卒 業 論 文

信号リサイクリング干渉計の安定化に向けたデジタル制御システムの構築

東京工業大学
理学院　物理学系　物理学コース
宗宮研究室

17B08280 鈴木 海堂

2021 年 2 月

概要

1916 年、アインシュタインは一般相対性理論を完成させると共に、時空の歪みが空間をさざ波の如く伝播する現象である重力波 (Gravitational Wave) の存在を予言した。しかし、重力波によって生じる時空の歪みは極めて小さいため、アインシュタインによる予言からおよそ 100 年後である 2015 年まで重力波の直接検出は成されることはなかった。

2015 年 9 月 14 日、アメリカの重力波望遠鏡である LIGO によって、遂に重力波の直接検出が成された。これは、全人類にとって偉大な業績であると同時に物理学における新時代の幕開けを告げるものとなった。重力波の初めての直接検出から今日に至るまで重力波の検出技術は日々進歩しており、2019 年には 4 月から 9 月の間に 39 もの重力波が LIGO によって観測された。

現在、重力波の検出には、その原理としてマイケルソン干渉計が用いられているが、重力波の信号は非常に弱いため、干渉計の感度を向上させる必要がある。そこで、LIGO や KAGRA では 2 つの腕共振器および 2 つのリサイクリング鏡によって感度の改善を図っている。また、次世代の重力波検出器として提案されているものの一つに、光パラメトリック発振を用いた信号リサイクリング干渉計があり、当研究室ではその開発、及び原理検証を行なっている。

干渉系のセットアップを複雑にすると、制御しなければならない箇所も増え、制御そのものも一層複雑になる。アナログ制御は複雑な制御には向かないため、LIGO や KAGRA ではデジタルシステムによる制御が行われている。また、デジタルシステムを用いれば、複雑な制御システムを一つのコンピュータによってコントロールすることができ、さらにアナログでは作ることのできないようなフィルタの設計もできる。それらのことを踏まえて本卒業研究では光パラメトリック発振を用いた信号リサイクリング干渉計のデジタル制御に向け、デジタルシステムの導入、フィルタの作成およびマイケルソン干渉計と信号リサイクリング共振器の同時制御を行なった。

目次

第 1 章　重力波　3
- 1.1　アインシュタイン方程式 3
- 1.2　弱い重力場でのアインシュタイン方程式 5
- 1.3　真空中の重力波 6

第 2 章　重力波の検出　8
- 2.1　マイケルソン干渉計 8
- 2.2　感度の改善法 9
- 2.3　制御信号の取得 13

第 3 章　制御　20
- 3.1　伝達関数 20
- 3.2　フィードバック制御 21
- 3.3　アクチュエータ 22
- 3.4　ローパスフィルタ 23

第 4 章　デジタルシステム　25
- 4.1　デジタル信号 25
- 4.2　エイリアシング 25
- 4.3　離散時間 LTI システム 26
- 4.4　離散時間 LTI システムの伝達関数 28
- 4.5　デジタルフィルタ 29
- 4.6　デジタルフィルタの利点と問題点 31

第 5 章　実験　32
- 5.1　装置 32
- 5.2　DSP 処理による遅延 34
- 5.3　信号リサイクリング干渉計の制御 34

5.4 オープンループ伝達関数の測定 39
5.5 測定結果 40

第 6 章 まとめ 41
6.1 結論 41
6.2 今後の課題 41

第 1 章

重力波

一般相対論において時空は質量を持つ物体が存在することによって歪み、物体が加速度運動をすることで時空の歪みが波動として光速で伝播する。この時空のさざ波が重力波の正体である。

重力波はアインシュタインが 1916 年に一般相対論をもとに予言した物理現象で、2015 年の 9 月 14 日にアメリカの重力波望遠鏡 LIGO によって人類史上初の直接検出がなされた [2]。そのとき観測されたのは地球からおよそ 440 Mpc 離れたところで起きたブラックホール連星合体の際に発生した重力波で、その検出日から GW150914 と名付けられた。

本章では時空の歪みと質量の関係を記述するアインシュタイン方程式から重力波を導出する。なお、本章の計算過程では [6] を参考とした。

1.1 アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式はニュートンの万有引力の法則をブラックホールや中性子星などの強い重力場の下でも適用できるように拡張した方程式である。

1.1.1 計量テンソル

時空の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_\mu$ とすると、それらの内積は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と定義される:

$$g_{\mu\nu} := \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu \tag{1.1}$$

本論文では添え字のギリシャ文字は $0 \sim 3$ の値をとる。
また、計量テンソルを用いると時空のある 2 点間の微小距離 ds は

$$ds^2 = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.2}$$

と表せる。ここでアインシュタインの規約[*1]を用いると式 (1.2) は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.3}$$

と表すことができる。また、重力場の存在しない平坦な時空をミンコフスキー空間と呼び、このときの計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と表すことができる。

1.1.2 アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式の具体形は以下の通りである：

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

ここで右辺の G は万有引力定数であり、$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。エネルギー運動量テンソルは時空に存在する物質によって与えられるテンソルであり、時空が真空である場合には $T_{\mu\nu} = 0$ となる。一方、左辺の $G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソルであり、具体的には：

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.6}$$

で与えられる。ここで $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, R はそれぞれリッチテンソル、時空の計量テンソル、リッチスカラーである。リッチテンソルとリッチスカラーは時空の曲率を表すリーマンテンソル $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ によって定義される：

$$R_{\mu\nu} := R^\alpha_{\mu\alpha\nu},\ R := R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

リーマンテンソルの定義は以下で与えられる：

$$R^\epsilon_{\sigma\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^\epsilon_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\epsilon_{\sigma\mu} + \Gamma^\delta_{\sigma\nu} \Gamma^\epsilon_{\delta\mu} - \Gamma^\delta_{\sigma\mu} \Gamma^\epsilon_{\delta\nu} \tag{1.8}$$

ここで $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ はクリストッフェル記号と呼ばれ、計量テンソルを用いて

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} := \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} g_{\gamma\delta} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\beta\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta} g_{\beta\gamma} \right) \tag{1.9}$$

と定義される。

[*1] 同じ項で上下の添字が重なる場合にその添え字についての和を取るというルール。主に一般相対論で用いられる。

1.2　弱い重力場でのアインシュタイン方程式

弱い重力場を考えると、その時空の計量テンソルは 摂動項 $h_{\mu\nu}(|h_{\mu\nu}| \ll 1)$ を用いて

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

となる。このとき $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ であるのでクリストッフェル記号は、$h_{\mu\nu} \ll 1$ に注意して

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\delta}\left(\partial_\nu h_{\lambda\delta} + \partial_\lambda h_{\nu\delta} - \partial_\delta h_{\nu\lambda}\right) \tag{1.11}$$

となり、$h_{\mu\nu}$ の二次以上の項を無視するとリッチテンソルとリッチスカラーはそれぞれ

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -\partial_\mu \Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu} + \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\delta}\left(\partial_{\mu\delta} h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu\sigma} h_{\mu\delta} - \partial_{\sigma\delta} h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu} h_{\sigma\delta}\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.13}$$

となるので、アインシュタインテンソルは $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu},\ h = h^{\mu}_{\mu}$ を用いて次の様に表せる:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_{\mu\delta} h^{\delta}_{\nu} + \partial_{\nu\delta} h^{\delta}_{\mu} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu}\left(\partial_{\delta\sigma} h^{\delta\sigma} - \Box h\right)\right] \tag{1.14}$$

さらに $h_{\mu\nu}$ を

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \tag{1.15}$$

と書き換えると

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_{\mu\delta}\tilde{h}^{\delta}_{\nu} + \partial_{\nu\delta}\tilde{h}^{\delta}_{\mu} - \Box\tilde{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\delta\sigma}\tilde{h}^{\delta\sigma}\right] \tag{1.16}$$

となり、これにローレンツゲージ:

$$\partial_\nu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{1.17}$$

を適用することでアインシュタイン方程式は

$$\Box\tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.18}$$

となり、さらにトランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ):

$$\tilde{h}_{\mu 0} = 0,\ \tilde{h}^{\mu}_{\mu} = 0 \tag{1.19}$$

を適用すると $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ となるため、弱い重力場でのアインシュタイン方程式は

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.20}$$

となる。

1.3 真空中の重力波

真空中では

$$T_{\mu\nu} = 0 \tag{1.21}$$

であるのでこれを式 (1.20) に適用すると真空中のアインシュタイン方程式

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{1.22}$$

が得られる。ここでこの方程式の解として単色平面波

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \tag{1.23}$$

を考えるとローレンツゲージと真空中のアインシュタイン方程式を満たすために

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0 \tag{1.24}$$

$$k_\mu k^\mu = 0 \tag{1.25}$$

が必要。このとき式 (1.24) は重力波の振幅ベクトルと波数ベクトルが直交 (横波) 横波していることを示していて、式 (1.25) は重力波が光速で伝播することを示している。また、TT ゲージを満足するために

$$A_{\mu 0} = 0 \tag{1.26}$$

$$A^\mu_\mu = 0 \tag{1.27}$$

が必要であり、さらに計量テンソルの定義から $h_{\mu\nu}$ が対称であることが分かるため

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} \tag{1.28}$$

を満たす。このとき、重力波が $z(= x^3)$ 方向に伝わるとすると、このときの波数ベクトルは

$$-k_0 = k_3 = k \tag{1.29}$$

$$k_1 = k_2 = 0 \tag{1.30}$$

と表すことができる。以上の式 (1.24) から式 (1.30) をまとめると式 (1.23) は、係数 $h_+,\ h_\times$ を用いて

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\left[-ik(ct - z)\right] \tag{1.31}$$

となる。この解は $h_+,\ h_\times$ の 2 つの自由度を持つ偏極モードに分けることができ、それぞれプラスモード、クロスモードと呼ぶ。例として図1.1にプラスモードのみの偏極を持つ重力波が到来した場合の地上 $(x, y$ 平面$)$ の歪みの様子を示す。

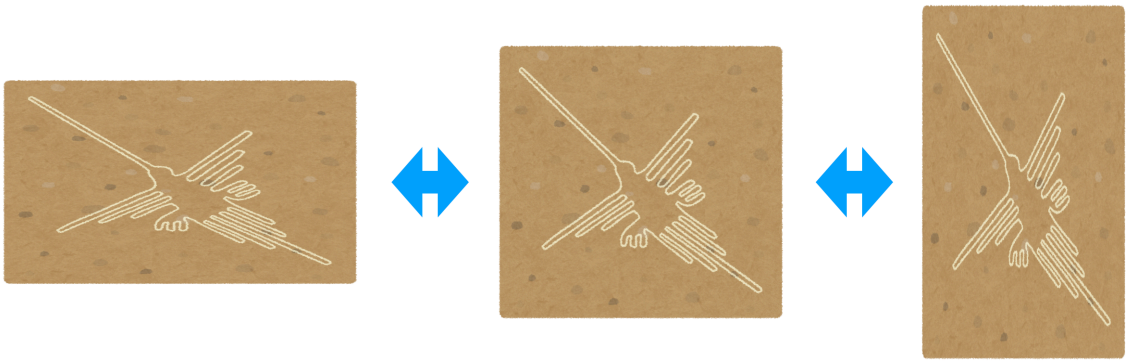

図1.1　プラスモードの重力波が到来したときの地上の様子

第 2 章

重力波の検出

前章では重力波によって時空が歪められるということが分かった。本章では時空の歪みによる距離の変化を捉えることで重力波を観測する方法を示す。

2.1 マイケルソン干渉計

重力波望遠鏡は一般的に懸架鏡[*1]によって構成されたマイケルソン干渉計によって構成される。マイケルソン干渉計ではレーザーからの光をビームスプリッタで 2 つに分け、それぞれをエンドミラーと呼ばれる鏡で反射させてから再度ビームスプリッタで合流させて光を干渉させる (図2.1)。

ビームスプリッタの位置での入射光の電場を $E_0 e^{-i\Omega t}$ とすると、それぞれの腕を往復し、合流した光の電場は、

$$E_{\mathrm{out}} = \frac{E_0}{2} e^{i(-\Omega t + \phi_x)} - \frac{E_0}{2} e^{i(-\Omega t + \phi_y)} \tag{2.1}$$

となる。ϕ_x 及び ϕ_y はそれぞれの腕の往復で発生する位相変化。また式 (2.1) の導出ではビームスプリッタの裏面の反射は表面での反射に対して位相が反転することに注意する。従って Anti-Symmetric (AS) ポート[*2]で検出される光の強度は、入射光の強度を $P_0 (= |E_0|^2)$ とすると

$$P_{\mathrm{out}} = \frac{1}{2} P_0 \left(1 - \cos 2(\phi_x - \phi_y)\right) \tag{2.2}$$

