

卒業論文

IIR フィルタを用いた光干渉計の制御

東京工業大学理学部物理学科宗宮研究室  
14B10591 中島良介

平成 29 年 2 月 15 日

# 目次

第 1 章	はじめに	2
第 2 章	重力波	3
2.1	重力波の導出	3
2.2	重力波の検出	5
2.3	光ばね	7
第 3 章	制御	8
3.1	フィードバック制御	8
3.2	オープンループゲイン	8
第 4 章	デジタルシステム	14
4.1	信号	14
4.2	離散時間 LTI システム	14
4.3	伝達関数	15
4.4	安定性	16
4.5	デジタルフィルタ	17
4.6	設計	18
4.7	実装	20
4.8	利点と問題点	20
4.9	ノイズ対策	20
4.9.1	Whitening Filter	21
4.9.2	Anti-Aliasing Filter	21
4.9.3	Anti-Imaging Filter	21
第 5 章	感度測定プログラムの作成	25
5.1	ノイズスペクトルの測定	25
5.2	伝達関数の測定	27
第 6 章	実験	29
6.1	実験機器	29
6.2	コンピュータ処理による位相の遅れの測定	30
6.3	マイケルソン干渉計の制御と感度の測定	31
第 7 章	結論と今後の課題	35

# 第1章 はじめに

100年前にアインシュタインは一般相対性理論を完成させて時空が伸び縮みする性質を明らかにし、さらにゆらぎがさざ波のように光速で空間を伝わる現象である重力波の存在を予言したが、重力波と物質の相互作用は極めて小さいために重力波信号は様々な雑音にかき消されてしまい、長い間直接検出はされなかった。ところが2016年、ついにアメリカのLIGOチームが連星ブラックホールの合体による重力波の直接検出に成功したと発表し、重力波天文学が幕を開けた。さらに2017年8月にはLIGOは連星中性子星合体による重力波も検出に成功し、欧州にある検出器Virgoの測定データと組み合わせることにより重力波の到来方向が狭い範囲に絞られ、光学観測により光学対応天体が初めて発見された。さらに中性子星合体に伴うと考えられているキロノバと呼ばれる幅広い電磁波を放射する現象や、重力波の到来直後にはショートガンマ線バーストも観測された。現在建設中の日本の重力波検出器KAGRAも観測を開始すれば重力波の到来方向をさらに狭い範囲に絞ることができるようになる。

現在主流の重力波検出器はレーザー干渉計型であり、光の量子性に起因する雑音が検出器の感度を制限しており、これを標準量子限界(SQL)という。そこで次世代の重力波検出器では、非線形光学結晶を挿入した干渉計において光ばねという現象を用いて重力波信号を増幅することによりSQLを超えることが考えられており、本研究室では現在この原理検証実験が行われている。

昨年度の卒業論文[1]では光ばね実験で用いる懸架系の開発がされたが制御をすることはできなかった。また、昨年度の卒業論文[2]ではピエゾを取り付けたマイケルソン干渉計のデジタル制御が行われた。デジタル制御とは0.1m秒おきにプログラムを実行できるPCであるリアルタイムコントローラによるデジタルフィルタを用いた制御のことである。デジタル制御を用いればアナログ制御ではできなかった複雑な制御ができたり、容易にフィルターを設計できることにより様々な開発の手間を省けるといった利点がある。LIGOやKAGRAではすでにデジタル制御が行われている。そこで本卒業論文では[1]で開発された懸架系を搭載したマイケルソン干渉計の制御をアナログとデジタルの両方で行い、感度の比較をする。デジタルフィルタについては、[2]では常に安定になるFIRが作成され、これを用いた制御ではアナログと同等の感度が実現されたが、懸架系を搭載したマイケルソン干渉計はFIRでは制御をすることができない。そこで今回は不安定になる可能性があるが様々なフィルタを作成できるIIRを作成し、FIRと同様に安定な制御が可能かどうか検証する。また、感度の測定を行うプログラムの作成も行う。

この論文の構成を説明する。第2章で重力波と光ばねについて簡単に述べたあと、第3章でマイケルソン干渉計の制御の原理と位相補償フィルターが必要であることを説明し、第4章でこれのデジタルフィルターでの作成について説明する。第5章でFFTと伝達関数の測定について、第6章で実験について、第7章で結論と今後の課題について述べる。

## 第2章 重力波

この章では一般相対性理論の Einstein 方程式を線形近似して重力波を導出し、その後検出方法と光ばねについて述べる。

### 2.1 重力波の導出

一般相対性理論では時間と空間をまとめ、4次元時空として扱う。4元ベクトルは

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (2.1)$$

である。 $x^\mu$  と  $x^\mu + dx^\mu$  の間の線素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

で表される。 $g_{\mu\nu}$  は計量テンソルである。重力場がない平坦な時空 (Minkowski 時空) では

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

となる。計量テンソルは次の Einstein 方程式に従う。右辺が物質を表し、左辺が時空の歪みを表す。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

$G$  は万有引力定数、 $c$  は真空中の光速、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソル、 $G_{\mu\nu}$  は Einstein テンソルであり、定義は

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.5)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (2.6)$$

$$R \equiv R^\alpha_\alpha = g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha} \quad (2.7)$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} \equiv \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta} \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha} \Gamma^\mu_{\gamma\beta} \quad (2.8)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu,\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \quad (2.9)$$

である。 $R_{\mu\nu}$  を Ricci テンソル、 $R$  を Ricci スカラー、 $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$  を Riemann 曲率テンソル、 $\Gamma^\mu_{\nu,\lambda}$  を Christoffel 記号という。ここで偏微分を

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} A^\mu = \partial_\nu A^\mu = A^\mu_{,\nu} \quad (2.10)$$

と表した。

重力場が弱いとする：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.11)$$

Einstein テンソル  $G_{\mu\nu}$  を  $h$  の 1 次まで求める。まず Christoffel 記号、Riemann 曲率テンソル、Ricci テンソル、Ricci スカラーは次のようになる。

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(h_{\alpha\nu,\lambda} + h_{\alpha\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\alpha}) \quad (2.12)$$

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\alpha\nu} - h_{\nu\beta,\alpha\sigma} - h_{\sigma\alpha,\beta\nu} + h_{\nu\alpha,\beta\sigma}) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} R_{\nu\beta} &= R^{\mu}_{\nu\mu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\mu\nu} - h_{\nu\beta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\nu\mu,\beta\sigma}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} R &= g^{\nu\beta}R_{\nu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\mu\nu} - h_{\nu\beta,\mu\sigma} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} - h_{\nu\mu,\beta\sigma}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

これより Einstein テンソルは

$$G_{\nu\beta} = \frac{1}{2}\left[h^{\delta}_{\beta,\nu\delta} + h^{\delta}_{\nu,\beta\delta} - \square h_{\nu\beta} - h_{,\nu\beta} - \eta_{\nu\beta}(h^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma} - \square h)\right] \quad (2.16)$$

$$h \equiv h^{\mu}_{\mu} \quad (2.17)$$

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \quad (2.18)$$

となる。ここで  $h_{\mu\nu}$  の trace reverse tensor  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  を定義する。

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h} &\equiv \eta^{\mu\nu}\tilde{h}_{\mu\nu} \\ &= -h \end{aligned} \quad (2.20)$$

これを用いると Einstein テンソルは次のように書ける。

$$G_{\nu\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{\delta}_{\beta,\gamma\delta} + \tilde{h}^{\delta}_{\nu,\beta\delta} - \square\tilde{h}_{\nu\beta} - \eta_{\nu\beta}\tilde{h}^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma}) \quad (2.21)$$

ここで調和条件

$$\tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0 \quad (2.22)$$

を仮定する。さらに Lorentz ゲージ

$$\tilde{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (2.23)$$

を課す。すると Einstein テンソルは

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\tilde{h}_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

となるため、Einstein 方程式は次のように線形になる：

$$\square\tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

真空では

$$\square\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.26)$$

となる。解として単色平面波

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \quad (2.27)$$

を考える。これが Einstein 方程式と Lorentz ゲージを満たすためには

$$A_{\mu\nu}k^{\nu} = 0 \quad (2.28)$$

$$k_{\mu}k^{\mu} = 0 \quad (2.29)$$

を満たす必要がある。式 (2.28) は重力波の振幅ベクトルと波数ベクトルが直交することを示していて、式 (2.29) は重力波が光速で伝わることを示している。つまり重力波は横波である。ここで、まだ座標の取り方に任意性があるため、次の条件を課す。

$$A^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (2.30)$$

$$A_{\mu\nu}\delta^\nu_0 = 0 \quad (2.31)$$

$$A_{\alpha\beta}k^\beta = 0 \quad (2.32)$$

+z 軸方向に進む重力波を考えると、4 元波数ベクトルは

$$k_\alpha = (-k, 0, 0, k) \quad (2.33)$$

とおける。すると

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(-i\omega t + ikz), \quad \omega = ck \quad (2.34)$$

となり、振幅は

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{h}_+ & \tilde{h}_\times & 0 \\ 0 & \tilde{h}_\times & \tilde{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

となる。 $\tilde{h}_+$ 、 $\tilde{h}_\times$  は重力波の自由度に対応し、それぞれプラスモード、クロスモードという。

## 2.2 重力波の検出

重力波の検出はマイケルソン干渉計で行う。

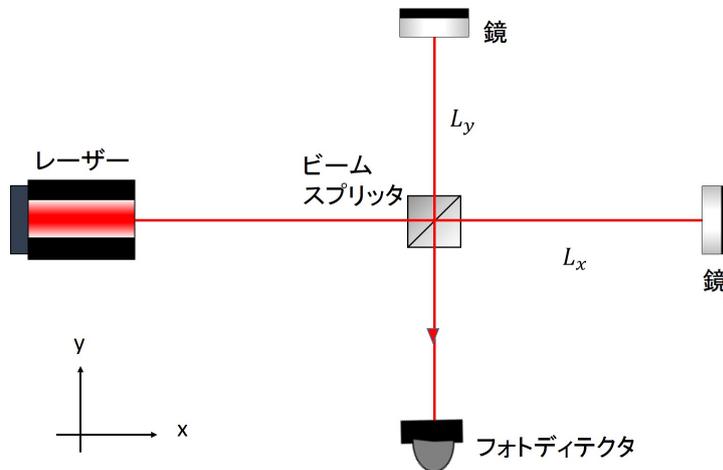


図 2.1: マイケルソン干渉計

ビームスプリッタに入射するレーザーの電場を  $E_0 e^{i\Omega t}$  とする。ビームスプリッタはレーザーパワーを半分ずつに分けるため、電場は  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  倍になる。そして腕を通る間にそれぞれの距離に応じた位相変化 ( $\Delta\phi_x, \Delta\phi_y$ ) をし、ビームスプリッタにより干渉させてからフォトディテクタで検出する。フォトディテクタでの電場は

$$E = \frac{1}{2} E_0 e^{i\Omega t} (e^{i\Delta\phi_x} - e^{i\Delta\phi_y}) \quad (2.36)$$

であるから検出されるパワーは

$$\begin{aligned}
P &= |E|^2 \\
&= \frac{1}{2} E_0^2 (1 - \cos(\Delta\phi_x - \Delta\phi_y)) \\
&= \frac{1}{2} P_{\text{in}} (1 - \cos \Delta\phi)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

となり、位相変化  $\Delta\phi$  を検出できる。そこで重力波が来た場合の位相変化を求める。重力波は+z 軸方向に進み、偏光は  $h_+$  のみとする。すると光の線素はゼロであることから、

$$\begin{aligned}
0 &= ds^2 \\
&= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \\
&= -(cdt)^2 + (1 + h(t)) dx^2 + (1 - h(t)) dy^2 + dz^2
\end{aligned} \tag{2.38}$$

となる。ここで、 $h(t) = \tilde{h}_+ \exp(-i\omega t + ikz)$  とした。すると  $x$  軸方向に進む光に対し、

$$cdt = \sqrt{1 + h(t)} dx \tag{2.39}$$

が成り立つ。 $|h(t)| \ll 1$  より、

$$\frac{dx}{c} = \left(1 - \frac{1}{2} h(t)\right) dt \tag{2.40}$$

とする。光がビームスプリッタと鏡の間を往復する時間を  $\Delta t_x$  とし両辺積分する。

$$\begin{aligned}
\frac{2L_x}{c} &= \int_{t-\Delta t_x}^t \left(1 - \frac{1}{2} h(t')\right) dt' \\
&= \Delta t_x - \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t_x}^t h(t') dt'
\end{aligned} \tag{2.41}$$

