \\ E^{\mathrm{slow}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{\mathrm{P}} \\ E^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} E^{\mathrm{P}} \\ E^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

と表せる。$R(\theta)$ は P 偏光軸/S 偏光軸から高速軸/低速軸の基底への変換を行う行列 (回転行列) である。

1/2 波長板は高速軸と低速軸の間に π だけ位相差を生じさせる光学素子であり、1/2 波長板を表す Jones 行列は、P 偏光軸/S 偏光軸の基底で

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{H}}(\theta_{\mathrm{H}}) &= R^{-1}(\theta_{\mathrm{H}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} R(\theta_{\mathrm{H}}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{\mathrm{H}} & \sin 2\theta_{\mathrm{H}} \\ \sin 2\theta_{\mathrm{H}} & -\cos 2\theta_{\mathrm{H}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.56}$$

となる。1/2 波長板に直線偏光を入射させると、高速軸の周りに $2\theta_{\mathrm{H}}$ だけ偏光軸が回転した直線偏光に変換される。

1/4 波長板は高速軸と低速軸の間に $\pi/2$ だけ位相差を生じさせる光学素子であり、1/4 波長板を表す Jones 行列は、P 偏光軸/S 偏光軸の基底で

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{Q}}(\theta_{\mathrm{Q}}) &= R^{-1}(\theta_{\mathrm{Q}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} R(\theta_{\mathrm{Q}}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta_{\mathrm{Q}} - i\sin^2\theta_{\mathrm{Q}} & (1+i)\sin\theta_{\mathrm{Q}}\cos\theta_{\mathrm{Q}} \\ (1+i)\sin\theta_{\mathrm{Q}}\cos\theta_{\mathrm{Q}} & \sin^2\theta_{\mathrm{Q}} - i\cos^2\theta_{\mathrm{Q}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.57}$$

となる。1/4 波長板に直線偏光を入射させると、高速軸と低速軸を 2 つの軸とする楕円偏光に変換される。

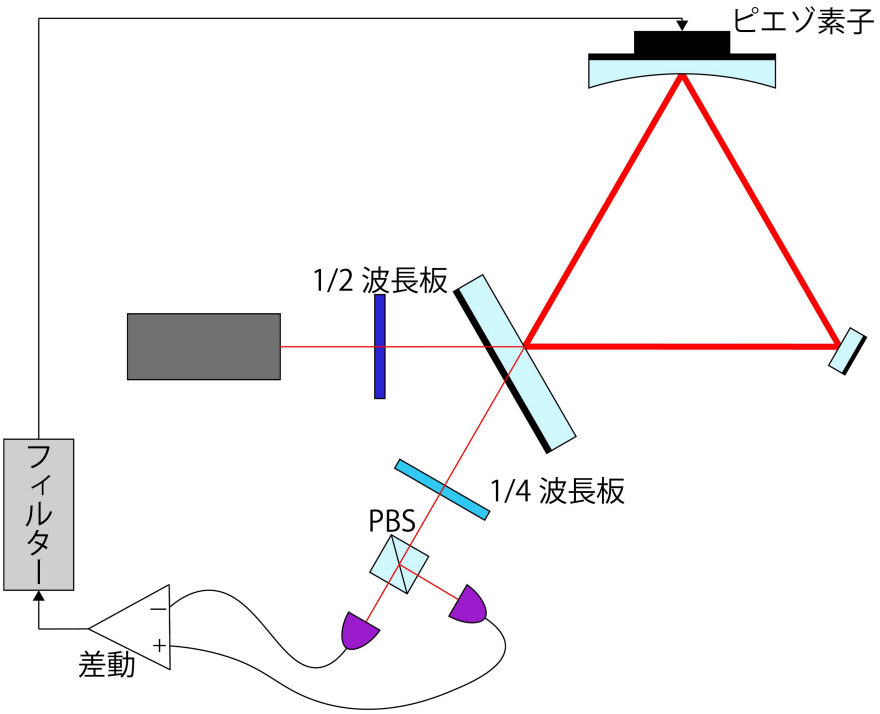

図 4.21: 偏光解析法のセットアップ

4.3.3 エラー信号の取得

偏光解析法を行う際のセットアップは図 4.21 のようになる。まずは、入射させた直線偏光の偏光軸をを 1/2 波長板により P 偏光軸から反時計周りに θ だけ回転させた状態にする。リング共振器への入射電場振幅は、P 偏光軸/S 偏光軸の基底で

$$\boldsymbol{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0^{\mathrm{P}} \\ E_0^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} E_0 \tag{4.58}$$

と表せる。

リング共振器の振幅反射率は、式 (4.39) より P 偏光・S 偏光に対してそれぞれ

$$r_{\mathrm{cav}}^{\mathrm{P}}(\phi) = -r_1 + \frac{(t_1)^2 r_2 r_3 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}} \tag{4.59}$$

$$r_{\mathrm{cav}}^{\mathrm{S}}(\phi) = r_1 + \frac{(t_1)^2 r_2 r_3 e^{-i\phi}}{1 + r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}} \tag{4.60}$$

である。ただし、4.3.1 節で示した通りこのリング共振器は S 偏光に対して反共振なので、共振点付近では $r_{\mathrm{cav}}^{\mathrm{S}}(\phi) \approx 1$ とできる。よって、リング共振器からの反射電場振幅は共振点付近で

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{r}}^{\mathrm{P}} \\ E_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\mathrm{cav}}^{\mathrm{P}} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} E_0 \tag{4.61}$$

となる。

この反射光を 1/4 波長板に通すことによってエラー信号を取得することが可能になる。1/4 波長板を通した後の電場振幅は

$$\boldsymbol{E}'_{\rm r} = W_{\rm Q}(\theta_{\rm Q}) \begin{pmatrix} E^{\rm P}_{\rm r} \\ E^{\rm S}_{\rm r} \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

と表せる。簡単のために $\theta_{\rm Q} = 45^\circ$ として計算すると

$$\boldsymbol{E}'_{\rm r} = W_{\rm Q}(\pi/4) \begin{pmatrix} E^{\rm P}_{\rm r} \\ E^{\rm S}_{\rm r} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-i)(E^{\rm P}_{\rm r} + iE^{\rm S}_{\rm r}) \\ (1+i)(E^{\rm P}_{\rm r} - iE^{\rm S}_{\rm r}) \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

となる。この光を PBS(偏光ビームスプリッタ) で P 偏光成分・S 偏光成分に分離し、それぞれフォトディテクターでレーザー光強度を測定すると、それぞれの偏光に対して

$$\begin{aligned} P^{\rm P}_{\rm OUT} &= \left(\frac{1}{2}|1-i||E^{\rm P}_{\rm r} + iE^{\rm S}_{\rm r}|\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[|E^{\rm P}_{\rm r}|^2 + |E^{\rm S}_{\rm r}|^2 + i\{E^{\rm S}_{\rm r}(E^{\rm P}_{\rm r})^* - E^{\rm P}_{\rm r}(E^{\rm S}_{\rm r})^*\}\right] \\ &= P_{\rm DC} + {\rm Im}(E^{\rm P}_{\rm r}(E^{\rm S}_{\rm r})^*) \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} P^{\rm S}_{\rm OUT} &= \left(\frac{1}{2}|1+i||E^{\rm P}_{\rm r} - iE^{\rm S}_{\rm r}|\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[|E^{\rm P}_{\rm r}|^2 + |E^{\rm S}_{\rm r}|^2 - i\{E^{\rm P}_{\rm r}(E^{\rm S}_{\rm r})^* - E^{\rm S}_{\rm r}(E^{\rm P}_{\rm r})^*\}\right] \\ &= P_{\rm DC} - {\rm Im}(E^{\rm P}_{\rm r}(E^{\rm S}_{\rm r})^*) \end{aligned} \tag{4.65}$$

と計算できる。ここで、$P_{\rm DC}$ は共振点付近でのオフセットとなる成分で

$$P_{\rm DC} = \frac{1}{2}(|E^{\rm P}_{\rm r}|^2 + |E^{\rm S}_{\rm r}|^2) \tag{4.66}$$

である。$P^{\rm S}_{\rm OUT}$ と $P^{\rm P}_{\rm OUT}$ を差し引きするとエラー信号を得ることができ

$$\begin{aligned} P_{\rm diff} &= P^{\rm S}_{\rm OUT} - P^{\rm P}_{\rm OUT} \\ &= -2{\rm Im}(E^{\rm P}_{\rm r}(E^{\rm S}_{\rm r})^*) \\ &= \frac{t_1^2 r_2 r_3 \sin\phi}{1 + (r_1 r_2 r_3)^2 - 2r_1 r_2 r_3 \cos\phi} \sin 2\theta |E_0|^2 \end{aligned} \tag{4.67}$$

となる。共振点 $\phi = 2\pi m$ における傾きは

$$\left.\frac{\partial P_{\rm diff}}{\partial \phi}\right|_{\phi = 2\pi m} = \frac{t_1^2 r_2 r_3}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2} |E_0|^2 \sin 2\theta \tag{4.68}$$

となり、鏡の変位に比例した信号となっていることが分かる。式 (4.67) を ϕ に対してプロットすると図 4.22 のようになる。

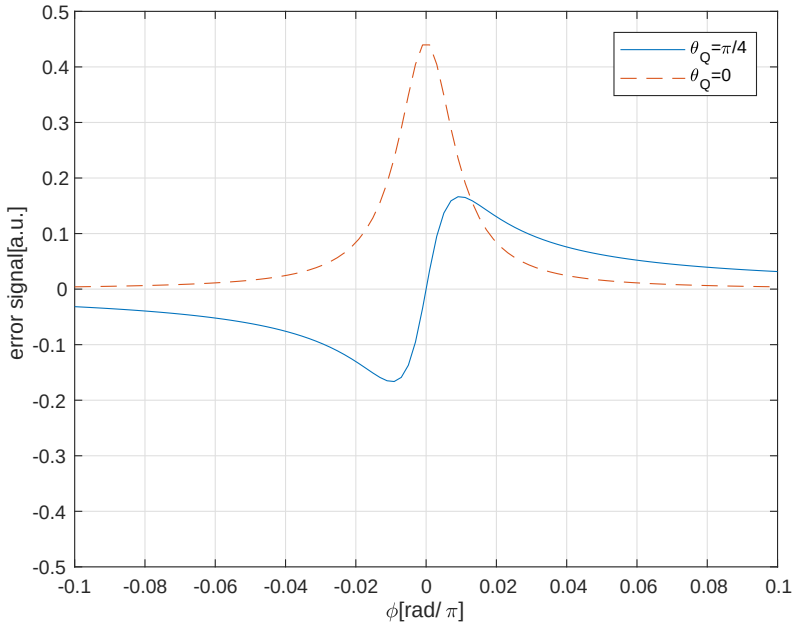

図 4.22: 偏光解析法によるエラー信号

$r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{0.98}$、$t_1^2 = 0.02$、とし、入射光強度 $|E_0|^2$ で規格化した。実線で $\theta_Q = \pi/4$ とした場合、破線で 1/4 波長板を入れなかった場合 ($\theta_Q = 0$ のとき) を示してある。