となり、干渉した光の強度は腕の長さの変化に対して正弦波的な変化をする。このとき光が打ち消し合う様 (ダークフリンジ) にアライメントを取るとレーザー光の強度雑音の影響を取り除くことができる。

[*1] 懸架鏡を用いると地面の振動による雑音を抑えることが出来る。

[*2] マイケルソン干渉計の出力側のこと。また、入力側を Reference Feedback Light (RFL) ポートと呼ぶ。

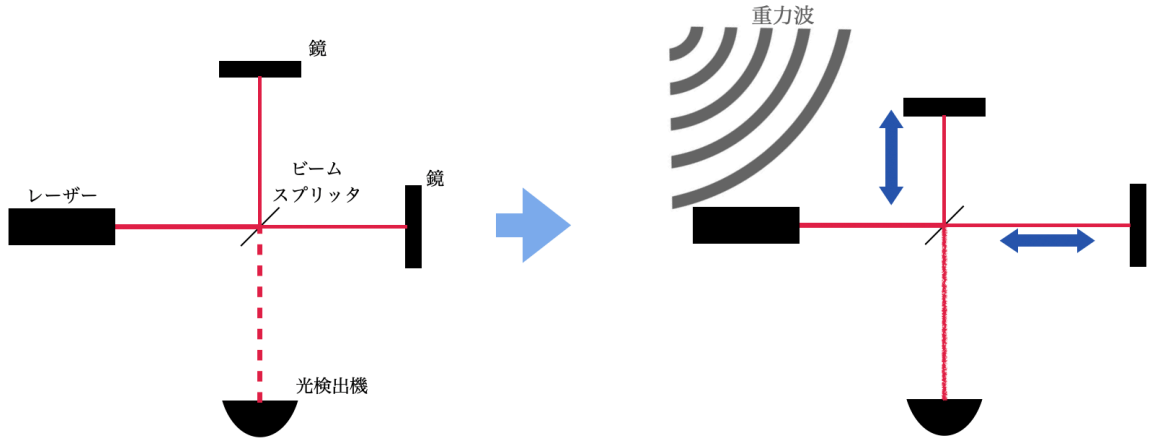

図2.1　マイケルソン干渉計

マイケルソン干渉計に図1.1のような重力波 ($h(t) = h_+ \exp\{i(-\omega t + kz)\}$($\omega$ は重力波角周波数)) が入射すると、ビームスプリッタで分けられた 2 つの光の位相差 $\delta\phi_{\mathrm{GW}} = \phi_x - \phi_y$ は、それぞれの腕の長さを L とすると

$$\delta\phi_{\mathrm{GW}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{\frac{-iL\omega}{c}} h(\omega) e^{i\omega} t d\omega \tag{2.3}$$

と表せる [6] ので、式中の

$$\frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) (:= H_{\mathrm{GW}}) \tag{2.4}$$

はマイケルソン干渉計の重力波に対する周波数応答関数であり

$$\frac{L\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \tag{2.5}$$

を満たすときに感度が最も良くなるといえる。例えば周波数が 250 Hz(GW150914) の重力波を観測する場合、最大の感度を出すためには腕の長さは 300 km 必要になる。しかし、このような腕の長さのマイケルソン干渉計を地球上に建設するのは現実的には困難であるため、LIGO や KAGRA では次節で紹介するように共振器を使って実効的な腕の長さを稼いでいる。

2.2　感度の改善法

ブラックホールや中性子などの連星の合体が起きたときに発生する重力波の信号の振幅は

$$h \sim 3.2 \times 10^{-22} \left(\frac{(m_1 m_2)^3}{(1.2\, M_\odot)^5 (m_1 + m_2)} \frac{20\,\mathrm{Hz}}{f}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{200\,\mathrm{Mpc}}{r}\right) \tag{2.6}$$

と表せる [6]。ここで r は波源から地球までの距離、m_1, m_2 はそれぞれ重力波源の質量、f は重力波の振動数である。さらに、$m_1 = 36.2M_\odot, m_2 = 29.1M_\odot$(GW150914)、$f = 250\,\mathrm{Hz}$,、$440\,\mathrm{Mpc}$ とすると $h \sim 1 \times 10^{-21}$ となり、その大きさは太陽と地球の距離を水素原子一つ分変化させる程度しかないことがわかる。

このように重力波の信号は非常に小さいため、重力波を効率良く捉えるためにはマイケルソン干渉計の感度を上げることが必要になる。本節では干渉計の感度を上げるための様々な手法を紹介する。

2.2.1 光共振器

先で記したようにマイケルソン干渉計は腕の長さを伸ばすことで感度を向上させることができる。そのための現実的な手段が光共振器を用いた方法である。光共振器は複数の鏡を組み合わせて光を何度も往復させることにより実効的な光路長を伸ばす装置で、その中でも 2 枚の鏡を用いたものをファブリペロー共振器という (図2.2)。

図2.2　ファブリペロー共振器

図2.2において左側の鏡の反射率と右側の鏡の反射率をそれぞれ r_F、r_E 及び、共振器長を L とすると共振器から帰ってくる電場 E_r は、入射電場 E_in 及び $\phi = \frac{2\Omega L}{c}$ を用いて

$$E_\mathrm{r} = \frac{-r_\mathrm{F} + r_\mathrm{E} e^{-\phi}}{1 - r_\mathrm{F} r_\mathrm{E} e^{-i\phi}} E_\mathrm{in} \tag{2.7}$$

と表すことができる。するとファブリペロー共振器から帰って来る光の強度 P_r は

$$P_\mathrm{r} = |E_\mathrm{r}|^2 \tag{2.8}$$

$$= \frac{r_\mathrm{F}^2 + r_\mathrm{E}^2 - 2r_\mathrm{F} r_\mathrm{E} \cos\phi}{1 + r_\mathrm{F}^2 r_\mathrm{E}^2 - 2r_\mathrm{F} r_\mathrm{E} \cos\phi} |E_\mathrm{in}|^2 \tag{2.9}$$

と表すことができる。

共振器から帰る光が少なければ共振器内の光の強度が上がり、実効的な光路を伸ばすことができるため、共振器を干渉計に入れる場合には P_r が小さくなるように制御する必要がある。

2.2.2　信号リサイクリング

信号リサイクリングとは、図2.3のように 信号リサイクリング鏡という鏡を光検出器とビームスプリッタの間に入れることで光を干渉計に打ち返し重力波の信号を増幅させる方法である。

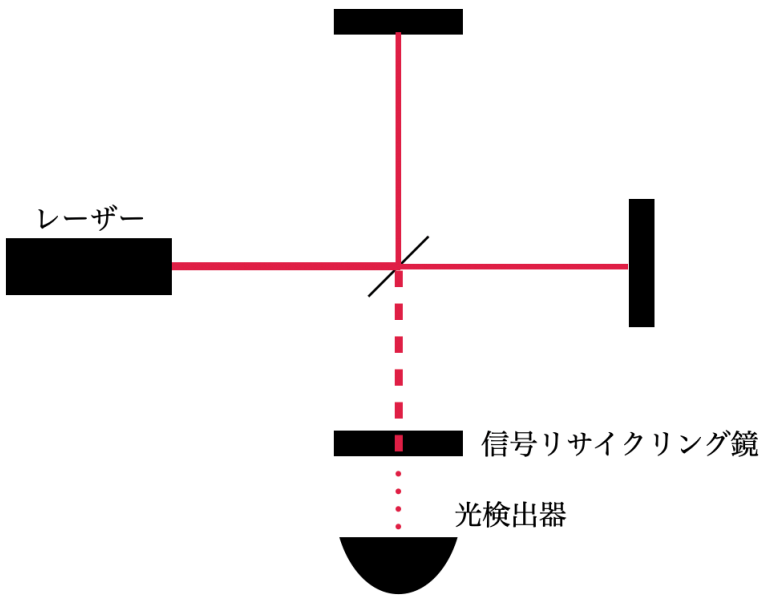

図2.3　信号リサイクリング干渉計

2.2.3　光ばね

鏡が光を反射するとき鏡は光のパワーに比例した力を受ける。これを輻射圧と呼ぶ。このとき鏡を懸架すると機械的な復元力と輻射圧の釣り合いにより鏡はバネのような挙動をする。この現象を光ばねと呼ぶ (図2.4)。

共振器内の光が最も強くなるところを共振点と呼び、この点で輻射圧が最も強くなる。光ばねを構成するには、共振器内の光路長が共振点よりも少し長くなるように鏡を配置する。これを離調と呼ぶ。光ばねが構成されているときに共振器内の光路長が短くなると、鏡は輻射圧により動作点（輻射圧と外力が釣り合う点）に戻され、長くなると外力によって動作点に戻される。この技術を用いると光ばねの共振周波数に近い周波数を持つ重力波の信号に対し、その信号を増幅するように光路長を制御することができるため、光ばねの共振周波数付近での感度が向上する。

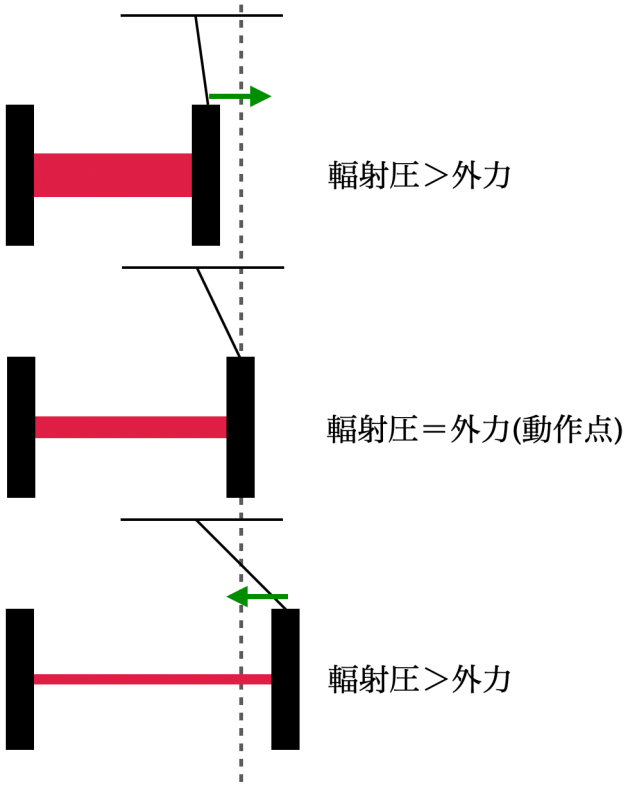

図2.4　光ばねの挙動

2.2.4　光パラメトリック発振 (OPO)

光パラメトリック過程

KTP 結晶などの非線形光学結晶はポンプ光と呼ばれる周波数 ω_3 の強い光を入射させると、$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ を満たすような 2 種類の光 (シグナル光とアイドラー光) が発生する。この過程を光パラメトリック過程と呼ぶ [8](図2.5)。また、光パラメトリック

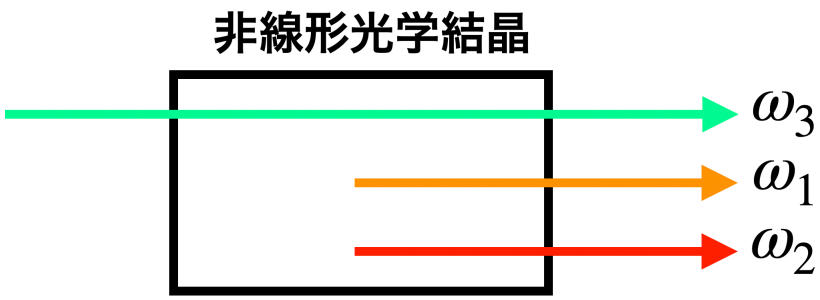

図2.5　光パラメトリック過程

過程が効率的に行われるためには、次の位相整合条件:

$$\Delta \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 = 0 \tag{2.10}$$

を満たすように結晶の温度と角度を調節する必要がある。

光パラメトリック増幅

光パラメトリック過程において、$\omega_1 = \omega_2 = \Omega$ となるようにすると光を増幅させることが可能になる。これを光パラメトリック増幅 (OPA) と呼ぶ (図2.6)。また、このときのポンプ光も非線形光学効果を用いた第二高調波発生 (SHG) によって作られる。