ここで、 $h(t) = 0$  のとき  $\Delta t_x = \frac{2L_x}{c}$  であるから、積分区間の下限を  $t - \frac{2L_x}{c}$  と近似する。すると  $\Delta t_x$  が求まる：

$$\Delta t_x = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' \tag{2.42}$$

よって  $x$  軸方向の腕を往復する光の位相変化は

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_x &= \Omega \Delta t_x \\
&= \frac{2L_x \Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt'
\end{aligned} \tag{2.43}$$

と求まった。同様にすると  $y$  軸方向の腕を往復する光の位相変化は

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_y &= \Omega \Delta t_y \\
&= \frac{2L_y \Omega}{c} - \frac{\Omega}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t h(t') dt'
\end{aligned} \tag{2.44}$$

となる。よって重力波が来た場合の位相変化は、 $L \simeq L_x \simeq L_y$ ,  $\Delta L = \Delta L_x - \Delta L_y$  とすると

$$\Delta\phi = \frac{2\Delta L \Omega}{c} + \delta\phi_{\text{GW}} \tag{2.45}$$

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \tag{2.46}$$

と求まった。第一項は元からあった腕の長さの差によるものであり、第二項が重力波による影響である。

次にマイケルソン干渉計の重力波に対する周波数応答を考える。 $h(t)$  をフーリエ変換する：

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.47}$$

これを式 (2.46) に代入する。

$$\begin{aligned}
 \delta\phi_{\text{GW}} &= \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t'} d\omega dt' \\
 &= \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} (1 - e^{-\frac{2i\omega L}{c}}) h(\omega) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-\frac{iL\omega}{c}} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

$$H_{\text{MI}} = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-\frac{iL\omega}{c}} \tag{2.49}$$

式 (2.49) がマイケルソン干渉計の重力波に対する周波数応答関数である。 $\frac{L\omega}{c} = \frac{\pi}{2}$  となるとき感度が最大になるが、例えば重力波が 1kHz のとき  $L=75\text{km}$  となり、現実的ではない。そこで光を何度も反射させて光路長を稼ぐ Fabry-Perot 共振器が用いられる。

## 2.3 光ばね

光ばねについて説明する。2枚合わせの鏡の間でレーザーが共振しているとする。ここから少しずらした位置でレーザーの輻射圧と外力がつり合うように制御する。この状態が崩れると輻射圧と外力の合力が復元力となり、元の状態へ戻ろうとする。この現象を光ばねといい、光ばねの共振周波数付近で干渉計の感度が向上することが知られている。光ばね実験を行うには非常に軽い鏡を用いてレーザーの輻射圧の影響が大きくなるようにしなければならない。この鏡にとりつけるサスペンションの開発は昨年度の卒業論文 [1] で行われた。この卒業論文ではこのサスペンションを取り付けた鏡を搭載したマイケルソン干渉計の制御を行う。

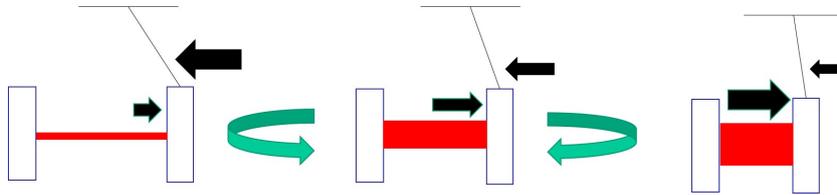


図 2.2: 光ばね

## 第3章 制御

この章ではサスペンション付きミラーを搭載したマイケルソン干渉計の制御の原理と位相補償の必要性について述べる。

### 3.1 フィードバック制御

ミラーは地面振動や風によって常に揺れている。これらの外乱を入力  $x$  とし、これがマイケルソン干渉計  $H$  を通った出力を  $y$  とする。このように、入力と出力の比の周波数特性のことを伝達関数という。この出力をフィルタ  $G$  に通してから入力にフィードバックをすると、実効的な入力  $x_{real}$  は図 3.1 の矢印の位置になり、

$$x_{real} = x + (-GH)x + (-GH)^2x + \dots = \frac{1}{1+GH}x \quad (3.1)$$

より、外乱を  $\frac{1}{1+GH}$  倍にすることができる。 $GH$  のことをオープンループゲインという。



図 3.1: フィードバック制御

ただし  $GH = -1$  となると不安定になるため、これを避けなければならない。 $|GH| = 1$  となる周波数をユニティゲイン周波数といい、このときの位相が  $-180^\circ$  より何度大きいかを位相余裕という。また、位相が  $-180^\circ$  となる周波数で  $|GH|$  が 1 よりどれだけ小さいかをゲイン余裕という。

### 3.2 オープンループゲイン

マイケルソン干渉計の制御図と実際の写真を図 3.2、3.3、3.4 に示す。マイケルソン干渉計の 2 つの出力 (REFL と AS) の差を取り、後述する位相進み補償回路に通してからコイルに入れ、サスペンション付きミラーに貼った磁石にコイルからの磁場でフィードバックする。サスペンション付きミラーは真っ直ぐ取り付けられず上や下を向いてしまうため、腕を折り返してレーザーが真っ直ぐ飛ぶようにする。差動回路の回路図は図 3.5 である。

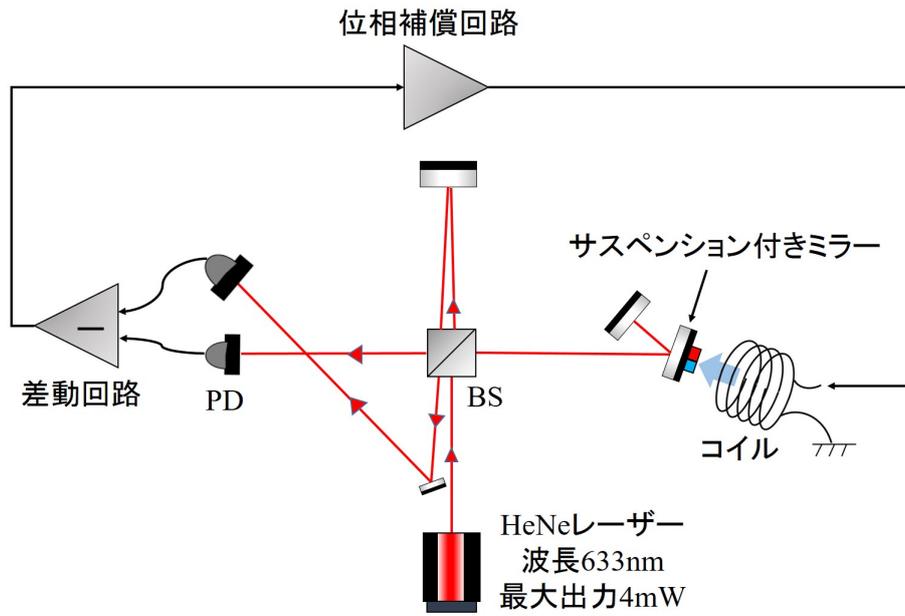


図 3.2: マイクelson干渉計の制御図

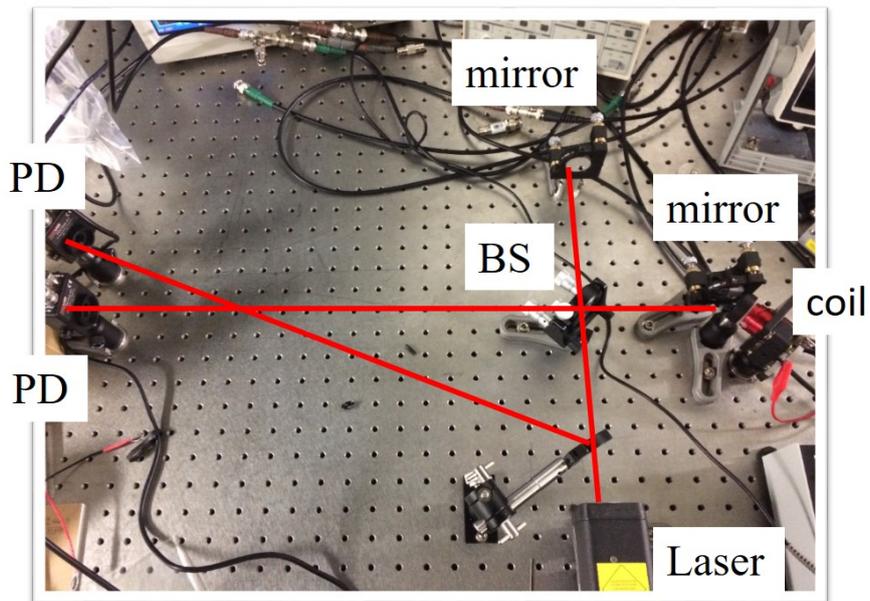


図 3.3: 実際のセットアップ



図 3.4: サスペンション付きミラーとコイル

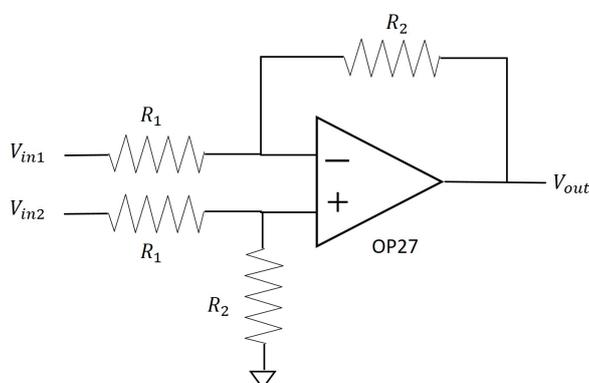


図 3.5: 差動回路。伝達関数は  $V_{out} = \frac{R_2}{R_1}(V_{in2} - V_{in1})$ 。  $R_1=100 \Omega$ 、 $R_2=400 \Omega$  とした。

オープンループゲイン  $GH$  を詳しく考えていく。まずミラーの変位とマイケルソン干渉計の出力の関係を考える。マイケルソン干渉計の腕の長さをそれぞれ  $L_x, L_y$  とするとミラーの変位は  $\Delta L = L_x - L_y$  である。ビームスプリッターに入射するレーザーの電場を  $E_0 e^{i\omega t}$  ( $\omega$ : レーザーの角周波数) とすると、各腕を通して帰ってくる電場は

$$E_x = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega(t + \frac{2L_x}{c})} \quad (3.2)$$

$$E_y = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega(t + \frac{2L_y}{c})} \quad (3.3)$$

より、REFL と AS の強度は

$$I_{REFL} \propto |E_x - E_y|^2 = E_0^2 \sin^2 \frac{\omega \Delta L}{c} \quad (3.4)$$

$$I_{AS} \propto |E_x + E_y|^2 = E_0^2 \cos^2 \frac{\omega \Delta L}{c} \quad (3.5)$$

であるから、差をとると

$$I_{AS} - I_{REFL} \propto E_0^2 \cos \frac{4\pi \Delta L}{\lambda} \quad (3.6)$$

となる。ここで、 $\lambda$  はレーザーの波長である。式 (3.6) をエラー信号という。エラー信号がゼロとなる位置でミラーの変位に比例する信号が出力される。ミッドフリンジとよばれるこの位置でロックする。

$$I_{AS} - I_{REFL} \propto E_0^2 \frac{4\pi \Delta L}{\lambda} \quad (3.7)$$

これがミラーの変位とマイケルソン干渉計の出力の関係式である。

次にエラー信号をマイケルソン干渉計にフィードバックする箇所を考える。コイルからの磁場の力を  $F$ 、電圧を  $V$ 、抵抗を  $r$ 、コイルのインダクタンスを  $L$ 、比例係数を  $\beta$  とすると、

$$F = \beta \frac{V}{r + i\omega L} \quad (3.8)$$

となる。ここで、制御には大電流が必要であるため、1A 流すことができる LT1210 というオペアンプを用いて作成したコイルドライバをコイルの手前に入れる。回路図を図 3.6 に示す。

