平成 30 年度卒業論文

重力波望遠鏡における地下水の重力勾配雑音の研究

東京工業大学 理学院物理学系　宗宮研究室
12B01686 井上　崇

はじめに

A.Einstein が提唱した一般相対性理論の予言によれば、物体の加速度運動が時空をゆがめることが知られている。ゆがみは波のように伝わることから重力波と呼ばれる。重力波は流入の前後で太陽から地球までの距離を水素原子半径だけ変化させせる程度であり、検出するのがきわめて難しい。重力波はブラックホールなどの巨大な質量をもつ、物体が連星合体をしたときに放出されることが知られている。　重力波を観測するための検出器が作られている。例えばアメリカにおいて、リビングストンやハンフォードに設置された LIGO、イタリアに建設された Virgo、またヨーロッパで計画されている Einstein Telescope などがあげられる。検出器は重力波望遠鏡と呼ばれ、一般的にマイケルソン干渉計の構造をもつ。マイケルソン干渉計を簡単に説明すると、それぞれ先端に鏡をもつ 2 方向に突き出た経路において、光を往復させるという基本構造をもち、重力波が干渉計に入ると、光路長が変化し、位相差が生じるというものである。日本においても岐阜県神岡においてもマイケルソン干渉計の重力波望遠鏡’KAGRA’が建てられ、重力波を観測する試みがある。KAGRA は地面振動を下げるために地下 300m に建てられている。そのため、地下では地下水が生じ、それが重力波に対する雑音になる。具体的には、地下水が波打つことによって、重力勾配が生じ、干渉計のミラーに対して、ひずみが生じてしまうのである。本論文では地下水の排水による重力勾配の変動から発せられる雑音の大きさをシミュレーションソフト AutodeskCFD を用いて評価し、その寄与を具体的に突き止めることを目標にする。

目次

第1章

一般相対性理論による重力波の定式化

1.1 重力波の線形近似

この章では、一般相対論による重力波を波動方程式を用いて理論的なモデルを導出する。ベクトル $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ に対して同一の添え字に対して和の記号を省略するものとする。(Einstein の記法) すなわちベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対して、

$$\sum_{i=0}^{4} A_i B_i \equiv A_i B_i \tag{1.1}$$

(Einstein の記法)

1.1.1 座標変換

座標変換 $x \to x'$ を考える。このとき、座標変換によって、$\mathbf{A}$ は

$$A'_i = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} A_j \tag{1.2}$$

へ座標変換される。

1.1.2 計量テンソル

一般相対性理論によれば、時空の歪みは 4×4 行列の計量テンソル g_{ij} で記述できる。歪みのない空間では計量テンソル g_{ij} はミンコフスキー計量と呼ばれ、となる。ベクトル A_i に対して、反変ベクトル A^j は次のようになる。

$$A^i = g^{ij} A_j \tag{1.3}$$

また共変ベクトルから反変ベクトルへの変換は

$$A_i = g_{ij} A^j \tag{1.4}$$

となる。このとき g^{ij} は g_{ij} の逆行列であり、

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^j \tag{1.5}$$

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \tag{1.6}$$

となる。このときベクトルの内積は

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^i B_i = g^{ij} A_j B_i \tag{1.7}$$

となる。

1.1.3　一般相対性理論

一般に座標変換に対して、

$$C^{j_1 j_2 \cdots j_m}{}_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \frac{\partial x'_{j_1}}{\partial x_{l_1}} \frac{\partial x'_{j_2}}{\partial x_{l_2}} \cdots \frac{\partial x'_{j_m}}{\partial x_{l_m}} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{k_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial x'_{k_2}} \cdots \frac{\partial x_{i_n}}{\partial x'_{k_n}} C^{l_1 l_2 \cdots l_m}{}_{k_1 k_2 \cdots k_n} \tag{1.8}$$

となる量を n 回反変 m 回共変テンソルという。

クリストッフェル記号は計量テンソルに対して、次のように定義される量である。

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ia} \left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ka}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^a} \right) \tag{1.9}$$

また、測地線の方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\sigma} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{1.10}$$

測地戦の方程式は, 世界距離に関して、変分原理を用いることにより導出できる。

ここで σ は測地系における時間変数の固有時間である。

重力テンソルを $G_{\mu\nu}$ は以下のように書ける。

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.11}$$

である。ここでリーマン曲率テンソル R^i_{jkl} は

$$R^i{}_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x_l} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^j_{mk} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml} \tag{1.12}$$

で与えられる量であり、

$R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} = R^i{}_{\mu i \nu} \tag{1.13}$$

で与えられる。

R はリッチスカラーと呼ばれる量で、

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

で定義される。

重力テンソルを $G_{\mu\nu}$ 運動量エネルギーテンソルを $T_{\mu\nu}$ とすれば、以下の関係が成り立つ。

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

運動量エネルギーテンソルは

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 \begin{pmatrix} u_0u_0 & u_0u_1 & u_0u_2 & u_0u_3 \\ u_1u_0 & u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_0 & u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_0 & u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

で定義される量である。ただし、u_i は $u_i = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}$ で定義される固有速度である。このことから、運動量エネルギーテンソルというものがみつかれば、重力テンソルを見つけることができる。

1.2　重力波方程式

真空中 $T_{\mu\nu} = 0$ の弱い重力場を考える。このとき計量は

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \tag{1.17}$$
$$\tag{1.18}$$

と書くことができる。η_{ij} は先に与えられたミンコフスキー計量であり、h_{ij} は微小に変化した項である。$|h_{ij}| << 1$ とすることができる。

ここで逆行列 g^{ij} は

$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij} \tag{1.19}$$

と書きあらわすことができる。h_{ij} が 2 次以上の項を省くと、式 (1.13) から、

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\eta^{kt}\left(h_{tj,ki} - h_{ij,kt} - h_{tk,ji} + h_{ik,jt}\right) \tag{1.20}$$

となる。

ここで、$\Omega_{ij} = h_{ij} - \dfrac{1}{2}\eta_{ij}h$ とすれば

$$\frac{\partial\Omega^{ij}}{\partial x^i} = 0 \tag{1.21}$$

となるようにゲージ条件を課すことができる。このようにして, k を定数にして、アインシュタイン方程式は以下のように書ける。

$$\Omega_{ij} = -2kT_{ij} \tag{1.22}$$

ここで無限小変換

$$x^\mu \to x^{\mu'} = x^\mu + \lambda^\mu \tag{1.23}$$

を考えると、計量テンソルは $g'_{ij} = g_{ij} - \partial\lambda_i - \partial_i\lambda_j$ となる。このとき Ω' は

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial x_i} = \frac{\partial\Omega}{\partial x^j} + \eta_{ij} \tag{1.24}$$

と変換される。

リッチスカラー R は

$$R = g^{ij}R_{ij} \tag{1.25}$$
$$= (\eta^{ij} - h^{ij})R_{ij} \tag{1.26}$$
$$= \frac{1}{2}\eta^{ij}\eta^{kt}\left(h_{tj,ki} - h_{ij,kt} - h_{tk,ji} + h_{ik,jt}\right) \tag{1.27}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{ij}\right) \tag{1.28}$$
$$= \frac{\partial^2 h^{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \Box h \tag{1.29}$$

ただし、

$$h = \quad \eta^{ij}h_{ij} \tag{1.30}$$
$$\Box = \eta^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.31}$$

と定義した。このとき、アインシュタイン方程式は式 (1.15) より

$$\Box\tilde{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.32}$$

となる。

1.3　重力波の解

特に真空中では、T=0 となるので、式 (1.32) は $\Box\tilde{h}_{\mu\nu} = 0$ となる。この波動方程式を解くと、次の一般解で $\tilde{h}_{\mu\nu}$ を表すことができる。

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}\exp(ik\lambda x^{\lambda}) \tag{1.33}$$

これを波動方程式に再度、代入すると

$$\eta^{\lambda\sigma}a_{\mu\nu}k_{\lambda}k_{\sigma} = 0 \tag{1.34}$$

またゲージ条件を課すと、

$$\eta^{\lambda\nu}k_{\nu}a_{\mu\lambda} = 0 \tag{1.35}$$

が成り立つ。式 (1.34), 式 (1.35) より次の条件式が成り立つ。

$$k^i k_i = 0 \tag{1.36}$$

$$k^{\lambda}a_{\mu\lambda} = 0 \tag{1.37}$$

式 (1.36) から、重力波は、光速で伝わり、式 (1.37) から振幅ベクトルと波数ベクトルの内積が 0 であるので、直交していることがわかる。それゆえ、重力波は横波である。

ここで、座標をゲージ変換すると、

$$x'^{\sigma} = x^{\sigma} + \xi \tag{1.38}$$

トレースレス条件は

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h_{\mu\nu}} \tag{1.39}$$

となる。$k_0 = k_3 = k, k_1 = k_2 = 0$ の z 方向に重力波が進行している場合を考える。式 (1.37) と式 (1.39) の条件を満たすとき

$$a_{\mu 0} + a_{\mu 3} = 0 \tag{1.40}$$

$$a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \tag{1.41}$$

となる。このとき平面波の解は

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp ik(ct - z) \tag{1.42}$$

となる。このように、重力波の変化は $\times$ 方向に対する変化と＋方向に対する変化の 2 通り存在する。

1.4　重力波の検出

重力波がテストマスに与える影響を考える。測地線の方程式を考えると、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}\sigma} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{1.43}$$

となる、初期状態に対して、テストマスが静止している場合、測地線の方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}^2\sigma} = -\Gamma^i_{00} = 0 \tag{1.44}$$

となり、テストマスはそのまま静止し続けることがわかる。 2 点間の固有距離を考える。$(0, 0, 0, 0)$ と $(0, \epsilon, 0, 0)$ このとき、固有距離の変化は

$$\int_{x_1}^{x_2} |ds| \approx |g_{11}^{1/2}|\epsilon \tag{1.45}$$

$$\approx (1 + \frac{1}{2}h_{11})\epsilon \tag{1.46}$$

となることがわかる。ただし、ϵ は非常に小さいとした。したがって、重力波は 2 地点の固有距離の変化となって現れる。

第 2 章

重力波測定の原理

2.1　マイケルソン干渉計

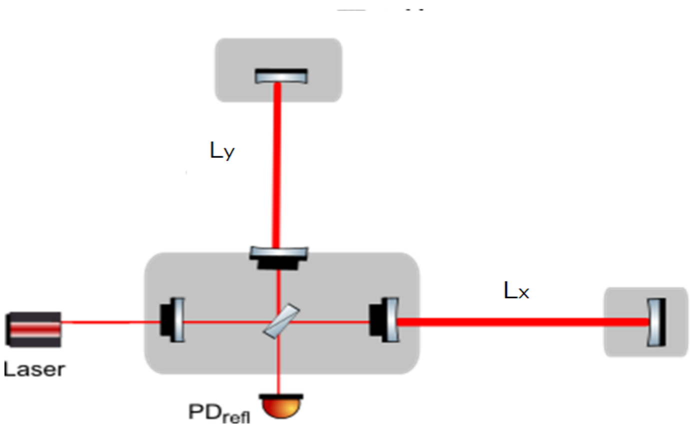

図 2.1　マイケルソン干渉計の模式図

マイケルソン干渉計は、 2 地点の光路長の変化に基づいて、重力波の変化を調べる

干渉計に入射する電場のビームを $E = E_0 \exp{(i\Omega t)}$ とする。このとき、ビームスプリッタを 1/2 反射して、1/2 透過するとする。マイケルソン干渉計を透過した際の位相変化を ϕ_x, ϕ_y とすると、でてきた、波は

$$E_{\mathrm{out}} = \frac{1}{2}E_0 \left(\exp[i\Omega - \phi_x] + \exp[i\Omega - \phi_y]\right) \tag{2.1}$$