4.4　伝達関数の測定

系が被制御下にあるときのオープンループ伝達関数は、その系を構成する各要素の性質や制御系の安定性などを知ることができる非常に重要な物理量である。オープンループ伝達関数の測定方法と、そのときの雑音の影響について考える。

4.4.1　オープンループ伝達関数の測定方法

まずは雑音の混入が無い場合を考える。制御系のオープンループ伝達関数の測定は図 4.23 のように行う。

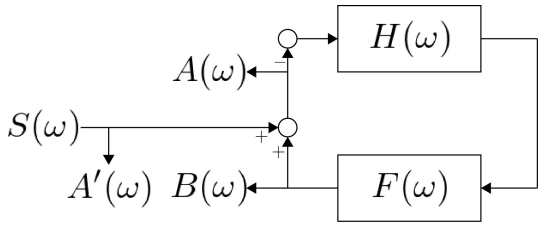

図 4.23: オープンループ伝達関数の測定

フィルターの出力信号など制御系からの信号のいずれかにシグナル $S(\omega)$ を混入させ、その直前と直後を測定する。これらをそれぞれ $B(\omega)$、$A(\omega)$ とすると、$H(\omega)F(\omega) = G(\omega)$ として

$$\begin{aligned} A(\omega) &= S(\omega) - G(\omega)A(\omega) \\ &= \frac{1}{1+G(\omega)}S(\omega) \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} B(\omega) &= -G(\omega)S(\omega) - G(\omega)B(\omega) \\ &= \frac{-G(\omega)}{1+G(\omega)}S(\omega) \end{aligned} \tag{4.70}$$

となる。これらの比を取ることにより

$$\frac{B(\omega)}{A(\omega)} = -G(\omega) \tag{4.71}$$

となり、オープンループ伝達関数の測定を行える。

しかし、実際には雑音の混入の観点から、次のように定められるクローズドループ伝達関数の測定を介して計算を行った方が正確な測定ができる場合がある。クローズドループ伝達関数 $C(\omega)$ は

$$C(\omega) = \frac{G(\omega)}{1+G(\omega)} \tag{4.72}$$

で定義され、式 (4.70) より

$$\frac{B(\omega)}{S(\omega)} = \frac{-G(\omega)}{1+G(\omega)} \tag{4.73}$$

であることから $B(\omega)$ と $A'(\omega) = S(\omega)$ の比を取ることで求めることができる。$C(\omega) = |C(\omega)|\exp(i\phi(\omega))$、$G(\omega) = |G(\omega)|\exp(i\phi'(\omega))$ とすると、$G(\omega)$ のゲインと位相は $C(\omega)$ のゲインと位相を用いて

$$|G(\omega)| = \sqrt{\frac{|C|^2}{1+2|C|\cos\phi+|C|^2}} \tag{4.74}$$

$$\phi'(\omega) = \arctan\left(\frac{|C|\sin\phi}{|C|\cos\phi+|C|^2}\right) \tag{4.75}$$

と求めることができる。

4.4.2 雑音の混入の影響

実際にオープンループ伝達関数の測定を行うときには、地面振動雑音などの外乱と、測定を行う際の丸め込み誤差などによる雑音が混入する。雑音の混入があるときのオープンループ伝達関数の測定は図 4.24 のようになる。外乱を X、測定誤差を

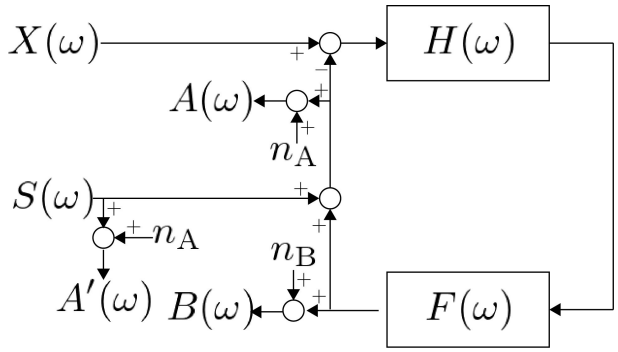

図 4.24: 雑音の混入があるときのオープンループ伝達関数の測定

$A(\omega)$ に対して n_{A}、$B(\omega)$ に対して n_{B} とする。このときの各測定値は

$$A(\omega) = \frac{1}{1+G}(S+X) + n_{\mathrm{A}} \tag{4.76}$$

$$B(\omega) = \frac{G}{1+G}(S+X) + n_{\mathrm{B}} \tag{4.77}$$

$$A'(\omega) = S + n_{\mathrm{A}} \tag{4.78}$$

となる。

$B(\omega)/A(\omega)$ からオープンループ伝達関数を求めることを考えると

$$\begin{aligned}
\frac{B(\omega)}{A(\omega)} &= \frac{\frac{G}{1+G}(S+X)+n_{\mathrm{B}}}{\frac{1}{1+G}(S+X)+n_{\mathrm{A}}} \\
&= \frac{G+\frac{(1+G)n_{\mathrm{B}}}{S+X}}{1+\frac{(1+G)n_{\mathrm{A}}}{S+X}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{G+\frac{n_{\mathrm{B}}}{S+X}}{1+\frac{n_{\mathrm{A}}}{S+X}} & (|G| \ll 1) \\ \dfrac{G\left(1+\frac{n_{\mathrm{B}}}{S+X}\right)}{1+\frac{Gn_{\mathrm{A}}}{S+X}} & (|G| \gg 1) \end{cases} \\
&\simeq \begin{cases} G & (|G| \ll 1) \\ G\dfrac{1}{1+\frac{Gn_{\mathrm{A}}}{S+X}} & (|G| \gg 1) \end{cases} \qquad (n_{\mathrm{A}}, n_{\mathrm{B}} \ll S) \qquad (4.79)
\end{aligned}$$

となる。ゲインが低い帯域であれば問題なく測定が行える。ゲインが高い帯域については、$|Gn_{\mathrm{A}}| \approx |S|$ となるほどゲインが高ければ正確な測定は行えず、$|S| \approx |X|$ となるほど外乱が大きく、外乱とシグナルが逆位相となるときにも正確な測定は行えない。

次に、$B(\omega)/A'(\omega)$ からクローズドループ伝達関数を測定することを考えると

$$\begin{aligned}
\frac{B(\omega)}{A'(\omega)} &= \frac{\frac{G}{1+G}(S+X)+n_{\mathrm{B}}}{S+n_{\mathrm{A}}} \\
&= \frac{G}{1+G}\frac{S+X}{S+n_{\mathrm{A}}}+\frac{n_{\mathrm{B}}}{S+n_{\mathrm{A}}} \\
&\simeq \frac{G}{1+G}\left(1+\frac{X}{S}\right) \qquad (n_{\mathrm{A}}, n_{\mathrm{B}} \ll S) \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

となる。よって、$|S| \gg |X|$ となるような大きなシグナルを加えれば正確な測定を行えることが分かる。

まとめると、直接的なオープンループ伝達関数の測定ではシグナルを大きく加えてもゲインが高い帯域では測定誤差により正確な測定を行えない場合があるが、クローズドループ伝達関数を介した測定では外乱を無視できるほどの大きなシグナルを加えれば正確な測定を行うことができる。

第5章　実験

本実験の目標はシンプルかつハイパワーな光共振器を用いて光ばねを観測することである。本研究ではそのために必須となる光共振器の制御を試みた。

5.1　実験機器

実験に使用した主な実験器具を挙げる。

1. 光学素子

   - レーザー光源
     出力 50mW、波長 1064nm の Nd:YAG レーザーを使用した。メーカー/型番は LIGHTWAVE ELECTRONICS/124。
   - ミラー
     図 4.20 のように、本実験におけるリング共振器は M1、M2、M3 の 3 枚の鏡から構成される。
     M1 はある程度の透過率を持つ鏡 (非等分ビームスプリッタ) であり、反射率が 98%ほどのものを用いた。メーカー/型番は Lattice Electro Optics/BS-1064-Rs98-15-B-1025。
     M3 には曲率半径が 1.5m の凸面鏡を用いた。これは共振器内をレーザーが一周する間にビーム径が変化しないようにするためである。メーカー/型番は Layertec/104290。
     M2 は 5.4 節の実験では透過光を観察できるように非等方ビームスプリッタ、5.5 節の実験では輻射圧の効果を大きくするために 6mm 径の小さな鏡を用いた。それぞれのメーカー/型番は Lattice Electro Optics/RX-1064-45S-B-1025 と Layertec/104265。
     その他にもレーザー光の入射角度を調整するためなどに波長 1064nm の光に対する反射率が非常に高い鏡を用いた。メーカー/型番は Thorlabs/NB1-K14 など。
   - レンズ
     レーザー光のビーム径を変更するために用いる。対称なレンズは 3 つ用い

た。メーカー/型番は Thorlabs/LA1708-A など。また、レーザー光源から出力されるビーム形が楕円であったため、水平方向・鉛直方向の焦点距離が異なるレンズ (シリンドリカルレンズ) を 1 つ用いた。

- 波長板
  1/2 波長板と 1/4 波長板をそれぞれ 2 つずつ用いた。それぞれの特徴は 4.3.2 節で述べた通りである。メーカー/型番は Thorlabs/WPH05M-1064 と Thorlabs/WPQ05M-1064。
- 偏光ビームスプリッタ
  P 偏光と S 偏光を分離する光学素子。P 偏光は透過し、S 偏光は反射する。S 偏光の反射率は非常に高いが、P 偏光の透過率は 95%程度である。メーカー/型番は Thorlabs/PBSW-1064。

2. 懸架系
   宗宮研究室で開発した、OHP シート製のサイクルばねを用いる。Pitch と Yaw 方向には固く、Longitudinal 方向の共振における Q 値が高いという特性を持つ。Longitudinal 方向の共振周波数は 11Hz 程度である [7]。懸架系の図面を図 5.1 に示した。このサイクルばねを 2 枚用いて、中心の部分に鏡を挟み込むように

図 5.1: 懸架系の図面

   して用いる。

3. ピエゾ素子
   5.4 節の実験において M3 に取り付けて用いる。メーカー/型番は Thorlabs/PK2FMP2。

4. フォトディテクタ
   透過光や反射光のレーザー光強度の測定に用いる。メーカー/型番は Thorlabs/PDA10CS-EC など。

5. スペクトラムアナライザ
   本実験の伝達関数の測定はデジタルシステムで構成されたスペクトラムアナライザで行った [8]。RT-C 言語コントローラ RTC-6000 などから構成される。

6. 電気回路

実験に使用した主な電気回路を挙げる。回路図には示していないが、バイパスコンデンサとして各回路に対して電解コンデンサ、各オペアンプに対してセラミックコンデンサを用いている。