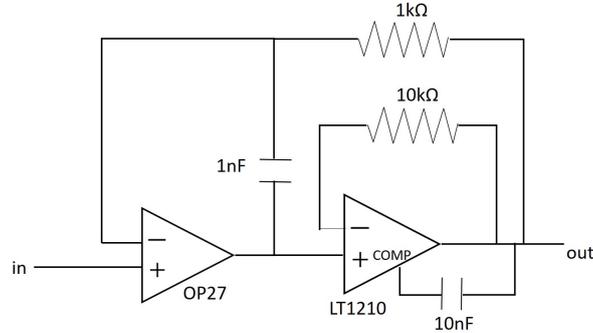


図 3.6: コイルドライバ。伝達関数は 1。電気回路のシミュレーションソフトである LTSpice を使用し設計した。LT1210 単体ではノイズが大きいためノイズの小さい OP27 のループの内側に入れる。

次にコイルからの力  $F$  とミラーの変位  $\Delta L$  の関係を考える。ミラーの質量を  $m$ 、ばね定数を  $k$ 、ダンピング係数を  $\gamma$  とするとミラーの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \Delta L}{dt^2} = -k(\Delta L - \Delta x) - \gamma \frac{d}{dt}(\Delta L - \Delta x) + F \quad (3.9)$$

である。ここで、地面の変位  $\Delta x$  を無視し、式 (3.9) をフーリエ変換することにより

$$\frac{\Delta L}{F} = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (3.10)$$

となる。

以上式 (3.7)、(3.8)、(3.10) をまとめ、さらに適当に増幅をすると、オープンループゲインは図 3.7 のようになる。このように伝達関数の絶対値と位相の周波数特性を表した図をボード線図という。絶対値はふつう  $20\log_{10}$  をとり、単位をデシベル [dB] にする。また、絶対値を普通ゲインと呼ぶ。

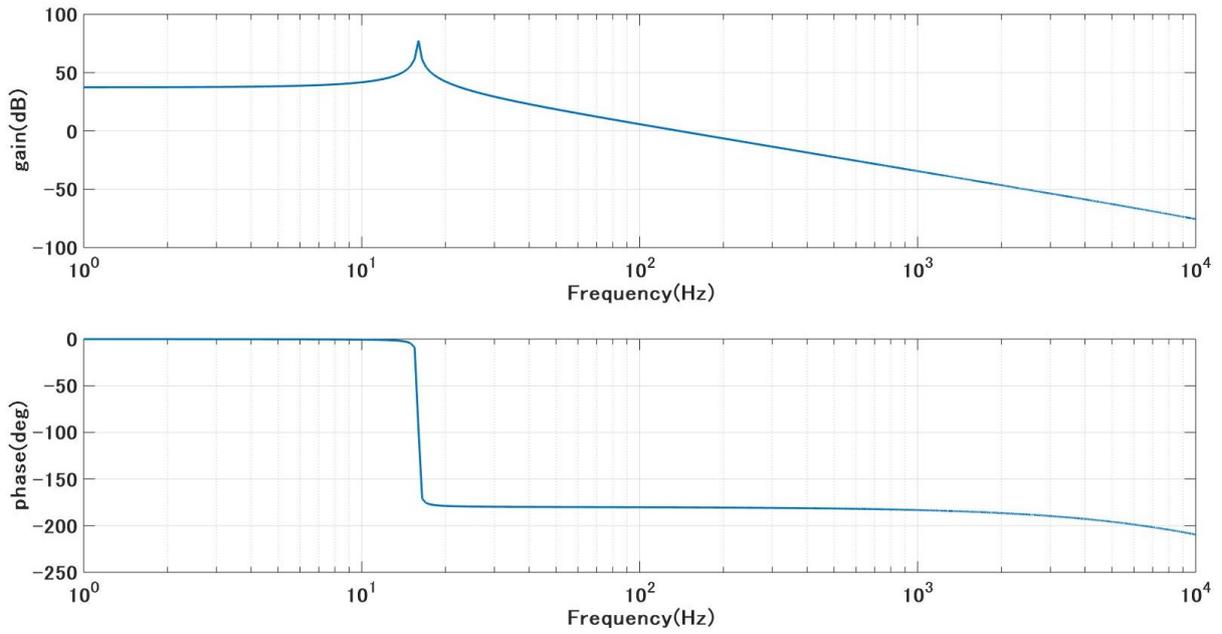


図 3.7: オープンループゲイン

これを見ると位相余裕がないため制御をすることができない。図 3.8 のような位相進み補償回路を入れる必要がある。

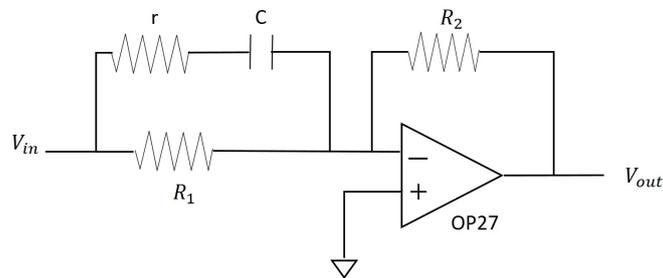


図 3.8: 位相進み補償回路

この回路の伝達関数は

$$-\frac{R_2}{R_1} \frac{1 + i\frac{f}{f_z}}{1 + i\frac{f}{f_p}}, \quad f_z = \frac{1}{2\pi C(R_1 + r)}, \quad f_p = \frac{1}{2\pi Cr} \quad (3.11)$$

である。例えば  $R_2 = R_1$ ,  $f_z = 100$ ,  $f_p = 1000$  とするとボード線図は次のようになる。

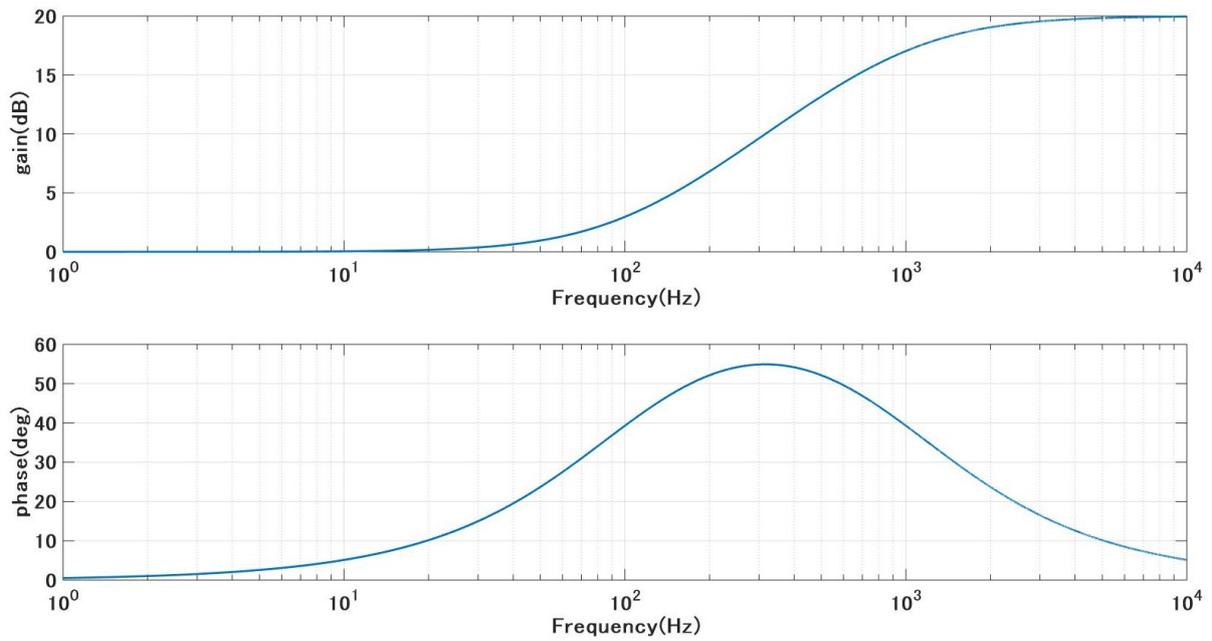


図 3.9: 位相進み補償回路

これを入れるとオープンループゲインは図 3.10 のようになる。

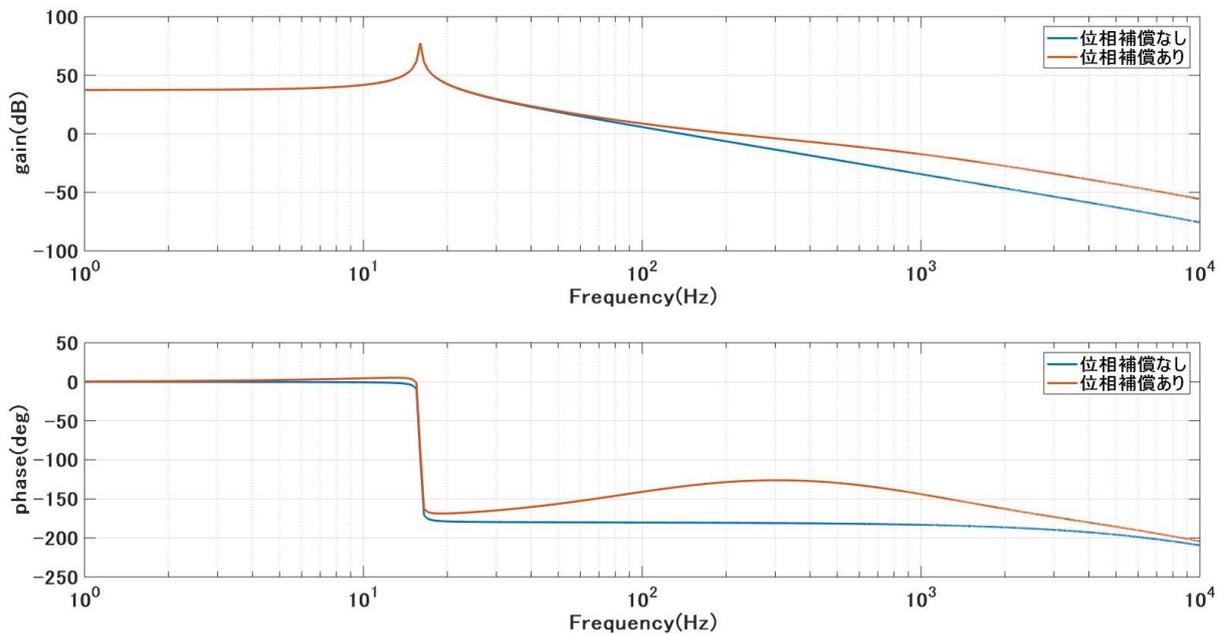


図 3.10: オープンループゲイン

次の章で述べるデジタル制御ではこの位相進み補償回路をデジタルフィルタで置き換える。今回使用した ADC は各チャンネルを同時にサンプリングできず、 $10\mu\text{sec}$  ずれてしまうため、正確に引き算することができないので、差動回路はアナログとした。

## 第4章 デジタルシステム

この章ではデジタルシステムによる信号処理の理論について述べる。[4]を参考にした。

### 4.1 信号

物理系の状態に関する情報を何らかの方法で伝達する量を信号といい、表 4.1 のように 4 種類がある。まず時間が連続か離散かにより連続時間信号と離散時間信号に分けられ、さらに振幅が連続か離散かによりさらに分けられる。

表 4.1: 信号の分類

	連続振幅	離散振幅
連続時間	アナログ信号	多値信号
離散時間	サンプル値信号	デジタル信号

連続時間信号と離散時間信号、特にアナログ信号とデジタル信号について考えていく。正弦波信号は次の通りである。

$$\text{連続時間: } x(t) = \cos \omega_a t \quad (4.1)$$

$$\text{離散時間: } x[n] = \cos \omega_d n \quad (4.2)$$

$t$  は実数、 $n$  は整数である。 $\omega_a$  は連続時間に対する角周波数であり、1 秒あたりに進む位相である。 $\omega_d$  は離散時間に対する角周波数であり、1 サンプル時間あたりに進む位相である。これらの間にはサンプリング周波数を  $f_s$  とすると

$$\omega_a = \omega_d f_s \quad (4.3)$$

の関係がある。また、特徴としては  $\omega_a$  は任意の実数を考えるのに対し、

$$\cos(\omega_d + 2\pi)n = \cos \omega_d n \quad (4.4)$$

より離散時間信号の正弦波は  $\omega_d$  について  $2\pi$  の周期関数となり、また、

$$\cos(2\pi - \omega_d)n = \cos \omega_d n \quad (4.5)$$

より、 $\omega_d$  と  $2\pi - \omega_d$  は区別できない。これを折り返し雑音(エイリアシング)という。よって離散時間信号では  $0 \leq \omega_d < \pi$  のみを考える。 $\omega_d$  を正規化角周波数という。