となる。したがって、レーザーの強度 P_{out} は電場の振幅の 2 乗だから、

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{out}} &= |E_{\mathrm{out}}| \quad (2.2) \\ &= \frac{1}{2}E_0^2(1 - \cos{(\phi_x - \phi_y)}) \quad (2.3) \end{aligned}$$

とかける。

このようにマイケルソン干渉計のレーザーの強度は x アームと y アームで生じる位相変化の差 $\phi = \phi_x - \phi_y$ に依存する。$\phi = \pi$ のとき最大の強度をもち、$\phi = 0$ のとき、最小の強度になる。

2.2　重力波に対する干渉計の応答

　重力波がマイケルソン干渉計に到達したときの応答を求める。z 方向から、＋モードの重力波が流入する場合を考える。今、光は固有距離 $ds = 0$ の軌跡をとるから、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1 + h(t))dx^2 \tag{2.4}$$
$$= 0 \tag{2.5}$$

ゆえに

$$dx = \frac{c}{\sqrt{1 + h(t)}}dt \tag{2.6}$$
$$\approx (1 - \frac{1}{2}h(t))cdt \tag{2.7}$$

とできる。x アームの往復にかかる時間を Δt_x とすると、

$$\frac{2L_x}{c} = \int_{t-\Delta t_x}^{t} (1 - \frac{1}{2}h(t))dt \tag{2.8}$$

よって

$$\Delta t_x = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} h(t)dt \tag{2.9}$$

これより、往復の位相変化は

$$\phi_x = \Omega\Delta t_x \tag{2.10}$$
$$= \frac{2L_x\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^{t} h(t')dt' \tag{2.11}$$

y 方向についても同様に計算すると

$$\phi_y = \frac{2L_y}{c} + \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^{t} h(t) \tag{2.12}$$

となる。y 方向は積分前の符合は-にとる。基線長の長さ $L \approx L_x \approx L_y$ とすれば、このとき位相差 ϕ は

$$\phi = \phi_x - \phi_y = \frac{2L'\Omega}{c} + \Omega\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^{t} h(t')dt' \tag{2.13}$$

　また、重力波による位相変化を $\delta\phi_{GW}$ とすれば、

$$\delta\phi_{GW} = \Omega\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^{t} h(t')dt' \tag{2.14}$$

となる。ただし $L' = L_x - L_y$ である。このとき、式 (2.13) から、式 (2.14) が重力波による位相の変化として検出される。

2.3　周波数応答

重力波の周波数とマイケルソン干渉計との応答との関係を調べる。$h(t)$ をフーリエ積分展開すると

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) \exp{(i\omega t)} d\omega \tag{2.15}$$

となるが、式 (2.14) に代入すると、

$$\delta\phi_{GW} = \int 2\frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) \exp\left(-i\frac{\omega l}{c}\right) h(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \tag{2.16}$$

$$H_{MI} = 2\frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) \exp\left(-i\frac{l\omega}{c}\right) \tag{2.17}$$

H_{MI} は周波数応答関数といい、

$$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \tag{2.18}$$

になるとき、最大値をもつ。例えば、100Hz で最適な基線長は約 750km であり、とても現実的ではない。そのため、基線長の長さを稼ぐために、基線長間で何往復もするように、干渉計の腕に鏡を追加するファブリーペロー方式が用いられる。

第 3 章

重力波検出器の雑音

今回、もちいられる重力波検出器'KAGRA' は神岡地下に 200m に埋められた重力波干渉計である。本節ではこの地下に与えられる雑音の大きさを説明する。

3.1　パワースペクトル密度

ある物理量 $X(t)$ について、そのフーリエ変換を次式で定義する。

$$X\ (\omega) = \int X(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

この時、パワースペクトル密度は次式で定義できる。

$$S_{PSD} = X\ (\omega)X\ ^{*}(\omega)\omega \tag{3.2}$$

パワースペクトル密度の平方根をとった量、振幅スペクトル密度を考え, それ雑音の大きさとして評価する。図 3.1 は 10Hz 以下の超低周波領域での KAGRA の感度領域の一覧の様子である。左はひずみ感度の大きさを振幅スペクトル密度を用いて、単位は $[\mathrm{Hz}^{-1/2}]$ に直したものである。

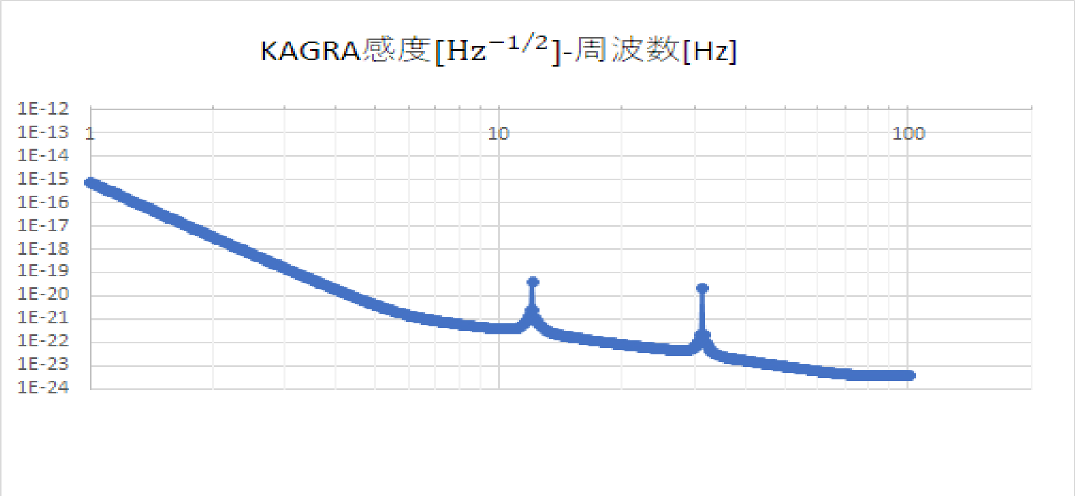

図 3.1　KAGRA 感度

超低周波領域では地面振動や本実験であつかう、水の液面の変動によるニュートニアンノイズが効いてくる。

第 4 章

流体に関する種々の基礎知識

今回、水の流れの様子を解析するにあたって、流体力学、および水理学の基礎知識についてこの章では説明をする。

4.1　マニングの粗度係数と壁面粗さ

河川やパイプの壁面の粗さを見積もった値に粗度係数というものがある。[4] によれば粗度係数 n には、マニングの公式という関係が成り立つ。それは次式で表され、

$$n = \frac{1}{v} R^{2/3} I^{1/2} \tag{4.1}$$

となる。

I は動水勾配、R は径深、A は流積 [m^2] S は潤辺 [m] である。各用語について説明する。

径深、潤辺、動水勾配の説明

図 4.1 より流積 A は流体が流れる断面積に該当する。このとき、潤辺 S とは断面図において流積 A をみたす流体が壁に接している辺の長さである。また径深 R は断面積を潤辺で割った値である。つまり、

$$R = A/S \tag{4.2}$$

となる。

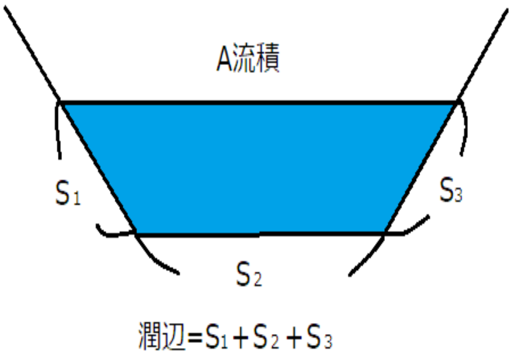

図 4.1　流積 A と潤辺 S の関係図

次に、動水勾配 I について説明する。まず、動水勾配 I を定義するために損失水頭について説明する。

損失水頭

流体における圧力の変化を長さのスケールに置き換えた量を損失水頭と呼ぶ。ただし、損失水頭は圧力を p, 径深を R、流体の平均流速を V としたときに

$$\delta p = f\frac{d}{R}V^2 \tag{4.3}$$

を満たす d である。ただし f は管摩擦係数である。f は自由表面をもつ流体のコールブックの式

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{\epsilon}{12R} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \tag{4.4}$$

などから、導出される。ただし、ϵ は絶対粗度であり、後述する壁面粗さ R_a に関して

$$\epsilon = \pi R_a \tag{4.5}$$

の関係がある。また Re はレイノルズ数である。このようにして、求めた d に対して流体の流れる水平距離を L としたときに動水勾配 I は

$$I = d/L \tag{4.6}$$

として定義される。今回のように流体が、時間変化しない場合を扱う場合には、一般的に、動水勾配は単に流体の傾きとしてよいことが知られている。粗度係数は管摩擦係数と流体の径深、平均流速からもとめることができるが、本実験で用いられるパイプは株式会社クリモトポリマーが提供しているシングルプレスト ϕ=400 というパイプであり、粗度係数が $n = 0.016$ であることが既に判明している。
([11] http : //www.kuripoly.jp/product/kurimoto_press/)

相当粗度

粗度係数から、相当粗度を求めることができる。相当粗度 k_s とは、壁面の平均的な高さを定性的に示した量である。相当粗度は数値シミュレーションで必要な壁の表面粗さを求めるのに用いる。[2] によれ