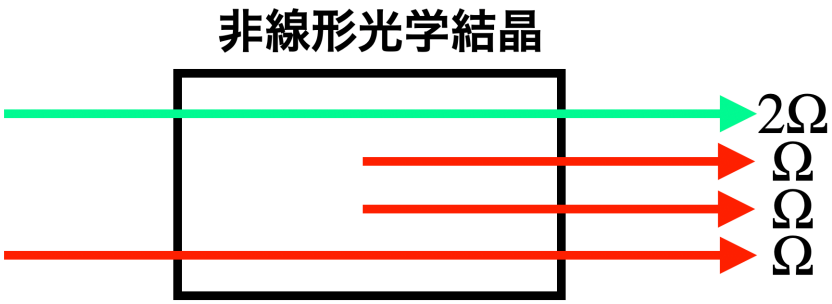

図2.6　光パラメトリック増幅

光パラメトリック発振

非線形光学効果を用いた重力波望遠鏡の感度の向上法としては、共振器の中に非線形光学結晶を入れ、共振器内の信号を光パラメトリック増幅させる光パラメトリック発振 (OPO) というものがある。OPO では光パラメトリック増幅によって増幅された信号が共振器の中で何度も増幅されるため、共振器に入射した重力波の信号をさらに大きく増幅させることが可能となる。

2.3　制御信号の取得

式 (2.2) からわかるようにマイケルソン干渉計の出力信号が強め合う場合や弱めあう場合には、検出される信号の強度が位相変化に対して線形に変化しない。そこで入力信号を細かく揺らし (位相変調)、出力信号に位相変調と同じ周波数の信号を乗じることで位相の変位を線形信号として取り出す (復調)(図2.7)。

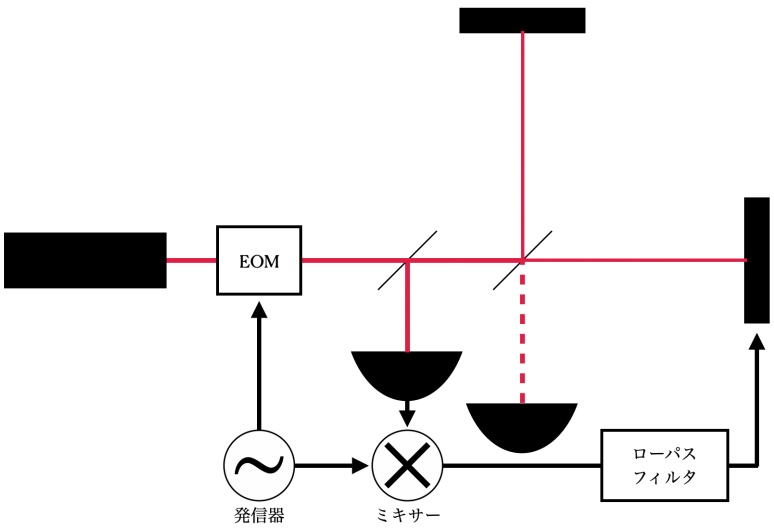

図2.7　制御信号の取得

2.3.1　位相変調

レーザーや鏡などの光学素子を実際に機械的に揺らすのは雑音に繋がるため好ましくない。そこで Electro-Optic Modulator (EOM) と呼ばれる位相変調器を用いる。EOM には印加電圧に応じて屈折率が変化 (電気光学効果) する結晶が用いられており、これによりレーザー光に位相変調をかける。

EOM によってレーザー光の位相が $m\cos\omega_m t$ $(m \ll 1)$ だけ変化したとすると、ビームスプリッタに入射する電場は次の様になる:

$$E(t) = E_0 \exp i(-\Omega t + m\cos\omega_m t) \tag{2.11}$$

$$= E_0 e^{-i\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) i^n e^{in\omega_m t} \tag{2.12}$$

ここで $J_n(m)$ は第一種ベッセル関数である。さらに、$m \ll 1$ を用いて (2.12) を近似すると

$$E(t) = E_0[J_0(m)e^{-i\Omega t} + iJ_1(m)e^{i(-\Omega+\omega_m)t} + iJ_1(m)e^{i(-\Omega-\omega_m)t}] \tag{2.13}$$

となる。この電場が、腕の長さがそれぞれ L_x、L_y であるマイケルソン干渉計に入射した場合、干渉計から出力される電場は

$$\begin{aligned} E(t) =& E_0 J_0(m) e^{-i\Omega t}\left(e^{2i\frac{\Omega L_y}{c}} - 2i\frac{\Omega L_x}{c}\right) \\ &+ iE_0 J_1(m) e^{i(-\Omega+\omega_m)t}\left(e^{2i\frac{(\Omega+\omega_m)L_y}{c}} - 2i\frac{(\Omega+\omega_m)L_x}{c}\right) \\ &+ iE_0 J_1(m) e^{i(-\Omega-\omega_m)t}\left(e^{2i\frac{(\Omega-\omega_m)L_y}{c}} - 2i\frac{(\Omega-\omega_m)L_x}{c}\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

となり、ここで腕の長さの和と差をそれぞれ $L_x + L_y = l$、$L_x - L_y = d$ とすると

$$
\begin{aligned}
E(t) =& E_0 J_0(m) e^{i\left(-\Omega t + \frac{\Omega}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega d}{c} \\
&+ i E_0 J_1(m) e^{i\left((-\Omega+\omega_m)t + \frac{\Omega+\omega_m}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega + \omega_m}{c} d \\
&+ i E_0 J_1(m) e^{i\left((-\Omega-\omega_m)t + \frac{\Omega-\omega_m}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega - \omega_m}{c} d
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

さらに、次の近似:

$$
J_n(m) \simeq \frac{1}{n!} \left(\frac{m}{2}\right)^n \quad (m \ll 1) \tag{2.16}
$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
E(t) &= E_0 e^{i\left(-\Omega t + \frac{\Omega}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega d}{c} \\
&\quad + i E_0 \frac{m}{2} e^{i\left((-\Omega+\omega_m)t + \frac{\Omega+\omega_m}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega + \omega_m}{c} d \\
&\quad + i E_0 \frac{m}{2} e^{i\left((-\Omega-\omega_m)t + \frac{\Omega-\omega_m}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega - \omega_m}{c} d \qquad (2.17) \\
&= E_0 e^{i\left(-\Omega t + \frac{\Omega}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega d}{c} \\
&\quad + i m E_0 e^{i\left(-\Omega t + \frac{\Omega}{c} l\right)} \sin \frac{\Omega d}{c} \cos \frac{\omega_m d}{c} \cos \left(\omega_m t + \frac{\omega_m l}{c}\right) \\
&\quad - m E_0 e^{i\left(-\Omega t + \frac{\Omega}{c} l\right)} \cos \frac{\Omega d}{c} \sin \frac{\omega_m d}{c} \sin \left(\omega_m t + \frac{\omega_m l}{c}\right) \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

となるため、検出される光の強度は

$$
P_{\mathrm{mod}} = |E(t)|^2 \tag{2.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2m|E_0|^2 \sin \frac{\Omega d}{c} \cos \frac{\Omega d}{c} \sin \frac{\omega_m d}{c} \sin \left(\omega_m t + \frac{\omega_m l}{c}\right) \\
&\quad + (\cos \omega_m t、\sin \omega_m t \text{ と直交する項})
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

となる。

2.3.2 復調

位相変調が加わった信号からは、もとの信号と同一の周波数の信号を乗ずることで線形な信号を取り出すことができる。これを復調という。復調には加えた変調と同じ位相の信号を用いる方法と 90 度ずらした信号を用いる方法があり、それぞれを I フェイズ、Q フェイズと呼ぶ。どちらも同様の手法で計算することができるため、本項では I フェイズによる復調を説明する。

前項では $m\cos\omega_m t$ の位相変調かけたため、P_{mod} を I フェイズで復調するには復調に使う信号には $\cos\omega_m t$ を用いる。従って、復調した後の信号を P_{dem} とすると

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{dem}} &= P_{\mathrm{mod}} \times \cos\omega_t && (2.21)\\
&= -2m|E_0|^2 \sin\frac{\Omega d}{c}\cos\frac{\Omega d}{c}\sin\frac{\omega_m d}{c}\sin\left(\omega_m t + \frac{\omega_m l}{c}\right)\cos\omega_m t \\
&\quad + (\cos\omega_m t、\sin\omega_m t \text{ と直交する項}) \times \cos\omega_m t && (2.22)\\
&= -\frac{m}{2}|E_0|^2 \sin\frac{2\Omega d}{c}\sin\frac{\omega_m d}{c}\sin\frac{\omega_m l}{c} \\
&\quad + (\cos n\omega_m t、\sin n\omega_m t\ (n \in \mathbb{N}) \text{ を含む項}) && (2.23)
\end{aligned}
$$

となり、振動する項をローパスによって落とすことでエラー信号として P_{err} が得られる:

$$
P_{\mathrm{err}} = -\frac{m}{2}|E_0|^2 \sin\frac{2\Omega d}{c}\sin\frac{\omega_m d}{c}\sin\frac{\omega_m l}{c} \tag{2.24}
$$

(図2.8) には位相変調をかけていないときの出力信号:

$$
P_{\mathrm{out}} = \frac{|E_0|^2}{2}(1 - \cos\frac{2\Omega d}{c}) \tag{2.25}
$$

とエラー信号を比較する図を示した。

また、$\omega_m(\sim 10^7\ \mathrm{Hz}) \ll \Omega(\sim 10^{15}\ \mathrm{Hz})$ であるため

$$
P_{\mathrm{err}} \propto \sin\frac{2\Omega d}{c} \tag{2.26}
$$

$$
\tag{2.27}
$$

としてよく、

$$
P_{\mathrm{err}} \propto \frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}d} \tag{2.28}
$$

となり、P_{out} が差動変位 d に対して線形でなくなるようなときには P_{err} が線形に振る舞うことがわかる。

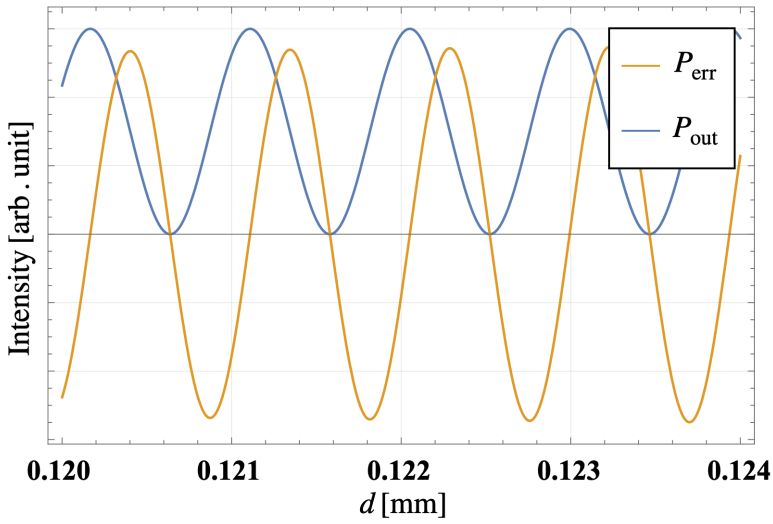

図2.8　マイケルソン干渉計からのエラー信号

2.3.3　共振器

式 (2.9) で求めたように、共振器から帰る信号は共振器長 L の変化に対して線形な応答をしない。そこで、共振器の制御をする場合にも位相変調をかけて線形信号を用いる。これを Pound-Drever-Hall(PDH) 法 [1] と呼ぶ。

ここで式 (2.7) を次のように書き換える。また本項では変調が $\sin\omega_m t$ の場合で計算してみる。

$$E_{\mathrm{r}} = F(\Omega)E_{\mathrm{in}} \tag{2.29}$$

$$F(\Omega) = \frac{-r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{E}}e^{-i\phi}}{1 - r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}e^{-i\phi}} \tag{2.30}$$

今度は変調のかかった入射電場が

$$E(t) = E_0[1 + \frac{m}{2}(e^{\omega_m t} - e^{-\omega_m t})]e^{-i\Omega t} \tag{2.31}$$

と表せるため、変調のかかった E_r は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{r,mod}} = E_0[&F(\Omega)e^{-i\Omega t} + \frac{m}{2}F(\Omega+\omega_m)e^{i(-\Omega+\omega_m)t} \\ &-\frac{m}{2}F(\Omega-\omega_m)e^{i(-\Omega-\omega_m)t})] \end{aligned} \tag{2.32}$$

従って、検出される光の強度は

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{r,mod}} = &m|E_0|^2\mathrm{Re}[F(\Omega)F^*(\Omega+\omega_m) - F^*(\Omega)F(\Omega-\omega_m)]\cos\omega_m t \\ &+m|E_0|^2\mathrm{Im}[F(\Omega)F^*(\Omega+\omega_m) + F^*(\Omega)F(\Omega-\omega_m)]\sin\omega_m t \\ &+(\cos\omega_m t、\ \sin\omega_m t\text{と直交する項}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