### 4.2 離散時間 LTI システム

与えられた信号に何か処理を施して出力するものをシステムといい、アナログ信号に対してはアナログシステム、デジタル信号に対してはデジタルシステムという。



図 4.1: システム

線形なデジタルシステムについて考えていく。まず入力是一般に

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (4.6)$$

と書ける。ここで  $\delta[n]$  は単位インパルス信号といい、

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

である。入力  $\delta[n-k]$  に対するシステムの応答を  $h_k[n]$  とする。これをインパルス応答という。すると入力  $x[n]$  に対するシステムの応答は

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \quad (4.8)$$

となる。ここで、システムの特徴が時間によって変化しないとする。この性質をシステムの時不変性という。このとき

$$h_k[n] = h[n-k] \quad (4.9)$$

と書ける。するとシステムの入出力関係は

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (4.10)$$

となる。式 (4.10) の右辺の演算を畳み込みといい次のように書くこともある。

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (4.11)$$

時不変性をもつ線形なデジタルシステムのことを離散時間線形時不変 (LTI: Linear Time-Invariant system) システムという。任意の離散時間 LTI システムはそのインパルス応答によって一意的に特徴づけられる。インパルス応答が有限個の場合を FIR(Finite Impulse Response) システム、無限個の場合を IIR(Infinite Impulse Response) システムという。また、現在の出力  $y[n]$  が未来の入力  $x[m], m > n$  に依存しない、即ち

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (4.12)$$

となるシステムを因果システムという。マイケルソン干渉計の制御には因果的な FIR、もしくは因果的な IIR のどちらかを用いることになる。因果的なシステムを有限個の項で表現するには

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4.13)$$

のように再帰型にする。FIR の場合は  $a_k = 0 (k \neq 0)$  である。式 (4.10) と式 (4.13) は必要に応じ使い分ける。

### 4.3 伝達関数

システムの伝達関数を考える。

まずアナログシステムについて述べる。入力  $x(t)$  と出力  $y(t)$  の時間領域での関係は線形微分方程式

$$\left\{ \sum_{k=0}^N a_k \left( \frac{d}{dt} \right)^k \right\} y(t) = \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \left( \frac{d}{dt} \right)^k \right\} x(t) \quad (4.14)$$

で表される。 $a_k, b_k$  は実数の定数である。式 (4.14) の両辺をラプラス変換すると

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s) \quad (4.15)$$

となる。ここで公式

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) \quad (4.16)$$

を用いた。式 (4.15) より、伝達関数  $H(s)$  は

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。周波数応答を考える場合は  $s = i\omega_a$  とおく。

次にデジタルシステムについて述べる。入力  $x[n]$  と出力  $y[n]$  の時間領域での関係は線形差分方程式

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4.18)$$

で表される。 $a_k, b_k$  は実数の定数である。式 (4.18) の両辺を  $z$  変換する。 $z$  変換とは連続時間ではラプラス変換に相当するもので定義は

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (4.19)$$

で、 $z$  は複素数である。 $z$  変換の公式

$$\mathcal{Z}[f[n-1]] = z^{-1} F(z) \quad (4.20)$$

を用いると式 (4.18) は

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (4.21)$$

となる。これより伝達関数は

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。周波数応答を考える場合は  $z = e^{i\omega_a}$  とおく。

## 4.4 安定性

インパルス応答  $h[n]$  や係数  $a_k, b_k$  は任意にとれるわけではない。安定なシステムとなる条件を考える。任意の有界な入力 (bounded input) に対し有界な出力 (bounded output) が得られるときシステムは安定であると定義する。これを BIBO 安定 (Bounded Input, Bounded Output stable) という。つまり  $C$  を正の定数とすると、すべての  $n$  に対し

$$|x[n]| < C \quad (4.23)$$

であるから、式 (4.13) を式 (4.10) に代入すると

$$\begin{aligned}
 |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \\
 &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||h[n-k]| \\
 &< C \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \\
 &< \infty
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

より、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] < \infty \tag{4.25}$$

となる。これが離散時間 LTI システムが安定であるための条件である。FIR はインパルス応答が有限個であるからこの条件を満たすので必ず安定になる。IIR の場合は式 (4.25) と同値である次の条件で考える必要がある：

$$\text{伝達関数の極、すなわち } \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0 \text{ の解が全て複素平面の単位円の内側に存在する。} \tag{4.26}$$

## 4.5 デジタルフィルタ

離散時間 LTI システムであるデジタルフィルタを作成する。まず FIR と IIR の入出力関係を図 4.2, 4.3 に図示する。

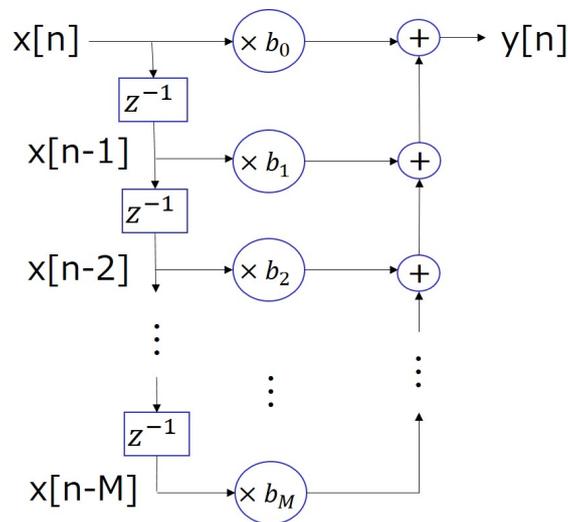


図 4.2: FIR

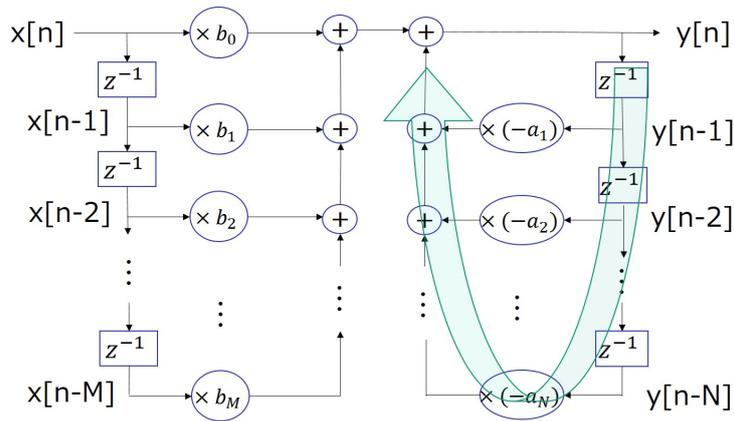


図 4.3: IIR

$z^{-1}$  は式 (4.20) から分かるように 1 サンプル時間分の遅延を表す。IIR は再帰型であるため図の矢印のようなループ構造がある。次に FIR と IIR の利点と問題点を比較する。

- FIR の利点
  - 必ず安定になる。
  - FIR にはループ構造がないため、リミットサイクルがない。リミットサイクルとはループにおいて計算の誤差が蓄積することによる発振である。
- FIR の問題点
  - フィルタ次数が高い。高すぎるとフィルタ計算に時間がかかってしまいその分位相が遅れてしまう。
  - 位相遅れが大きくなりやすい。
- IIR の利点
  - フィルタ次数が低い。
  - sz 変換で容易に設計できる。
- IIR の問題点
  - 極があるため不安定になる可能性がある。
  - リミットサイクルを生じやすい。

次の節で説明する sz 変換を用いれば位相進み補償フィルタを IIR で設計できるので、本実験では IIR を用いる。FIR で位相進み補償フィルタを設計する方法はわからなかった。

## 4.6 設計

デジタルフィルタの設計について述べる。自由に伝達関数を設定したとしても式 (4.22) の形に一般にはならず、なったとしても安定条件式 (4.26) を満たすとは限らない。そこで様々な設計方法が考案されているが、本実験では低周波ではアナログフィルタとほとんど同じ特性をもつ安定なデジタルフィルタを設計できる sz 変換という手法を用いる。これについて述べる。

アナログの伝達関数式 (4.17) で  $s$  を  $z$  で表して式 (4.22) の形にできればアナログフィルタと同じ特性になるが、 $z = e^{i\omega_d} = e^{s/f_s} \Leftrightarrow s = f_s \log z$  であるため近似を入れる必要がある。

$$\begin{aligned}
 z &= e^{i\omega_d} \\
 &= e^{s/f_s} \\
 &= \frac{e^{\frac{s}{2f_s}}}{e^{-\frac{s}{2f_s}}} \\
 &\approx \frac{1 + \frac{s}{2f_s}}{1 - \frac{s}{2f_s}} \\
 \Leftrightarrow s &= 2f_s \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

この近似が成り立つ条件は

$$\frac{s}{2f_s} \ll 1 \Leftrightarrow f_a \ll \frac{f_s}{\pi} \tag{4.28}$$

である。つまり式 (4.27) を式 (4.17) に代入すれば式 (4.28) の範囲でアナログフィルタと同じ特性をもつデジタルフィルタの係数を得ることができる。

$f_a > \frac{f_s}{\pi}$  の特性を考える。式 (4.27) をさらに変形する。

$$\begin{aligned}
 s &= 2f_s \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\
 &= 2f_s \frac{1 - e^{-i\omega_d}}{1 + e^{-i\omega_d}} \\
 &= 2f_s i \frac{(e^{i\omega_d/2} - e^{-i\omega_d/2})/2i}{(e^{i\omega_d/2} + e^{-i\omega_d/2})/2} \\
 &= 2f_s i \frac{\sin \frac{\omega_d}{2}}{\cos \frac{\omega_d}{2}} \\
 &= 2f_s i \tan \frac{\omega_d}{2} \\
 \Leftrightarrow \omega_a &= 2f_s \tan \frac{\omega_d}{2}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

つまりこの変換は  $0 \leq \omega_a < \infty$  を  $0 \leq \omega_d < \pi$  に式 (4.29) で非線形に写像するものであるとわかる。最後にデジタルフィルタとアナログ回路の特性の比較を位相進み補償フィルタで示す。(図 4.4)

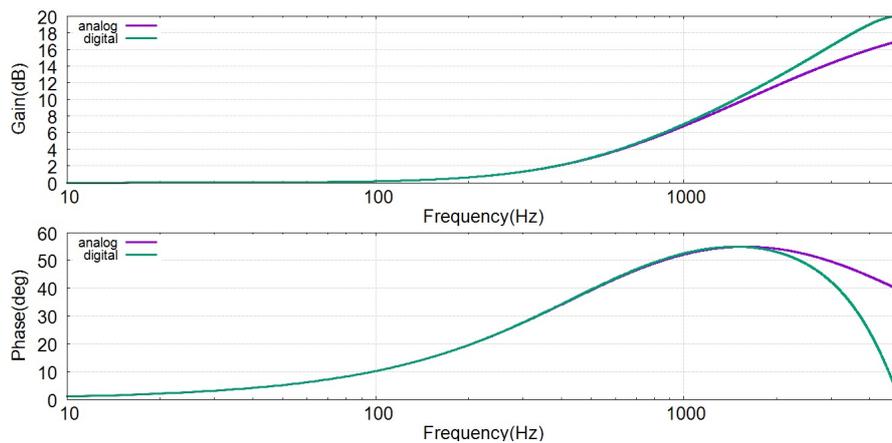


図 4.4:  $sz$  変換により作成した位相進み補償フィルタ ( $f_z=500\text{Hz}, f_p=5\text{kHz}$ ) とアナログの位相進み補償回路の比較。  $0 \leq \omega_a < \infty$  が  $0 \leq \omega_d < \pi$  に写像されていることが分かる。

## 4.7 実装

作成したプログラムの実装方法を説明する。図 4.5 のようなファンクションブロックダイアグラムというプログラミング言語を用いる。赤い箱をファンクションブロックといい、それぞれ C# で作成し、線で結ぶ。プログラムは左から右、上から下に 0.1m 秒おきに実行される。各ファンクションブロックの左側に表示されている変数が入力で、プログラムの実行中でも値を変更できる。右側に表示されているのが出力である。

