

卒業論文  
温度勾配のある電気回路の熱雑音の測定

東京工業大学 理学院物理学系 宗宮研究室  
16B05751 栗林 誠

2020年2月13日



# 要旨

Einstein が一般相対性理論 [1] から重力波の存在を予言してからおよそ 100 年後、2015 年にアメリカの重力波検出器 Advanced LIGO がその直接検出 [2] に成功した。重力波は質量起源であることから従来の電磁波観測では得られなかった情報を持つため、その観測は非常に重要である。また、検出される重力波は非常に小さいため、重力波検出器の感度を向上させる研究が求められている。特に、重力波検出器の感度は熱雑音によって制限されると言われており、検出器の熱雑音を研究することは非常に重要である。

現在、干渉計型重力波検出器は地面振動などを低減させるために干渉鏡を懸架している。その懸架システム内にマクロな温度勾配が生じており、その温度勾配由来の熱雑音の理論はいまだに不明である。またその測定は微小な体積増減や振動を扱うため困難である。したがって、本研究では測定が比較的簡単な電気回路での熱雑音を測定した。実験では、電気回路内に温度勾配を作り、増幅回路を用いて熱雑音を増幅させ、温度勾配由来の熱雑音の測定を行った。



# 目次

要旨	2
第 1 章 重力波	5
1.1 弱重力場における Einstein 方程式	5
1.2 重力波の解	6
第 2 章 干渉計型重力波検出器	7
2.1 基本原理	7
2.2 主な雑音源	8
2.2.1 地面振動雑音	8
2.2.2 量子雑音	8
2.2.3 熱雑音	9
第 3 章 重力波検出器 KAGRA	10
3.1 KAGRA の構成とターゲットソース。[4] より	10
3.2 重力波検出器の感度	11
3.3 干渉計型重力波検出器の熱雑音研究の課題	12
第 4 章 電気回路における熱雑音	13
4.1 増幅回路	13
4.1.1 製作した増幅回路の回路図	13
4.1.2 製作した増幅回路の増幅率	14
4.2 ジョンソンノイズ	15
4.3 温度勾配のある電気回路の熱雑音	18
4.3.1 温度勾配のある電気回路の熱雑音の理論式	18
4.3.2 温度勾配のある電気回路の熱雑音の測定	21
第 5 章 結論と今後の課題	25
参考文献	26
謝辞	27

# 第 1 章

## 重力波

重力波は Einstein 方程式を弱重力場の場合に線形近似することで導かれる。この章では Einstein 方程式を線形化し、重力波を導出する。

### 1.1 弱重力場における Einstein 方程式

一般相対性理論において、4次元時空の2点  $x^\nu$  と  $x^\nu + dx^\nu$  の線素  $ds$  は、

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

と表される。これ以降 Einstein の縮約記法を用いる。 $g_{\mu\nu}$  は計量テンソルである。重力が存在しない平坦な時空は Minkowski 時空と呼ばれ、そのときの計量テンソルは、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \quad (1.2)$$

と書かれる。一方、重力のある時空では計量テンソルは以下の Einstein 方程式に従う。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

$c$  は光速、 $G$  は万有引力定数、 $R_{\mu\nu}$  は Ricci テンソル、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである。Ricci テンソルは次のように定義される。

$$R_{\mu\nu} := R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (1.4)$$

$$R^\mu{}_{\gamma\alpha\beta} := \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\alpha,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\gamma\beta} - \Gamma^\mu{}_{\nu\beta}\Gamma^\nu{}_{\gamma\alpha} \quad (1.5)$$

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (1.6)$$

$R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$  は Riemann 曲率テンソル、 $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$  は Christoffel 記号である。

重力が弱い場合を考える。このとき計量テンソルは次のようにかける。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (1.7)$$

Einstein 方程式をこの  $h$  の1次までで展開することを考える。これを用いて、Christoffel 記号、Riemann 曲率テンソル、Ricci テンソルを順々に求める。

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\gamma\mu}(h_{\mu\beta,\alpha} + h_{\mu\alpha,\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}) \quad (1.8)$$

$$R^\gamma{}_{\alpha\nu\beta} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\gamma\mu}(h_{\mu\beta,\alpha\nu} + h_{\alpha\nu,\mu\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) \quad (1.9)$$

$$R_{\alpha\beta} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\nu\mu}(h_{\mu\beta,\alpha\nu} + h_{\alpha\nu,\mu\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) \quad (1.10)$$

これより Einstein 方程式 (1,3) は次のようにかける。

$$h^\mu{}_{\beta,\alpha\mu} + h^\mu{}_{\alpha,\beta\mu} - \square h_{\alpha\beta} - h_{,\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} (h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \square h) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (1.11)$$

ここで、

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad (1.13)$$

とした。また、次の表記を用いる。

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.14)$$

これより、式 (1,11) は次のようになる。

$$\tilde{h}^\mu{}_{\beta,\alpha\mu} + \tilde{h}^\mu{}_{\alpha,\beta\mu} - \square \tilde{h}_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \tilde{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (1.15)$$

微小な座標変換を行うことで Lorenz ゲージ条件

$$\tilde{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \quad (1.16)$$

を満たす座標系に移ることができることが知られている [5]。よって、Lorenz ゲージ条件を課すことにすると、式 (1,15) は次のようになる。

$$-\square \tilde{h}_{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (1.17)$$

## 1.2 重力波の解

前節では弱い重力場を仮定して Einstein 方程式を  $h$  の 1 次までで展開した。重力波の伝播を考えるために、式 (1,17) を真空中 ( $T_{\alpha\beta} = 0$ ) で考えることにする。

$$\square \tilde{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.18)$$

Lorenz ゲージ条件を満たしたまま以下のトランスバース・トレースレスゲージ条件を満たすような座標を採用できる [6]。

$$h_{0\alpha} = 0 \quad (1.19)$$

$$h^j_k = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial h^{jk}}{\partial x^j} = 0 \quad (1.21)$$

トランスバース・トレースレスゲージでは  $\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0$  より、 $h_{\alpha\beta} = \tilde{h}_{\alpha\beta}$  である。 $x^\mu = [ct, x, y, z]$  とおき、重力波  $h_{\alpha\beta}$  が  $+z$  方向に伝搬するとすると、式 (1.18) の解  $h_{\alpha\beta}$  は 2 つの関数  $h_+(t)$  と  $h_\times(t)$  を用いて次のようにかける。

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ \left(t - \frac{z}{c}\right) & h_\times \left(t - \frac{z}{c}\right) & 0 \\ 0 & h_\times \left(t - \frac{z}{c}\right) & -h_+ \left(t - \frac{z}{c}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h_+(t)$ 、 $h_\times(t)$  はそれぞれプラスモード、クロスモードと呼ばれる。

## 第 2 章

# 干渉計型重力波検出器

干渉計型重力波検出器は、レーザー光を光源とする干渉計を構成する。干渉計に重力波が到来すると干渉鏡の位置が変化する。その干渉鏡の位置の変化による干渉の変化を測定することで重力波を検出する。この章では、干渉計型重力波検出器の基本原理、主な雑音源について述べる。