- 差動回路

  P 偏光成分と S 偏光成分のレーザー光強度に比例する信号を差し引き、エラー信号を得るために用いる。回路図は図 5.2 の通り。可変抵抗の値を変えることで P 偏光成分と S 偏光成分の比率を変更することができる。

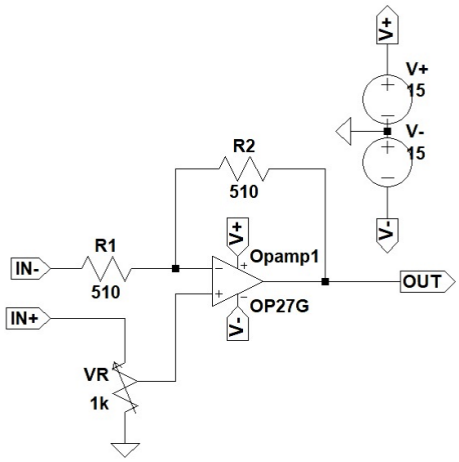

図 5.2: 差動回路

- ローパスフィルタ

  5.4 節の実験ではアクチュエータにピエゾ素子を用いるため、フィルターとしてローパス回路を用いる。回路図は図 5.3 の通り。用いたピエゾ素子の機械共振の Q 値が非常に高いため、2 次のローパスフィルタによってゲインを急速に下げるようにしている。ただし、2 次のローパスフィルタ自体によって位相が $-180°$ 遅れ、制御系に不安定性が現れるため、広い帯域で高ゲインをフィードバックしロックを強めることは不可能である。カットオフ周波数はおよそ 30Hz と 300Hz である。また、ピエゾ素子には正の電圧しか印加できないため、ローパスフィルタの後に加算器を入れている。

- 位相進み保障フィルタ

  5.5 節の実験では鏡の 1 つを懸架し、コイル・マグネットアクチュエータを用いるため、フィルターとして位相進み保障回路を用いる。回路図は図 5.4 の通り。広い周波数帯域で位相を遅らせずに高ゲイン信号を出力する

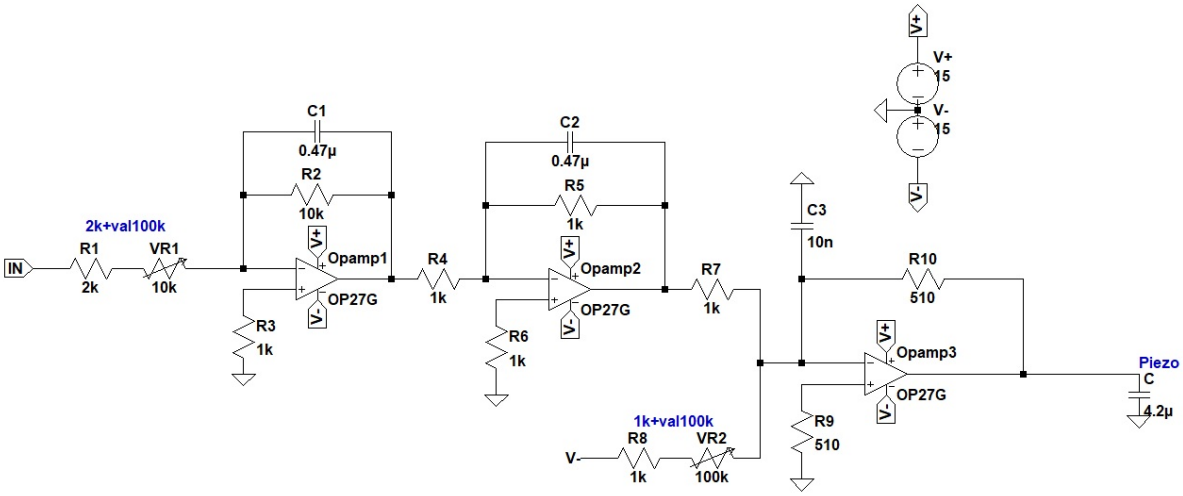

図 5.3: ローパス回路

ために、広い帯域幅を持つオペアンプである OP37 を用いている[1]。おおよそ 170Hz から 3.4kHz の間で位相が進むようになっている。

- コイルドライバ
  5.5 節の実験ではコイルに大電流を流す必要があるが、高精度オペアンプである OP27 などの出力電流は最大でも 20mA 程度しかないため、フィルター回路の後に大電流を出力できるオペアンプを用いたボルテージフォロアを入れる。コイルドライバとコイルの回路図は図 5.5 の通り。LT1210 は最大 1.1A 程度を出力できるが、それと引き換えに精度は低いため、出力電圧を OP27 に負帰還させることで高い精度を維持する。また、コイルの元の内部抵抗が非常に小さいことから、コイルに入力する直前に 10Ω の抵抗を入れることで、位相進み保障フィルタで進めた位相がコイルによるローパスで遅れないようにしてある。コイルドライバからの出力は大電流が流れるため、この抵抗には定格電力が高いものを用いる。式 (4.33) より、このコイルによるローパスのカットオフ周波数は 10kHz 程度である。

- 加算器
  伝達関数の測定をする際にシグナルを加算するために用いる。回路図は図 5.6 の通り。

[1]OP37 は帯域幅が広い分、裸のゲインに対する UGF での位相遅れが深刻であり、位相保障の外付けが必須である。単なるボルテージフォロアなどとして用いることはできない。

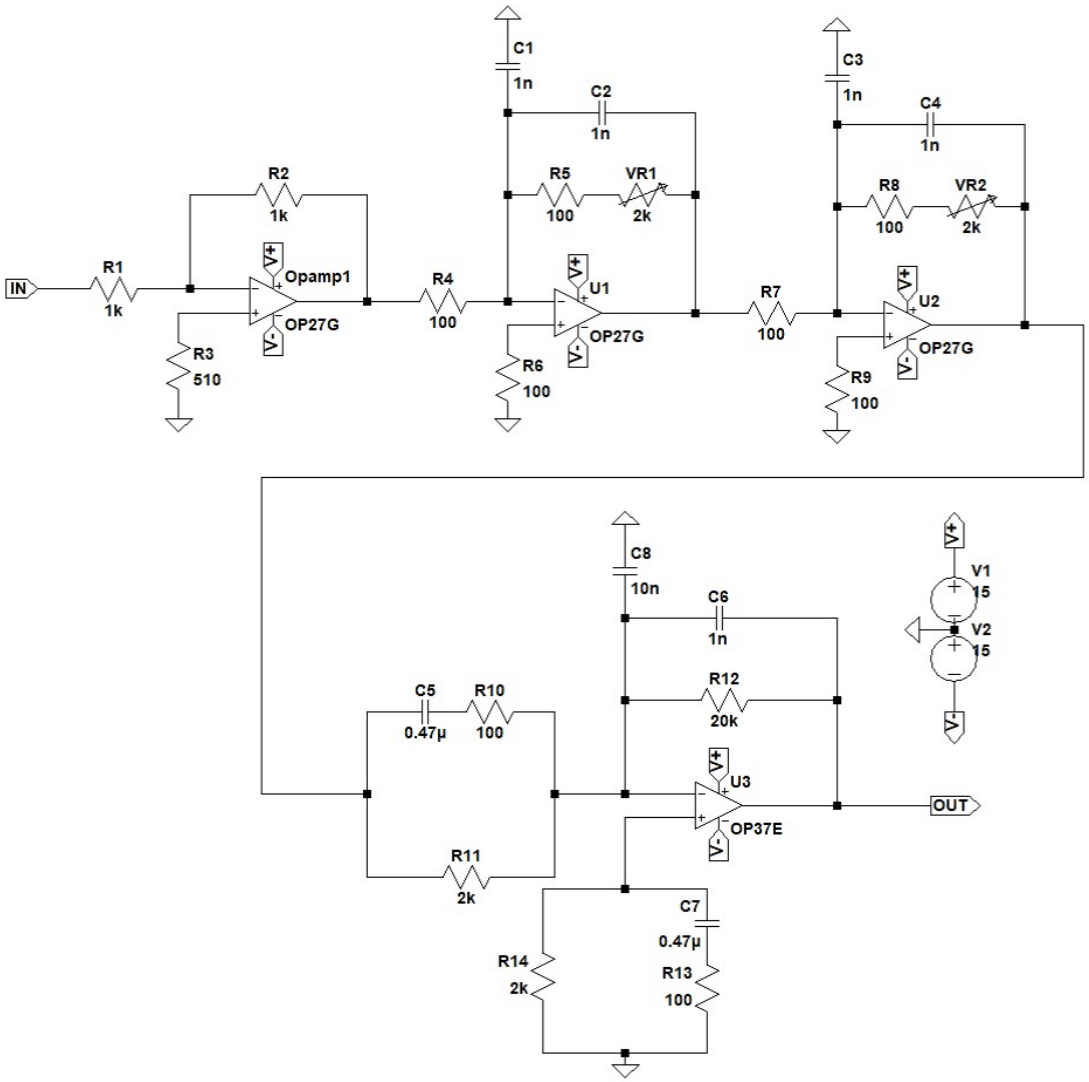

図 5.4: 位相進み保障回路

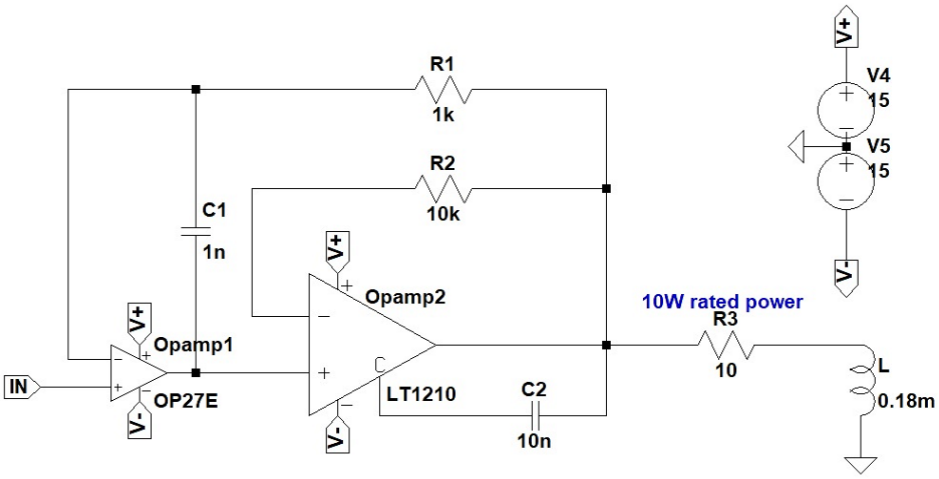

図 5.5: コイルドライバ

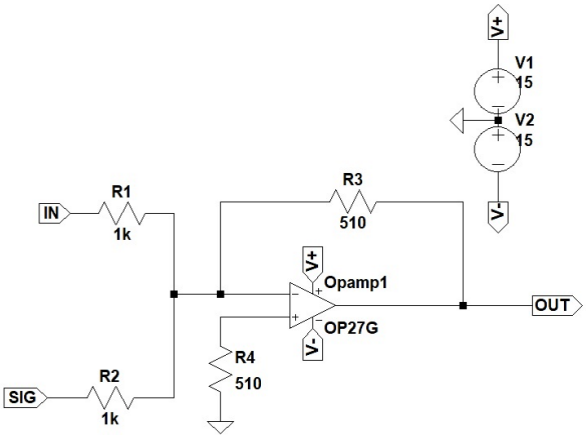

図 5.6: 加算器

5.2 実験の準備

レーザー光源から出力される光は楕円偏光になっているので、1/2 波長板と 1/4 波長板を用いて直線偏光に直す。波長板を通した後の光を PBS に入射させ、PBS からの透過光強度が最大になるよう (P 偏光成分が最大になるよう) 波長板の角度を調整した。