ば、相当粗度と粗度係数の関係を示すマニングストリンクラーの式は以下のように書ける。

$$n = \frac{{k_s}^{1/6}}{7.66\sqrt{g}} \tag{4.7}$$

g は重力加速度である。$n = 0.016$ よりから k_s =3.2mm である。

表面粗さ R_a

[1] によれば、表面粗さ R_a を用いて、粗度係数が n が流れの状態によらないとき、k_s～$2 * R_a$ 程度であることが知られている。今回の場合も $k_s = 2 * R_a$ として、計算することにする。R_a というのは、摩擦の粗さの高さの平均値であり、壁面の平均高さが 0 であるよう原点において、

$$R_a = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(x)|dx \tag{4.8}$$

と定義される。

[6] によれば、R_a は以下の図 4.2 のようにして算出される。

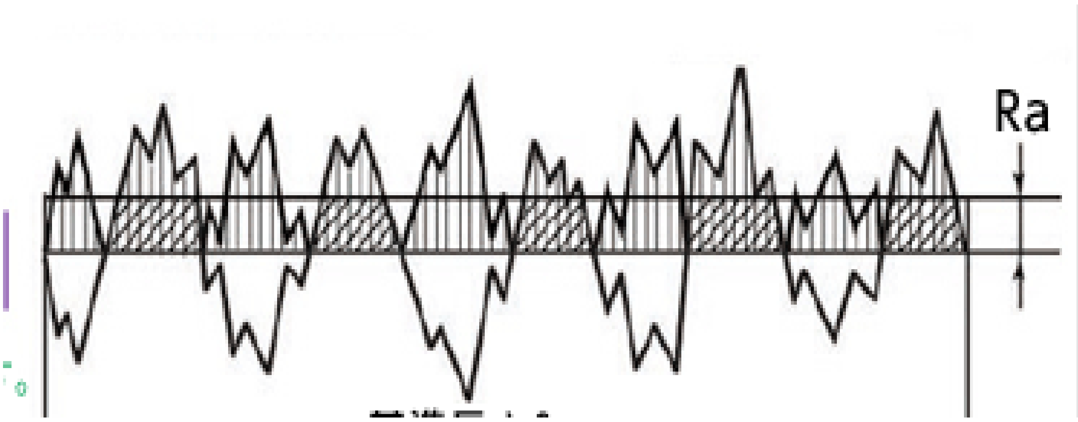

図 4.2　表面粗さの定義図 [6] より

これより R_a=1.6mm となる。ただ、この値は非常に現実と遠くため、後述するように現実に近い値である $R_a = 0.2$mm においても解析を実行した。

4.2　自由サーフェスと開水路

自由表面をもつ、流体を開水路という、例えば、河川は開水路である。それとは逆で液面をもたない流体が流れる道を閉水路という。たとえば、水道は水面を持たないので、閉水路に分類される。今回は開水路の条件を用いて、流体のシミュレーションを行う。開水路のシミュレーションは表面の複雑な変化を扱うため、非定常解析となる。図 4.3 に [10] から開水路の様子を載せる。

図 4.3　開水路の様子 [9] より

4.3　ナビエストークス方程式

波の支配方程式は一般にナビエストークス方程式で表わせることがしられている。ニュートン流体を仮定している場合のナビエストークス方程式は以下のようである。

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{p} \tag{4.9}$$

μ は粘性係数である。および連続の方程式は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4.10}$$

非圧縮流体の場合、ρ の時間依存性と位置依存性が消えるため、

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{4.11}$$

が成り立つ。

4.4　ナビエストークス方程式の無次元化 1

ナビエストークス方程式に対して、無次元化された変数 X, V, T への変数変換を行うこのとき、基準となる長さの次元を持つ定数を代表長さ L, 速度の次元を持つ定数を代表速度 U と呼ぶ。代表長さと代表速度の説明をする。

4.4.1　代表長さ代表速度の選び方

代表長さ、代表速度の選び方について説明する。代表長さ、代表速度は一般的に観測対象によって選び方が全く異なる。一般的に円筒のパイプを水が流れる場合には代表長さは内径、代表速度は平均流速が用いられることが多い。また大きな岩のまわりの波を考えるときには代表長さとして、岩の半径をとり、代表速度としては波の平均流速をとる。本実験では、円筒パイプの取り方にしたがって代表長さと代表速度を定義する。

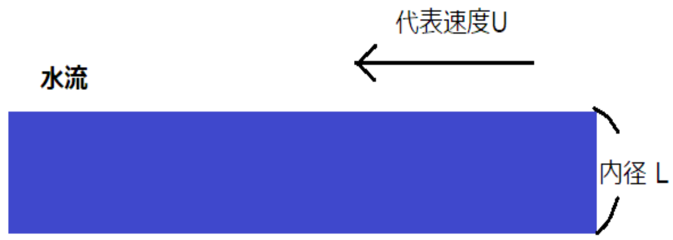

図 4.4　代表長さと代表流速の関係

4.5　ナビエストークス方程式の無次元化 2

無次元変数への変換は以下のようになる。

$$X \equiv x/L, V \equiv v/U, T \equiv tU/L \tag{4.12}$$

このときナビエストークス方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{V} + \mathbf{p} \tag{4.13}$$

ただし、$\mathrm{Re} = UL/\nu$ で定義されるレイノルズ数という無次元量である。ν は以下で定義される動粘性係数である。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{4.14}$$

レイノルズ数が等しい流体は同じ無次元化されたナビエストークス方程式を満たすため、流体としての振る舞いは同じだとみなすことができる。このような流体は互いに相似であるという。また Re>4000 を満たすような流体を乱流、Re<2000 を満たすような流体を層流と呼ぶ。大まかに言って、乱流、層流というのは流れの乱れ具合のことを指す。本実験では、常温の水と仮定し、動粘性係数 $1.004 \times 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ とし、代表的速度として、平均速度 $\approx$ 1m/s 代表長さとして内径 L=0.4m を選択すれば、Re=40000 程度となるから、明らかに乱流であることがわかる。

4.6　乱流と層流

たとえば、ある流体にインクを流す。このときインクの初速度をあげ、レイノルズ数 Re を大きくすると、インクは、途中から乱雑な方向に流れる。一方、層流ではインクは、まっすぐ流れる。このような流れの複雑さの度合を象徴的にカテゴライズしたものが、乱流と層流になる。[8] によれば乱流と層流の流れの違いを示した図は図 8.2 のようになる。

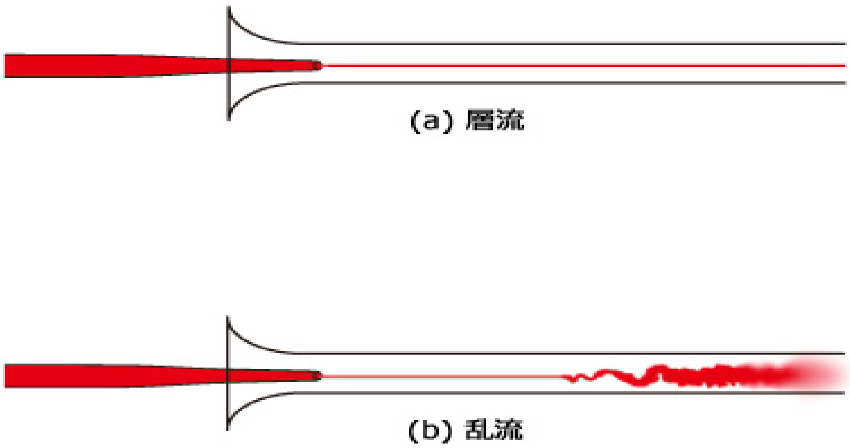

図 4.5　乱流の変化の様子 [8] より

4.7　充分に発達した流れ

流体は水入口から一定の速度で水が流入した後、劇的に粘性力が働く。この区間を助走区間といい、助走区間では粘性力により急激な圧力減衰が起こる。D を内径として、助走区間 L_i は層流の場合

$$L_i = 0.025\mathrm{Re} \tag{4.15}$$

乱流の場合

$$L_i = \quad (25\sim40) * D \tag{4.16}$$

となる。今回のモデルでは乱流であり、D=0.4m を代入すると

$$L_i = 10\sim16\mathrm{m} \tag{4.17}$$

となる。助走区間を過ぎると、流体は進行方向には流速の速度、分布、液面は変化しないことが知られている。このような流れのことを「充分に発達した流れ」や「完全に発達した流れ」に呼ばれる。本実験は、このような充分に発達した流れにおける乱流の様子を確認する。[10] から引用した図で図 4.6 に充分に発達した流れの様子を載せる。

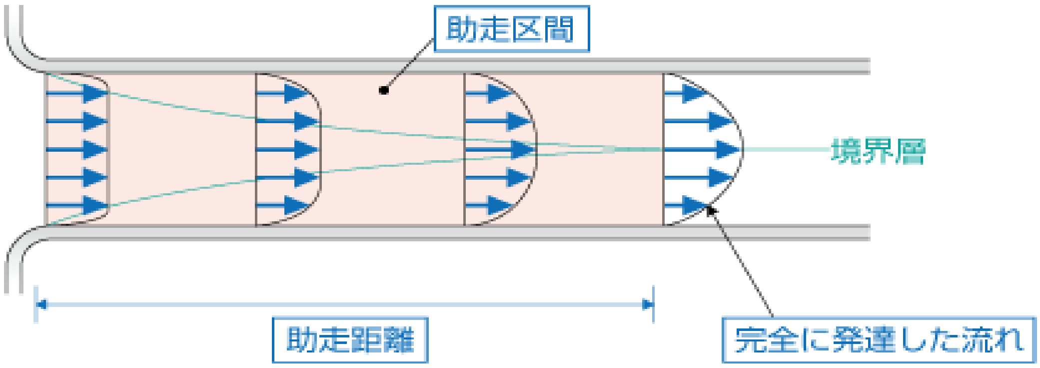

図 4.6　充分に発達した流れの様子 [10] より

4.8　常流, 射流

水面下流の波が上流に与える場合、常流と呼ぶ。一方、下流の波が上流に影響を与えない場合射流と呼ぶ。一般に傾きが小さい流れは常流、傾きが大きい場合の流れは射流とみなされる。常流の場合、下流の水流の変動が上流にも伝搬する。常流か射流かの定義はフルード数が 1 より大きいか、小さいかによる。フルード数は以下で定義できる。

$$F = \frac{v}{\sqrt{gh}} \tag{4.18}$$

ただし、v は平均流速であり、g は重力加速度、h は水深である。

今回の場合は 3km 級の長さが存在し、重力の傾きは小さく、常流と予測することができるが、水路の長さは長いための重力勾配雑音を与える領域は下流域から十分遠くにあるとみなすことができ、影響は一般的に小さいものと考えられる。しかし、本実験では用いるのは 20m と非常に短いパイプのため下流域からの影響は下記の出口損失による圧力降下と速度上昇によって生じることは十分考えられる。