### 2.1 基本原理

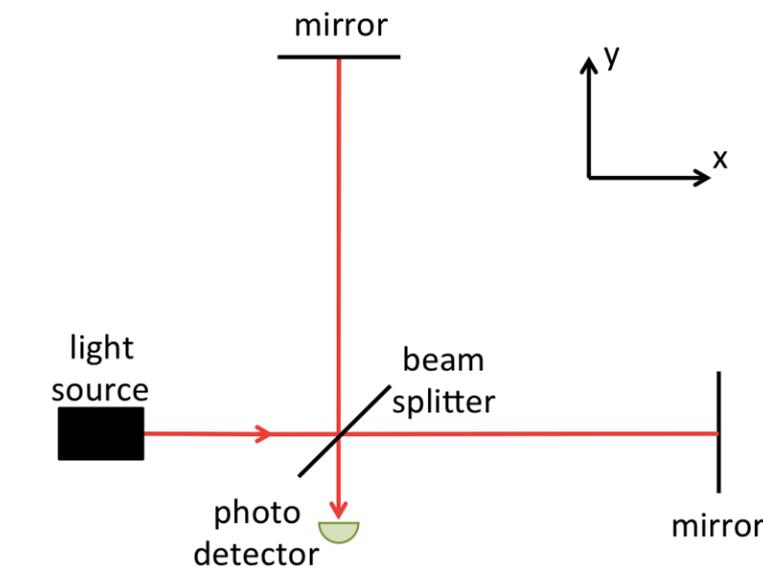


図 2.1 マイケルソン干渉計の模式図。[3] より。

図 3.1 のようなマイケルソン干渉計に  $z$  方向からプラスモードの重力波  $h(t)$  が到来する場合を考える。 $x$  方向に運動する光子の測地線は、光の伝搬がヌルベクトルであるから次のように計算できる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \{1 + h(t)\} dx^2 = 0 \quad (2.1)$$

これより  $dx$  は次のようになる。

$$dx = \frac{c}{\sqrt{1 + h(t)}} dt \quad (2.2)$$

$$\simeq c \left( 1 - \frac{1}{2} h(t) \right) dt \quad (2.3)$$

$x$  方向の鏡に反射してを往復するのにかかる時間を  $t_x$  とすると以下の式が成り立つ。

$$2L_x = c \int_{t-t_x}^t \left(1 - \frac{1}{2}h(t')\right) dt' \quad (2.4)$$

$$t_x = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-t_x}^t h(t') dt' \quad (2.5)$$

$$\simeq \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.6)$$

最後の近似で、 $|h(t) \ll 1|$  より  $t_x \simeq \frac{2L_x}{c}$  であることを用いた。また、 $x$  方向、 $y$  方向の往復の位相変化  $\phi_x, \phi_y$  はそれぞれ次のようにかかる。

$$\phi_x = \omega_0 t_x \quad (2.7)$$

$$= \frac{2\omega_0 L_x}{c} + \frac{\omega_0}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.8)$$

$$\phi_y = \frac{2\omega_0 L_y}{c} - \frac{\omega_0}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.9)$$

ここで、 $x, y$  方向の位相差を  $\phi_- \equiv \phi_x - \phi_y$ 、 $x, y$  方向の基線の差を  $L_- \equiv L_x - L_y$  とすると次の式が成り立つ。

$$\phi_- = \frac{2\omega_0 L_-}{c} + \phi_{\text{GW}} \quad (2.10)$$

$$\phi_{\text{GW}} = \omega_0 \int_{t-\frac{2L_-}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.11)$$

式 (2.10) において、右辺の第一項はマイケルソン干渉計の腕の長さに由来し、右辺の第二項は重力波による腕の長さに由来する。つまり、 $\phi_{\text{GW}}$  が重力波に対するマイケルソン干渉計の応答である。

## 2.2 主な雑音源

干渉型重力波検出器の主な雑音源について述べる。

### 2.2.1 地面振動雑音

地面は常に微小に振動している。この振動が干渉計鏡の位置を動かすことで干渉計の光路長が変化し、雑音となる。地面振動雑音は周波数の 2 乗で減衰する。これより地面振動雑音は低周波領域で影響が大きくなることがわかる。この雑音を回避するために重力波検出器では鏡を振り子として懸架している。

### 2.2.2 量子雑音

干渉型重力波検出器ではレーザー光を用いるが、レーザー光の光子の量子性に起因する雑音を量子雑音という。量子雑音は散射雑音と輻射圧雑音に分けられる。

散射雑音は、光子数の変化が光検出の際に現れることで発生する雑音である。散射雑音は周波数に依存せず、重力波検出器の高周波領域で支配的である。

輻射圧雑音は、光が鏡に反射する際にその光が鏡に与える輻射圧が量子的に揺らぎ、鏡を揺らすことで発生する雑音である。輻射圧雑音は周波数の 2 乗で減衰する。これより地面振動雑音は低周波領域で影響が大きくなることがわかる。

### 2.2.3 熱雑音

熱雑音とは、鏡や懸架系が有限の温度を持っているために生じる熱的な雑音である。熱雑音には主にブラウニアン熱雑音、熱弾性雑音、サーモリフラクティブ雑音がある。

ブラウニアン熱雑音とは、熱浴とのランダムな熱のやり取りによって分子の運動エネルギーがランダムになり、変形をすることで生じる雑音である。

熱弾性雑音とは、熱浴とのランダムな熱のやり取りをした分子が周りの分子に仕事をしてできる温度分布が温度分布と熱膨張率が結合して生じる雑音である。

サーモリフラクティブ雑音とは、熱弾性雑音の場合と同様にしてできた温度分布と屈折率が結合して生じる雑音である。

## 第 3 章

# 重力波検出器 KAGRA

### 3.1 KAGRA の構成とターゲットソース。[4] より

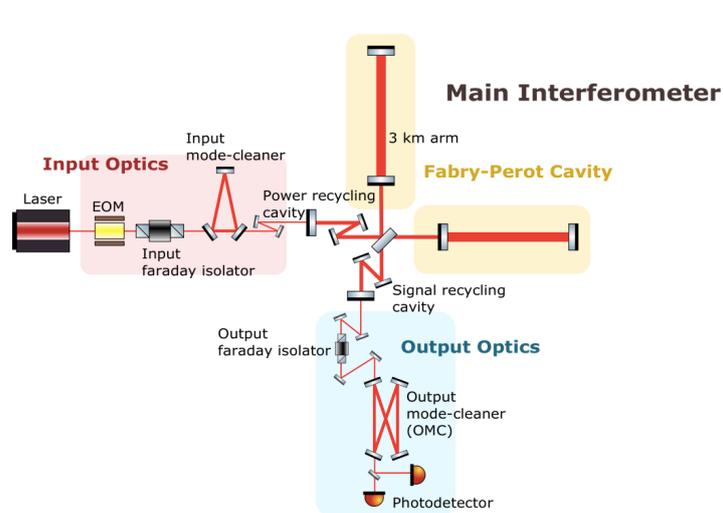


図 3.1 KAGRA の構成。[4] より。

KAGRA の構成を図 3.1 に示す。干渉計は 3 km の Fabry-Perot 共振器を両腕に持つ。入力ポートには入射ビーム感度をあげるパワーリサイクリングミラー、出力ポートには重力波信号を増やすシグナルリサイクリングミラーが設置されている。また、KAGRA は熱雑音低減のために鏡の冷却システムを採用しており、干渉鏡の材質として低温でも熱伝導率の大きく、ヤング率の大きいサファイアを使用している (図 3.2)。