次に、レーザー光のビーム径をレンズを用いて調整する。レーザーが z 軸方向に進んでいるとすると、z 軸に垂直な平面でのレーザー光強度は次のような Gauss 関数に従う：

$$I(r,z) = I_0 \exp\left(\frac{-2r^2}{w^2(z)}\right) \tag{5.1}$$

ここで、r はビームの中心からの距離であり、I_0 はビームの中心のレーザー光強度である。$\omega(z)$ はスポットサイズであり、z の関数として次のように表せる：

$$\omega(z) = \omega_0\sqrt{1+\left(\frac{\lambda(z-z_0)}{\pi\omega_0^2}\right)^2} \tag{5.2}$$

ここで、λ はレーザーの波長、ω_0 はウエスト[2]でのスポットサイズ、z_0 はウエストの位置である。

スポットサイズは測定したレーザー光強度を式 (5.1) でフィッティングすることにより求めることができる。また、各位置で測定したスポットサイズを式 (5.2) でフィッティングすることにより、ω_0 と z_0 を求めることができる。このようにしてスポットサイズを調べる作業のことをビームプロファイリングという。

レーザー光源から出力された光をある程度レンズで収束させた後、ビームプロファイリングを行った結果は図 5.7 のようになった。x 軸方向と y 軸方向で別々にフィッティングを行っている。x 軸方向と y 軸方向でウエストの位置とスポットサイズが異なる状態になっていることが分かる。すなわち、このビーム形は殆どの位置で楕円になっている。シリンドリカルレンズを用いると、ビーム形を円形にすることが出来る。

また、Gaussian ビームは次のように表せる曲率半径を持つ：

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z}\right)^2\right] \tag{5.3}$$

光共振器内でレーザー光が一周する間にビーム径が変化しないようにするには、共振器内で凹面鏡から最も離れた位置[3]にウエストが来るようにした状態で、ビームの曲率半径が凹面鏡の曲率半径と一致する位置に凹面鏡を設置しなければならない。こ

[2]スポットサイズが最小になる地点のこと。

[3]リング共振器が凹面鏡を頂点とする二等辺三角形だったとすると、これは二等辺三角形の底辺の中央の位置に当たる。

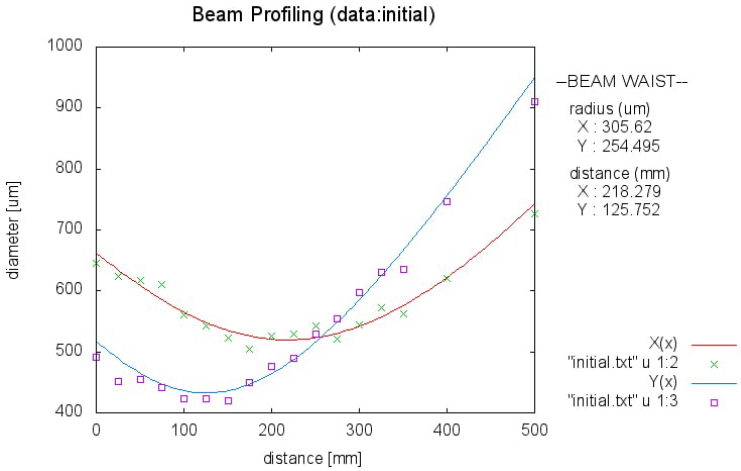

図 5.7: 入射光のスポットサイズ

のような条件を満たすようにビーム径を調整する作業のことをモードマッチングという。ビーム形を円形に直してモードマッチングを行った後にビームプロファイリングを行った結果は図 5.8 のようになった。

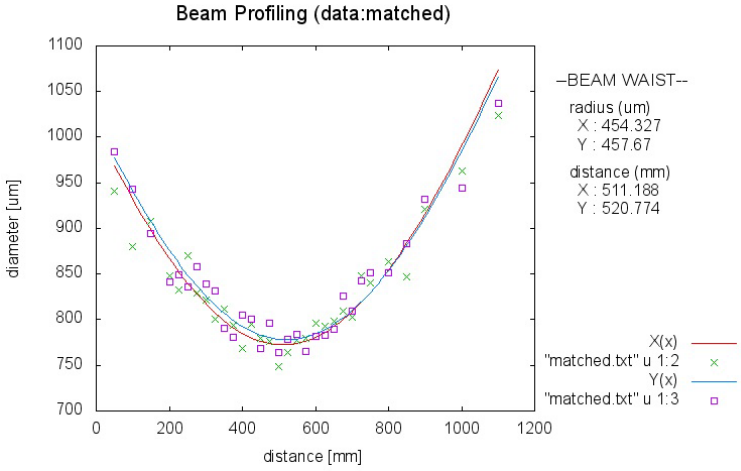

図 5.8: モードマッチングを行った後のスポットサイズ

5.3 Michelson 干渉計による計測

初めの実験として、Michelson 干渉計を用いてアクチュエータの性能を確認する。

式 (2.3) より、Michelson 干渉計の出力光強度の周期は

$$\phi_- = \frac{2\Delta L\Omega}{c} = \frac{4\pi\Delta L}{\lambda} = 2m\pi \qquad (m \text{ は整数}) \tag{5.4}$$

すなわち

$$2\Delta L = m\lambda \tag{5.5}$$

である。ここで、$\Delta L = L_x - L_y$ は x 軸方向と y 軸方向の腕の長さの差である。一方で、式 (3.7) より Fabry-Pérot 共振器の透過光強度の周期は $2L = m\lambda$ であり、これは Michelson 干渉計の周期と一致している。すなわち、アクチュエータを取り付けた鏡をエンドミラーの 1 つとした Michelson 干渉計を用いることで、アクチュエータに加えた電圧とそのときに動かせるフリンジ数を Fabry-Pérot 共振器に対して用いたときと全く同様に見積もることができる[4]。

実際の Michelson 干渉計の性質として、x 軸方向と y 軸方向のエンドミラーの反射率が異なるといった理由から、出力光強度の最小値は 0 にならないことが挙げられる。出力光強度の最大値と最小値をそれぞれ $P_{\max}$、$P_{\min}$ として

$$C = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}} \tag{5.6}$$

で定義される量はコントラストと呼ばれ、干渉の明瞭さを表す指標となる。鏡の反射率を改善する以外には、アライメント[5]を調整することでコントラストを向上させることができる。

ピエゾ素子を張り付けたミラーを図 5.9 に示した。この鏡をエンドミラーの 1 つとした Michelson 干渉計に対して、ピエゾ素子に振幅 5V、周波数 10Hz の正弦波を入力したときの、出力光強度をオシロスコープで測定した結果は図 5.10 のようになった。ピエゾ素子には正の電圧しか印加できないため、5V のオフセットを加えてある。おおよそ 2 フリンジ程度振れていることが分かる。

懸架系に取り付けた鏡とコイルを図 5.11 に示した。鏡の後ろには非常に小さな磁石が張り付けてある。この鏡をエンドミラーの 1 つとした Michelson 干渉計に対して、コイルに振幅 5V、周波数 10Hz の正弦波を入力したときの出力光強度は図 5.12 のようになった。おおよそ 14 フリンジ程度振れていることが分かるが、印加している電圧に対応してコントラストが変化していることが分かる。これはこのアクチュエータで厳密に Longitudinal 方向だけに鏡を振れてはおらず、アライメントが悪化しているためである。印加する電圧を小さくすればアライメントを崩さないように

[4]ただし、リング共振器が三角形であることを考慮すると、鏡を Longitudinal 方向に動かした距離と共振器長の変化には若干の差異がある。例えば、リング共振器が正三角形であった場合には $2/\sqrt{3} \approx 1.15$ 倍だけ異なる。

[5]ビームの空間的な一致率のこと。Michelson 干渉計の場合は、出力側に現れるレーザー光のうち x 軸方向と y 軸方向のそれぞれのエンドミラーから来るビームの一致率のことを指す。また、共振器に対しては、レーザー光が共振器内を往復する間にビームが通る場所が変化していかないように調整する作業のことをアライメント調整と呼ぶ。