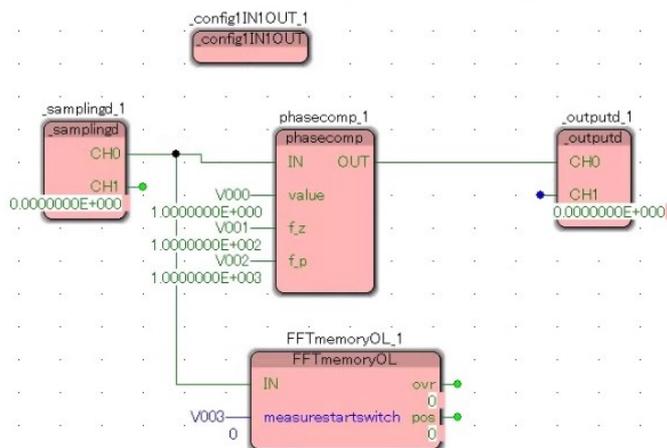


図 4.5: ファンクションブロックダイアグラム。デジタル制御をしながらマイケルソン干渉計の出力を FFT している様子である。config1IN1OUT が各種設定を行い、samplingd が ADC、outputd が DAC を操作し、phasecomp が IIR フィルターによる計算を行い、FFTmemoryOL が FFT の計算を行う。FFTmemoryOL の measurestartswitch により測定を開始する。FFT については第 5 章で説明する。

## 4.8 利点と問題点

デジタルフィルタによる制御の利点と問題点をまとめる。

- 利点
  - フィルタ係数値を書き換えることによりフィルタ特性を容易に変更できる。
  - アナログ回路にはないフィルタを作れる。
  - 回路内の雑音を考慮する必要がない。
- 問題点
  - コンピュータ処理による遅延が大きい。
  - 量子化や演算で生まれる誤差がある。
  - IIR ではリミットサイクルが起きる可能性がある。

## 4.9 ノイズ対策

デジタルフィルタによるノイズを減らすアナログ回路について述べる。これらは必要に応じて入れる。

### 4.9.1 Whitening Filter

信号の量子化誤差を減らすためにはサンプリングする前に信号をなるべく増幅しておく必要があるが、通常は低周波成分が強いので単純に増幅すると低周波が先にサチュレーションし、高周波はあまり増幅できない。そこで位相進み補償回路により高周波のみを増幅してからサンプリングする。この場合の位相進み補償回路は Whitening Filter と呼ばれる。DAC の場合はこれと逆の Dewhitening Filter を用いる。

### 4.9.2 Anti-Aliasing Filter

サンプリング周波数の半分以上の周波数成分をサンプリングすると aliasing が起きてしまうのでサンプリングする前にこれをカットするローパスフィルタを入れる。ゲインの落ち方が急峻で、かつ位相の遅れも少ない chebyshev 型のローパスフィルタがよく用いられる。butterworth と比較をする。(図 4.6)

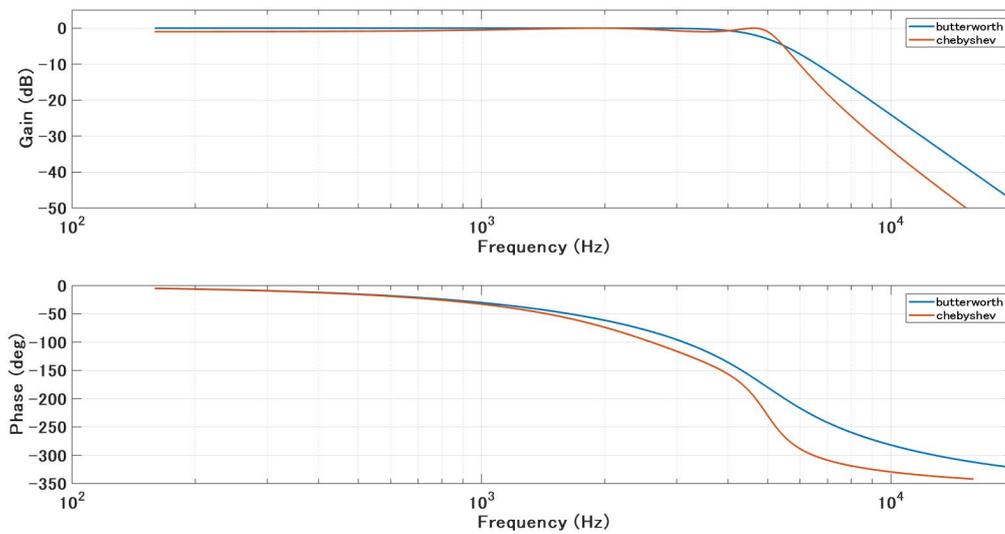


図 4.6: butterworth と chebyshev のローパスの比較。どちらも 4 次でポールは 5kHz。

### 4.9.3 Anti-Imaging Filter

DAC の出力値は 1 サンプル時間おきに更新されるので角ばってしまう。このスペクトルを考える。まず図 4.7 の左のような信号がシステムに入力されるとする。このスペクトルを図 4.7 の右とする。Anti-Aliasing を入れているイメージである。

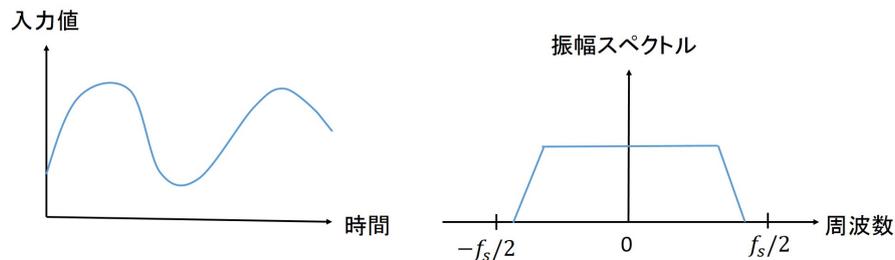


図 4.7: 入力信号

これをサンプリングするとき、図 4.8 の左のような単位インパルス列をかけることにより図 4.9 の左のような離散時間信号となる。単位インパルス列はスペクトルも単位インパルス列である。よって図 4.9 の左のスペクトルは、図 4.7 の右のスペクトルと図 4.8 の右のスペクトルを畳み込むことにより、図 4.9 の右のようになる。

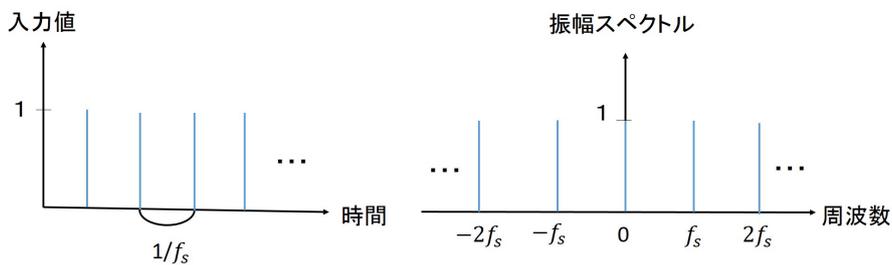


図 4.8: 単位インパルス列

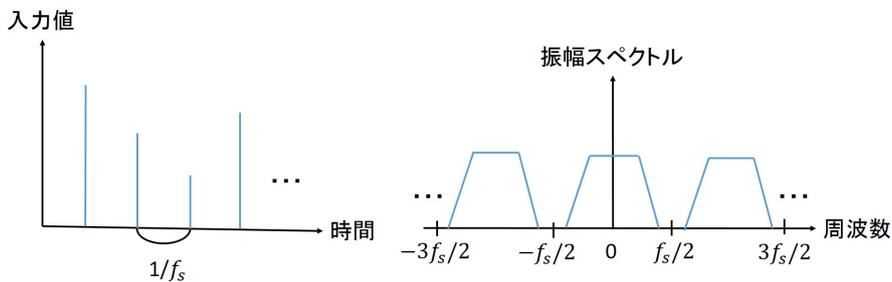


図 4.9: 離散時間信号

この離散時間信号を出力すると、図 4.10 の左のように次の更新時間まで現在の出力値を保持し続けるので角ばってしまう。これを保持効果という。保持効果の伝達関数は

$$\text{sinc}\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) = \frac{\sin \frac{\pi f}{f_s}}{\frac{\pi f}{f_s}} \quad (4.30)$$

であり、これをプロットすると図 4.10 の右のようになる。

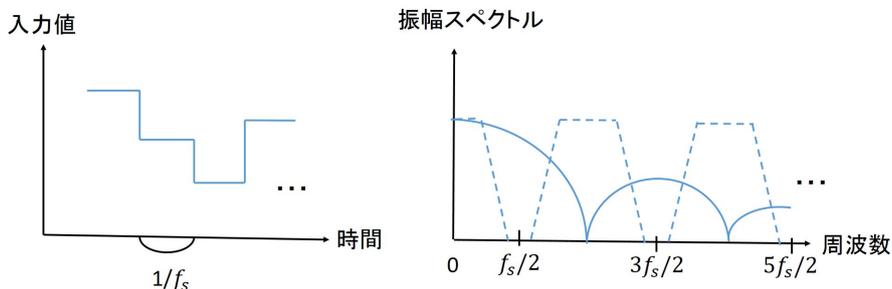


図 4.10: 出力信号

以上をまとめると、図 4.11 のように、本来の信号だけでなく高周波に無限個の信号が現れることがわかる。これらをイメージ信号という。

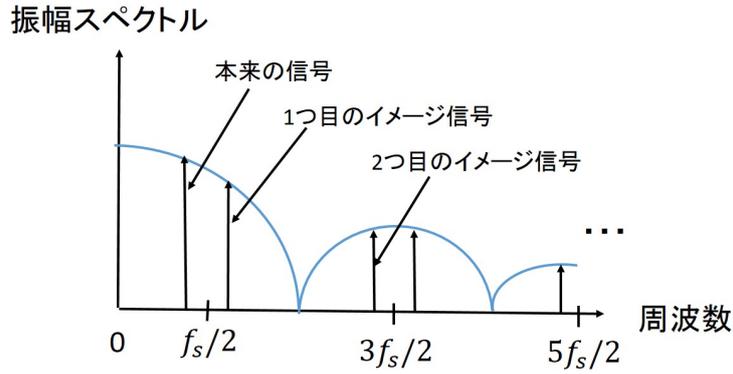


図 4.11: 出力信号のスペクトル

つまり  $f_s/2$  以上をローパスフィルターでカットする必要がある。ここでも chebyshev 型のローパスフィルターが良く用いられる。ただし、Anti-Aliasing も同様であるが位相を遅らせたくない場合はローパスは入れることができない。そこで図 4.12 のような位相遅れ補償回路で代用する方法もある。これは位相進み補償回路と逆の特性をもつ回路である。そのためデジタルの位相進み補償フィルタで特性をほとんど打ち消すことができる。ただ式 (4.29) から分かるように高周波ではズレがでてくる (図 4.14)。

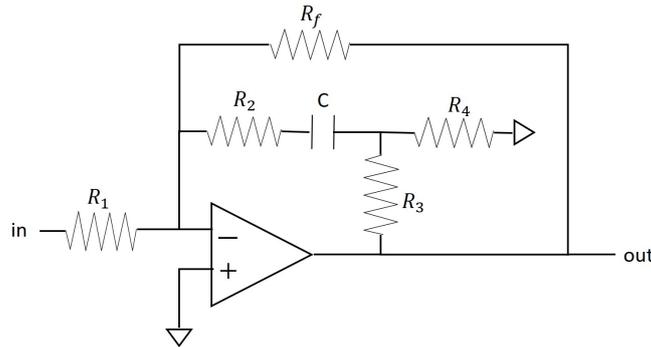


図 4.12: 位相遅れ補償回路。伝達関数は  $-\frac{R_f}{R_1} \frac{1+i\frac{f}{f_z}}{1+i\frac{f}{f_p}}$ ,  $f_z \approx \frac{1}{2\pi C R_2}$ ,  $f_p \approx \frac{1}{2\pi C (R_2+R_f)}$