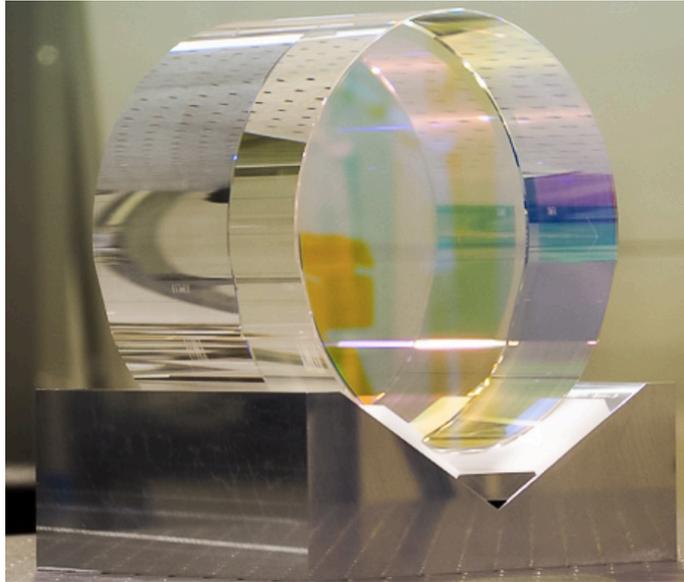


図 3.2 KAGRA のサファイア鏡。[8] より。

KAGRA のターゲットソースは中性子連星の合体から発生する重力波である。中性子星は、ブラックホールと異なりその内部を我々は観測できる。そのため、中性子連星の合体から発生する重力波を検出することは、天文学だけでなく重力場理論や原子核物理など様々な分野で新たな発見が期待されている。

### 3.2 重力波検出器の感度

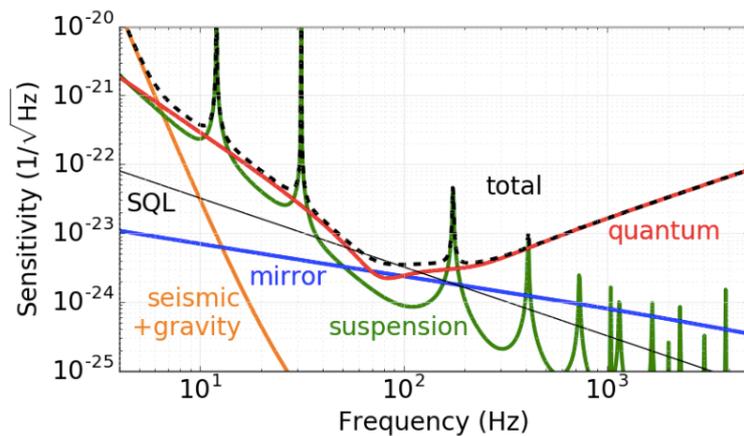


図 3.3 KAGRA の感度スペクトル。[8] より。

KAGRA の感度スペクトルを図 3.3 に示す。感度スペクトルとは、各周波数帯域における雑音スペクトルを足し合わせたものである。図 3.3 は、縦軸を各雑音のパワースペクトル、横軸を周波数としてプロットしている。雑音のパワースペクトルの値が小さいほど、その周波数帯域での感度が高いことを表す。

### 3.3 干渉計型重力波検出器の熱雑音研究の課題

前章で干渉計型重力波検出器の雑音として熱雑音を説明した。現在までに、マクロな温度勾配がない場合の熱雑音はよく研究されている。しかし、マクロな温度勾配がある場合の鏡の懸架系の熱雑音はいまだにわかっていない。

日本の重力波検出器 KAGRA は熱雑音を低減させるために鏡の冷却システムを採用している。鏡はレーザーにより温められるため、鏡を懸架している部分に温度勾配が生じている (図 3.4)。この温度勾配による熱雑音はまだわかっていない。

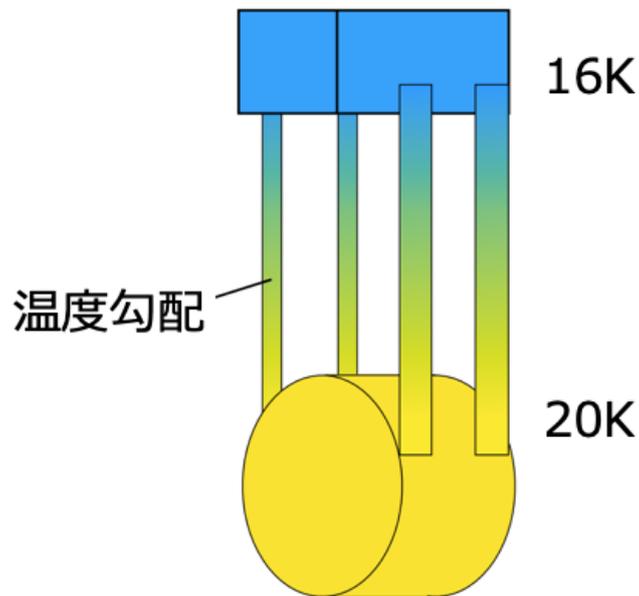


図 3.4 鏡を懸架している部分にできる温度勾配の模式図

## 第 4 章

# 電気回路における熱雑音

この章では本実験で製作した増幅回路、ジョンソンノイズ、温度勾配のある電気回路の熱雑音について述べる。

### 4.1 増幅回路

#### 4.1.1 製作した増幅回路の回路図

本実験では温度勾配のある電気回路の熱雑音を測定するために増幅回路を製作した。本実験で製作した増幅回路は [1] を参考にした。図 4.1 は製作した増幅回路の回路図である。