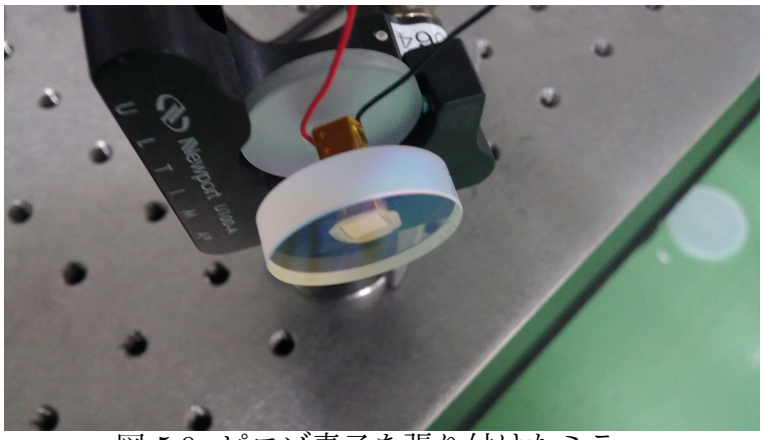

図 5.9: ピエゾ素子を張り付けたミラー

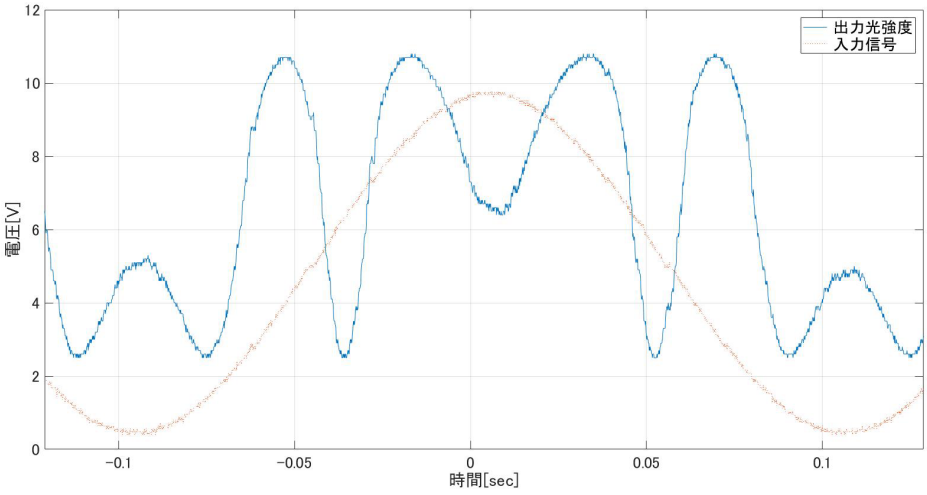

図 5.10: ピエゾ素子で鏡を振ったときの出力光強度
実線で出力光強度、点線で入力信号を示してある。

図 5.11: 懸架系に取り付けた鏡とコイル

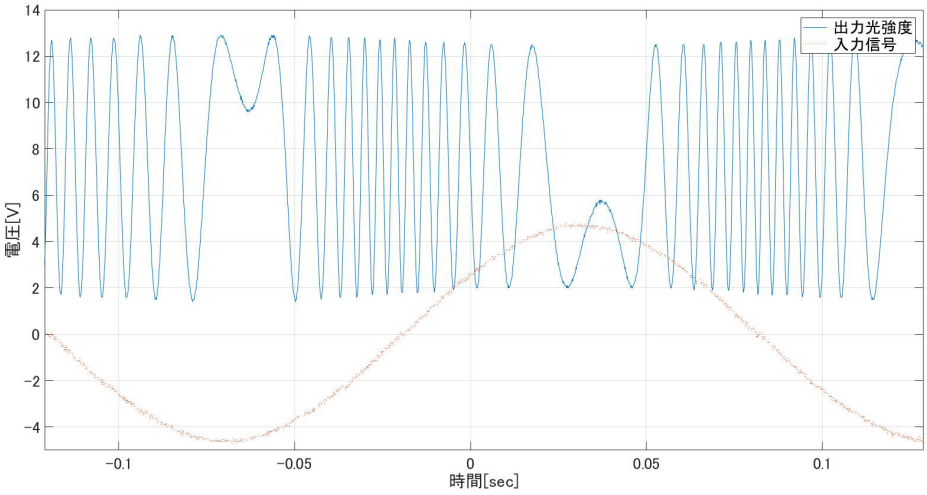

図 5.12: コイルで鏡をを振ったときの出力光強度
実線で出力光強度、点線で入力信号を示してある。

できると予想できるが、懸架系の共振周波数付近の地面振動雑音の影響でこの懸架系は常に数フリンジ程度は振れてしまっているため、一定の速度で鏡を振るにはこの地面振動雑音を無視できるよう振幅 5V 程度の信号をアクチュエータに加える必要がある。共振器の場合にはこのアライメントの悪化がより深刻な問題となり、フィネスの測定は不可能であった。

5.4 固定鏡リング共振器の制御

リング共振器を用いた実験として、まずは全てを固定した鏡で構成したものを作成し、制御を試みた。懸架した鏡を用いたリング共振器は、懸架系の共振周波数における地面振動雑音の影響が大きく、これを抑え込むために非常に高いゲインが必要であり、制御を行うことは困難であることが予想されるためである。他にも、懸架した鏡は鏡の角度調整が不可能であるため、アライメントの調整が難しいことなども挙げられる。よって、懸架鏡を用いる実験の前に、全てを固定した鏡で構成したリング共振器を用いて、エラー信号などの確認を行う。

実験のセットアップは図 5.13 の通りである。モードマッチングを行ったレーザー

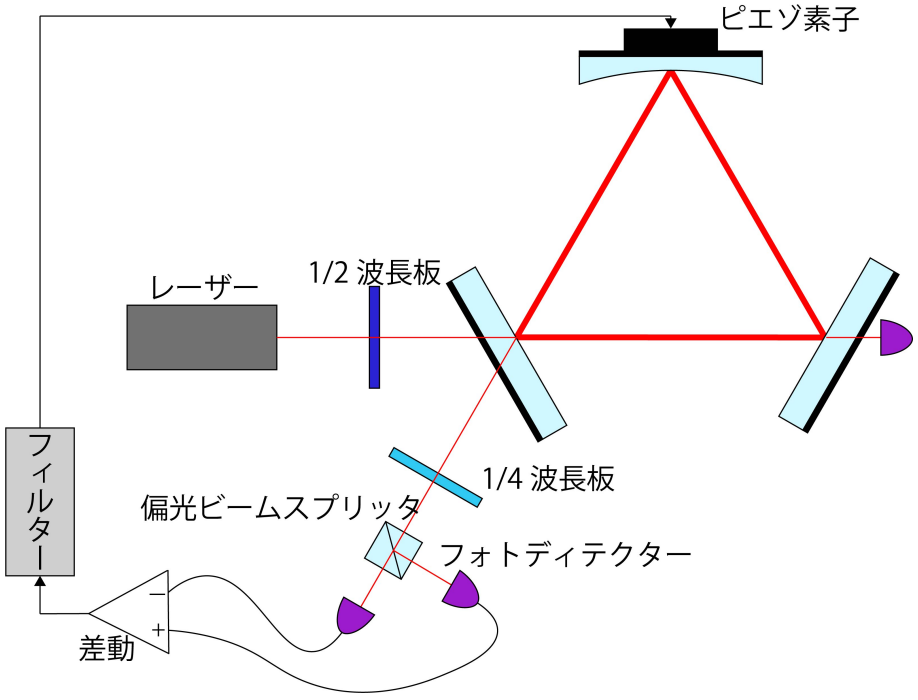

図 5.13: 固定鏡リング共振器のセットアップ

光を 1/2 波長板で P 偏光・S 偏光の比率を調整し、リング共振器に入射させる。反射光は 1/4 波長板に通した後に偏光ビームスプリッタで P 偏光・S 偏光成分に分離

し、それらを差し引くことで共振点周りの線形信号を取得する。このエラー信号を図 5.3 で示したローパスフィルタに通した後、曲率付きの鏡に取り付けたピエゾ素子にフィードバックし、共振器長を一定に保つよう制御を行う。

まずはピエゾ素子に振幅 5V、周波数 10Hz の正弦波を入力して、エラー信号が取得できていることを確認した。この結果は図 5.14 のようになった。図 5.10 と同様に

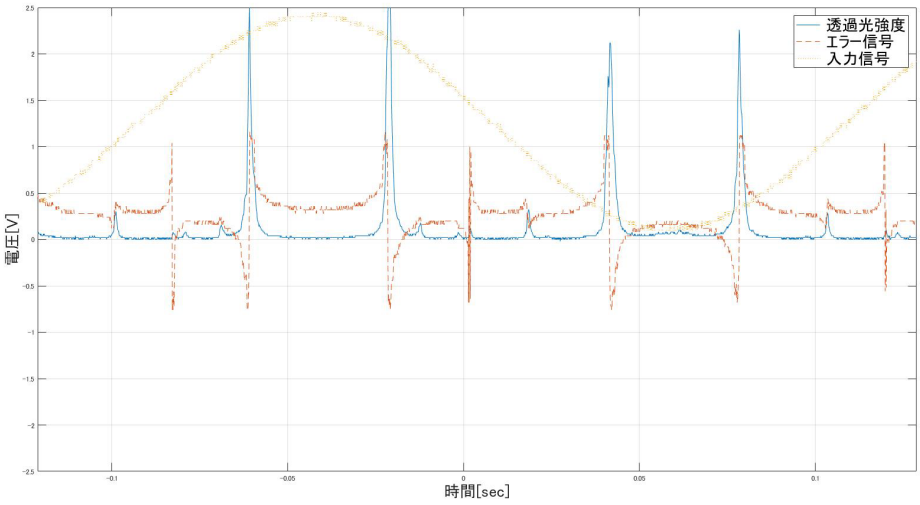

図 5.14: ピエゾ素子で鏡を振ったときの透過光強度

実線で透過光強度、破線でエラー信号、点線で入力信号を示してある。入力信号についてはエラー信号との関係を確認しやすいように測定値から 0.25 倍してある。

2 フリンジ程度を振ることが出来ている。共振点付近で線形信号が取得できていることが分かるが、共振点ではないように思える地点でも線形信号が表れている。これは高次のモード[6]が共振している地点だと考えられる。また、FSR とピークの半値全幅に対応する時間の比から、この共振器のフィネスはおおよそ 30 程度だと見積もれた[7]。

次に、このエラー信号を用いて制御を試みた。このときの透過光強度は図 5.15 のようになった。おおよそ共振点付近にロックできているが、高周波での発振が見られる。図 5.15 の時間間隔を拡大すると図 5.16 のようになった。おおよそ 2kHz の周

[6] レーザー光には円形の基本モード以外にも、2 つの楕円に分かれた形をした 10 モード・01 モードなどといった高次のモードが含まれており、共振器長によってはこれらの高次のモードが共振するような状態になる。基本モードと高次のモードが同時に共振しないように設計された共振器を基本モードの共振状態にロックしたものは、モードクリーナーとして用いることができる。

[7] 正弦波の傾きが最大となる地点付近で鏡が一定速度で振れていると考えている。しかし、FSR はあまり速度が一定とならないような広い範囲に対応しているため、この見積もりはあまり正確でないかもしれない。また、懸架鏡を用いたリング共振器のフィネスはこの値から大きく異なる可能性がある。