4.9　出口損失と速度上昇

出口損失とは流体出口で起きる圧力降下のことである。出口損失は理想流体の場合、ベルヌーイの定理から流体の速度を v, 圧力を p 密度を ρ としたときに

$$\frac{1}{2}v^2 + p/\rho = \mathrm{const} \tag{4.19}$$

が成り立つ。上記の関係式から、出口付近の圧力が低い領域に達すると、速度 v が上昇することがわかる。今回の実験も流体出口では圧力 0Pa に設定するので、出口付近では速度上昇する可能性がある。

第 5 章

数値流体力学

5.1　陽解法

陽解法とは、コンピューターが流体の方程式の漸化式を更新するにあたって一つの未知変数である未来時間の項 F が複数の現在時間 P の項で書き表せるような漸化式で、計算を進める手順である。位置の添え字を i とすると

$$(F)_i = (P)_{i-1} + (P)_{i+1} + (P)_i$$

のような形になり、現在の情報から漸化式を更新し、未来時間の物理量を割り出す。

5.1.1　CFL 条件

陽解法で、充分な解析を行うには CFL 条件を満たすことが必要である。メッシュの粗さを ΔL、時間刻み幅を Δt とすると、CFL 条件とは以下の条件を満たすことである。v を平均速度としたときに

$$v \leq \frac{\Delta L}{\Delta t} \tag{5.1}$$

を満たすことである。直観的な説明としてはデータの更新間隔よりも、流体の速度変化が早い場合、解析が追い付かないというような意味になる。陽解法では、計算を安定的にすすめるためには小さい時間幅をとらなければいけないことが知られている。また一般的に、陽解法は定常解析において使われることが多い。

5.2　陰解法

陰解法は、複数の未来時間の未知変数を用いて表される漸化式に対して用いられる数値解法である。漸化式は現在時間の項が一つあり、

$$(F)_i = (F)_{i-1} + (P)_i + (F)_{i+1}$$

のような形になる。たとえば、現在の情報がわかっているとして、

$$
\begin{aligned}
(F)_1 &= (F)_0 + (P)_1 + (F)_2 \\
(F)_2 &= (F)_1 + (P)_2 + (F)_3 \\
(F)_3 &= (F)_2 + (P)_3 + (F)_4
\end{aligned}
$$

の連立方程式が組める。このうち、たとえば、境界条件が定まっているとして $(F)_0$ と $(F)_4$ の値が確定しているとすれば、上記方程式は未知変数 $(F)_1$,$(F)_2(F)_3$ の 3 元連立方程式であり、解くことができる。このように、漸化式と境界条件から解ける連立方程式を導く方法を、陰解法と呼ぶ。一般的に非定常解析では陰解法が用いられる。今回のシミュレーションでも非定常解析なので。陰解法によるコンピュータ計算が行われる。また AutodeskCFD はメッシュ間隔に対して、インテリジェント制御機能というものがあり、計算が収束するように自動で時間刻み幅が制御されるので、今回、それを用いて解析を実行する。

5.3　VOF

開水路において、自由表面をもつ流体の解析は VOF 法という方法が便利である。VOF とは Volume Of Fluid の略称であり、単位体積あたりの流量を指す無次元量である。[7] によれば、各 VOF 値が流体に適用される様子は以下のように書ける。

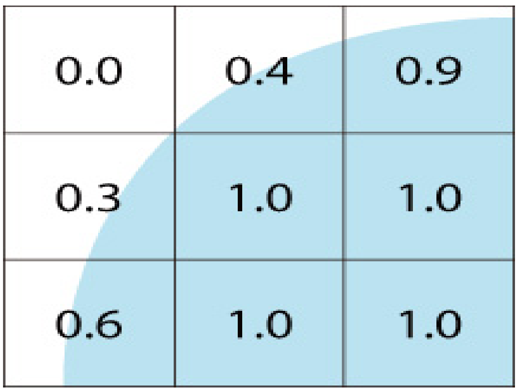

図 5.1　各 VOF 値が流体に適用される様子 [7] より

図 5.1 を説明すると、0 の値は空気に該当し、1 の値は完全にその領域が、流体で埋め尽くされていることをあらわす。今回、VOF を用いることで、液面高さの変動を導く。

第 6 章

地下水が作る重力勾配雑音

6.1　地下水が作る重力勾配雑音の定式化

今回、地下水が作る重力勾配雑音が与える誤差の影響を定式化する。図 8.3 のように、干渉計のミラーの下 2m の領域に $L =$ 約 3km にわたって水が流れている。図は [12] から引用した。

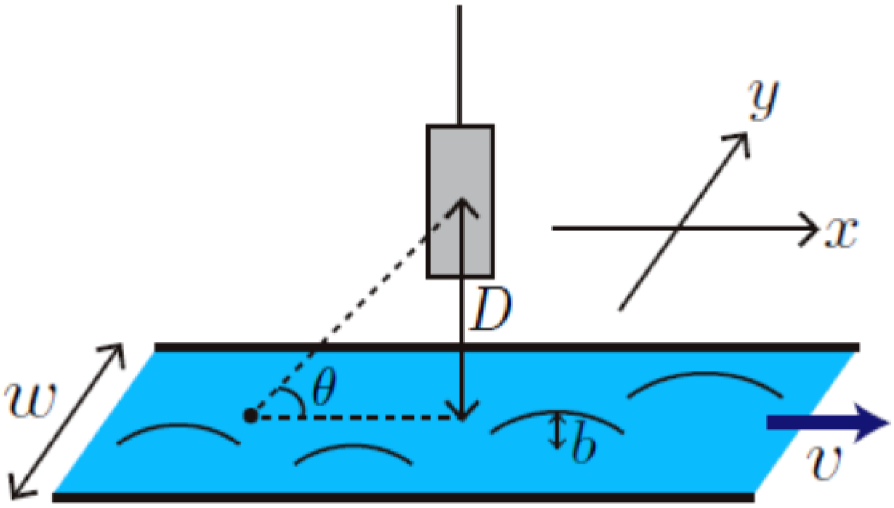

図 6.1　ミラーと地下に流れる水流の様子

このとき、ミラーに与える加速度勾配は以下のように記述できる。

$$a = \int\int \frac{G\rho b(x,t)}{x^2 + y^2} dxdy \tag{6.1}$$

ただし、積分範囲は x は水の流れる方向、y 方向はそれと垂直な水平方向の水が流れている領域である。w は内径である。ここで b とは時間的な平均と空間的な平均からの水の表面からの変動を指す。G は万

有引力定数である。このとき、

$$a = \int\int \frac{G\rho b(x,t)\cos\theta}{D^2+x^2+y^2}dxdy \tag{6.2}$$

$$= G\rho\int\int \frac{b(x,t)x}{(D^2+x^2+y\ 2)^{3/2}}dxdy \tag{6.3}$$

$$= -G\rho\int\int \frac{\partial b(x,t)}{\partial x}\frac{1}{(D^2+x^2+y\ 2)^{1/2}}dxdy \tag{6.4}$$

$$\approx -Gw\rho\int \frac{\partial b(x,t)}{\partial x}\frac{1}{(D^2+x^2)^{1/2}}dx \tag{6.5}$$

となる。ただし、上の式の 3 行目で x に関する部分積分を行い、4 行目で y 方向の積分は $y=0$ まわりで近似することを用いた。a のパワースペクトル密度を S_a とすれば、

$$< \tilde{a}(\Omega)\tilde{a}(\Omega') >= \sqrt{S_a}\delta(\Omega-\Omega') \tag{6.6}$$

とかくことができる。ただし、$\tilde{a}(\Omega)$ は a のフーリエ変換したものであり、$<,>$ は複素共役との積を表す。ひずみ感度の次元に直したものを $\sqrt{S_h}$ とすれば

$$\sqrt{S_h} = \frac{1}{L\Omega^2}\sqrt{S_a} \tag{6.7}$$

と書き表すことができる。

6.2 先行研究-西澤モデル

今回、流体力学の数値シミュレーションでは先行研究-西澤モデルが存在する。大まかに説明すると西澤モデルは、波の位相速度が一定、乱流が一様であるということと、コルモロゴフのスケーリング法則を用いることで、感度スペクトルを導いたものである。([12]) 以下にその感度のグラフを [12] から載せる。

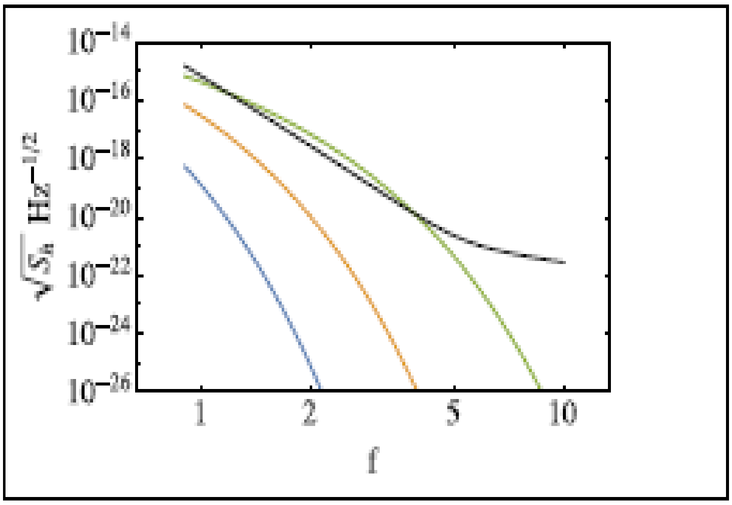

図 6.2　各水流の速さにおける雑音 $v=1$m/s(青),$v=2$(オレンジ),$v=5$(緑),KAGRAsesitivity(black)

ただし $D=2\mathrm{m}, w=0.4\mathrm{m}, \rho=1\mathrm{g/cm^3}$ としてある。水の速度が速いほど、雑音の大きさがおおきことがわかる。また $v=5\mathrm{m/s}$ では KAGRA 感度を制限していることがわかる。

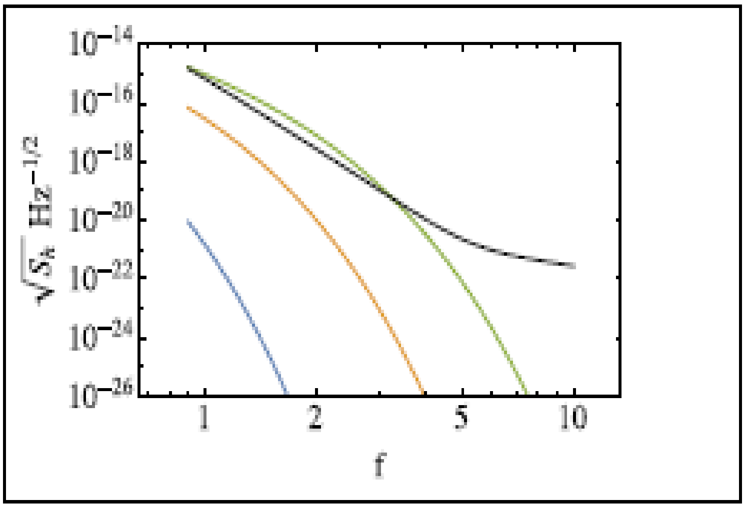

図 6.3　各 D の違いによる雑音 D=1m(緑),D=2m(オレンジ),D=5m(青)