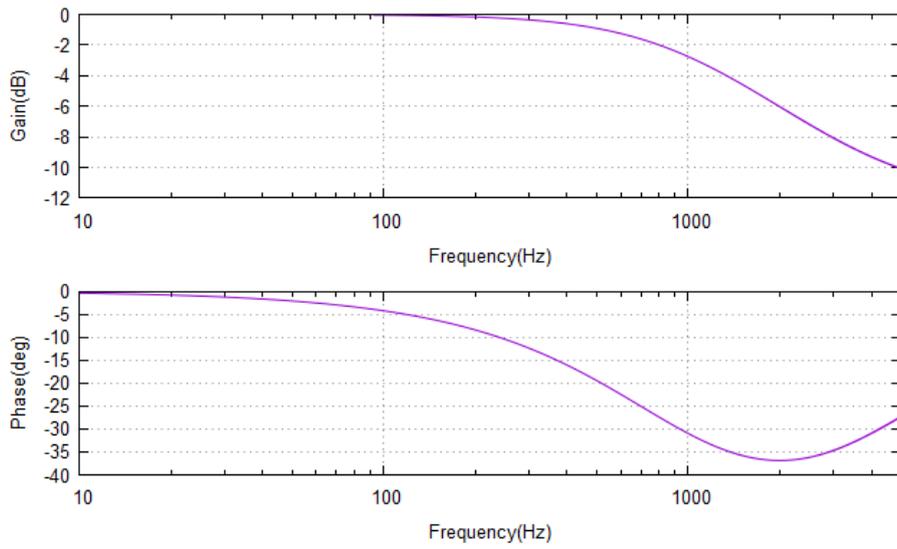


図 4.13: 位相遅れ補償回路。  $f_p=1\text{kHz}$ ,  $f_z=4\text{kHz}$ 。

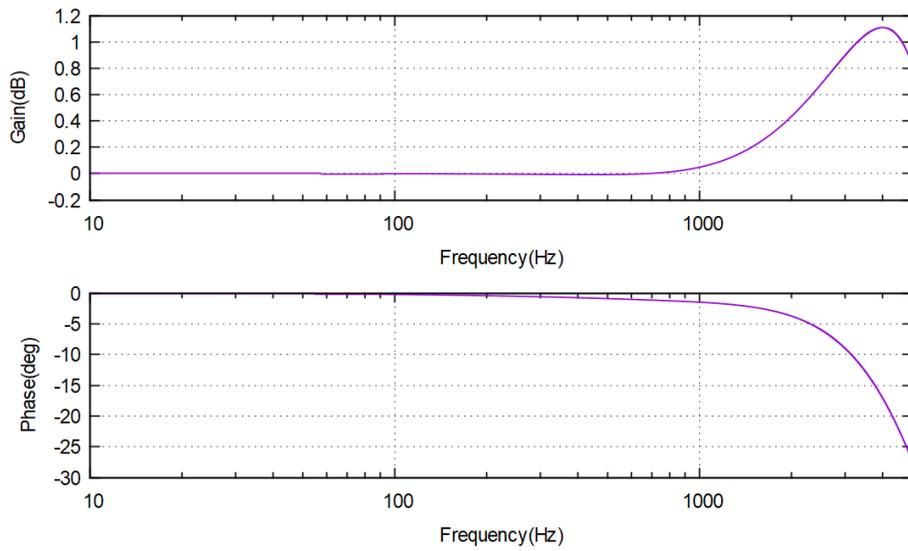


図 4.14: アナログの位相遅れ補償回路 ( $f_p=1\text{kHz}$ ,  $f_z=4\text{kHz}$ ) の後デジタルの位相進み補償フィルタ ( $f_z=1\text{kHz}$ ,  $f_p=3.5\text{kHz}$ ) に通し特性を打ち消す。

## 第5章 感度測定プログラムの作成

マイケルソン干渉計の感度の測定にはノイズスペクトルの測定と伝達関数の測定の2つを行う必要があるため、これらの測定を行うプログラムの開発を行う。

### 5.1 ノイズスペクトルの測定

$N$ (2の整数乗)点のサンプリングデータをFFTすると周波数分解能  $\Delta f = \frac{f_s}{N}$  で  $\frac{N}{2}$  点のスペクトルを求めることができる。ただしこの  $N$  点のデータが以降も繰り返し出現する場合のスペクトルとなるため、最初と最後のデータが連続していない場合は誤ったスペクトルとなる。そこで、窓関数と呼ばれるものを  $N$  点のデータにかけ、最初と最後が0になるようにする。窓関数には様々なものが考案されているが、一般によく使われている次の **hanning** 窓を用いることにした。ただしこの窓関数をかけることにより信号が減衰してしまうため、この窓関数固有の補正係数をかける必要がある。

$$w[n] = 0.5 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N}, \quad 0 \leq n < N \quad (5.1)$$

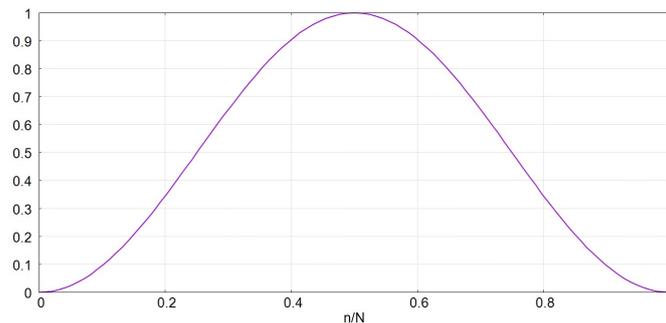


図 5.1: hanning 窓

求めるのは振幅スペクトル密度である。これについて説明する。まず、時系列データを定量的に評価する二乗平均平方 (Root Mean Square) について考える。これはデータの二乗の平均のルートを取るという手法である：

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]} \quad (5.2)$$

ここで、離散フーリエ変換と逆離散フーリエ変換を次のように定義する。周波数のインデックス  $k$  は実際の周波数にすると  $k\Delta f$  に対応する。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (5.3)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (5.4)$$

これを用いると RMS は次のようにパワースペクトルに分解できる。RMS の 2 乗のことをパワーという。

$$\begin{aligned}
 \text{RMS}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left( \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \right)^* \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \\
 &= \frac{1}{N^2} |X[0]|^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} |X[k]|^2 + \frac{1}{N^2} |X[N/2]|^2
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

最後の変形では  $X^*[N-k] = X[k]$  を用いた。ここで、次の量がパワースペクトルである：

$$\begin{cases} \frac{1}{N^2} |X[k]|^2 & (k = 0, \frac{N}{2}) \\ \frac{2}{N^2} |X[k]|^2 & (k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1) \end{cases} \tag{5.6}$$

パワースペクトルはパワーのうち、各周波数において周波数分解能  $\Delta f$  の中に含まれる成分を表す。窓関数を使った場合は、信号があまり特異的でないならば、信号のパワーは窓関数のパワー  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n] = \frac{3}{8}$  倍されると考えられるので、計算結果を  $\frac{8}{3}$  倍する必要がある。ここで、パワースペクトルは周波数分解能に依存する量である。そこでパワースペクトルを周波数分解能で割り、単位周波数幅あたりのパワーにすることで測定方法によらない量になる。これをパワースペクトル密度という。パワースペクトル密度のルートをとったものが振幅スペクトル密度である。また、サンプリング定理より実際に測定できるのは  $0 \leq k < \frac{N}{2}$  である。

次に統計的処理と窓関数処理の補正について説明する。 $NM$  点のデータを測定し、図 5.2 のようにデータを長さ  $N$  の  $2M-1$  個のセグメントに分割する。窓関数をかけると各セグメントの両端の情報が薄められてしまうため、これを復活させるために各セグメントを半分ずつオーバーラップさせている。そして各セグメントで振幅スペクトル密度を計算した後、外れ値の影響を小さくするため平均値ではなく中央値を最終的な結果とする。ただし、実際の測定では平均値と中央値はほぼ同じ結果になった。また、 $N = 2^{15}$ ,  $M = 50$  とした。

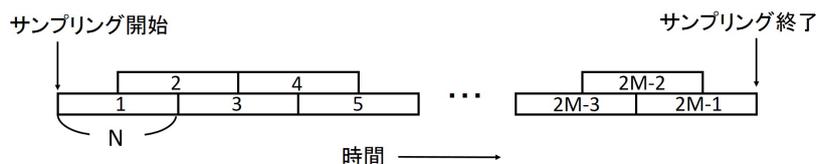


図 5.2: オーバーラッピング

最後に、作成したプログラムの確認と、窓関数の効果の確認のために、窓関数を使った場合と書けない場合についてそれぞれ実際の測定値と MATLAB の計算値を比較する。入力はいずれもノイズのない振幅 1 の 10Hz である。

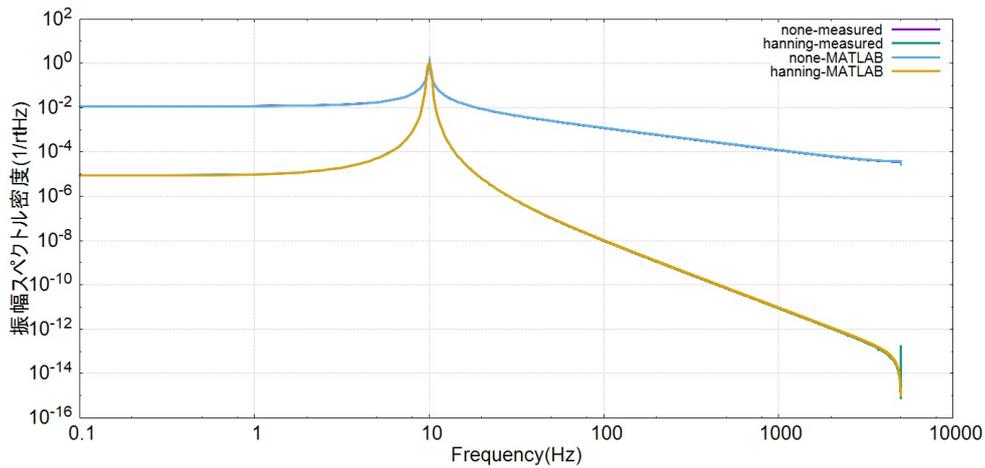


図 5.3: 作成したプログラムの測定値と MATLAB の計算値の比較。完全に一致している。どちらも  $N = 2^{15}$  である。また、窓関数をかけると漏れ誤差（ピークの大きさが真の値より小さくなりその分周辺の高さが高くなること）がかなり抑えられることが分かる。

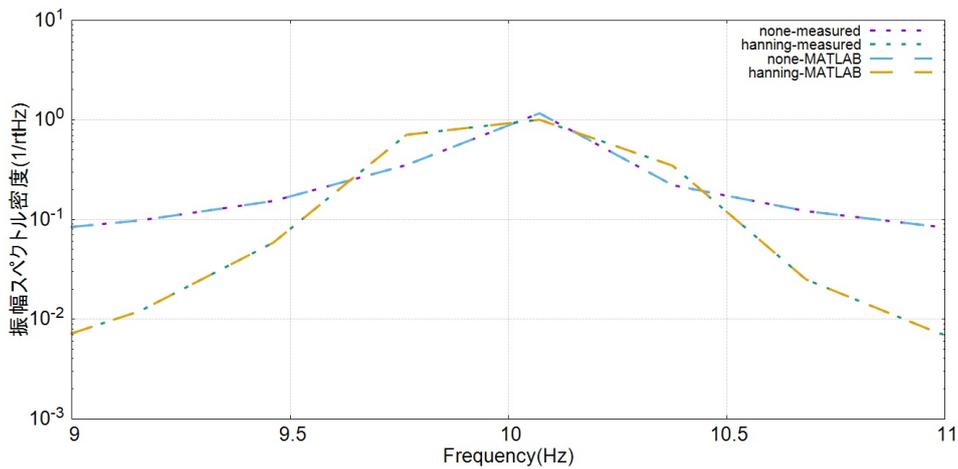


図 5.4: 図 5.3 の拡大図。hanning 窓をかけると周波数分解能が 2 倍悪くなる。周波数分解能は窓関数をかけない場合が最も良くなることが知られている。

## 5.2 伝達関数の測定

伝達関数の測定方法は、ある系にサイン波のシグナルを入力し、測定したい 2 点でそれぞれ離散フーリエ変換をしてシグナルの周波数における振幅スペクトルの絶対値と位相を求め、2 点で比較することにより求める。ここでノイズスペクトルの測定との違いとして、ノイズの場合はスペクトルが不明のためサンプリングデータの最初と最後を滑らかにつなげるために窓関数をかける必要があるが、伝達関数の測定の場合は入力データのうちシグナルの周波数の成分がほとんどであるため、この周波数の周期の整数倍の長さのサンプリングを行うことにより窓関数をかけなくても漏れ誤差をかなり抑えることができる。これをコヒーレントサンプリングという。伝達関数の測定精度を上げるためにはサンプリングデータ長  $N$  を長くすることで周波数分解能を良くすることと平均回数を増やすことが考えられるが、これらを不必要に行うと測定時間が長くなってしまふ。そこでコヒーレントサンプリングにより SN を上げることで測定の効率を良くする。