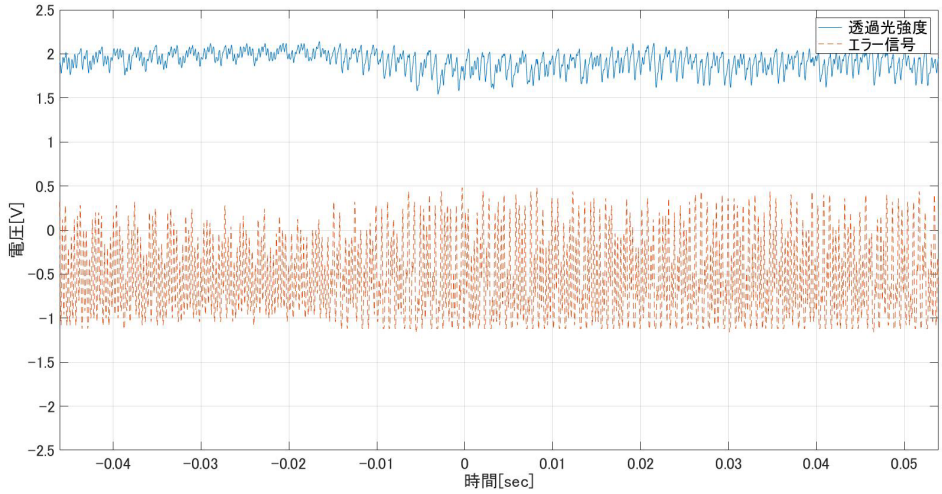

図 5.15: 固定鏡リング共振器に対して制御を行ったときの透過光強度
実線で透過光強度、破線でエラー信号を示してある。

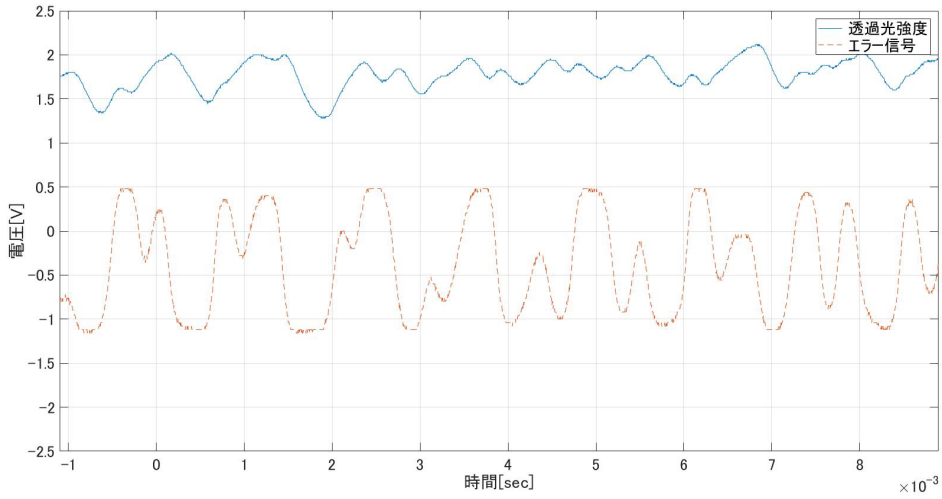

図 5.16: 固定鏡リング共振器に対して制御を行ったときの透過光強度 (拡大)
実線で透過光強度、破線でエラー信号を示してある。

波数で発振してしまっている。これはユニティゲイン周波数で 2 次のローパスフィルタにより-180° の位相遅れが起きてしまっており、制御系が不安定になっているためだと考えられる[8]。図 5.3 で示した回路においてゲインなどを調整した限りでは安定な制御は不可能であった。

5.5 懸架鏡入りリング共振器の制御

本研究の主実験として、懸架した鏡を用いたリング共振器に対し、制御を試みた。

実験のセットアップは図 5.17 の通りである。エラー信号は図 5.4 で示した位相進み保障フィルタに通した後、懸架した鏡の後ろに置いたコイルにフィードバックする。コイルに流した電流に比例する磁場が発生し、これが懸架した鏡に貼った磁石を動かすことにより、共振器長を一定に保つよう制御を行う。実際の光学系の様子を図 5.18 に示した。

まずはエラー信号の確認を行う。発振器から出力したシグナルをコイルドライバを通した上でコイルに入力することで磁石を取り付けた鏡を振ることも可能だが、アライメントを維持した状態で地面振動を無視できるほどの範囲を動かすことは不可能であった。制御を行っていないときの透過光強度を図 5.19 に示す。

コイルには何も入力していないが、地面振動が鏡を揺らしてしまうため、共振状態と非共振状態を行き来していることが分かる。固定鏡を用いたリング共振器のときと同様に高次モードの共振点にも線形信号が表れているが、基本モードの線形信号の方がゲインが大きいため、基本モードの共振点への制御の引き込みに問題はない。

次に、このエラー信号を用いて制御を行う。制御を行ったときの透過光強度は図 5.20 のようになった。透過光強度は図 5.19 に現れた共振点での透過光強度ほどの値を取り一定になっており、共振点でロックできていることが分かる。エラー信号も殆ど 0V で一定値を取っているが、500Hz ほどの弱い発振が現れている。これは UGF に対応したものだと考えられる。この発振を抑えるためにはさらに広い範囲で位相進み保障を行い、位相をさらに進めることが必要である。

非制御状態から制御状態に移る様子を図 5.21 に示す。

最後にオープンループ伝達関数の測定を行う。このときの理論的なオープンループ伝達関数 $G(\omega)$ は、式 (4.16)、式 (4.29) と式 (4.33) から

$$G(\omega) = \frac{\alpha\beta K_3}{rm} \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2} \frac{1 + i\omega T_3}{1 + i\omega T_4} \frac{1}{1 + i\omega L/r} \tag{5.7}$$

[8] 1 次のローパスフィルタを用いればこの不安定性は避けられるが、図 5.3 に示した回路から Opamp2 で構成されている 300Hz のローパスフィルタを取り除いたものを用いて制御を試みても、3kHz ほどの非常に強い発振 (恐らくピエゾの機械共振のピークに起因する) が見られ、共振点付近でのロックすら不可能であった。