ただし $v=2.0\mathrm{m/s}, \rho=1.0\mathrm{g/cm^3} w=0.4\mathrm{m}$ としてある。$D=1\mathrm{m}$ では感度を制限している。西澤モデルからは速度が速いほど、雑音がおおきく、距離が遠いほど雑音が小さいことを示している。

第 7 章

実験内容

7.1　パイプの設計

今回、用いるシミュレーションの実行条件を考える。充分に発達した領域が観察できるよう内径 0.4m、長さ 20m のパイプを設計する。そのあと AutodeskCFD (https : //www.autodesk.co.jp/products/cfd/overview) を用いて、解析を実行することにより、流体の運動をシミュレートする。パイプは Autdesk 社の Fusion360(https://www.autodesk.co.jp/products/fusion-360/overview) を用いることで設計した。パイプのモデルは以下図 7.1 のようになる。また、パイプの先では水が停滞しないように、排水部を設ける。排水部では、水が自由落下し、自然に下へ排出されるものとする。排水部は奥の壁面に当たらないようにゆとりをもたせ、 2 m程の横幅の長さをとった。排水部のようすはは図 7.2 に載せる。

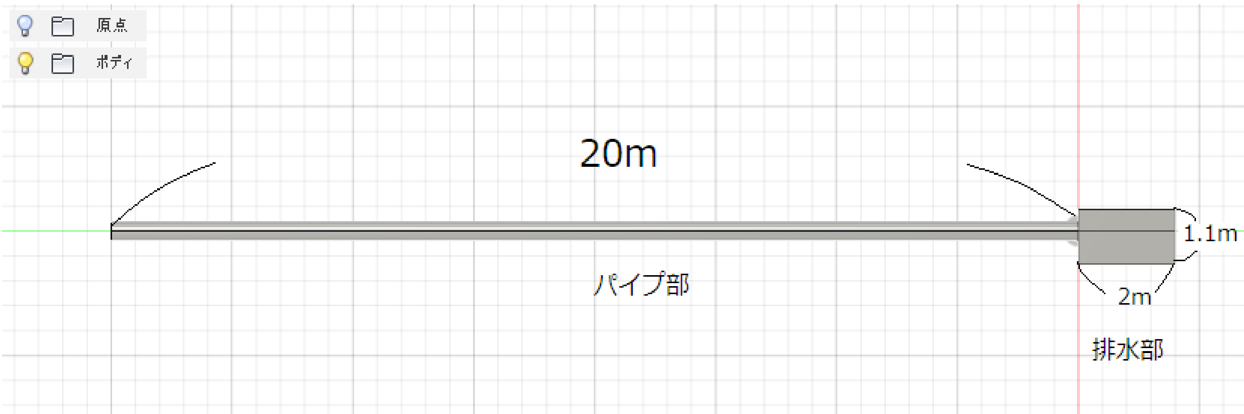

図 7.1　パイプの横から見た断面図

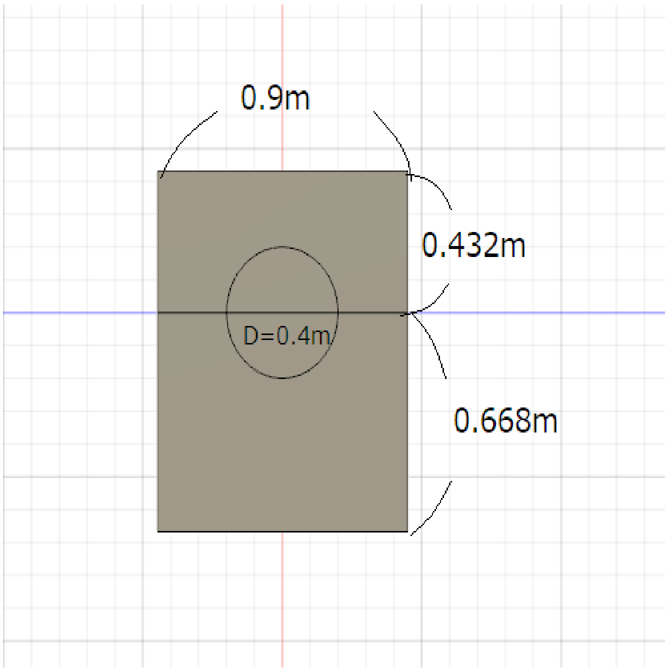

図 7.2　パイプを縦から見た図

7.2　流体の設定:材料エディタ

本実験では水を用いることで、流体の解析を行う。使用する水の条件を以下に載せる。CFD における、水のデフォルト条件に壁面粗さ Ra を変更したもの材料として、使用した。今回、マニングストリンクラーの公式によれば、1.6mm の壁面粗さになるので、その値を代入した、材料エディタは図 7.3 は以下のようになる。

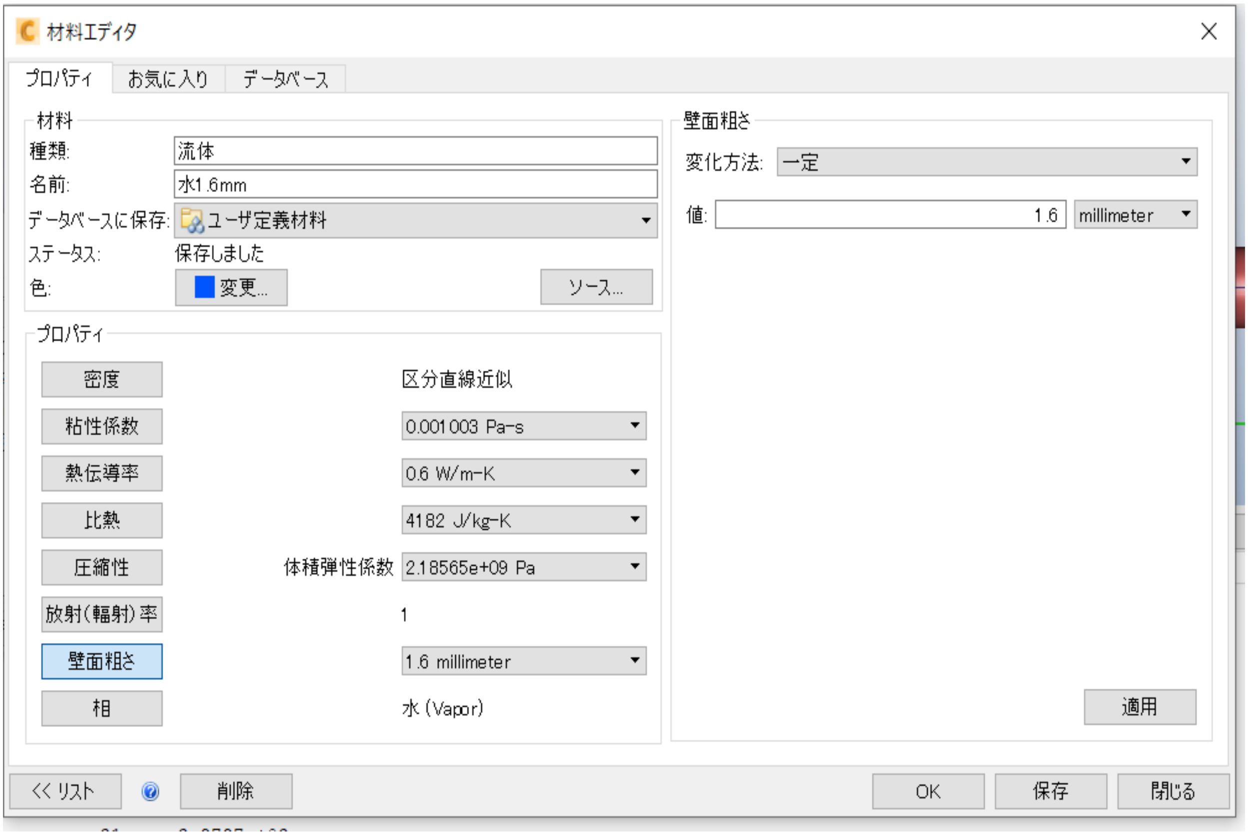

図 7.3　材料エディタ

7.3　境界条件

今回の解析は現実の値である十分に発達した領域で流速 $v = 1\text{m/s}$ となるように境界条件の速度を $v = 0.8, 1.2, 2.0\text{m/s}$ の 3 種類で境界条件を設定した。その様子を図 7.4 にのせる。