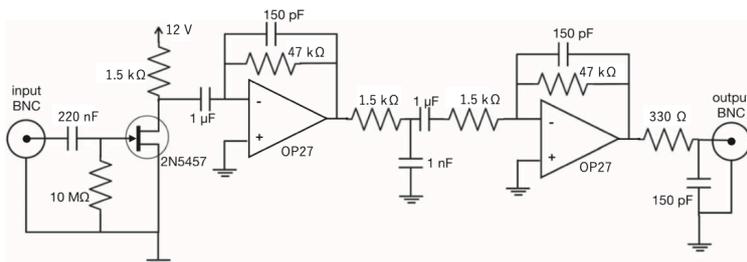


図 4.1 増幅回路の回路図。[9] より。

図 4.2 は製作した増幅回路である。

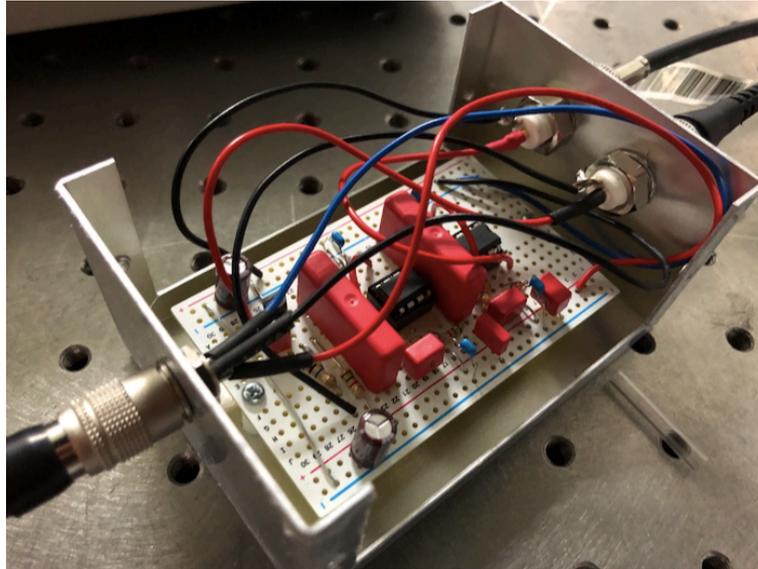


図 4.2 製作した増幅回路

#### 4.1.2 製作した増幅回路の増幅率

電子回路シミュレータソフト LTspice で増幅回路の増幅率のシミュレーションした結果を図 4.3 に示した。次に製作した増幅回路の増幅率を測定する。測定方法を以下に述べた。

製作した増幅回路の inputBNC にファンクションジェネレータ、outputBNC をオシロスコープに繋ぐ。ファンクションジェネレータから特定の周波数のサイン波を入れ、その周波数における出力の振幅をオシロスコープの画面から読み取る。その結果を図 4.4 に示した。出力の振幅をオシロスコープの画面から直接確認しているため、その誤差は  $\pm 0.1 V$  程度である。また図 4.5 は増幅率 ( $V_{out}/V_{in}$ ) のグラフである。

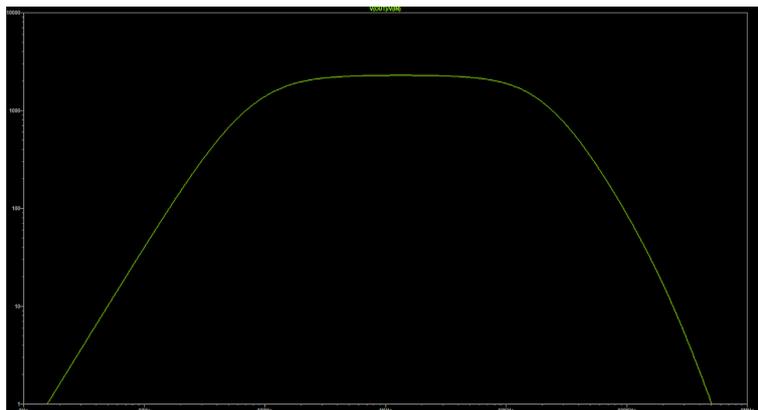


図 4.3 増幅回路の増幅率の周波数特性のシミュレーション値

周波数[Hz]	Vin[mV]	Vout[V]	Vout/Vin	周波数[Hz]2	Vin[mV]3	Vout[V]4	Vout/Vin5
10	50	2.6	52	7000	1	2.5	2500
20	25	5	200	8000	1	2.4	2400
30	5	2.2	440	9000	1	2.3	2300
40	5	3	600	10000	1	2.2	2200
50	2	1.8	900	15000	1	1.7	1700
60	2	2.2	1100	20000	2	2.5	1250
70	2	2.7	1350	25000	2	1.9	950
80	2	2.9	1450	30000	2	1.5	750
90	2	3.2	1600	35000	4	2.4	600
100	2	3.5	1750	40000	4	2	500
200	1	2.3	2300	45000	4	1.7	425
300	1	2.4	2400	50000	4	1.4	350
400	1	2.5	2500	55000	8	2.4	300
500	1	2.5	2500	60000	8	2.1	262.5
600	1	2.5	2500	65000	8	1.8	225
700	1	2.5	2500	70000	8	1.6	200
800	1	2.5	2500	75000	16	2.9	181.25
900	1	2.5	2500	80000	16	2.5	156.25
1000	1	2.5	2500	85000	16	2.2	137.5
2000	1	2.5	2500	90000	16	2	125
3000	1	2.5	2500	95000	16	1.8	112.5
4000	1	2.5	2500	100000	16	1.7	106.25
5000	1	2.5	2500	200000	32	0.6	18.75
6000	1	2.5	2500	300000	100	0.5	5

図 4.4 増幅回路の異なる周波数に対する出力電圧と増幅率の測定結果。V<sub>out</sub> の測定誤差は ±0.1。

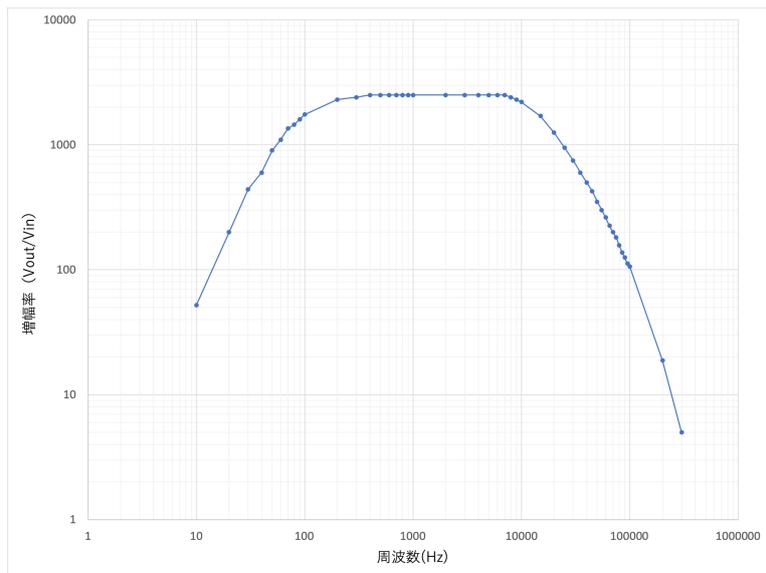


図 4.5 増幅回路の増幅率の周波数特性の測定結果

この測定結果から増幅回路が信号を増幅していることが確認できる。

## 4.2 ジョンソンノイズ

ジョンソンノイズとは抵抗体内の自由電子がブラウン運動することによって生じる雑音である。その雑音電圧  $V$  [V] は次のようにかかる。

$$V = \sqrt{4k_B T R \Delta f} \quad (4.1)$$

$k_B$  [J/K] はボルツマン定数、 $T$  [K] は導体の温度、 $R$  [ $\Omega$ ] は抵抗値、 $\Delta f$  [Hz] は帯域幅である。この式からわかるように、ジョンソンノイズはその振幅スペクトル密度  $[V/\sqrt{Hz}]$  が周波数に依らないためホワイトノイ