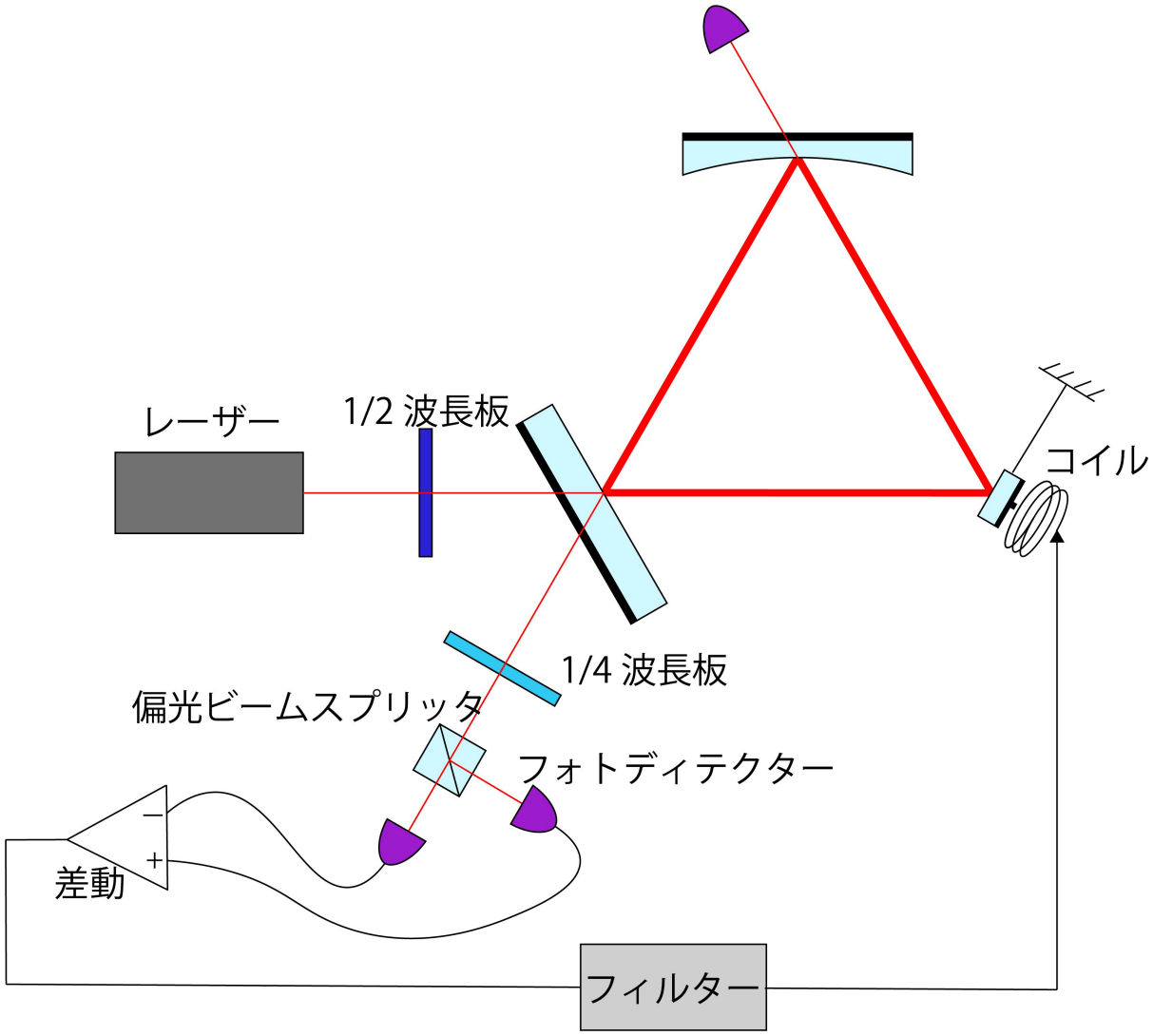

図 5.17: 懸架鏡入りリング共振器のセットアップ

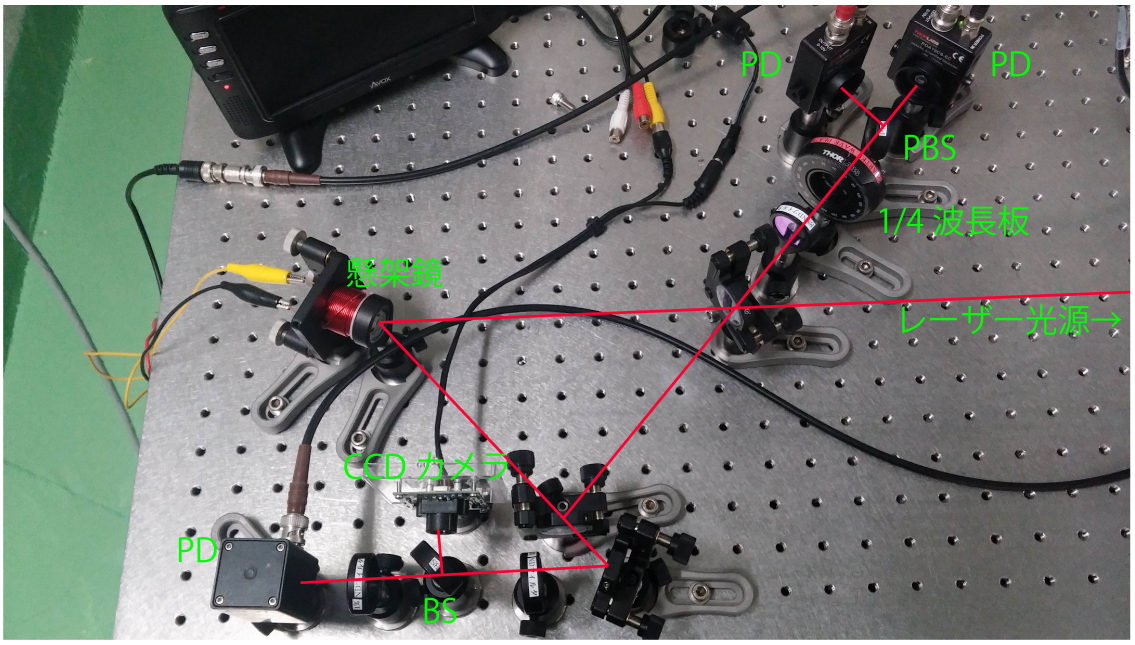

図 5.18: 実際の光学系の様子
フォトディテクターなどに入射するレーザー光のパワーを調整するために、ND フィルタをいくつか用いている。

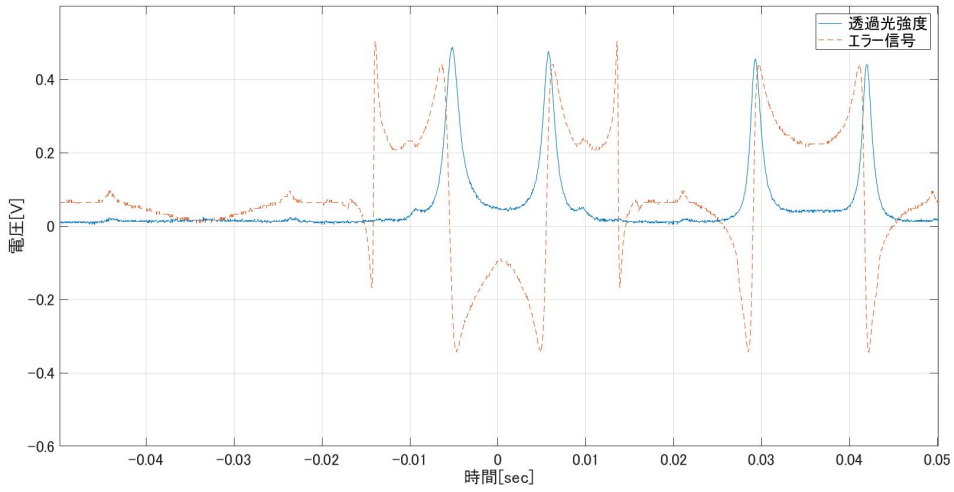

図 5.19: 懸架鏡リング共振器に対して制御を行っていないときの透過光強度
実線で透過光強度、破線でエラー信号を示してある。透過光強度についてはエラー信号との関係を確認しやすいように測定値から 5 倍してある。

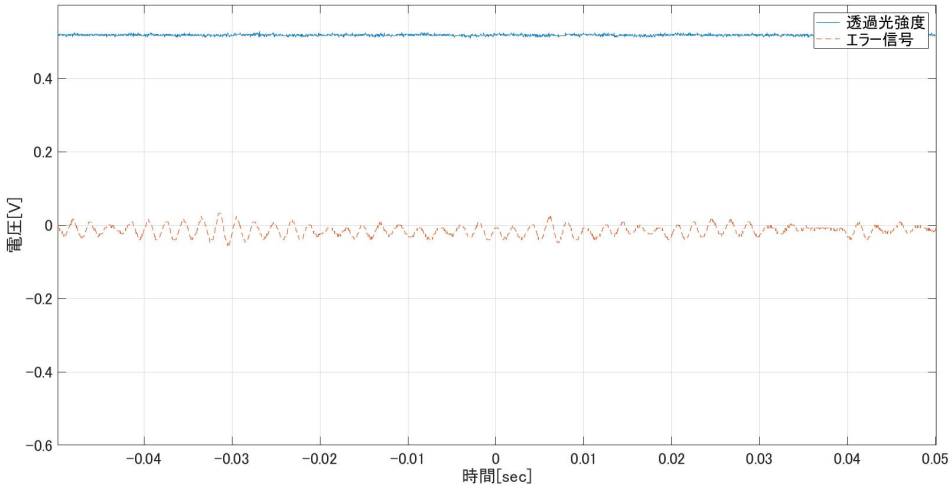

図 5.20: 懸架鏡リング共振器に対して制御を行ったときの透過光強度
実線で透過光強度、破線でエラー信号を示してある。透過光強度は測定値から 5 倍してある。

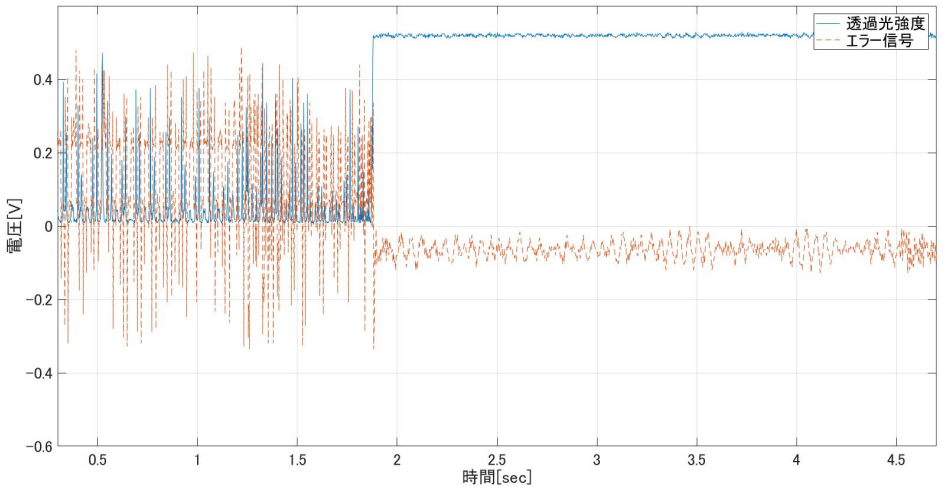

図 5.21: 懸架鏡リング共振器が制御状態に移る様子
1.9[sec] ほどから制御を行っている。実線で透過光強度、破線でエラー信号を示してある。透過光強度は測定値から 5 倍してある。

と表せる。ここで、α は鏡の変位が差動回路の出力に現れるまでの光学系などのゲインであり、4.3 節で示したように、共振点付近でロックしている場合には周波数によらない定数と見なせる。この伝達関数を Bode 線図で表すと図 5.22 のようになる。

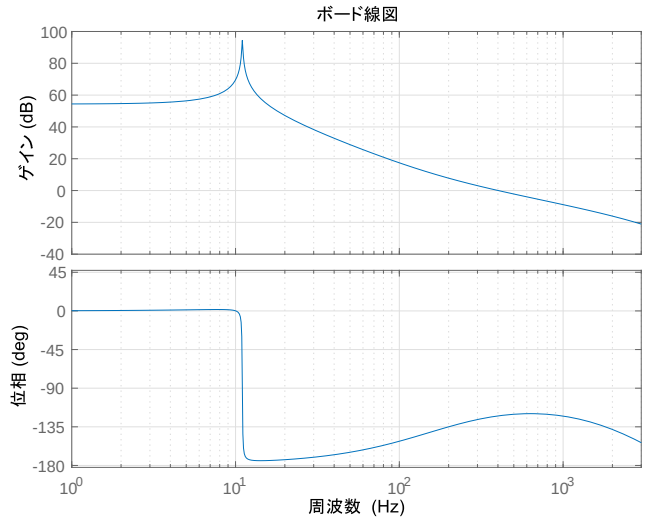

図 5.22: 理論的なオープンループ伝達関数

$\omega_0 = 2\pi \times 11$[rad/s]、$\gamma = \omega_0/200$、$T_3 = 1/(2\pi \times 170)$[sec]、$T_4 = 1/(2\pi \times 3400)$[sec]、$L = 0.18 \times 10^{-3}$[H]、$r = 10[\Omega]$ とし、$K = \alpha\beta K_3/rm = 2.5 \times 10^6$ は UGF が 400Hz 程度になるように設定した。

実験的には、4.4 節で述べたクローズドループ伝達関数を介した方法で測定を行った。差動回路の出力の直後に、振幅が 100mV のシグナルを入れた。結果は図 5.23 のようになった。100Hz 付近での位相は $-180°$ 程度になっており、100Hz より周波数が高い帯域では位相を進めることが出来ている。UGF は 400Hz ほど[9]であり、位相を進めている範囲に入っている。低周波数帯域については、地面振動雑音などの外乱が大きい帯域であり、外乱に比べ十分なシグナルを加えることができていないために、11Hz ほどに懸架系の共振ピークが確認できず、共振周波数以下の帯域で値がふらついてしまっているのだと考えられる。懸架系の共振ピークが確認できないのは懸架系の Q 値が非常に高く、鏡の振動が増幅される周波数帯域が非常に狭いためかもしれない。10Hz 以下の帯域のゲインは 50dB 程度だと推察できる。また、100Hz ほどに見られる共振のピークはミラーマウントやミラーマウントを固定するポールなどの光学機器のいずれかの機械共振のピークだと考えられる。

[9]制御を行うごとにゲインを微調整しているため、図 5.20 で見られた発振の周波数と若干異なる。

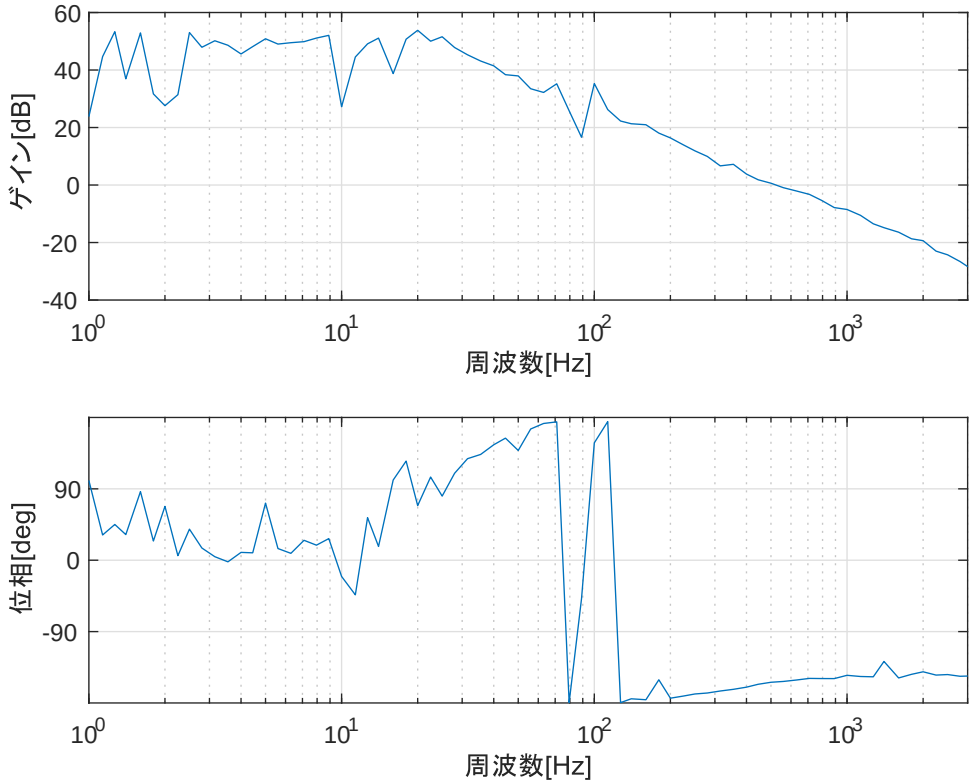

図 5.23: 懸架鏡入りリング共振器の伝達関数

第6章　まとめと今後の課題

本研究では、偏光解析法により取得したエラー信号と位相進み保障フィルタを用いて、懸架した鏡を用いたリング共振器の制御を行った。また、その状態でのオープンループ伝達関数を測定し、位相の進みなどについて議論を行った。