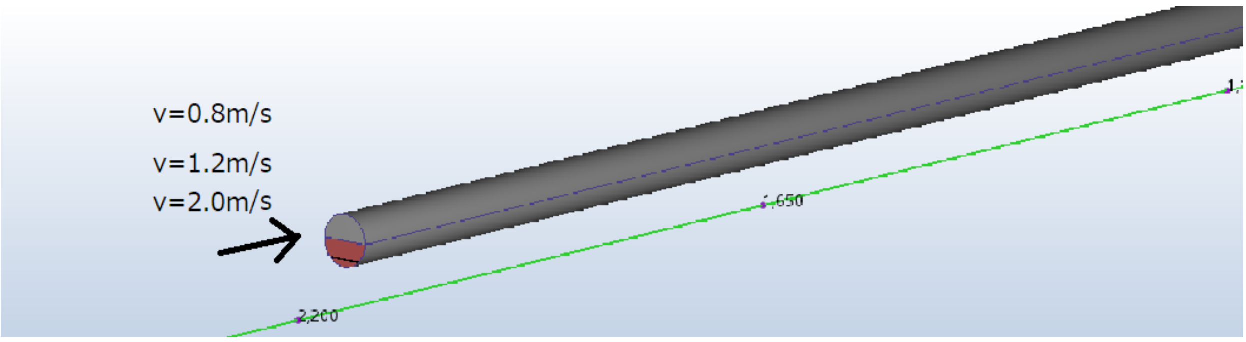

図 7.4　パイプの入口の境界条件

また排水部の底面に圧力 0 Pa を設定した。その様子を図 8.7 に載せる。これは排水部の底面は大気圧に等しい出口であるということを表している。

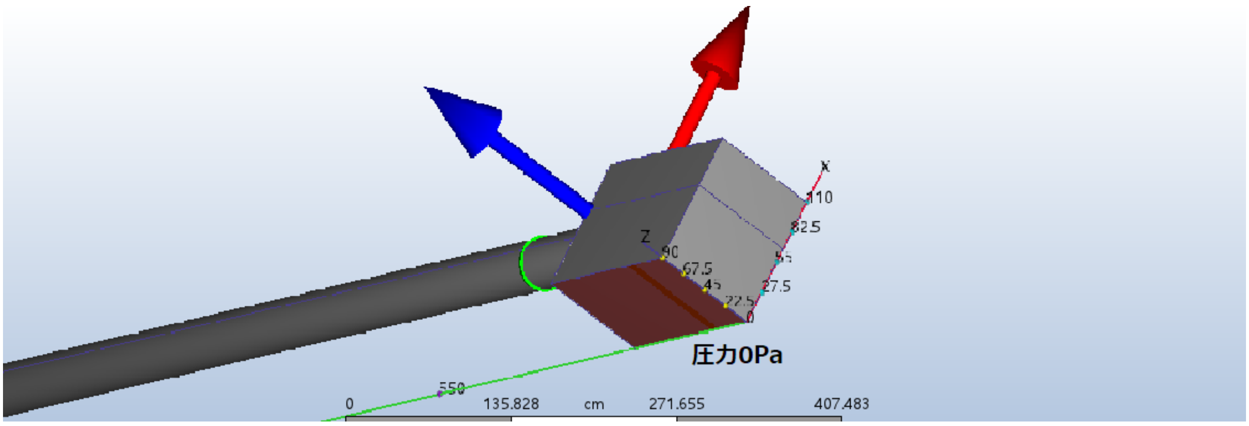

図 7.5　排水部の境界条件

7.4　パイプの傾きの設定

また本パイプは 0.3% で進行方向に傾いているので、自由サーフェス条件で、重力の傾き 0.3% の情報を加える。その様子を図 8.7 に載せる。

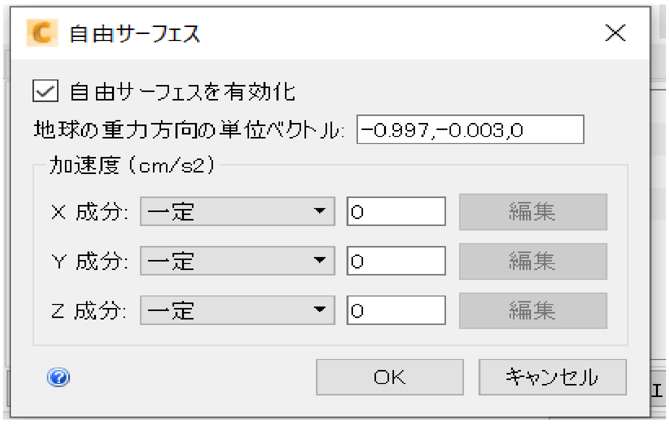

図 7.6　重力の勾配の入力

第 8 章

実験結果

8.1 解析結果

時間ごとの解析の様子を以下に示す。それぞれの境界速度

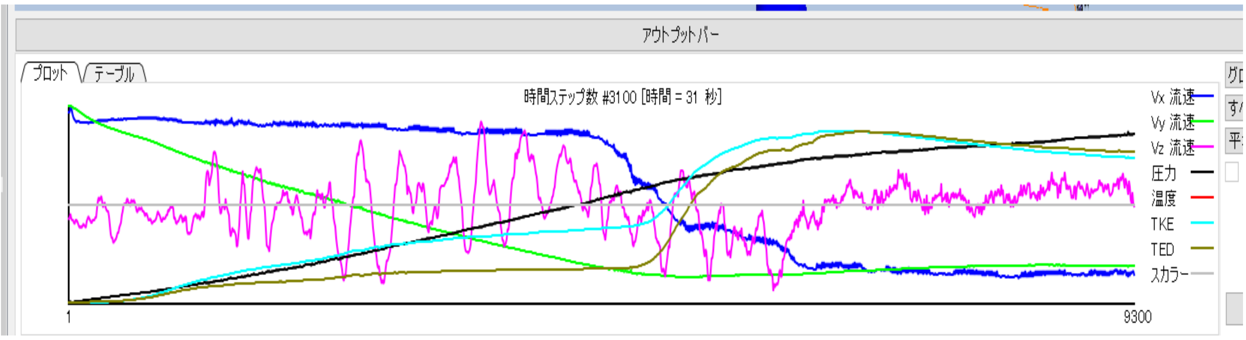

図 8.1 時間プロット $v = 2.0\mathrm{m/s}$

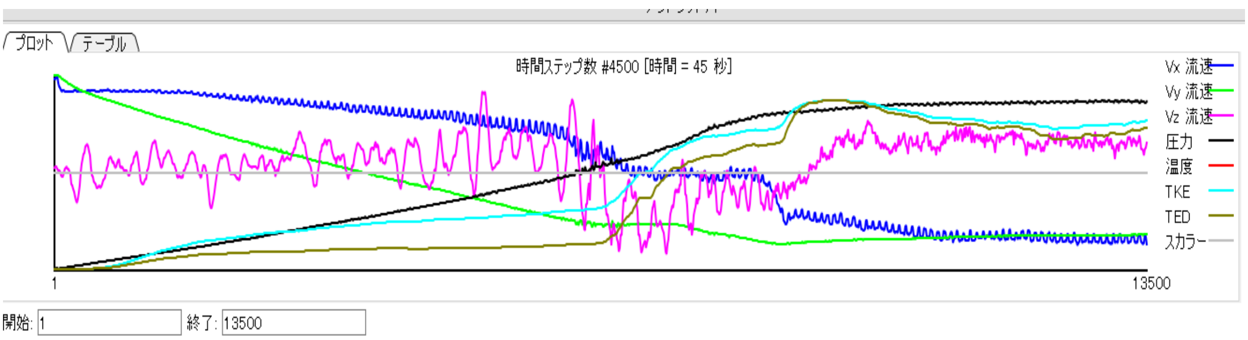

図 8.2 時間プロット $v = 1.2\mathrm{m/s}$

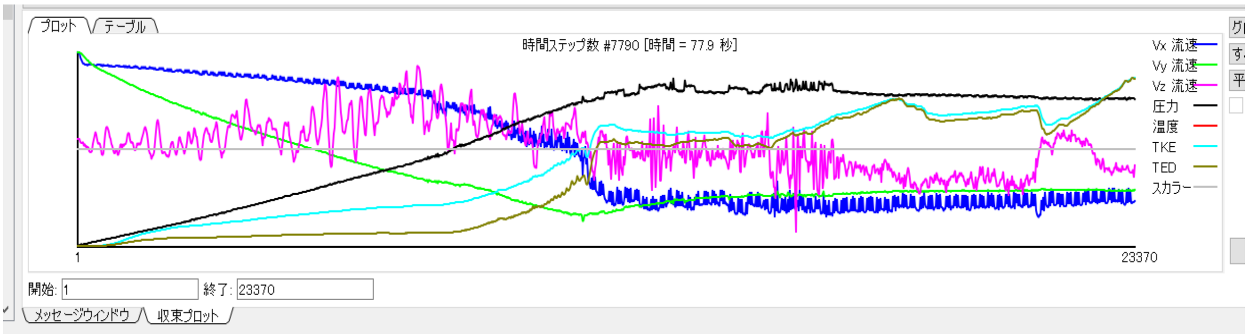

図 8.3　時間プロット $v = 0.8\mathrm{m/s}$

TKE は乱流運動エネルギー TKD は乱流消失率と呼ばれる量である。x 方向を鉛直上向き、$-y$ を水の進行方向 z を水平方向にとっている。最終時刻付近では v_x, v_y が収束している様子がうかがえる。v_z が振動しているのは水平方向の波の揺らぎによる影響なのではないかと考えられる。