ズである。

本実験で製作した増幅回路が熱雑音を測定できるかを確認するためにジョンソンノイズを測定する。測定方法は、増幅回路の inputBNC に抵抗体を繋ぎ (図 4.6)、outputBNC を外部のローパスフィルタに繋ぎ (図 4.7)、その出力を ADC (アナログ-デジタルコンバーター) でデジタル信号に変えて (図 4.7)、FFT (高速フーリエ変換) をする。本実験におけるデジタル解析のサンプリング周波数は  $10^4$  Hz、サンプリング点数は 2097152 である。外部のローパスフィルタを通すのはアンチエイリアシングをするためである。外部のローパスフィルタの増幅率  $G_{\text{ローパス}}$  は、

$$G_{\text{ローパス}} = \left| \frac{1}{1 + if/3000} \right| \quad (4.2)$$

である。ただし、 $f$  [Hz] は周波数である。測定に用いた抵抗はカーボン被覆抵抗である。測定する抵抗値は、 $0 \Omega$  (BG:バックグラウンド)、 $330 \text{ k}\Omega$ 、 $1 \text{ M}\Omega$  である。測定結果を図 4.7 に示した。



図 4.6 ジョンソンノイズの測定に用いる抵抗。inputBNC へ繋ぐ。

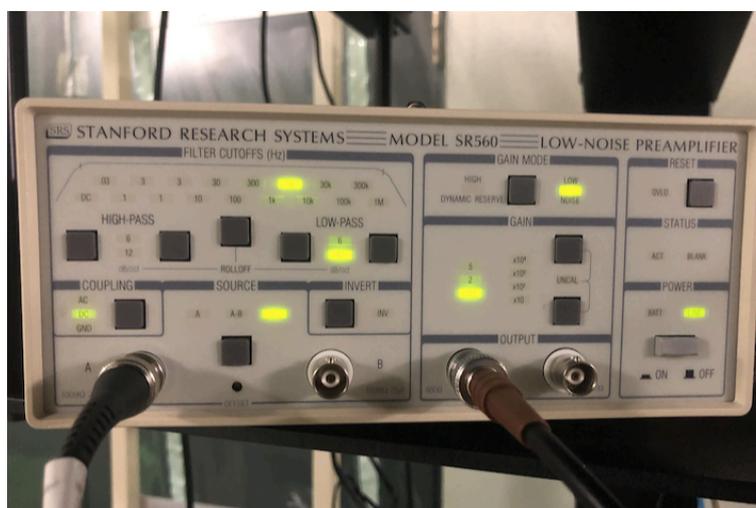


図 4.7 測定に用いるローパスフィルタ。増幅率は式 (4.1)。



図 4.8 測定に用いる ADC。回路の信号をデジタル信号にする。

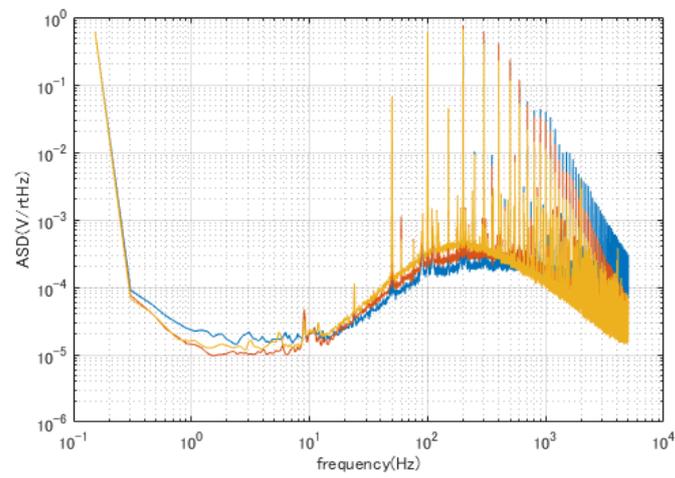


図 4.9 ジョンソンノイズ 測定実験の結果。縦軸は ASD(振幅スペクトル密度) $[V/\sqrt{Hz}]$ 、横軸は周波数  $[Hz]$ 。0  $\Omega$  (BG) (青)、330  $k\Omega$  (橙)、1  $M\Omega$  (黄)

図 4.8 の低周波帯 ( $< 10 Hz$ ) で ASD の値が大きいのは、ADC のノイズによるものである。  
表 4.2 は測定値の比較である。

	抵抗値	0 Ω (BG)	330k Ω	1M Ω
30 Hz	$ASD [10^{-4}V/\sqrt{Hz}]$	0.37	0.44	0.56
	$ASD^2 - ASD_{BG}^2 [10^{-8}V^2/Hz]$	-	0.057	0.18
70 Hz	$ASD [mV/\sqrt{Hz}]$	1.0	1.4	2.0
	$ASD^2 - ASD_{BG}^2 [mV^2/Hz]$	-	0.96	3.0
130 Hz	$ASD [mV/\sqrt{Hz}]$	1.5	2.2	3.3
	$ASD^2 - ASD_{BG}^2 [mV^2/Hz]$	-	2.6	8.6

表 4.2 測定値の比較

この表から  $ASD^2 - ASD_{BG}^2 [10^{-8}V^2/Hz]$  を 330k Ω と 1M Ω で比べると 30 Hz、70 Hz、130 Hz でそれぞれ、およそ 3.2 倍、3.1 倍、3.3 倍である。また、 $1M[\Omega]/330k[\Omega] \approx 3$  である。式 (4.1) からジョンソンノイズの雑音電圧の 2 乗  $V^2$  は抵抗値  $R$  に比例し、またジョンソンノイズはホワイトノイズであることからこれはジョンソンノイズであることがわかる。

## 4.3 温度勾配のある電気回路の熱雑音

### 4.3.1 温度勾配のある電気回路の熱雑音の理論式

温度勾配のある熱雑音の理論式はいまだにわかっていない。本研究では以下で述べるゼーベック効果による熱雑音を考えた。

導体内に温度勾配が生じると伝導電子は高温部から低温部へ熱拡散する。これはゼーベック効果と呼ばれる。2種の導体 A、B の接合部の温度が  $T_1 [K]$ 、 $T_2 [K]$  のときゼーベック効果で発生する電圧  $V [V]$  は次のようにかける。

$$V = \int_{T_2}^{T_1} (\alpha_A - \alpha_B) dT \quad (4.3)$$

$\alpha_A [V/K]$ 、 $\alpha_B [V/K]$  はそれぞれ導体 A、B の絶対ゼーベック係数である。

次にこのゼーベック効果による熱雑音を計算する。

空間が 1 次元の簡単な場合で考える。熱源との熱のやり取りを  $F(x, t)$ 、温度  $T$  からのずれを  $u(x, t)$  で表す。今回は  $0 < x < L$  の範囲で考える。 $u(x, t)$  は次の熱伝導方程式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (4.4)$$

ただし、

$$a^2 \equiv \frac{\kappa}{\rho S c} \quad (4.5)$$

であり、 $\kappa$  は熱伝導率、 $\rho$  は体積密度、 $S$  は断面積、 $c$  は比熱である。変数分離

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.6)$$

をして、方程式 (4.3) を解く。まず、斉次解について考える。つまり、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.7)$$

$$(4.8)$$

を解く。方程式 (4.6) に式 (4.5) を代入すると次のようになる。

$$X\dot{T} - a^2 \ddot{X}T = 0 \quad (4.9)$$

ここで、 $\dot{\phantom{x}}$  はそれぞれの関数の変数、つまり  $X(x)$  は  $x$ 、 $T(t)$  は  $t$  で一階微分したことを表しており、 $\ddot{\phantom{x}}$  はその二階微分を表している。式 (4.7) を変形して、