これに $\cos\omega_m t$ をかけることで I フェイズのエラー信号が求められる:

$$P_{\mathrm{r,err}} = \frac{m}{2}|E_0|^2\mathrm{Re}[F(\Omega)F^*(\Omega+\omega_m) - F^*(\Omega)F(\Omega-\omega_m)] \tag{2.34}$$

ここで $\omega_m \ll \Omega$ なので

$$F(\Omega+\omega_m) = F(\Omega) + \omega_m \frac{\mathrm{d}F(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} \tag{2.35}$$

とできるため、

$$P_{\mathrm{r,err}} = \frac{m}{2}|E_0|^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}|F(\Omega)|^2 \tag{2.36}$$

$$\propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}P_r \tag{2.37}$$

となり、共振点付近のエラー信号から線形信号が取り出せることが分かる (図2.9)。

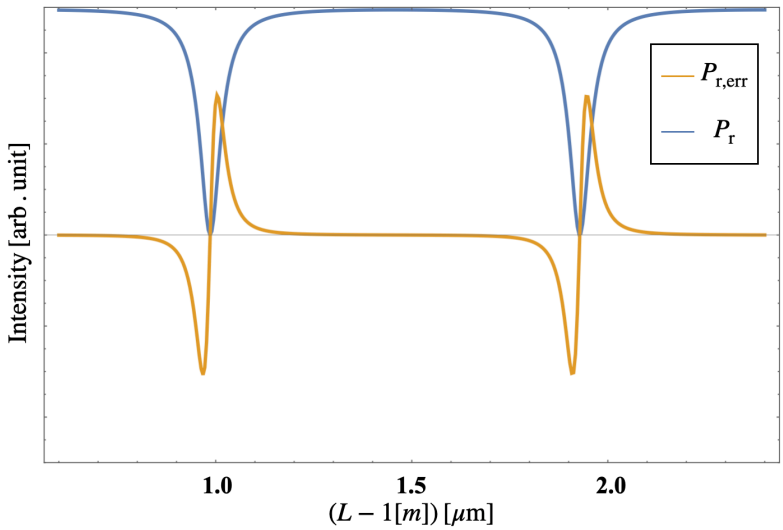

図2.9　共振器からのエラー信号

2.3.4　信号リサイクリング干渉計

信号リサイクリング干渉計も一種の共振器であるため、PDH 法による制御が可能である。しかし、マイケルソン干渉計の信号をダークにする場合、信号リサイクリング鏡に信号がやってこないため信号リサイクリング鏡の位置の情報を得ることができない。本項ではその問題の解決方法を述べる。

サイドバンドを用いた方法

変調をかけたときに発生する電場のうち周波数がレーザーの周波数と同じ、Ω であるものをキャリアと呼び、$\Omega \pm \omega_m$ のものをサイドバンドと呼ぶ。マイケルソン干渉計

の信号がダークとなるようなときとは差動変位 d が

$$\frac{2\Omega d}{c} = 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.38}$$

となるときなので式 (2.17) から分かるように、キャリアの出力信号は 0 であるが、サイドバンドの出力信号は値を持つ:

$$E_{\mathrm{out,SB}} = i\frac{m}{2}E_0 e^{i(-\Omega\pm\omega_m)t} e^{i\frac{\pm\omega_m}{c}d} \tag{2.39}$$

従って、サイドバンドを共振させれば PDH 法を用いて線形な信号を取り出すことができる。そのためには変調周波数と共振器のフリースペクトルレンジ $\frac{c}{2L_{\mathrm{SR}}}$ を一致させればよい。

サブキャリアを用いた方法

マイケルソン干渉計をダークにした状態でシグナルリサイクリング鏡の位置の情報を得るにはサイドバンドを用いた方法の他に、音響光学変調器 (Acousto-Optic Modulator (AOM)) を用いた方法がある。

AOM とは光の周波数を入力した発振器からの信号の周波数分シフトさせる素子で、AOM によって周波数シフトされた光をサブキャリアと呼ぶ。マイケルソン干渉計をダークにしてもサブキャリアは信号リサイクリング鏡に漏れるため、図2.10のように AOM で周波数シフトさせた光をさらに EOM で変調させることで信号リサイクリング鏡に漏れた信号から線形な信号を取り出すことができる。また、サブキャリアを共振させる場合もサイドバンドのときと同様に AOM の周波数を共振器のフリースペクトラルレンジと一致させる必要がある。

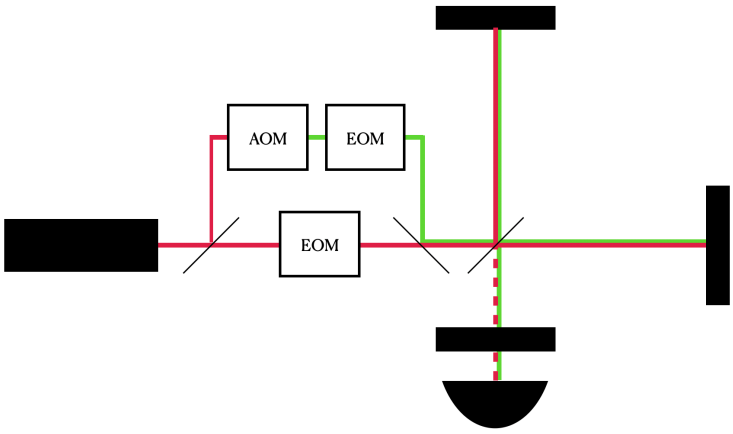

図2.10　サブキャリアを用いた信号取得

第 3 章

制御

マイケルソン干渉計は非常に感度のいい検出器であるが、地面は常に振動しているため容易にアライメントが崩れてしまう。そこで、信号を光検出器で読み取り、その信号を制御装置を通してアクチュエータに送り、雑音が消えるように鏡を動かす。これをフィードバック制御と呼ぶ [3](図3.1)。本章ではフィードバック制御の仕組みを紹介する。

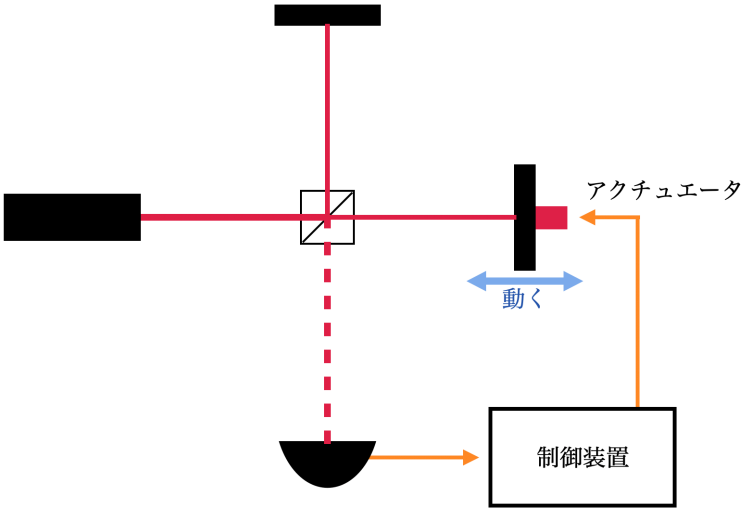

図3.1　マイケルソン干渉計の制御

3.1　伝達関数

伝達関数とは、システムの入出力関係を表現する関数である。伝達関数が A のシステムに x の信号が入力されたときに y の信号が出力されるとすると、その関係は次の

ようになる:

$$A = \frac{y}{x} \tag{3.1}$$

システムの入出力はブロック図によって簡潔に記述することができて、上のようなシステムの場合図3.2のようになる。

図3.2　ブロック図

3.2　フィードバック制御

フィードバック制御とは、ある系において出力信号を読み取り、その値が目標の値になるようにフィルタによって処理した信号を入力信号へとフィードバックする制御の体系である。伝達関数 H の系を伝達関数 F のフィルタを用いてフィードバック制御する場合、そのブロック図は図3.3のようになる。また、直列に結合された伝達関数は積によって表現できるため、このシステムの伝達関数は次のようになる:

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{1 + HF} \tag{3.2}$$

これをクローズドループゲインといい、システム全体の利得を表す。また $HF(= G)$ はオープンループゲインといいフィードバック 1 回分の利得を表す。

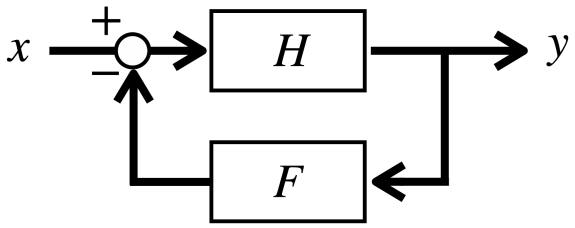

図3.3　フィードバック制御のブロック図

オープンループゲインが -1 になるとクローズドループゲインが発散し、制御が不安定になってしまうため、フィードバック制御ではこれを避ける必要がある。光学系やフィルタの伝達関数は一般的に入力信号の周波数 ω によって決まった複素数の値をとり、$|G| = 1$ となるときの周波数をユニティゲイン周波数と呼ぶ。ユニティゲイン周

波数の位相が π よりどれだけ大きいかを位相余裕といい、位相が π のときに $|G|$ が 1 よりどれだけ大きいかをゲイン余裕と呼ぶ。

3.3 アクチュエータ

アクチュエータとは入力された電気信号を力学的な運動に変換する制御システムの構成要素であり、本実験ではピエゾ素子を用いる。ピエゾ素子とは変形するとその変位に応じた電圧が発生 (圧電効果) する性質をもつ素子で、その逆に印加された電圧に応じて変形 (逆圧電効果) する性質も有する。ピエゾ素子をアクチュエータとして用いるときにはこの逆圧電効果を利用する。

ピエゾ素子の抵抗と静電容量をそれぞれ R、C とし、ピエゾが接着された鏡の質量、機械共振の周波数、ダンピング係数をそれぞれ m、ω_0、$\Gamma(=2m\gamma$とする) とすると、その伝達関数は

$$F_{\mathrm{piezo}}(\omega) = \frac{1}{m}\frac{1}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2}\frac{1}{1+iRC\omega} \tag{3.3}$$

となる。ボード線図は図3.4のようになり、周波数が ω_0 となるところを境に位相余裕が無くなっていることが分かる。これは則ち、ω_0 より高い周波数の信号をフィードバックすると発振してしまう恐れがあるということを示している。そこで、このような発振を防ぐためにアクチュエータへ送る信号に対してローパスフィルタを用いる。