8.1.1　水流の自由サーフェスの様子

$v = 2.0\mathrm{m/s}$ における水流の自由サーフェスの様子を提示する。流体の色は流速を表している。赤に近づくほど、流速が早い。

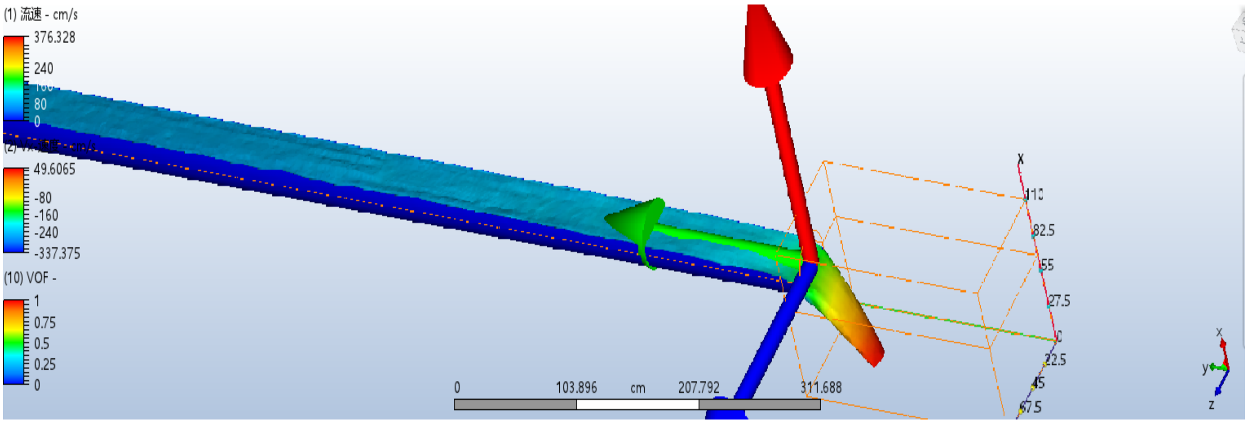

図 8.4　VOF0.5 以下の領域

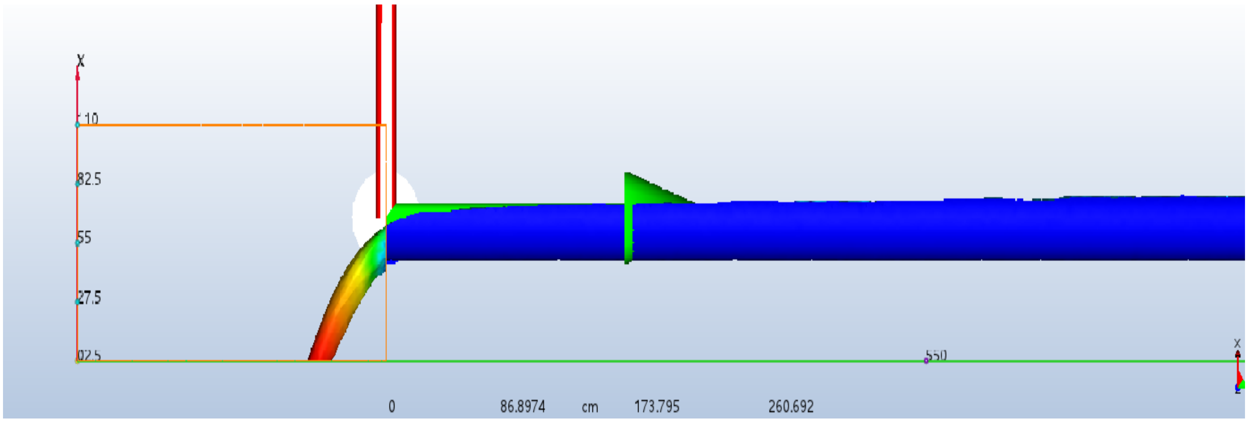

図 8.5　横から見た VOF0.5 以下の領域

ごく自然に水が流れており、不自然な点はないことがうかがえる。

8.1.2　メッシュの様子

以下に VOF が 0.5 以下になる領域の水面のメッシュを載せる。

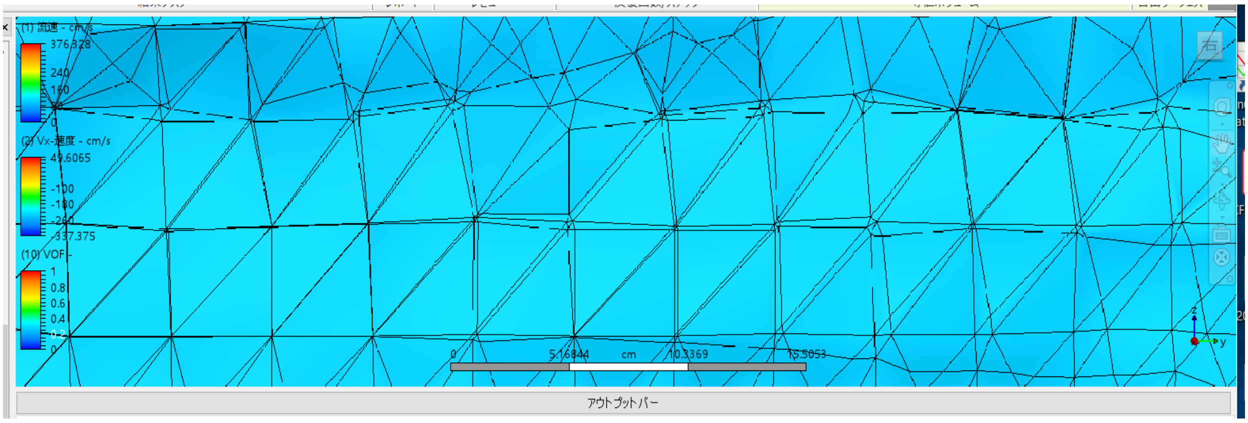

図 8.6　充分に発達した領域のメッシュ

図 8.6 より、水面では約 3.5cm おきにメッシュが作られていることがわかる。

8.1.3　水流の速度

それぞれの速度において、水流の鉛直中心部 (底から 10cm の高さ) の流速の直線分布を調べた。図 8.7, 図 8.8, 図 8.9 にそれらを載せる。

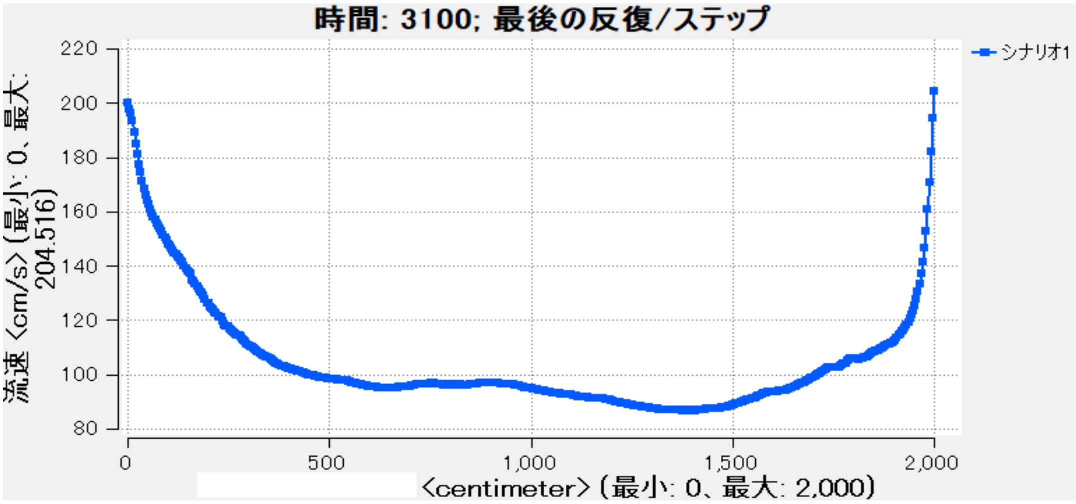

図 8.7　境界条件 $v = 2.0$m/s 最終時刻 31sec における鉛直 10cm の位置の入口から出口までの流速の直線分布

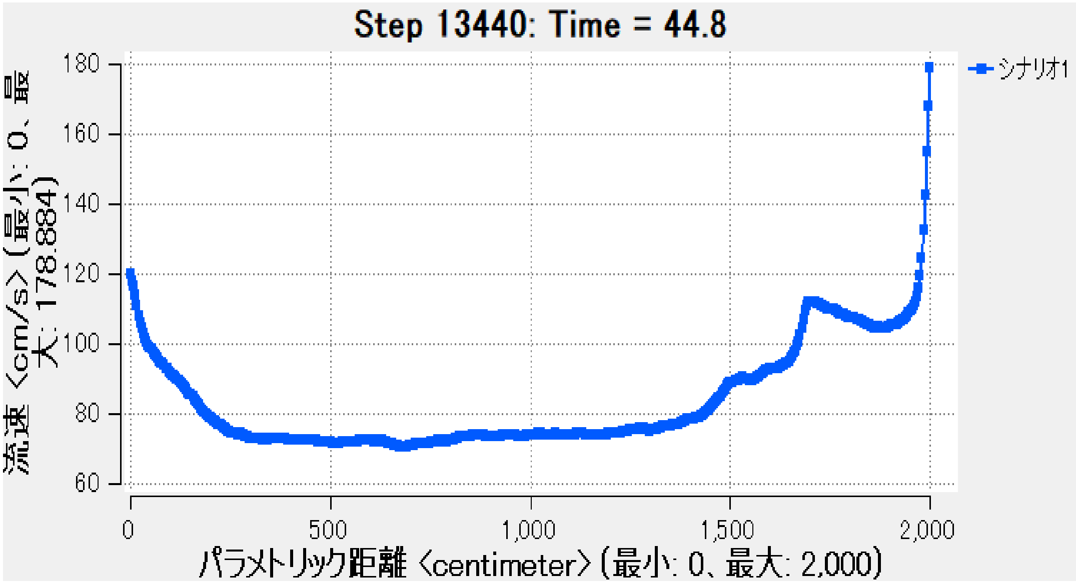

図 8.8　境界条件 $v = 1.2$m/s 最終時刻 45sec における鉛直 10cm の位置の入口から出口までの流速の直線分布

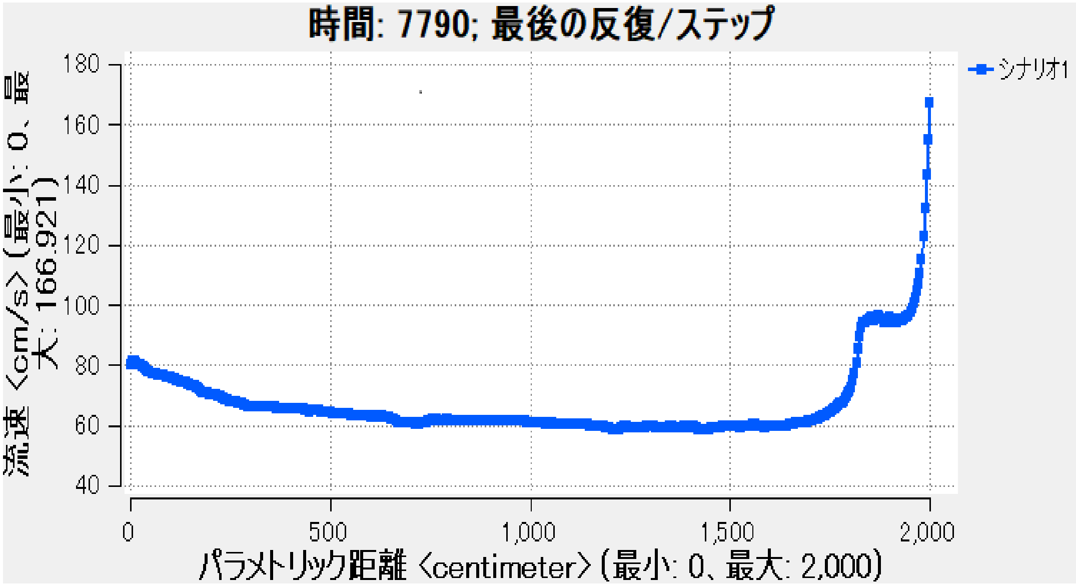

図 8.9　境界条件 $v = 0.8$m/s 最終時刻 77.9sec における鉛直 10cm の位置の入口から出口までの流速の直線分布

このことから、全体的に 13m〜15m 付近までは安定しており、15m を超えると急激に加速してることがわかる。加速は出口の圧力降下によるものではと考えられる。13m〜15m までの間を十分に発達した領域とみなし、特にその付近での流速が 1m/s に落ち着いている、境界条件 $v = 2.0$m/s の解析モデルが正しいとして考えることができる。

次に充分に発達した領域における、液面の高さの位置依存性を調べる。

8.2　充分に発達した領域における液面高さの位置依存性

今回、VOF の時間平均からの変化が水面の高さの変化に比例するとみなすことで、水面の高さの変化を算出する。

液面に相当する高さとして、最終時刻における入口から 13m の位置で VOF = 0.5 となる水面の高さとした。そのような位置はパイプの下から 10cm の高さとなった。その高さにおける充分に発達した領域 [13m〜15m] の VOF の直線分布を時間 [30.64〜31sec] の間で 0.04sec ずつとりだし、その時間平均をとったものとの差をもとめる。そのような差分は以下のようになった。