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{a^2 \ddot{X}}{X} \equiv -\lambda \quad (4.10)$$

を得る。 $\lambda$  は定数である。ここで次のような境界条件を与える。

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.11)$$

これに、式 (4.6) を代入すると、

$$\dot{X}(0)T(t) = \dot{X}(L)T(t) = 0 \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

となる。これが任意の  $t$  で成り立つ条件は、

$$\dot{X}(0) = \dot{X}(L) = 0 \quad (4.14)$$

である。まず、 $X(x)$  について解く。式 (4.8) より  $X(x)$  は次の方程式を満たす。

$$a^2 \ddot{X} + \lambda X = 0 \quad (4.15)$$

これを (i) $\lambda < 0$ 、(ii) $\lambda = 0$ 、(iii) $\lambda > 0$  で場合分けして解く。

(i) $\lambda < 0$  のとき方程式 (4.15) の解を次のように仮定する。

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \quad (4.16)$$

$$k \equiv \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} \quad (4.17)$$

$A$ 、 $B$  は定数である。ここで、式 (4.14) より、

$$\dot{X}(0) = k(A - B) = 0 \quad (4.18)$$

$$\dot{X}(L) = k(Ae^{kL} - Be^{-kL}) = 0 \quad (4.19)$$

を満たす。これより、

$$A = B = 0 \quad (4.20)$$

$$X = 0 \quad (4.21)$$

となり、 $\lambda < 0$  は不適。

(ii) $\lambda = 0$  のとき式 (4.15) 方程式

$$X(x) = Ax + B \quad (4.22)$$

$A$ 、 $B$  は定数である。これは境界条件 (4.14) を満たさない。

(iii) $\lambda > 0$  のとき方程式 (4.15) の解を次のように仮定する。

$$X(x) = A \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) \quad (4.23)$$

$A$ 、 $B$  は定数係数である。ここで、式 (4.14) より、

$$\dot{X}(0) = \frac{\sqrt{\lambda}}{a}B = 0 \quad (4.24)$$

$$\dot{X}(L) = \frac{\sqrt{\lambda}}{a}\left(-A \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}L\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}L\right)\right) = 0 \quad (4.25)$$

を満たす。これらより、 $B = 0$  で  $A \neq 0$ 、 $\frac{\sqrt{\lambda}}{a}L = n\pi$  のとき  $X(x)$  は意味のある解を持つ。ただし、 $n$  は自然数である。このとき  $X(x)$  は次のようになる。

$$X(x) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4.26)$$

次に  $T(t)$  について解く。式 (4.8) より  $T(t)$  は次の式を満たす。

$$\dot{T} = -\lambda T = -\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}T \quad (4.27)$$

これを解くと、

$$T(t) = T_0 \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t\right) \quad (4.28)$$

となる。よって、斉次解は、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t\right) \quad (4.29)$$

$$u_n \equiv AT_0 \quad (4.30)$$

となる。

次に非斉次解を求める。式 (4.27) の  $u_n$  は非斉次解を満たすよう選ぶ。 $F(x, t)$  を  $x$  についてフーリエ級数展開をすると次のようになる。

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( F_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + F'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \quad (4.31)$$

ただし、

$$F_n(t) = \frac{1}{L} \int_0^L F(x, t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (4.32)$$

$$F'_n(t) = \frac{1}{L} \int_0^L F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (4.33)$$

である。続いて、 $t$  に関してフーリエ変換すると次のようになる。

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{F}_n(\omega) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \tilde{F}'_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.34)$$

これより、 $F_n$  の自己相関関数は次のようになる [12]-[16]。

$$\langle F_n(\omega) F_m^*(\omega') \rangle = \frac{2k_B T^2 \kappa}{(\rho S c)^2 L} 2\pi \delta(\omega - \omega') \delta_{nm} \quad (4.35)$$

ここで、 $u_n$  と  $F_n$  は次の関係を満たす [12]-[16]。

$$u_n(\omega) = \frac{F_n(\omega)}{n^2\pi^2 a^2 / L^2 + i\omega} \quad (4.36)$$

式 (4.34) と式 (4.35) より、 $u_n$  の自己相関関数は次のようになる。

$$\langle u_n(\omega) u_m^*(\omega') \rangle = \frac{2k_B T^2 \kappa}{(\rho S c)^2 L} 2\pi \frac{1}{n^2\pi^2 a^2 / L^2 + i\omega} \frac{1}{m^2\pi^2 a^2 / L^2 - i\omega'} \delta(\omega - \omega') \delta_{nm} \quad (4.37)$$

よって、このパワースペクトル  $Su$  を求めると次のようになる。

$$Su(\omega) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u_n(\omega) u_m^*(\omega') \rangle \frac{d\omega'}{2\pi} \quad (4.38)$$

$$= \sum_n \frac{2k_B T^2 \kappa}{(\rho S c)^2 L} \frac{1}{(n^2\pi^2 a^2 / L^2)^2 + \omega^2} \quad (4.39)$$

これを解くと、次のようになる。

$$Su(\omega) = \frac{2k_B T^2 \kappa}{(\rho S c)^2 L} \frac{(-1)^{\frac{1}{4}} \pi \beta \cot\left((-1)^{\frac{1}{4}} \pi \beta\right) + (-1)^{\frac{3}{4}} \pi \beta \cot\left((-1)^{\frac{3}{4}} \pi \beta\right) - 2}{4\beta^2} \quad (4.40)$$

$$\beta \equiv \frac{L\sqrt{\omega}}{\pi a} \quad (4.41)$$

ここで、低周波 ( $|\beta| \ll 1$ ) で近似すると次のようになる。

$$Su(\omega) = \frac{k_B T^2 \kappa}{(\rho S c)^2 L \omega^2} \frac{\pi - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad (4.42)$$

ここで式 (4.3) において、単一の導体かつその絶対ゼーベック係数  $\alpha$  の値が温度  $T_1$  から温度  $T_2$  の間でほとんど変わらない、つまり  $\alpha(T) \simeq \alpha$  と近似すると次の式が成り立つ。

$$V = \alpha \Delta T \quad (4.43)$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 \quad (4.44)$$

式 (4.41) と式 (4.42) よりゼーベック効果の熱雑音のパワースペクトル密度  $Su_{\text{ゼーベック}}$  は次の式で求められる。

$$Su_{\text{ゼーベック}}(\omega) = \frac{k_B T^2 \kappa \alpha^2}{(\rho S c)^2 L \omega^2} \frac{\pi - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad (4.45)$$

### 4.3.2 温度勾配のある電気回路の熱雑音の測定

製作した増幅回路を用いて温度勾配のある電気回路の熱雑音を測定する。図 4.10 は電気回路の温度勾配をつくる部分の模式図である。図 4.11 は電気回路の温度勾配をつくる部分の実際の様子である。各部品の間には 그리스 (熱伝導率  $9.0 [W/m \cdot K]$ ) を塗って、部品間の熱を伝わりやすくしている。エナメル線の一部をペルチェ素子で温め、別の部分で放熱部分をつくる。これにより、エナメル線のペルチェ素子で温められる部分と放熱部分の間に温度勾配ができる。放熱部分の主要材質はアルミで表面はアルマイトである。エナメル線の両端を増幅回路の inputBNC につなげ、前節のジョンソンノイズの測定と同様にして outputBNC を外部のローパスフィルタ、ADC につないで測定を行う。温度測定は図 4.12 のペン型温度計を用いた。この温度計はペン先から放射状の範囲の温度を測定できる。この温度計の測定誤差は  $\pm 1^\circ\text{C}$  である。