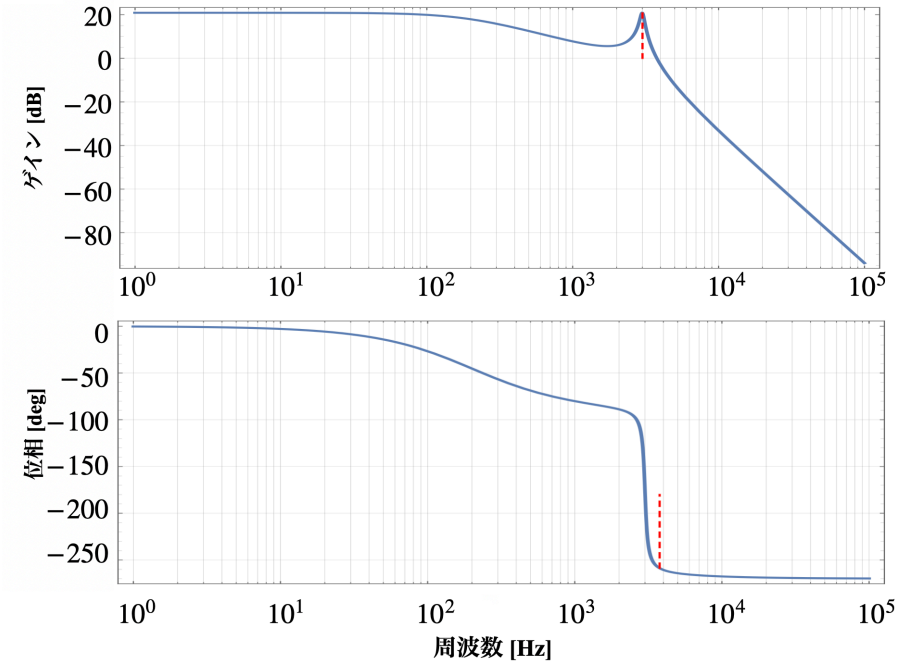

図3.4　H_{piezo} の伝達関数
位相余裕 (赤破線) が負になっていることが分かる。

3.4　ローパスフィルタ

ローパスフィルタはその名の通り低周波の信号を通過させ、高周波の信号を遮断するフィルタである。本節ではオペアンプを用いたアナログローパスフィルタの紹介をする。

3.4.1　回路

ローパスフィルタとして振る舞うアナログ回路には様々なものがあるが、ここでは例として図3.5のような回路を考える。

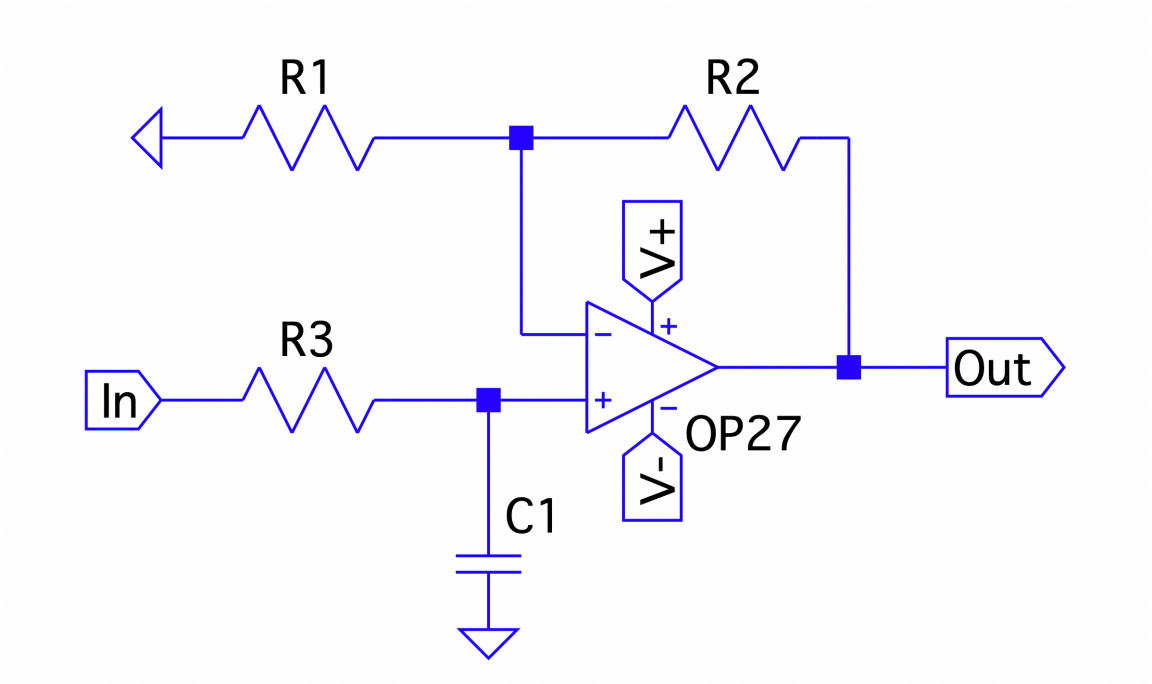

図3.5　アナログローパスフィルタの回路

3.4.2　伝達関数

本項では図3.5の回路の伝達関数を求める。初めに入力信号 V_{in} と出力信号 V_{out} の関係を求める。

抵抗 R_1 に流れる電流を I_1 とすると、理想的なオペアンプの入力インピーダンスは無限大であるため、R_2 に流れる電流も I_1 となるため出力信号は

$$V_{\mathrm{out}} = (R_1 + R_2)I_1 \tag{3.4}$$

また、理想的なオペアンプの 2 つの入力は仮想短絡しているためその電位は共に $R_1 I_1$ となる。そして、入力インピーダンスが 0 であるので R_3 を流れる電流を I_3 とすると R_3 及び C_1 では

$$R_1 I_1 - V_{\mathrm{in}} = R_3 I_3 \tag{3.5}$$

$$R_1 \dot{I}_1 = -\frac{I_3}{C_1} \tag{3.6}$$

が成り立つ。そして式 (3.4) から式 (3.6) をまとめると次の線形微分方程式が得られる:

$$V_{\mathrm{out}} + R_3 C_1 \dot{V}_{\mathrm{out}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{\mathrm{in}} \tag{3.7}$$

さらにこの式をラプラス変換を用いて解くと

$$V_{\mathrm{out}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{V_{\mathrm{in}}}{1 + R_3 C_1 s} \tag{3.8}$$

となる。さらに $s = i\omega$ とすることで伝達関数 $F(\omega)$ が得られる:

$$F_{\mathrm{LP}}(\omega) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{1 + i R_3 C_1 \omega} \tag{3.9}$$

このフィルタをピエゾにかけることで伝達関数は

$$F_{\mathrm{LP}} F_{\mathrm{piezo}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{1 + i R_3 C_1 \omega} \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2} \frac{1}{1 + iRC\omega} \tag{3.10}$$

となり、位相余裕が生まれることが分かる (図3.6)。

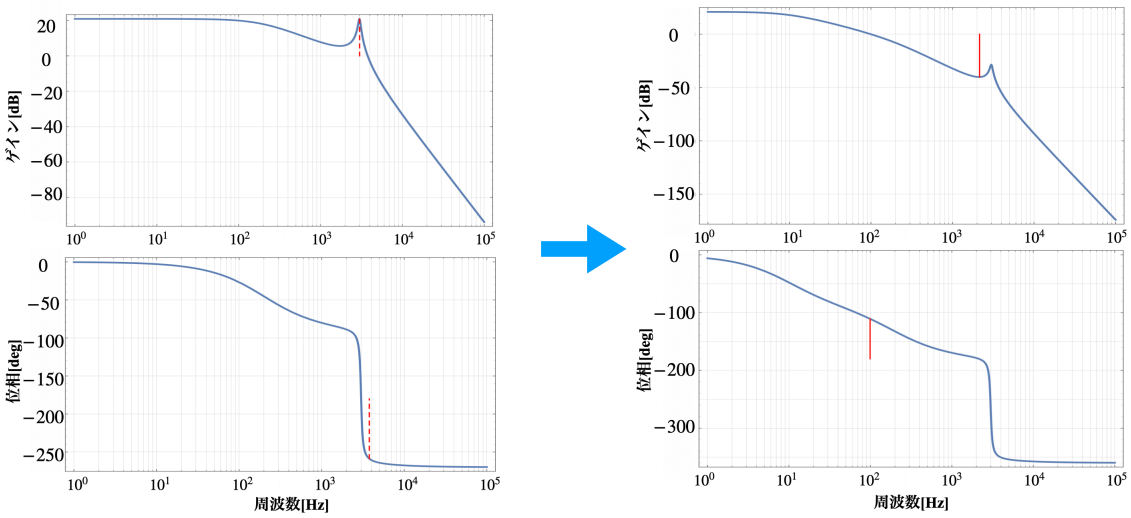

図3.6　ローパス前 (左) とローパス後 (右) の伝達関数

第 4 章

デジタルシステム

本章ではデジタルフィルタによる制御の方法を紹介する。デジタルフィルタとは入力された信号を離散信号に変換してからコンピュータによる処理を行うフィルタで、その体系をデジタルシステムと呼ぶ。また、本章では [7, 4, 5] を参考とした。

4.1 デジタル信号

デジタルシステムでは入力された信号を一定の時間間隔 (サンプリング周期) でサンプリングすることでアナログ信号をデジタル信号へと変換する。

デジタル信号は離散時間信号であり、アナログ信号の正弦波信号が

$$x(t) = \cos \omega_a t \tag{4.1}$$

であるとき、離散時間正弦波信号は次の様に表現される:

$$x[n] = \cos \omega_d n \tag{4.2}$$

ここで t は連続時間であり、n はそれに対応した離散時間 (整数) である。ω_d はデジタル信号の角周波数であり、1 サンプリング時間あたりに進む位相に対応する。ここでサンプリング周波数を f_s とすると、アナログ信号の角周波数 ω_a とデジタル信号の角周波数の関係は

$$\omega_a = \omega_d f_s \tag{4.3}$$

と表すことができる。

4.2 エイリアシング

離散時間正弦波信号では式 (4.2) より

$$\cos(2\pi - \omega_d)n = \cos \omega_d n \tag{4.4}$$

であるため、サンプリング周波数が小さいときには ω_d と $2\pi - \omega_d$ を区別できないために入力された信号を再現できなくなってしまう。これを折り返し雑音 (エイリアシング) と呼び、連続時間信号を再現するためにはサンプリング周波数は連続時間信号の周波数を f_a とすると

$$f_s > 2f_a \tag{4.5}$$

を満たさなければならない。これをナイキスト定理といい、$f_s/2$ を一般にナイキスト周波数と呼ぶ。入力信号の周波数がナイキスト周波数を超えると、その信号は雑音になってしまうため、アナログ信号をデジタル信号に変換するときにはナイキスト周波数よりも高い周波数の信号をカットオフするためのアナログローパスフィルタ (アンチエイリアシングフィルタ) を入れる。

4.3 離散時間 LTI システム

4.3.1 離散時間 LTI システムの導入

時刻 $n = 0$ でのみ 1 を持つ信号を単位インパルス信号 $\delta[n]$ と呼び、次式によって定義される:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

単位インパルス信号を用いると任意の離散時間信号は次のように簡潔に表現できる:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{4.7}$$

入力 $\delta[n-k]$ に対するシステムの応答をインパルス応答 $h_k[n]$ と呼ぶ。これを用いると次式が得られる:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \tag{4.8}$$

ここで $h_k[n]$ が時間によって変化しないとすると、

$$h_k[n] = h[n-k] \tag{4.9}$$

とかける。この性質をシステムの時不変性といい、式 (4.8) は次のようになる:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{4.10}$$

式 (4.10) の右辺の和はたたみ込みといい、次のように表記できる:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{4.11}$$

このような時不変性をもち、かつ線形なデジタルシステムを離散時間線形時不変 (Linear Time-Invariant(LTI)) システムという。

4.3.2 離散時間 LTI システムの表現

簡単な例として移動平均を表す差分方程式を考える:

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2} = 0.5x[n] + 0.5x[n-1] \tag{4.12}$$

これは、次の離散時間 LTI システム:

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] \tag{4.13}$$

においてインパルス応答が

$$h[0] = 0.5, \quad h[1] = 0.5 \tag{4.14}$$

の場合であると考えることができる。これをブロック図で表すと図4.1のようになる。ここで q^{-1} のブロックは遅延素子といい、単位時間の遅延を行う。また、このように有限個のインパルス応答からなるシステムを有限インパルス応答 (Finite Impulse Response (FIR)) システムという。

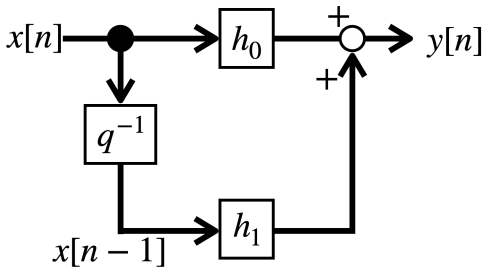

図4.1　簡単な FIR システム

つぎに、図4.2のようなブロック図を考える。このシステムを表現する差分方程式は

$$y[n] = h_0 y[n-1] + x[n] \tag{4.15}$$

となる。これは漸化式になっているため、

$$y[n] = x[n] + h_0 x[n-1] + h_0^2 x[n-2] + \cdots \tag{4.16}$$

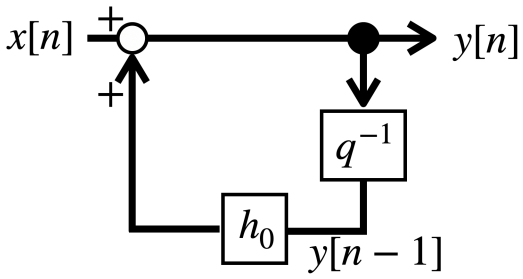

図4.2　簡単な IIR システム

のように無限個の項を持つことがわかる。このようなシステムを無限インパルス応答 (Infinite Impulse Response (IIR)) システムと呼ぶ。

式 (4.15) を変形すると

$$y[n] - h_0 y[n-1] = x[n] \tag{4.17}$$

となる。

式 (4.13) および式 (4.17) から、有限個の素子からなる離散時間 LTI システムの一般化は次のように考えられる:

$$\begin{aligned} &y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] \\ &\quad = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M] \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.4　離散時間 LTI システムの伝達関数

アナログシステムでの伝達関数は線形微分方程式をラプラス変換することで得ることができた (3.4.2項)。一方、離散時間 LTI システムの周波数応答を考えるには z 変換:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{4.19}$$

において $z = e^{i\omega_d}$ としたものを用いる。z 変換とは、ラプラス変換を離散時間で定義したもので、これを式 (4.18) に用いると

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \ (a_0 = 1) \tag{4.20}$$

となり、これより離散時間 LTI システムの伝達関数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{4.21}$$

が得られる。

4.5　デジタルフィルタ

デジタルフィルタとは離散時間 LTI システムによって信号をフィルタリングするものであり、これを用いればローパスフィルタやバンドパスフィルタなどを作成することができる。