テストのためアナログ回路のローパスフィルターの伝達関数を、作成したプログラムを用いて測定すると図 5.5 のようになった。シグナルの振幅は 5V で、SR560 でポール 3kHz の 2 次のローパスフィルターをかけ、Anti-Imaging をした。Anti-Aliasing は行わなかった。

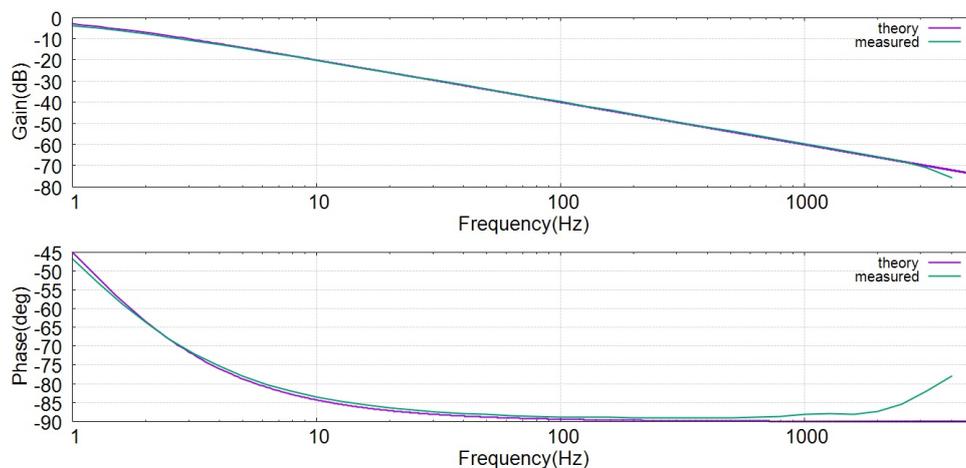


図 5.5: ポール 1Hz のローパスフィルターの測定値と理論値。  $f_s=10\text{kHz}$ 。

理論上は  $\frac{f_s}{2}$  までとれるはずであるが実際にとれる範囲はもう少し狭い。研究室にあるスペクトラムアナライザのメーカーである小野測器ではホームページ [3] によると  $\frac{f_s}{2.56}$  までとしている。図 5.5 を見ると測定可能範囲はだいたいこれと同程度であることがわかる。

# 第6章 実験

## 6.1 実験機器

実験に使用した主な機器を示す。

### 1. デジタルシステム

- AD 16-64(LPCI)LA  
ADC(アナログデジタルコンバーター)。RTC-6000のPCIバスに差し込まれている。入力された電圧-10V~+10Vを16bit符号なし整数(0~65535)に変換する。16CHまで入力できる。
- DA 16-8(LPCI)L  
DAC(デジタルアナログコンバーター)。RTC-6000のPCIバスに差し込まれている。RTC-6000の出力データである16bit符号なし整数を電圧-10V~+10Vに変換する。8CHまで出力できる。
- RTC-6000  
0.1msecおきにプログラムを実行できるリアルタイムコントローラ。C#で作製したプログラムをここにダウンロードする。ADCからの入力データを倍精度浮動小数点数に変換してからフィルタ計算を行い、結果を16bit符号なし整数に変換してからDACへデータを渡す。フィルタ係数値はプログラムを実行中でも変更できる。
- ATP-32F  
入力信号を入れるBNC端子台。
- ADC-68M/96F  
ATP-32FとAD 16-64(LPCI)LAをつなぐシールドケーブル。
- PCA-50PS  
DA 16-8(LPCI)Lと出力BNC端子台をつなぐシールドケーブル。

### 2. 光学素子

- レーザー  
HeNeレーザーで、波長は633nm、最大出力は4mW。
- サスペンション付きミラー  
ミラーは直径6mm、重さは0.2g、サスペンションの共振周波数はおよそ16Hz。

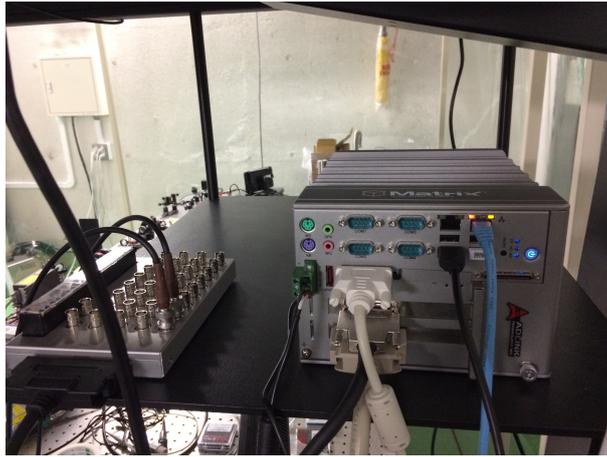


図 6.1: RTC-6000 と ATP-32F

## 6.2 コンピュータ処理による位相の遅れの測定

デジタル制御での大きな問題になると考えられるため、コンピュータ処理による位相遅れを測定する。アナログの 1kHz を ADC に入力し、そのまま DAC から出力する。すると位相遅れは図 6.2 のように  $65\mu\text{s}$  になった。IIR を入れた場合でもフィルタ次数が低いいため位相遅れはほとんど変わらなかった。

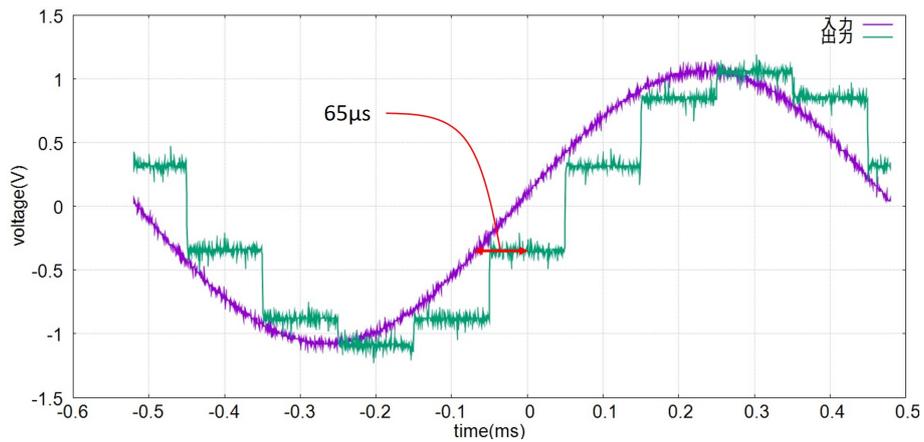


図 6.2: 位相遅れの測定

よって位相進み補償フィルタを入れない場合のオープンループゲインは図 3.7 ではなく図 6.3 になる。つまりデジタル制御の場合はアナログ制御と比べると位相余裕やゲイン余裕が小さくなってしまう。

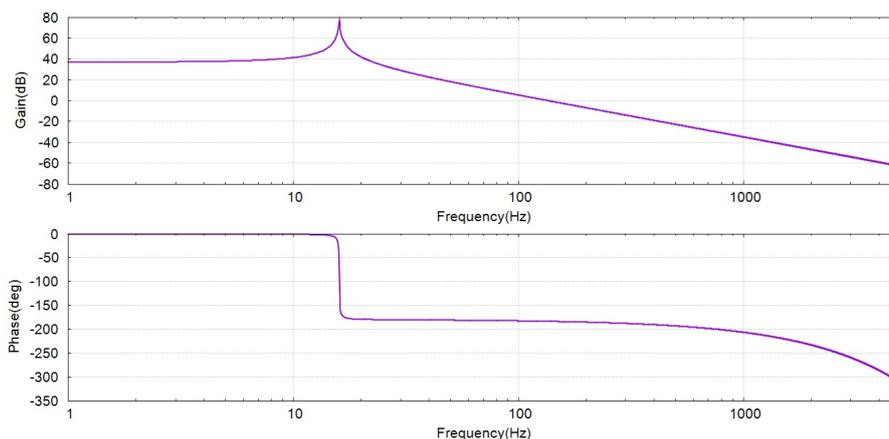


図 6.3: デジタル制御の場合のオープンループゲイン

なお、図 6.2 のように、DAC の出力にはおよそ 20MHz、振幅 100mV のノイズが見られた。そこで以降は DAC の直後にポール 50kHz のアナログのローパスフィルタを入れる。

### 6.3 マイケルソン干渉計の制御と感度の測定

マイケルソン干渉計をアナログとデジタルで制御をし、感度を測定する。正確に測定するためにはエラー信号が線形になる領域、つまりミッドFRINGE付近に常に固定しなければならないため、低周波である程度高いゲインが必要である。アナログ制御の場合は位相進み補償回路を  $f_z=192[\text{Hz}], f_p=2122[\text{Hz}]$  としてユニティゲイン周波数を 500Hz 付近にし、低周波のゲインを 50dB 程度にする。デジタル制御の場合はユニティゲイン周波数を上げすぎると位相余裕やゲイン余裕が小さくなってしまい不安定になる可能性があるため、位相進み補償フィルタを  $f_z=100[\text{Hz}], f_p=1000[\text{Hz}]$  としてユニティゲイン周波数を 250Hz 付近にすることで十分安定になるようにした。このとき低周波のゲインが 40dB 程度になってしまうが、測定中常におおよそミッドFRINGE付近に固定されていることを確認した。

マイケルソン干渉計のオープンループゲインの測定方法を説明する。まずアナログ制御の場合は図 6.4 のように行う。ループの途中にアナログの加算回路を入れ、PC から出力したシグナル  $s$  を足し算する。シグナルには SR560 でポール 1kHz の 2 次のローパスフィルタにより Anti-Imaging を行う。この  $s$  と加算回路の直前  $B$  を PC でサンプリングし、 $\frac{B}{s} = \frac{-GH}{1+GH}$  を計算する。これをクローズドループゲインという。これからオープンループゲイン  $GH$  を計算する。ここで、2ch サンプリングする場合はそれぞれ同時にはサンプリングできず  $10\mu\text{s}$  ずれてしまうため、この分の補正をした。デジタル制御の場合は図 6.5 のように加算回路も PC 内に入れる。