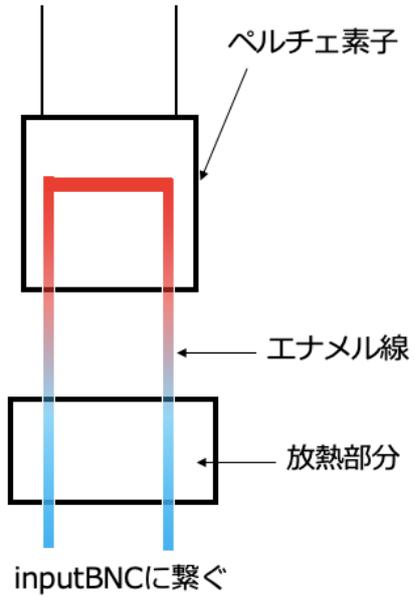


図 4.10 電気回路の温度勾配をつくる部分の模式図。ペルチェ素子でエナメル線が温められ、放熱部分間での間で温度勾配ができる。

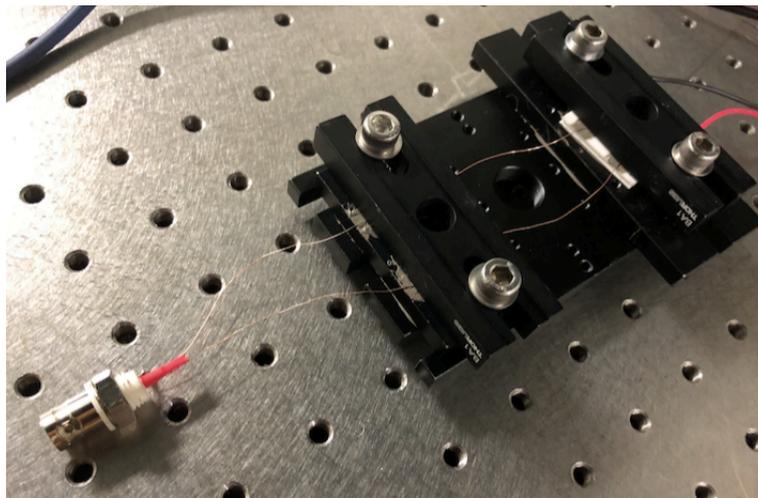


図 4.11 電気回路の温度勾配をつくる部分の実際の様子。

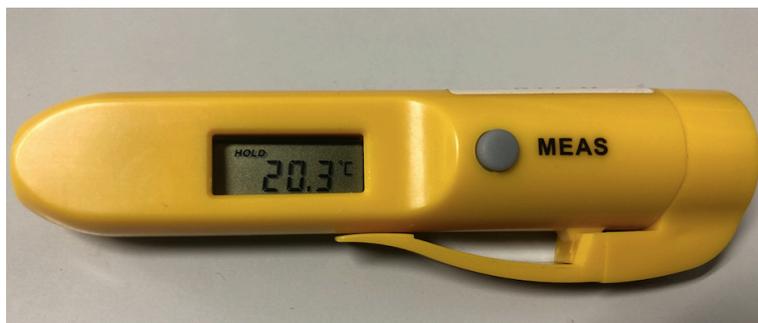


図 4.12 測定で用いたペン型温度計。

温度勾配のある電気回路の熱雑音を測定する前に、ペルチェ素子の温度測定を行う。ペルチェ素子に 0 V、1 V、2 V、3 V、4 V の直流電圧を加え、ペルチェ素子の高温部分と低温部分の温度を測る。表 4.1 はペルチェ素子の温度測定の結果である。

電圧 [V]	高温部温度 [°C]	低温部温度 [°C]
0	19.5	19.5
1	24.0	14.1
2	33	10.5
3	41.9	9.2
4	50.1	8.8

表 4.1 ペルチェ素子の温度測定の結果

本実験で電気回路につける温度勾配はおよそ 30 °C を考えているため、この表より 4 V で十分な温度勾配を作れることがわかる。

次に温度勾配のある電気回路の熱雑音の測定を行う。ペルチェ素子にかかる電圧は 0 V、2 V、4 V とする。図 4.11 は温度勾配のある電気回路の熱雑音の測定結果である。

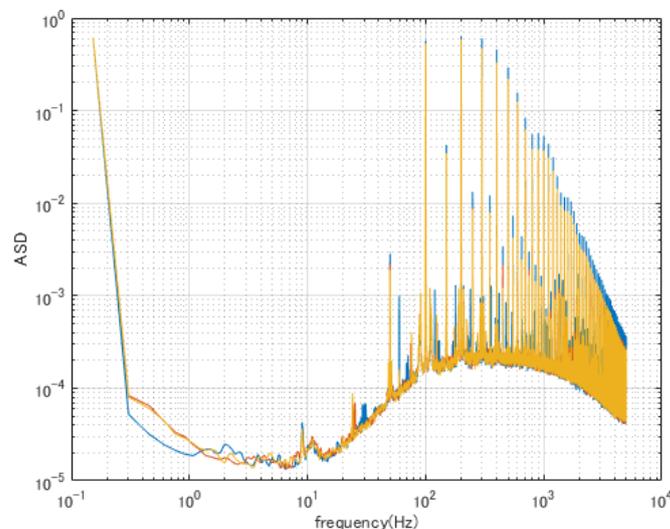


図 4.13 温度勾配のある電気回路の熱雑音の測定結果。縦軸は ASD [V/√Hz]、横軸は周波数 [Hz]。ペルチェ素子にかけた電圧、ペルチェ素子部分 (高温部分) の温度、放熱部分 (低温部分) の温度はそれぞれ (0 V, 19.5 °C, 19.4 °C) (青)、(2 V, 29.1 °C, 19.1 °C) (橙)、(4 V, 44.8 °C, 20.7 °C) (黄)。

この図からわかるように、本実験で温度勾配由来の熱雑音は見られなかった。

本実験におけるゼーベック効果による熱雑音を計算する。

本実験でのセットアップ ( $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  [J/K]、 $T = 300$  [K]、 $\alpha = 1.0 \times 10^{-6}$  [V/K]、 $\kappa = 403$  [W/m·K]、 $\rho = 8900$  [kg/m<sup>3</sup>]、 $S = \pi(0.2 \times 10^{-3})^2$  [m<sup>2</sup>]、 $c = 385$  [J/kg·K]、 $L = 0.1$  [m]、エナメル線は銅線として考えた) での式 (4.44) で求まる熱雑音のパワースペクトル密度  $Su_{\text{ゼーベック}}$  [V<sup>2</sup>/Hz] は、

$$Su_{\text{ゼーベック}}(\omega) \sim 1.6 \times 10^{-26} / \omega^2 \text{ [K}^2/\text{Hz}] \quad (4.46)$$