4.5.1　フィルタの作成

フィルタの作成には MATLAB の Filter Builder アプリを用いる。Filter Builder アプリとは任意の周波数応答をするフィルタを設計、実装するための MathWorks 社の提供するアプリケーションである。ローパスのフィルタ応答をするフィルタを作成する場合には主に、インパルス応答、通過帯域周波数、阻止帯域周波数、通過帯域リップル、阻止帯域の減衰量を設定する (図4.3)。

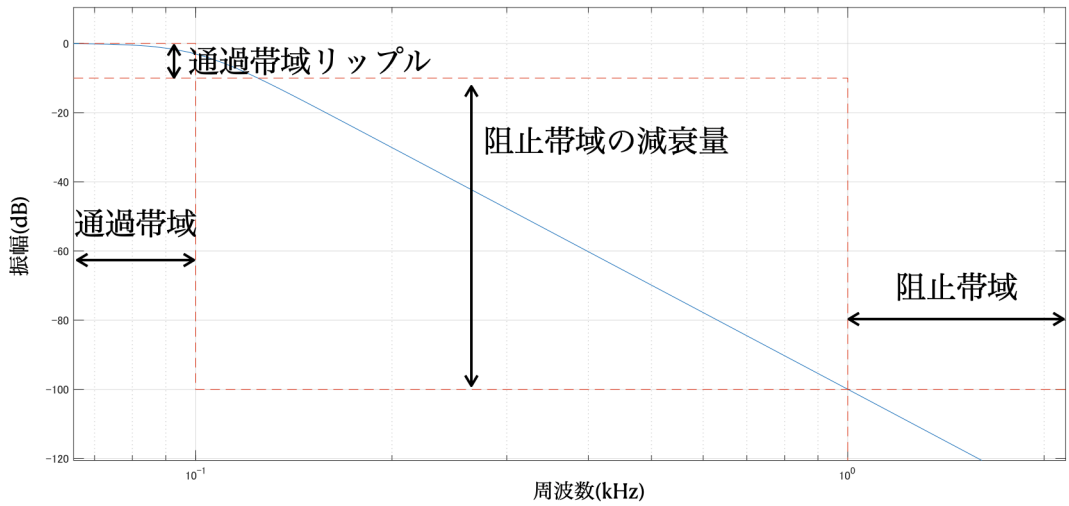

図4.3　インパルス応答が IIR のときの周波数応答

4.5.2　FIR と IIR の比較

FIR システムを用いたフィルタを FIR フィルタという。FIR フィルタはブロック図に表すと図4.4のようになる。また同様に IIR フィルタのブロック図は図4.5のようになる。

FIR フィルタにはループになっている部分が存在しないため、リミットサイクル (ループ部における誤差の蓄積による発振) が生じない。また、伝達関数が発散することも

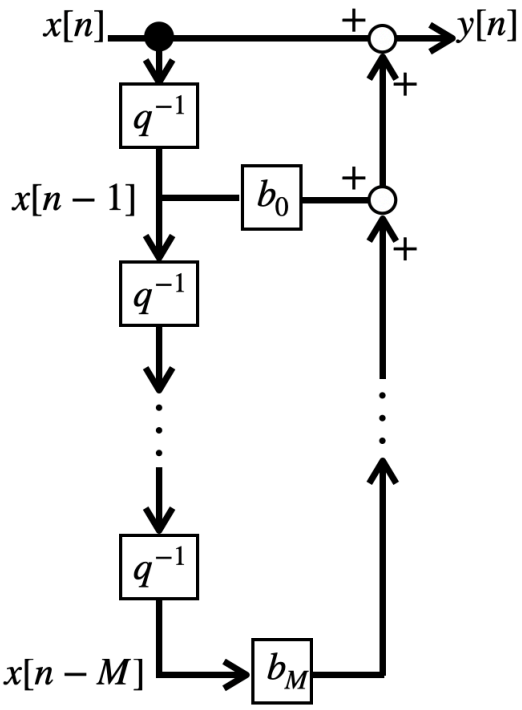

図4.4　FIR フィルタ

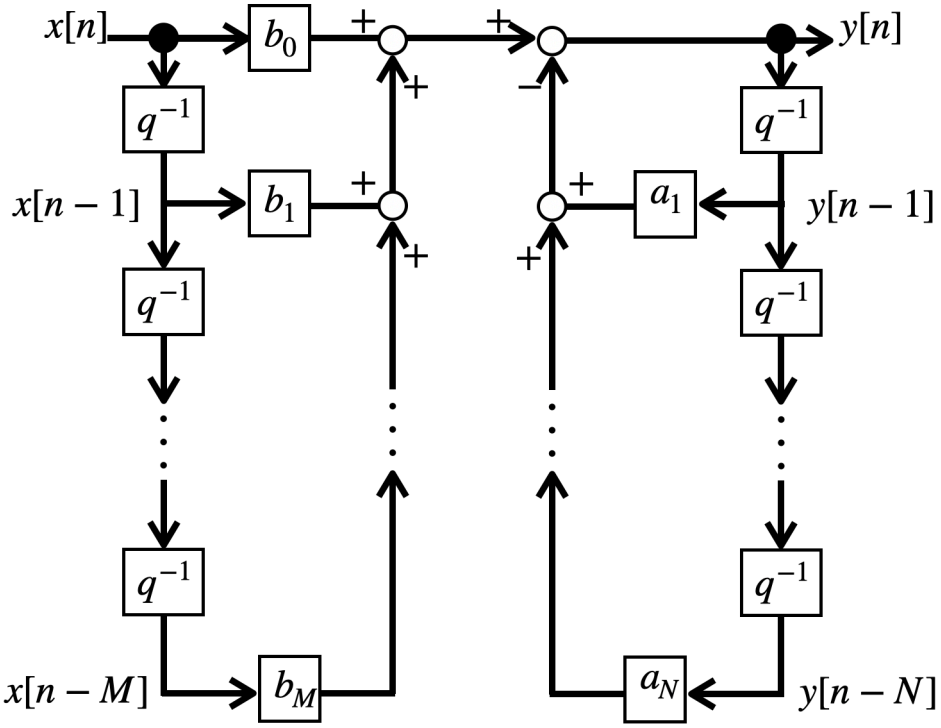

図4.5　IIR フィルタ

ないため、FIR フィルタは非常に安定性が高いフィルタである。一方、IIR フィルタはフィルタ内でフィードバックを用いることにより FIR フィルタよりもはるかに次数の小さなフィルタを作成することができるため、位相遅れを FIR フィルタよりも小さくすることが出来る。

干渉計の制御において位相遅れは好ましくないため、本実験では IIR フィルタによって干渉計の制御を行う。

4.6 デジタルフィルタの利点と問題点

デジタルフィルタにはアナログフィルタにはない数々の利点がある。本節ではそれらをまとめる。

- デジタルフィルタの利点
  - ハード化が容易なため小型化・大量生産が可能
  - 論理回路によって構成されるため信頼性が高い
  - フィルタ係数を変えるだけで特性の変更が可能
  - 温度変化、経年変化に影響されない
  - アナログでは存在しないフィルタが実現可能
- デジタルフィルタの問題点
  - アナログ-デジタル変換やデジタル-アナログ変換によって発生するノイズ
  - ループ回路におけるリミットサイクル
  - デジタル機器の処理速度に由来する遅延

第 5 章

実験

本研究では、当研究室が検証している OPO を用いた信号リサイクリング干渉計の制御のデジタル化を実現するために、信号リサイクリング干渉計の二つの自由度の制御をデジタルフィルタによって行った。デジタルフィルタの作成には市販のデジタルシグナルプロセッサ (DSP) 機器である sBOX II を用いた。

5.1 装置

実験で用いた主な装置を紹介する。図5.1に sBOX II とアナログ入出力機器、図5.2に信号リサイクリング干渉計の実験のセットアップを示す。

sBOX II　エムアイエス株式会社から発売されている DSP 機器。C 言語で書かれたフィルタのプログラムを本品にダウンロードし、デジタルフィルタとして用いる。これ一つでアナログ信号のデジタルへの変換 (ADC)、デジタル信号のフィルタリングそしてフィルタリングされたデジタル信号のアナログへの変換 (DAC) をすることができる。

プロセッサのスペックとしては、372 MHz、32 bit あり、6 ch、16 bit のアナログ入力と 8 ch、14 bit のアナログ出力を持っている。また、ADC や DAC の過程で発生するノイズを減らすために入力と出力には遮断周波数 50 kHz のアナログローパスフィルタが入っている。従って本実験ではサンプリング周波数を 100 kHz として用いた。

sBOX-BNC　アナログ信号を入出力するための 14 chBNC 端子台。

sBOX -C06-AIO　sBOX II と sBOX-BNC を繋ぐケーブル。

レーザー光源　波長 1064 nm の単一周波数発振の YAG レーザー。ファイバーアンプ

によって強度を 5 W まで増幅させる。

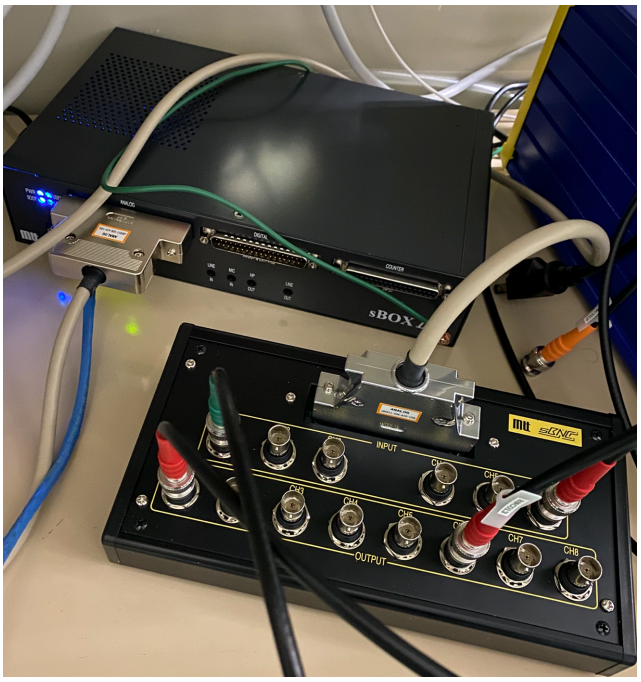

図5.1　sBOX II とアナログ入出力機器

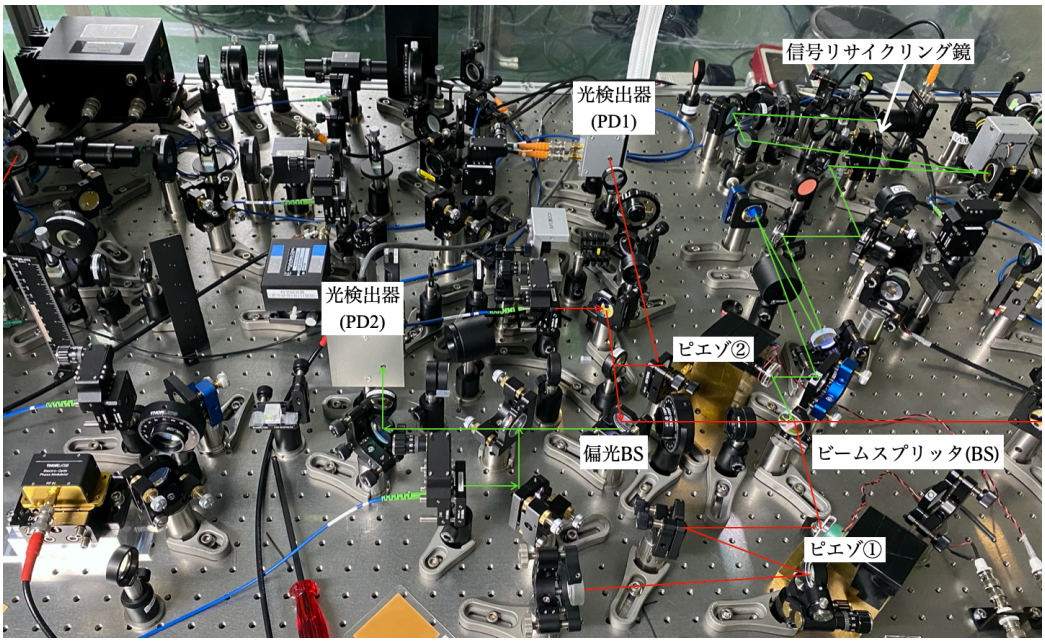

図5.2　実験セットアップ
赤色の線がキャリア光で緑色の線がサブキャリアである。

5.2　DSP 処理による遅延

ADC や DAC の処理によって信号の遅延が起こると位相遅れが生じてしまうため、遅延が大きいと制御ができなくなることが考えられる。ADC と DAC を直接つなぎ、5 kHz のサイン波を入力したところ、図5.3のようになった。これを見ると DSP 処理による遅延は 30 μsec 程度であることがわかった。本実験ではピエゾで制御できる程度 (数 kHz) の信号がフィードバックできればよいため IIR フィルタを入れたとしても問題にならないと考えられる。