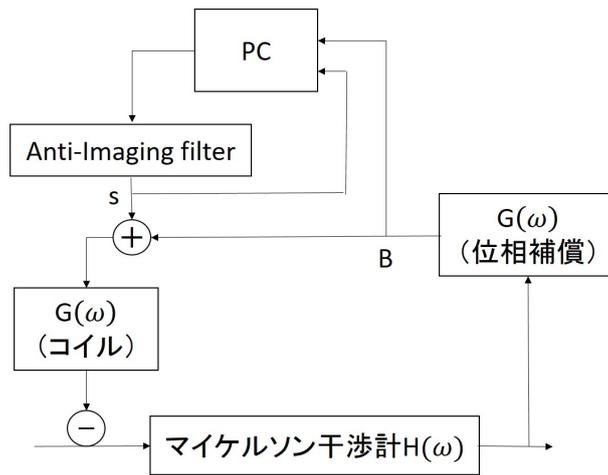


図 6.4: アナログ制御の場合のオープンループゲインの測定

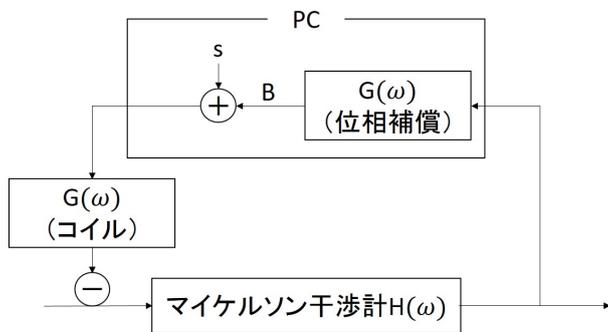


図 6.5: デジタル制御の場合のオープンループゲインの測定

オープンループゲインの測定値と理論値の比較を図 6.6,6.7 に示す。

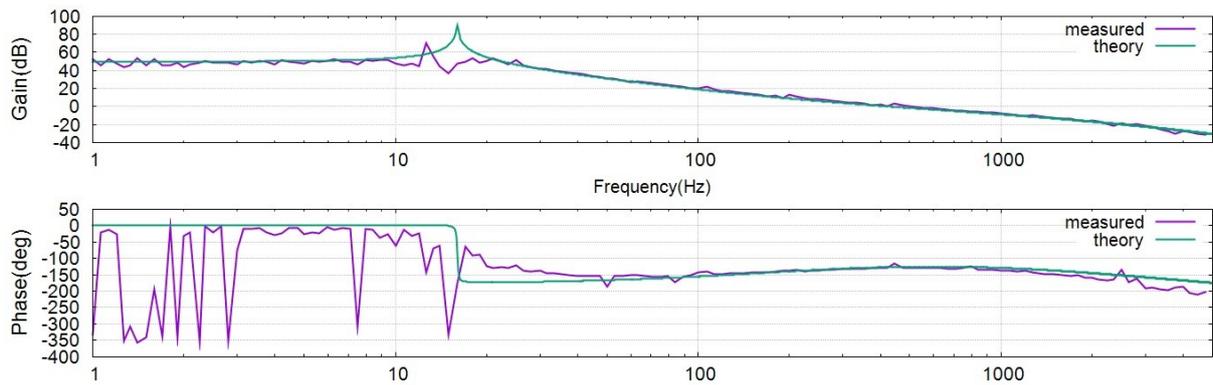


図 6.6: アナログ制御のオープンループゲイン

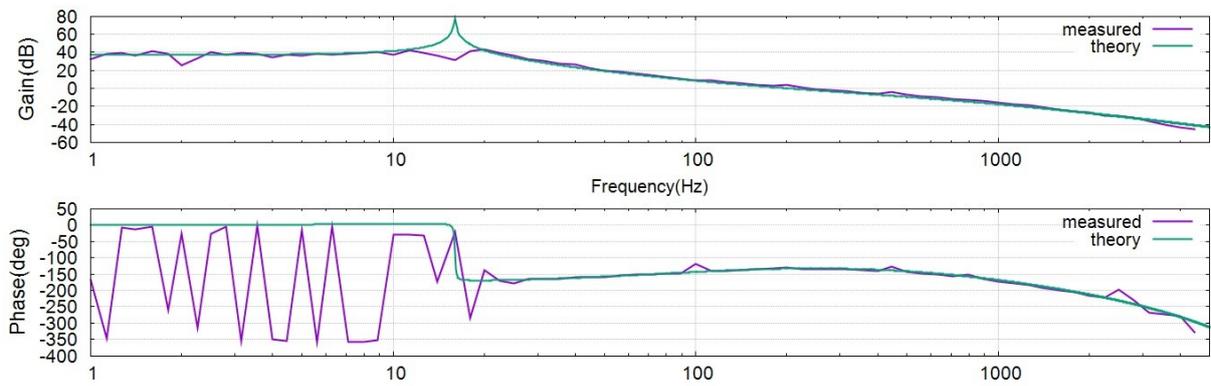


図 6.7: デジタル制御のオープンループゲイン

ほぼ予想通りになった。サスペンションの共振周波数のピークが見えていない原因はこの領域のノイズが大きいためである。

マイケルソン干渉計の出力を FFT すると図 6.8 のようになった。

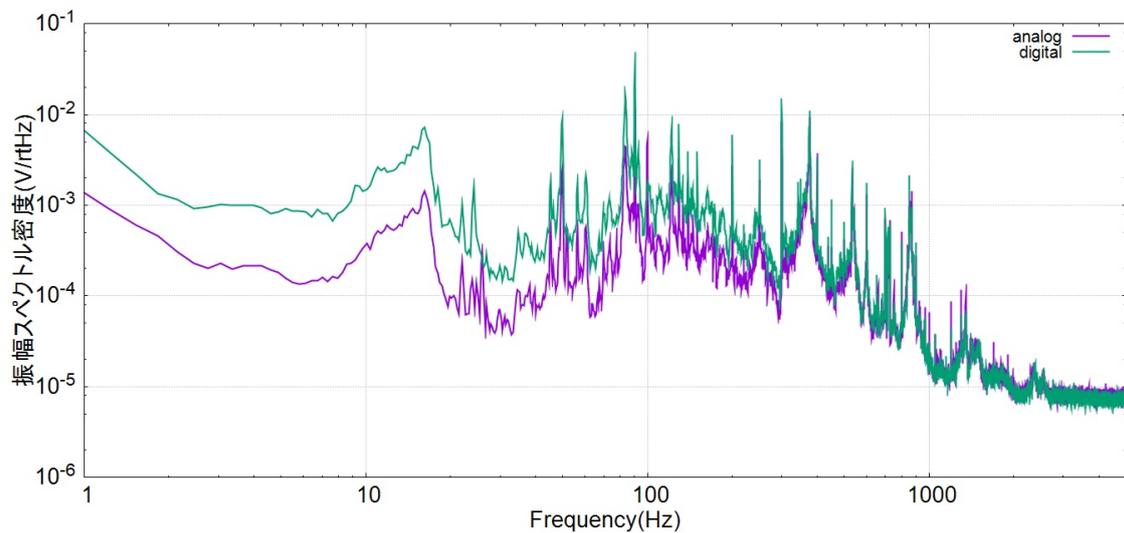


図 6.8: マイケルソン干渉計の出力のスペクトル

16Hz のピークがサスペンションの共振周波数で、50Hz の倍数のピークは電源が由来である。他にはミラーマウントやペDESTALなどの共振のピークもあると考えられる。

図 6.8 はノイズが  $\frac{1}{1+GH}$  倍されたものであるから、それに  $1+GH$  (理論値) をかけ、さらに電圧 [V] からミラーの変位 [m] に変換することでノイズスペクトル、すなわち感度を求めることができる。結果は図 6.9 のようになり、デジタル制御がアナログ制御に劣っていないことがわかる。

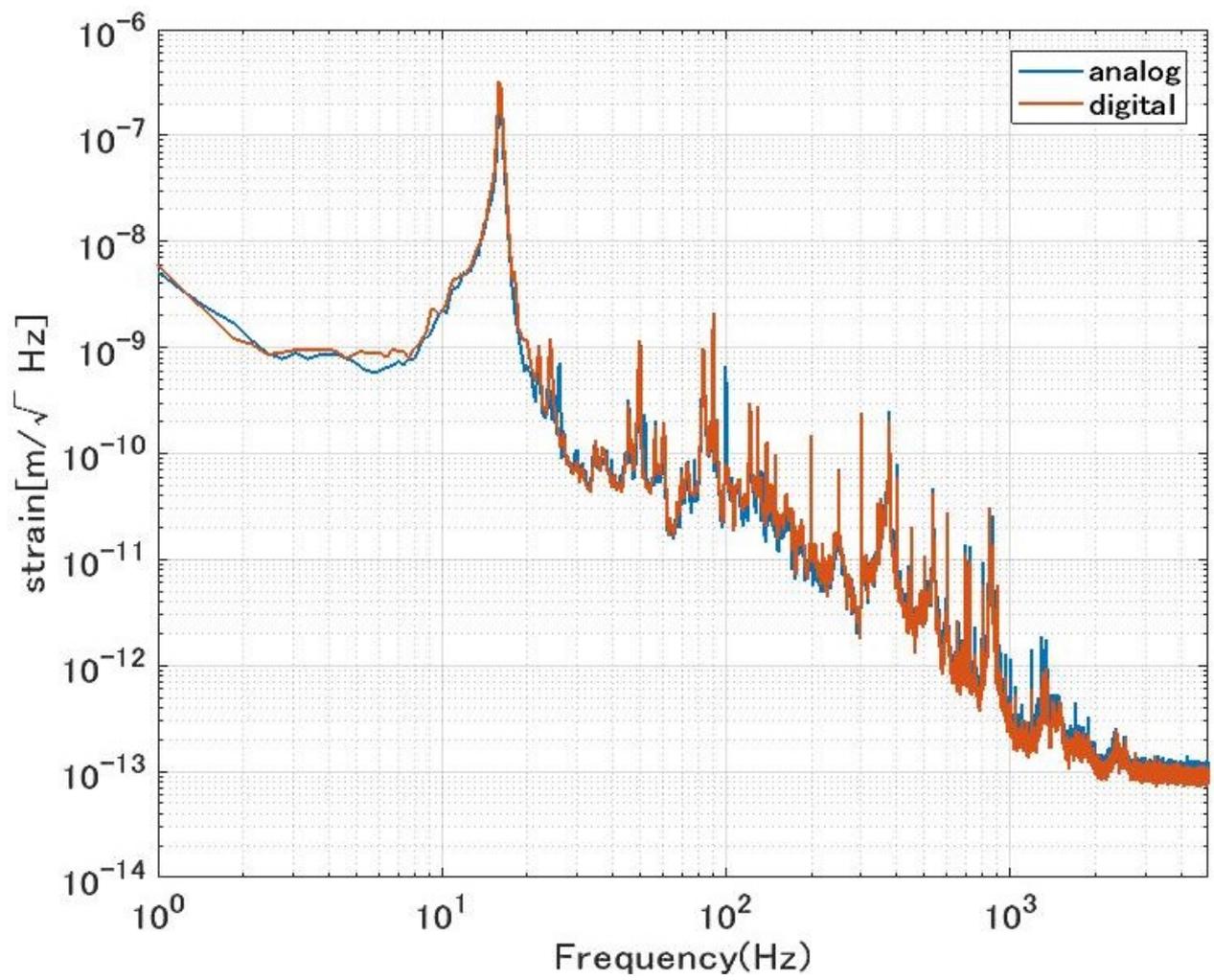


図 6.9: アナログ制御とデジタル制御の感度の比較

## 第7章 結論と今後の課題

結論としては、今回の場合はデジタル処理によるノイズよりも地面振動などのノイズの方が大きく、IIR フィルターを用いたデジタル制御でもアナログ制御と同等の感度を実現できた。ただしデジタル制御ではコンピュータ処理による遅延のためアナログ制御よりもゲインが小さくなってしまふことは避けられない。

今後の課題は2つある。1つ目は伝達関数測定プログラムを改良し、周波数分解能を変更できるようにすることである。現状ではサスペンションの共振周波数のピークが見えていないが、周波数分解能を上げることにより見えるようになる可能性がある。

今後の課題の2つ目は非線形フィルターの作成である。IIR は  $sz$  変換によりアナログ回路を再現できるだけでデジタル特有とは言えない。FIR はアナログ回路には存在しないデジタル特有のものであるが位相遅れが大きくあまり役に立たない。そこで線形フィルターでは作成できないものを非線形フィルターで作成したいと考えた。非線形フィルターの作成方法の1つにニューラルネットワークがある。入力信号と教師信号(目標信号)をオフラインで用意をし、ニューラルネットワークに機械学習させて各重みづけを変化させるというものである。通常の位相進み補償フィルターよりも位相進みの大きい位相進み補償フィルターや、通常のローパスフィルターよりも位相遅れの小さいローパスフィルターはオフラインならば線形フィルターでも作成可能であるため、入力信号にこのフィルターをかけたものを教師信号として機械学習させることで、このフィルターの特性を学習し、オンラインで再現できるように重みづけが行われる。ところが実際にこれを行ったところあまり精度が良ならず、改善するにはニューロンの数を増やしたり層の数を増やしたりする必要があるが、計算量が膨大になってしまい、オンラインで実行すると遅延が非常に大きくなってしまった。よって今後は少ないニューロンで精度の良いフィルターを作成することや、非線形フィルターの新たな作成方法を試すことが必要である。

# 謝辞

この卒業論文は多くの方の支えにより完成しました。ここにお礼申し上げます。

指導教官の宗宮先生にはデジタル制御という面白い研究テーマや、研究を進めていくにあたり様々な助言を頂きました。1年間のご指導ありがとうございました。プログラミングには疎かった私ですがこの1年間で少し慣れることができました。

研究室の皆様にもお世話になりました。修士課程の粕谷さん、柳沼さん、草柳さん、久富さんにはゼミや輪講で様々なことを教えていただき、コロキウムの発表練習でもアドバイスを頂きました。そして普段の生活でもたくさん助けていただきました。同期の小田部君とは一緒に様々な実験をして議論をし、ともに理解を深めていくことができました。

また、実験に用いたプログラムは下井さんが作成されたプログラムが元になっています。

他にも多くの方のご協力がありました。皆様本当にお世話になりました。ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] 久富正博「光ばね実験における懸架系の開発及びその性能評価」(2016年度卒業論文)
- [2] 下井建生「マイケルソン干渉計の制御とデジタルシステムの導入」(2016年度卒業論文)
- [3] 小野測器 HP [https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/c\\_support/faq/fft\\_common/fft\\_analys\\_1.htm](https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/c_support/faq/fft_common/fft_analys_1.htm)
- [4] 東京電機大学出版局「MATLABによるデジタル信号とシステム」足立修一著(2002)