である。よって、この振幅スペクトル密度  $ASD_{\text{ゼーベック}} [V/\sqrt{Hz}]$  は、

$$ASD_{\text{ゼーベック}}(\omega) \sim 1.3 \times 10^{-13} / \omega [K/\sqrt{Hz}] \quad (4.47)$$

となる。ここで、例えば  $\omega = 100 \text{ Hz}$  で考えると、図 4.4 より増幅率はおよそ  $1.8 \times 10^3$  であるから、本実験での熱雑音の  $ASD_{\text{ゼーベック}} [V/\sqrt{Hz}]$  は次のようになる。

$$ASD_{\text{ゼーベック}} \sim 2.3 \times 10^{-12} [K/\sqrt{Hz}] \quad (4.48)$$

図 4.12 より本実験での  $100 \text{ Hz}$  の感度はおよそ  $ASD \sim 10^{-4} V/\sqrt{Hz}$  であるから、本実験でこの熱雑音が見られなかったのは、熱雑音の大きさに対して実験装置の感度が足りないからである。よって、この熱雑音を大きくする、また実験装置の感度をあげる必要がある。以下に改善点を述べる。

- エナメル線を常温で絶対ゼーベック係数の大きいクロメルに変える。物理量の変化は以下の通り。  
 $(\alpha [V/K] : 1.0 \times 10^{-5} \rightarrow 1.0 \times 10^{-5}, \kappa [W/m \cdot K] = 403 \rightarrow 19, \rho [kg/m^3] = 8900 \rightarrow 8500,$   
 $c [J/kg \cdot K] = 385 \rightarrow 447)$
- 導線を細くする。 ( $S [m^2] : \pi(0.2 \times 10^{-3})^2 \rightarrow \pi(0.01 \times 10^{-3})^2$ )
- 温度勾配をつける部分の長さを短くする。 ( $L [m] : 0.1 \rightarrow 0.01$ )
- 式 (4.47) より  $ASD_{\text{ゼーベック}} \propto \omega^{-1}$  であるから、できるだけ低周波で増幅率の大きい増幅回路を製作する。しかし、 $10 \text{ Hz}$  より低い周波数帯では ADC のノイズが大きいため、具体的には  $10 \text{ Hz}$  で増幅率  $10^7$  程度。

これらの改善点を満たした場合の  $ASD_{\text{ゼーベック}} [V/\sqrt{Hz}]$  は、

$$ASD_{\text{ゼーベック}} \sim 3.2 \times 10^{-4} [K/\sqrt{Hz}] \quad (4.49)$$

となる。これは十分測定可能な値である。

## 第5章

# 結論と今後の課題

本実験では、(i) 熱雑音の測定を行うための増幅回路の製作、(ii) その増幅回路を用いたジョンソンノイズの測定、(iii) 温度勾配のある電気回路の熱雑音の測定を行った。(i) に関しては、シミュレーション値とほとんど同じ増幅率が得られた。(ii) に関しては、低周波ではADCのノイズで確認できなかったがそれ以上の周波数帯で  $ASD^2$  が抵抗値に比例して増加するジョンソンノイズが確認できた。(iii) に関しては、実験装置の感度が足りない、雑音自体が小さいという理由で温度勾配のある電気回路の熱雑音は確認できなかった。

今後の課題としては、温度勾配のある電気回路の熱雑音を測定できるように実験装置の感度を改善する必要がある。本実験で導入したゼーベック効果による雑音を測定するには、エナメル線をクロメルにする、導線を細くする、温度勾配をつける部分の長さを短くする、低周波の増幅率を大きくするなどの改善点が挙げられる。

# 参考文献

- [1] Einstein A *Annalen der Physik* 49 769 (1916)
- [2] Abbott B P et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger” *Phys. Rev. Lett.* 116 061102 (2016)
- [3] 榎本 雄太郎, 干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用と光の空間モードの揺らぎについて,2017 修士論文
- [4] 粕谷順子, 重力波検出器 KAGRA の出力モードクリーナの開発,2018 修士論文
- [5] J.D.Creighton et al,*Gravitational-Wave Physics and Physics and Astronomy.* John Wiley & Sons, (2012)
- [6] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Vol.1, Theory and Experiments.* Oxford Univ.Press,(2008)
- [7] Somiya K (for the KAGRA Collaboration) “Detector configuration of KAGRA - the Japanese cryogenic gravitational-wave detector -” *Class. Quantum Grav.* 29 124007 (2012)
- [8] KAGRA ホームページ,<https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/>
- [9] A robust experimental setup for Johnson noise measurement suitable for advanced undergraduate students. Thaned Pruttivarasin 2018 *Eur. J. Phys.* 39 065102
- [10] Geller J, Build the jcan to measure resistor noise. *Nuts and Volts* 2007 54-62
- [11] 岡田利弘 「電気物性」 共立出版株式会社 (1977)
- [12] Shaun Ren, *Thermoelectrical Noise in Nonequilibrium via Langevin’ s Approach.* 2018
- [13] V.B.Braginsky et al, Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A* 264.1(1999) 1-10
- [14] K.M.van Vilet et al, Temperature-fluctuation noise of thin films supported by a substrate. *Journal of Applied Physics* 51.6 (1980) 2947-2956
- [15] V. B. Braginsky et al, Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae. Moscow 119899 (2018)
- [16] Francois Bondu et al, Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas. *Physics Letters A* 246 (1998) 227-236

# 謝辞

本論文を完成できたのは多くの方の助けのおかげです。この場でお礼申し上げます。

指導教員の宗宮先生には、本研究を全面的にサポートしてくださいました。まず、温度勾配のある場合の熱雑音という大変興味深いテーマを紹介してくださいました。私が本研究のテーマに出会えたのは宗宮先生のおかげです。また、私の質問に対して真摯に向き合い、多くの助言をしていただきました。特に、本論文を完成できたのは熱雑音の理論に関して宗宮先生の素晴らしいアイデアのおかげです。心から深く感謝申し上げます。

指導教員の原田先生には、増幅回路の製作から熱雑音に関することまで大変お世話になりました。特に増幅回路の製作に関しては、わざわざ実験棟に来てくださり多くの意見やアドバイスをしてくださいました。大変感謝しております。

修士2年の小田部さんには、主に増幅回路を製作する際に大変お世話になりました。電気回路に疎い私が本研究で増幅回路を完成できたのは小田部さんのアドバイスのおかげです。

修士2年の中島さんには、デジタル信号解析をするの際に大変お世話になりました。また、本論文に必須であるデジタル解析のシステムは中島さんが開発したものであり、大変感謝しております。

修士2年の佐々木さんには、熱雑音に関して理論面で大変お世話になりました。熱雑音に関する質問を何度もさせてくださいました。また、本論文での熱雑音の理論計算をサポートしていただき、非常に助かりました。

留学生のLiuさんには、私の拙い英語での議論に真剣に向き合ってください、大変感謝しております。日頃からLiuさんのプログラミング技術に助けられました。

修士1年の小川さんには、本研究に関する相談を何度もさせてくださいました。小川さんの優しいアドバイスに何度も助けられました大変感謝しております。

同期の立原くんには、増幅回路の製作で大変お世話になりました。回路製作で使う道具の使い方など初歩的なことからわかりやすく教えていただきました。

そのほかにも多くの方にお世話になりました。皆様本当にありがとうございました。