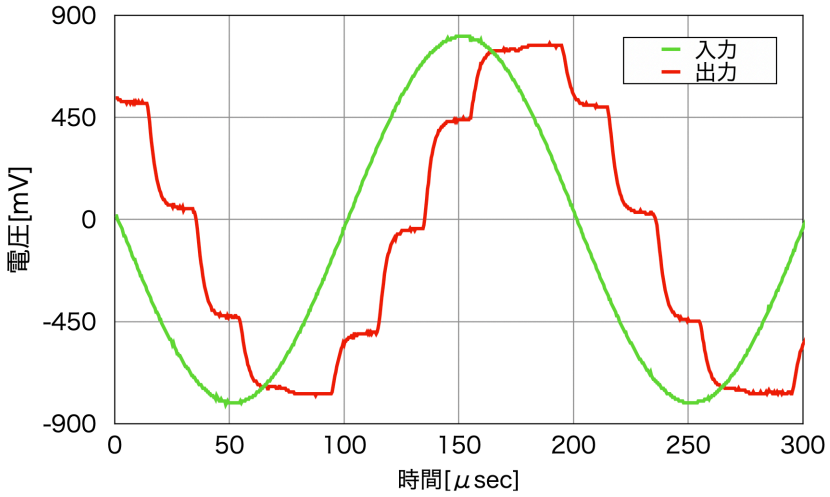

図5.3　遅延の測定

5.3　信号リサイクリング干渉計の制御

5.3.1　セットアップ

図5.4に簡略化した実験系を示す。キャリア光は赤の線で、サブキャリアは緑の線で表現した。またマイケルソン干渉計、信号リサイクリング共振器からの信号はどちらも RFL ポートから取得した。

5.3.2　フィルタ

Simulink のよって作成されたフィルタは sBOX II にダウンロードされる。図5.5にはそのブロック図を示す。「sBOX II 16bit 6ch AD」と書かれたブロックは ADC でデジタル化された 6 チャンネルの信号をフィルタに入力するブロックで、「sBOX II 14bit 8ch DA」と書かれたブロックはデジタル信号を sBOX II の DAC に送るための

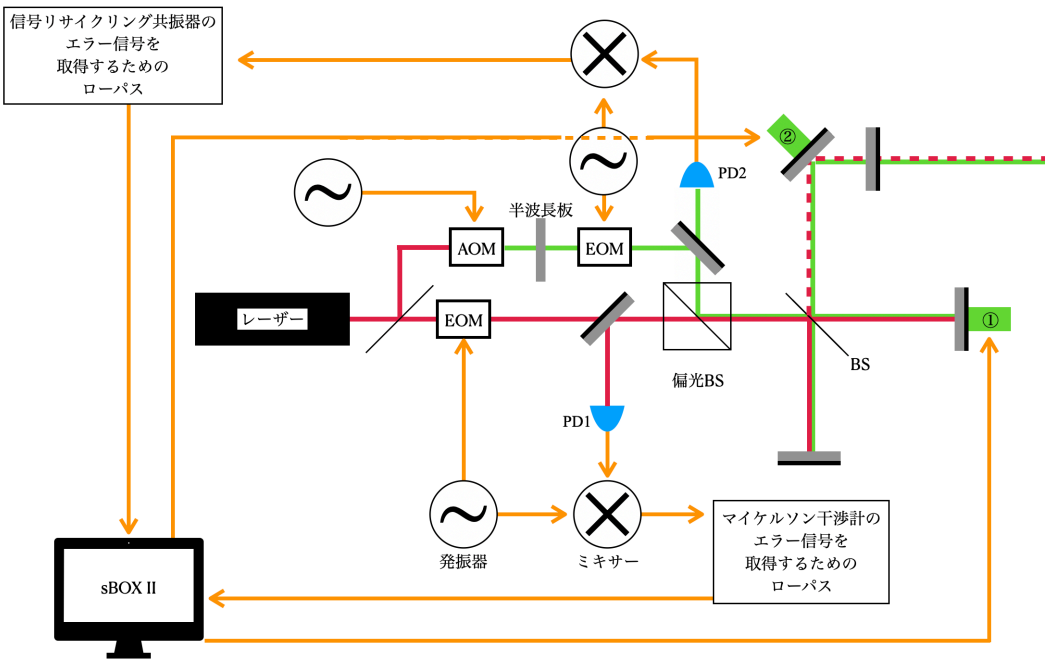

図5.4　信号リサイクリング干渉計の制御

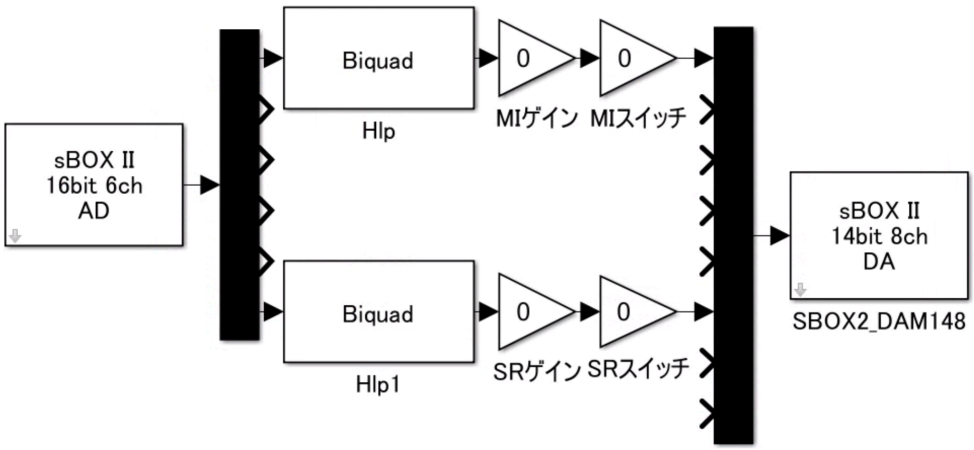

図5.5　フィルタのブロック図

ものである。そして「Biquad」と書かれたブロックは Filter Builder アプリで作成したローパスフィルタの２つとも 1 Hz で 3 dB の減衰を持つ IIR フィルタである (図5.6)。

三角形のブロックは増幅器となっており、入力信号を定数倍させることができる。入力側にある増幅器をゲインの調整に用い、出力側にあるものをスイッチとして用いた。

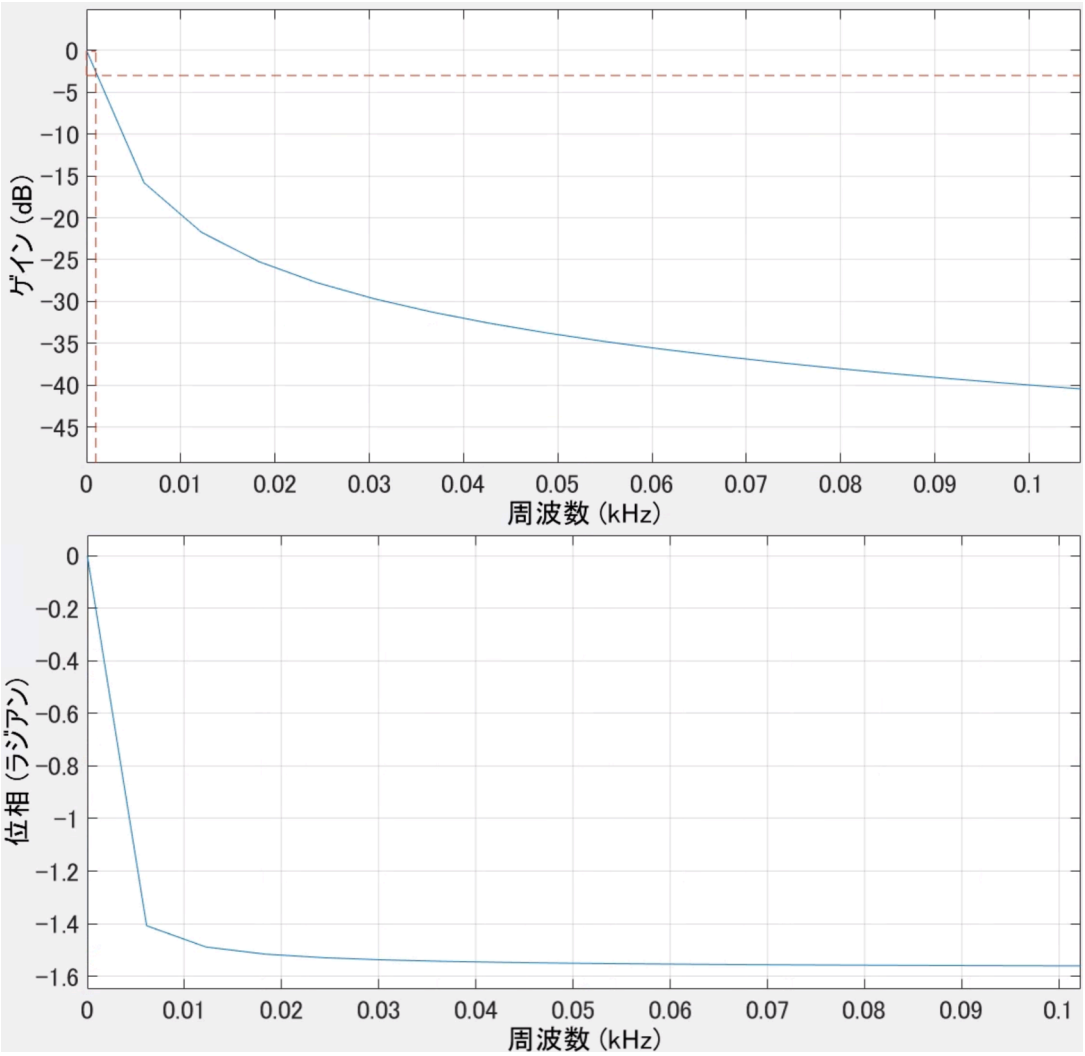

図5.6　作成したローパスの伝達関数

5.3.3　制御

前節で紹介したフィルタを用いた信号リサイクリング干渉計の制御を PD1、PD2 から得られる信号によって確認する。PD1 からはマイケルソン干渉計位相差の情報を得ることができ、PD2 からは信号リサイクリング共振器の光路長の情報が得られる。

制御を何もしていない状態での干渉計からの信号は図5.7および図5.8のように信号がランダムに明滅していることがわかる。これは地面や空気の振動によって光路長が乱雑に揺れていることを意味する。また今回用いた光検出器の特性上、検出された光の強度が負の電圧として取得されるため、値が小さい (絶対値が大きい) ほど光の強度が強いことに注意する。

次にマイケルソン干渉計だけ制御したときの信号を図5.9および図5.10に示す。

図5.7と比べると信号強度の強いところで一定値をとっていることがわかる。これはマイケルソン干渉計を透過する光が弱くなっていて、帰っている光が増えていることを意味する。しかし図5.7で光が最も強いところは -1 V 付近であるため、干渉計の透過光は完全にはダークになっていない。その原因としては復調した信号にフィルタなどからのオフセットがのってしまっていることが考えられる。また、図5.10も5.8に比べて信号の強度変化が穏やかになっているが、これは信号リサイクリング共振器には懸架している鏡がないため、懸架鏡が含まれるマイケルソン干渉計を制御することで信号リサイクリング共振器内の雑音が軽減されているためである。

さらに信号リサイクリング共振器の制御を行うと図5.11および5.12のようになった。図5.12の信号は図5.10と比べると強度が強く信号の揺れが小さいところで制御できていることがわかる。