6.1　光ばねの観測

懸架した鏡を用いた共振器のロックが行えたので、後はこの共振器を離調すれば光ばねの観測が期待できる。離調を行うには共振点から少しずれた地点でロックすればいいので、エラー信号にオフセットを加えた状態でロックを行なえばよい。このときに伝達関数の測定を行なえば、3.4 節で求めたように 100Hz 程度に光ばねの共振のピークが見られるはずである。エラー信号に 200mV 程度のオフセットを加えてロックを行い、伝達関数を測定した結果は図 6.1 のようになった。全周波数帯域にお

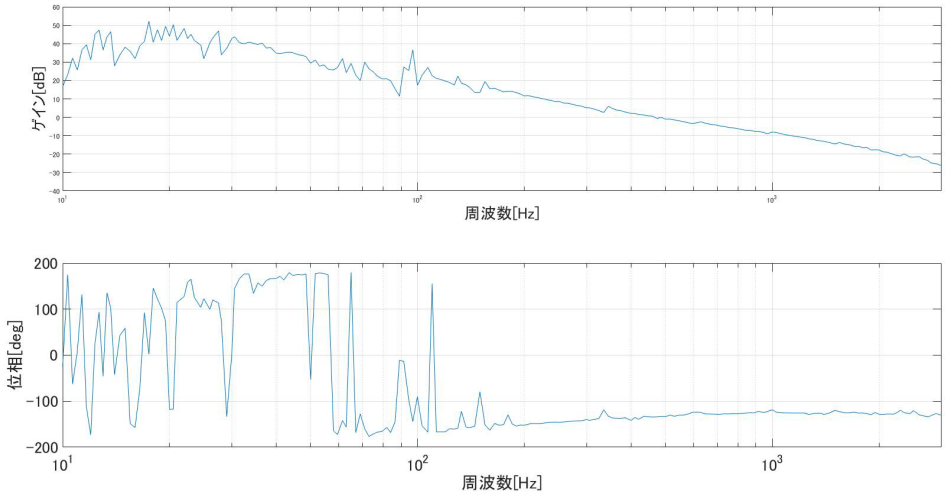

図 6.1: 離調を行ったときの伝達関数

図 5.23 で示した伝達関数の測定に比べ周波数に対する分割数を増やして測定を行っている。非常に時間がかかるため、10Hz から 3kHz の範囲でのみ測定を行っている。

いて図 5.23 と殆ど違いがみられず、光ばねによる共振があることは確認できなかっ

た。これは共振器内のレーザー光強度が不足しているためだと考えられ、フィネスを上げることで改善することができる。

固定鏡のみで構成されたリング共振器のフィネスは 30 程度と推定できた。このときの鏡の反射率は、M1 が 0.98、M2 が 0.98、M3 が 1 程度[1]なので、式 (4.45) よりフィネスは 155 程度だと計算できる。このように理論値から著しくフィネスが低下してしまっている原因は、共振器内をレーザーが往復する間に透過光以外のロスが生じてしまっているからである。その原因の 1 つに、モードマッチングを正確に行えておらず、共振器を往復するにつれレーザー径が大きくなってしまっていることが挙げられる。ビームプロファイリングをより正確に行う他に、レンズをステージで動かせるようにしてウエストの位置の微調整を可能にする等の改善策を考えられる。また、空気中の分子による光の散乱がロスとなるのを防ぐために、リング共振器を真空層に入れる準備を進めている。真空層内にエナメル被膜のコイルは入れることができないため、将来的には真空対応のピエゾ素子を用いてロックを行う予定である。

また、3.4 節の計算はエンドミラーでの透過などのロスが無いとして計算されているが、本実験においては M2 または M3 から透過光を得ている。このロスも共振器内のレーザー光強度を低下させる要因の 1 つである。なるべく反射率の高い鏡を用いることが望まれる。

さらに、離調角が最適化されていないことも光ばねが観測できなかった原因の一つである。精度よく離調角を調整する機構の開発も今後の課題である。

6.2 地面振動雑音の混入

懸架系の Q 値が非常に高いために共振周波数付近での地面振動雑音の混入が問題となり、ロックを行うために高ゲインの信号をフィードバックすることが必要になっていた。共振周波数での OLG を高くするために、UGF を高周波数に取るよう制御系を設計しなければならないが、高周波数帯で位相を進めることにはオペアンプの位相の遅れなどによる限界が存在する。また、この高ゲインのためにエラー信号に加えることができるオフセットの上限が低くなってしまっている。

地面振動雑音を低減する方法の一つとして導入を検討しているのが、ダンピング機構と呼ばれる抵抗力の係数 γ を増大させる装置である。これにより Q 値が小さくなり、懸架系の共振周波数付近での地面振動雑音の混入を押さえることができる。現在、アルミ製のミラーフレームと磁石によるエディカレントダンピング装置の開発を行っている。

[1] 5.5 節の実験では M3 への入射角を大きくして反射率を減少させ、透過光を得ている。このときの反射率は 1 とはみなせない。

6.3　伝達関数の正確な測定

地面振動雑音などの外乱の混入は、伝達関数の測定を正確に行えない原因にもなっていた。シグナルを大きくし過ぎると光学系が線形信号を出力する領域から外れてしまうため、伝達関数の正確な測定を行うためには外乱を低減する必要がある。ダンピング機構を導入することにより、懸架系の共振のピークを確認できるようになることが期待できる。

また、懸架系の共振周波数以下の帯域の外乱として支配的なのは、周囲の空気の揺らぎが懸架系を揺らしてしまうことによる雑音であると考えられる。光学系を真空槽に入れることによりこの雑音が低減され、低周波数帯域における伝達関数を正確に測定できるようになることが期待できる。

参考文献

[1] 大津元一”現代光科学”朝倉書店 (1994).

[2] 柳沼拓哉”非線形光学結晶挿入型重力波検出器の応答と不安定性”(学士論文).

[3] K. Somiya, *et al*.”Parametric signal amplification to create a stiff optical bar.”Physics Letters A 380.4 (2016): 521-524.

[4] T. Corbitt, *et al*.”Optical Dilution and Feedback Cooling of a Gram-Scale Oscillator to 6.9 mK” Phys. Rev. Lett. 99, 160801 (2007).

[5] 加藤準平”重力波望遠鏡における光ばねと非線形結晶を用いた信号増幅器のデザインとその検証”(修士論文).

[6] 道村唯太”光リング共振器を用いた片道光速の異方性探査”(修士論文).

[7] 久富正博”光ばね実験における懸架系の開発及びその性能評価”(学士論文).

[8] 中島良介”IIR フィルタを用いた光干渉計の制御”(学士論文).

[9] 三尾典克”一般相対性理論基礎から実験的検証まで”サイエンス社 (2007).

[10] 中村卓史・三尾典克・大橋正健”重力波をとらえるー存在の証明から検出へ”京都大学学術出版会 (1998).

[11] O. Svelto”Principles of Lasers”Springer Science+Business Media, LLC(2010).

[12] 背戸一登・渡辺亨”フィードバック制御の基礎と応用”コロナ社 (2013).

[13] 岡村廸夫”OP アンプの回路の設計”CQ 出版株式会社 (1990).

[14] 安東正樹”Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御”(修士論文).

[15] 小森健太郎”巨視的振動子の遠隔光冷却”(修士論文).

[16] 片岡優”非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発”(修士論文).

謝辞

本学士論文を完成させるにあたって、多くの方にお世話になりなりました。この場でお礼を述べさせていただきます。

指導教員の宗宮健太郎先生には、研究室生活のあらゆる場面でお世話になりました。実験に行き詰った際には的確なアドバイスをしていただき、足りていない実験器具は快く購入を許可してくださいました。私のいい加減な質問に対しても常に真剣に検討してくださる指導に対する姿勢には何度も救われました。また、数多くの興味深い考えを随時提示してくだり、本論文のトピック以外についても様々な事を学ばせていただきました。今年度は連星中性子星合体の重力波信号初検出が行われたことを初めとして、重力波業界に衝撃的なイベントが数多く訪れた 1 年でした。このような年に宗宮先生の下で学べたことは、私にとって一生誇れることです。

国立天文台の藤本眞克先生には、宗宮研のゼミの際に大変に貴重なご意見をいただきました。重力波検出器に非常に長い間携わられてこられたからこそのご高察には大変感銘を受けました。同じく国立天文台の阿久津智忠先生には、神岡での KAGRA シフトの際に大変お世話になりました。2 日間という短い期間でしたが、私にとっては一生忘れないような貴重な経験になりました。作業自体はシンプルなものでしたが、そうとは思えないほど様々なことを学ばせていただきました。

宗宮研究室の皆様への感謝も欠かすことができません。

修士二年の粕谷さんには、実験に関する様々なことについてアドバイスをいただきました。KAGRA の開発に直接的に携わる大変忙しい立場ながらも、私の未熟な質問に対して常に丁寧に答えてくださったことに大変感謝しております。同じく修士二年の柳沼さんには、理論面からのアドバイスを数多くいただきました。私の拙い質問内容からすぐさま私の知りたいことを推察してくださるおかげで、理論に対する理解をずっと深めることが出来ました。

修士一年の草柳さんには、原理検証実験を行われている立場からのアドバイスをいただきました。本実験をここまで続けてこられたのは、草柳さんの挑戦的な実験に取り組まれているからこその的確な助言のおかげです。同じく修士一年の久富さんには、昨年度懸架系の開発を行われた立場からのアドバイスをいただきました。懸架系の特性を考える際には、久富さんの学士論文を何度も参考にさせていただきました。

留学生の Mélodie さんには、ピエゾ素子の特性について意見をいただきました。Mélodie さんの日本語力の高さとアクティブさにはいつも驚かされます。同じく留学

生の Shaun 君とは、自分の英語力の低さ故にあまりコミュニケーションを取ることが出来ませんでしたが、Shaun 君の持つ高いプログラミングなどの技能には大変刺激を受けました。

同期の中島君には、位相進み保障フィルタの開発を行っていた年度初めの頃から、1 年間ずっとお世話になりました。中島君の出してくれる意見はとても発想力豊かで、実験を常に刺激的に進めることができました。また、本論文を完成させるために必須であった伝達関数の測定を行うことができたのは、ひとえに中島君が開発したデジタルシステムによるスペクトラムアナライザのおかげです。

物理学科の先生方や友人たちをはじめとして、ここには書ききれなかった方々にも感謝いたします。ここまで物理を学んでこられたのは皆様のおかげです。

最後に、何不自由なく勉強や研究に打ち込める環境を与えてくれている両親に感謝します。