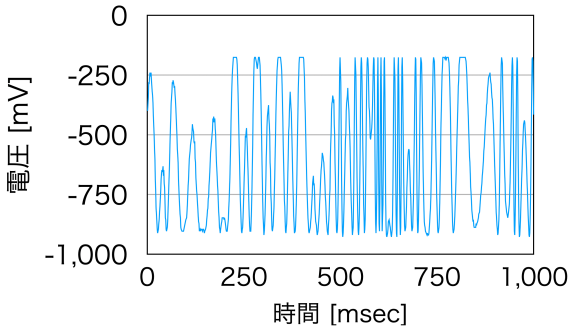

図5.7　PD1, 制御なし

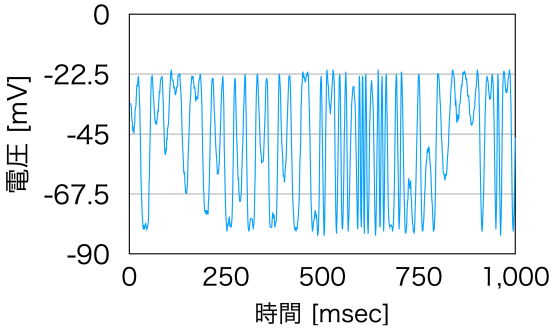

図5.8　PD2, 制御なし

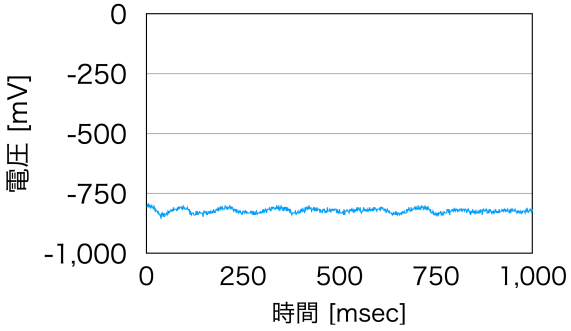

図5.9　PD1, マイケルソン干渉計だけ制御

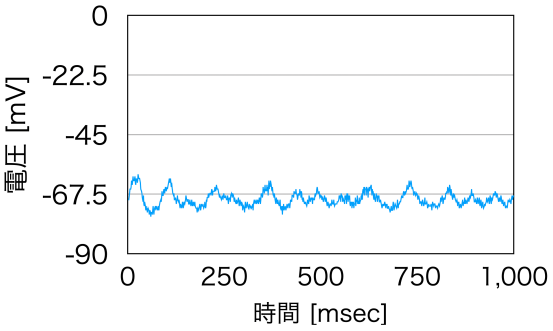

図5.10　PD2, マイケルソン干渉計だけ制御

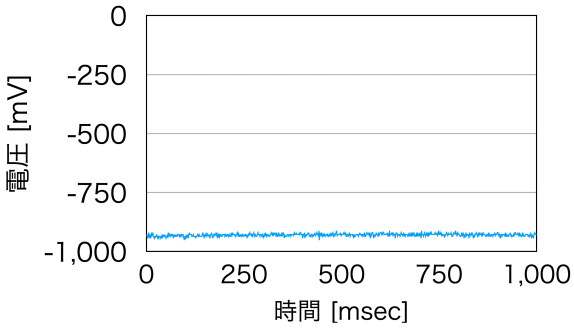

図5.11　PD1, 両方制御

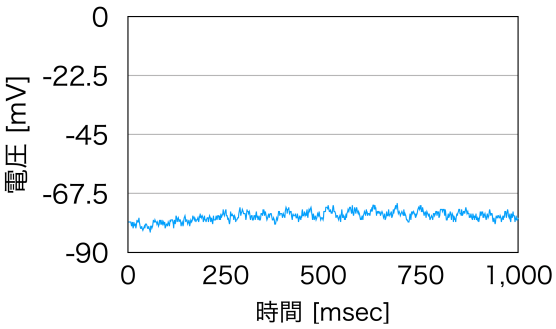

図5.12　PD2, 両方制御

5.3.4　安定性

制御の安定性を評価するために 2 自由度の制御をした状態で PD1 からの信号を 10 分程度取得した (図5.13)。これを見ると信号が揺れており制御位置が不安定になって

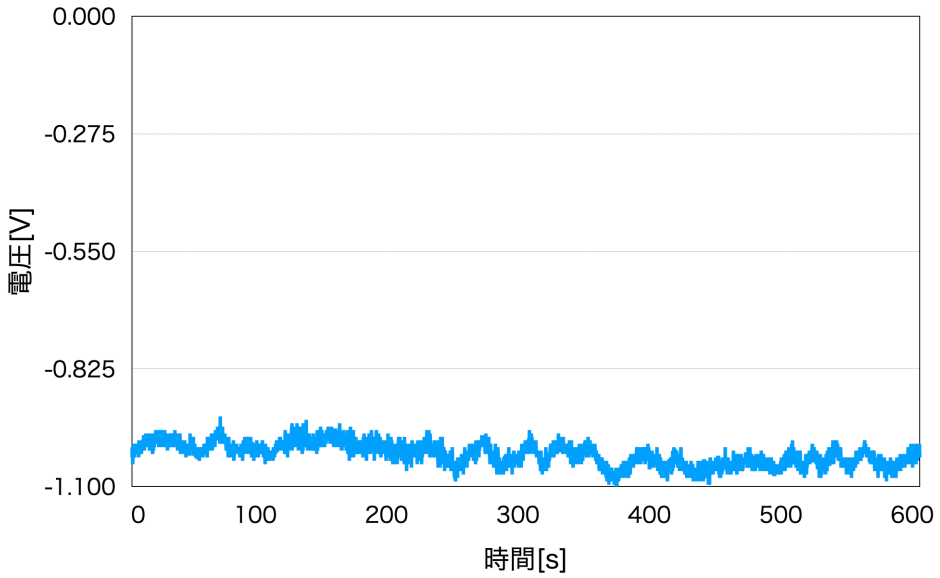

図5.13　PD1, 10 分間制御

いることが分かる。制御位置の安定性を上げるにはさらにゲインを上げて強いフィードバックをかける必要があるが、今回の制御に用いたフィルタはローパスフィルター一つだけなので単純にゲインを上げるとゲイン余裕がなくなり、制御が不可能になる。

制御が不安定になる理由としては上で挙げたものの他に、マイケルソン干渉計をロックする位置が完全にダークになっていないことが考えられる。マイケルソン干渉計の透過光がダークに保てていないと信号リサイクリング共振器の制御の情報がマイケルソン干渉計の信号に混入してしまい、制御の安定性が低下する。

5.4　オープンループ伝達関数の測定

5.4.1　測定方法

伝達関数の測定には小野測器の FFT アナライザである、DS-3200 を用いた。FFT アナライザから出力されるシグナル (= Sig) をローパスフィルタの直後に加算すると、加算器の直後からは $A = \frac{1}{1+FH}\mathrm{Sig}$ が得られ、加算器の直前からは $B = \frac{FH}{1+FH}\mathrm{Sig}$ が得られる (図5.14)。従ってオープンループ伝達関数を求めるには $\frac{B}{A}(= FH)$ を FFT アナライザに解析させればよい。

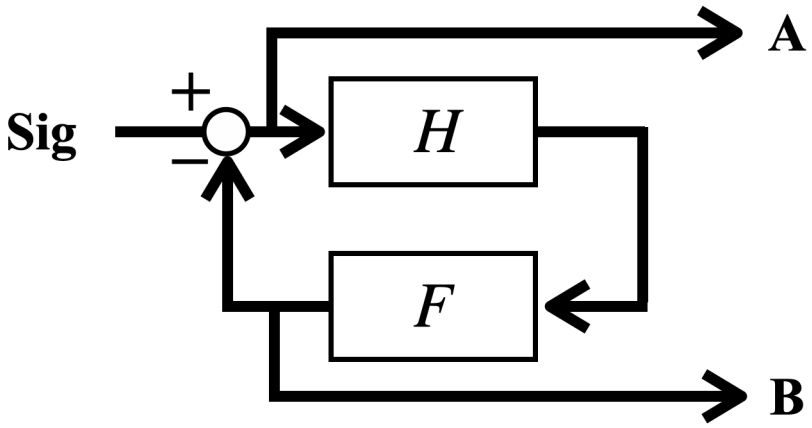

図5.14　オープンループ伝達関数の測定

5.5　測定結果

信号リサイクリング干渉計を 2 自由度制御した状態でマイケルソン干渉計のオープンループ伝達関数を測定したところ、図5.15のようになった。これを見るとゲイン余裕

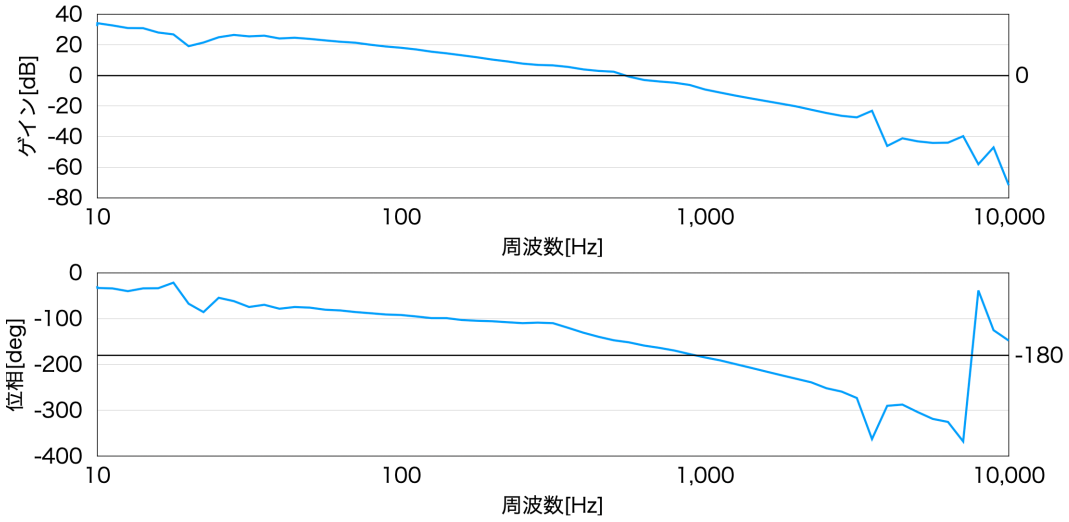

図5.15　マイケルソン干渉計のオープンループ伝達関数

がかなり少ないためこれ以上ゲインを上げることが難しいことが分かる。従って、これ以上ゲインを上げるためには 1 kHz 付近での位相遅れを補償するようなハイパスフィルタをさらにかける必要があると考えられる。

第 6 章

まとめ

6.1　結論

sBOX II を用いてデジタルフィルタを作成し、信号リサイクリング干渉計の 2 自由度での制御に成功した。しかし現状ではロックの緩い制御であった。その理由としてはマイケルソン干渉計を完全にダークに制御できていないことと、一つのローパスフィルタでしか制御していなかったことが考えられる。

6.2　今後の課題

当研究室が開発している、OPO を用いた信号リサイクリング干渉計には最低でも四箇所の制御箇所があり、今後はその制御のデジタル化を実現するために今よりも高い自由度での制御を目指す。そのためには一箇所ごとの制御の安定性をさらに高める必要がある。

制御そのものの安定性を高める方法としては、より大きなゲインでフィードバックするために、位相遅れ補償フィルタを作成することが挙げられる。また、別々の制御箇所の信号がお互いの制御に影響してしまうことによる安定性の低下も考えられるため、それぞれの制御箇所の間での信号の混入を抑える工夫を検討する必要がある。

そして進んだ課題としては、足し算や微分積分以外の演算を用いたフィルタの作成や制御を自動化するようなフィルタの導入が考えられる。

参考文献

[1] Eric D. Black. An introduction to pound–drever–hall laser frequency stabilization. *AM. J. Phys. 69. 79*, 2001.

[2] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett. 116, 061102. arXiv:1602.03837*, 2016.

[3] 明石友行 上滝致孝. 制御理論の基礎と応用. オーム社, 1986.

[4] 下井建生. 卒業論文 マイケルソン干渉計の制御と デジタルシステムの導入. 宗宮研究室, 2016.

[5] 中島良介. 卒業論文 IIR フィルタを用いた光干渉計の制御. 宗宮研究室, 2017.

[6] 大橋正健 中村卓史, 三尾典克. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会, 1998.

[7] 足立修一. *MATLAB* によるディジタル信号とシステム. 東京電機大学出版, 2002.

[8] 黒田和男. 非線形光学. コロナ社, 2008.

謝辞

未曾有のパンデミックが続く中でも本論文を無事完成させることができたのは多くの方々のご支援のおかげでございます。

指導教員の宗宮先生は、私にデジタル制御という素敵なテーマを与えてくださりました。宗宮先生の丁寧かつ的確な助言はいつもいつも次の一歩へと繋がることばかりで、大変有難いものでした。

特任講師の原田先生には干渉計の制御についての仔細な指導をしていただきました。週に一回のゼミでは、私が分からないところをじっくりと解説してくださり、そして実験では遅い時間まで付き合っていただくことも多く、大変お世話になりました。

実験室で会うことの多かった、修士 2 年の小川さんには進捗が行き詰まっているようなときなどに何度も励まされました。

他のメンバーの方々には実際にお会いすることは殆どありませんでしたが、Zoom 越しに耳へと届く声からはいつも元気を頂いておりました。

そして最後に、大好きな物理をこれからも修めることのできる道を選ばせて下さった両親に深く感謝いたします。