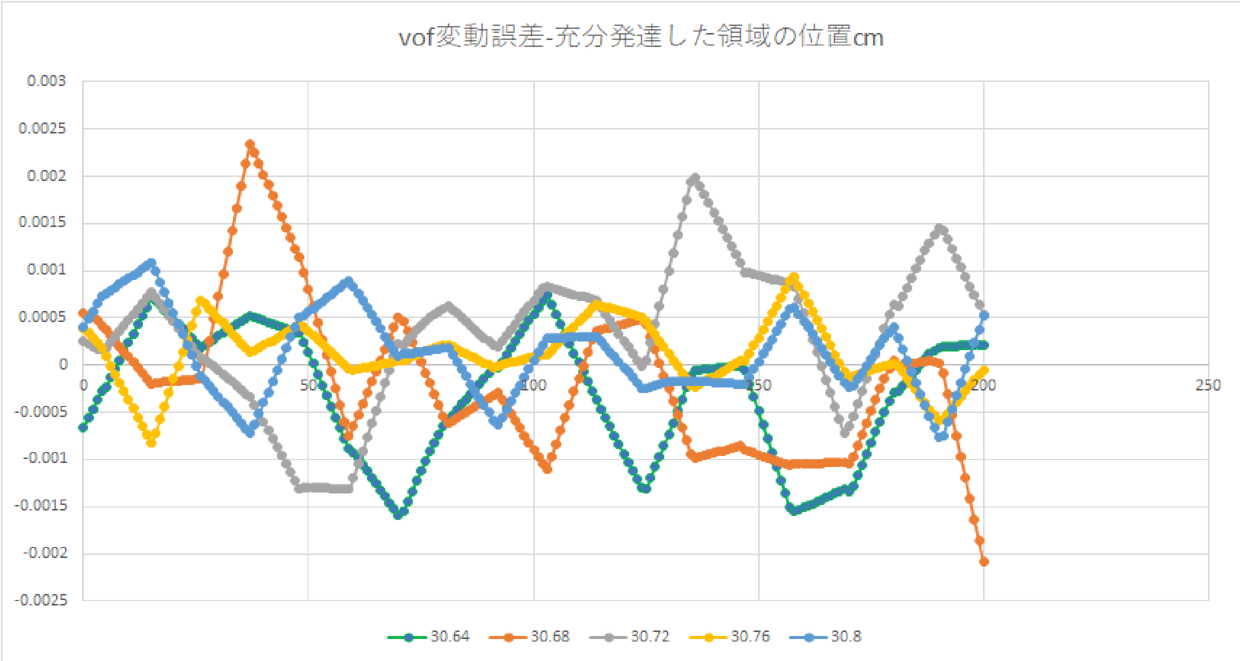

図 8.10　13m〜15m までの距離-VOF の変動 (30.64sec から 0.04sec ずつ 5 点)

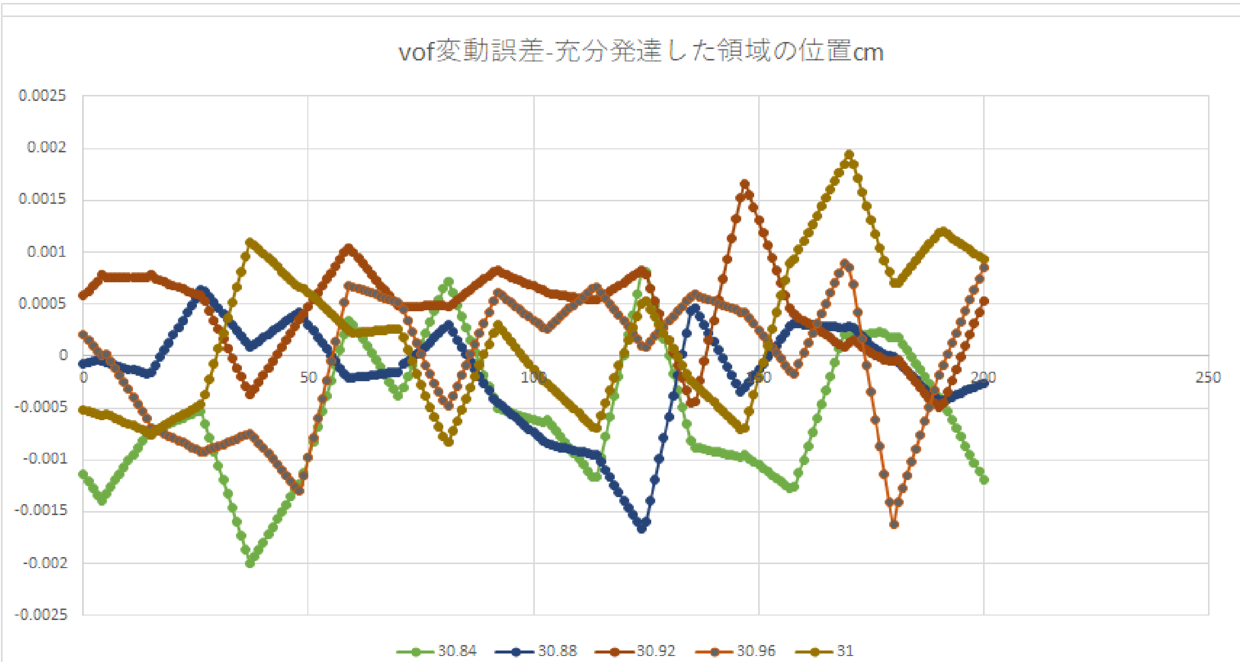

図 8.11　13m〜15 までの距離-VOF の変動 (30.84sec から 0.04sec ずつ 5 点)

ことなる時間で、著しく変化することがうかがえる。これは乱流により流体の安定性が低いためである推測する。これが液面の平均からの変化 $b(x,t)$ に比例すると考えられる。

8.3　$d(b(x,t))$ と $d(\mathrm{VOF})$ の比例係数

次に VOF の変動と水面高さの比例係数を算出する。これは 2 つの時刻の間で、ある点における VOF の変化量と、VOF が一致する液面高さの変化量の比をだすことで求める。28sec では、13m の位置で、高さ 9.84cm が VOF=0.5 の位置になっていた。すなわち、VOF=0.5 の点は 0.16cm 下降した。また、このとき 10cm の位置では VOF=0.496673 であり、このことから、VOF の変化量は 3.33×10^{-3} である。したがって、水面の高さの変化量と、VOF の変化量の比は

$$\mathrm{d}(b)/\mathrm{d}(\mathrm{VOF}) = 0.0016/(3.33 \times 10^{-3}) = 0.481\mathrm{m} \tag{8.1}$$

となった。

8.4　式 (6.5), 式 (6.7) から重力勾配雑音の導出

式 (8.1) を図 8.10 図 8.11 にかけることによって、それぞれの時刻における十分に発達した領域における $b(x,t)$ を求めることができる。次に、これによって、式 (6.5) および式 (6.7) を求める。次の仮定をとる。充分に発達した領域の波は一様に流れる。つまり、[13m〜15m] の波の変化の様子が式 (6.5) の積分区間において周期的に繰り返されるものとする。

今回、積分領域を [± 6m] で 0.01m ごとに区分求積法によって求めることにする。これを求めた図が図 8.12 のようになる。それぞれ $D = 0.2, 2, 5\mathrm{m}$ によって分類した。

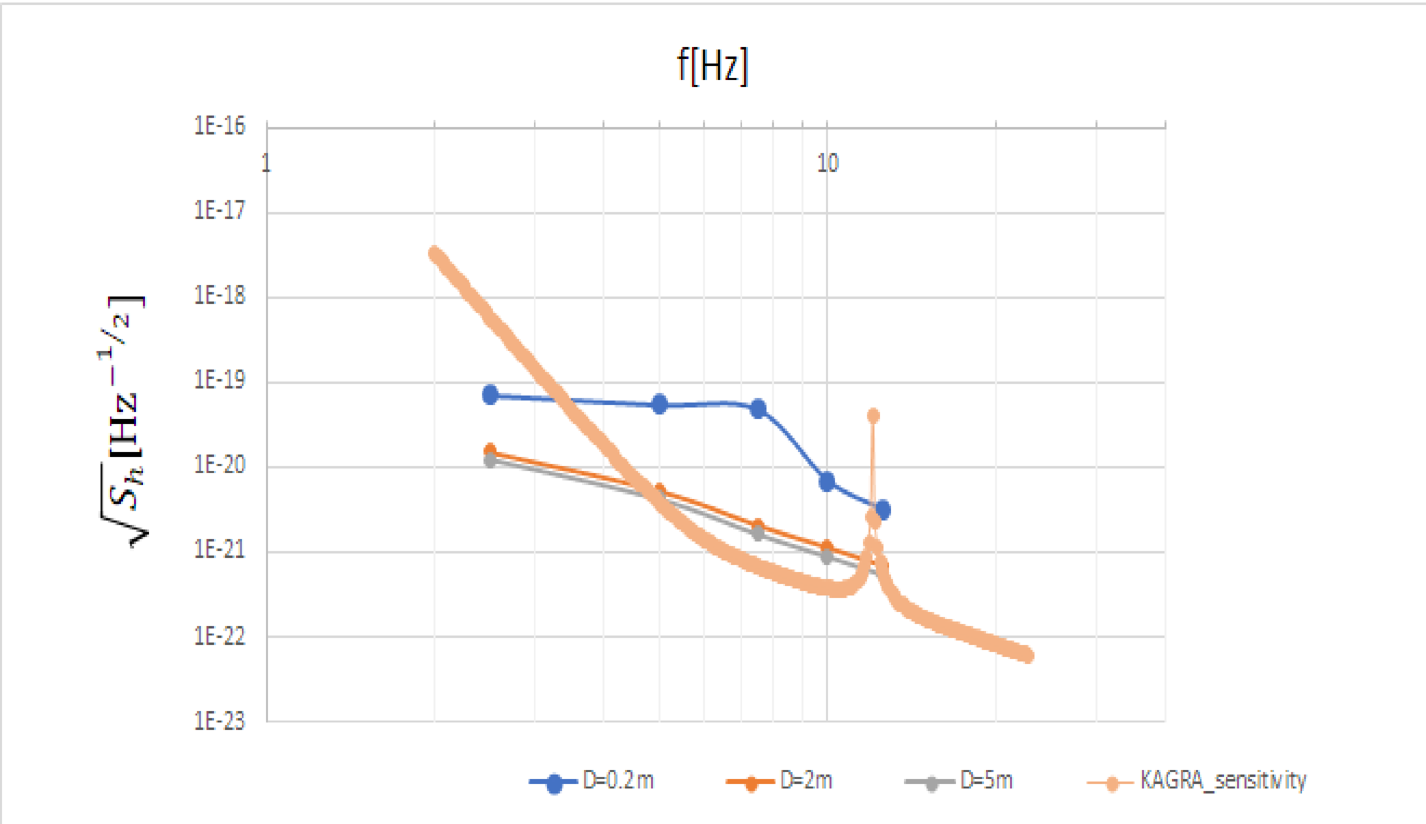

図 8.12　D=0.2,2,5m における KAGRA 感度との比較

図 8.12 より 4Hz 以上で感度を制限することがわかる。積分範囲が足らなかったのではないかと考え、積分範囲を倍に拡張したものも計算した。それも提示すると

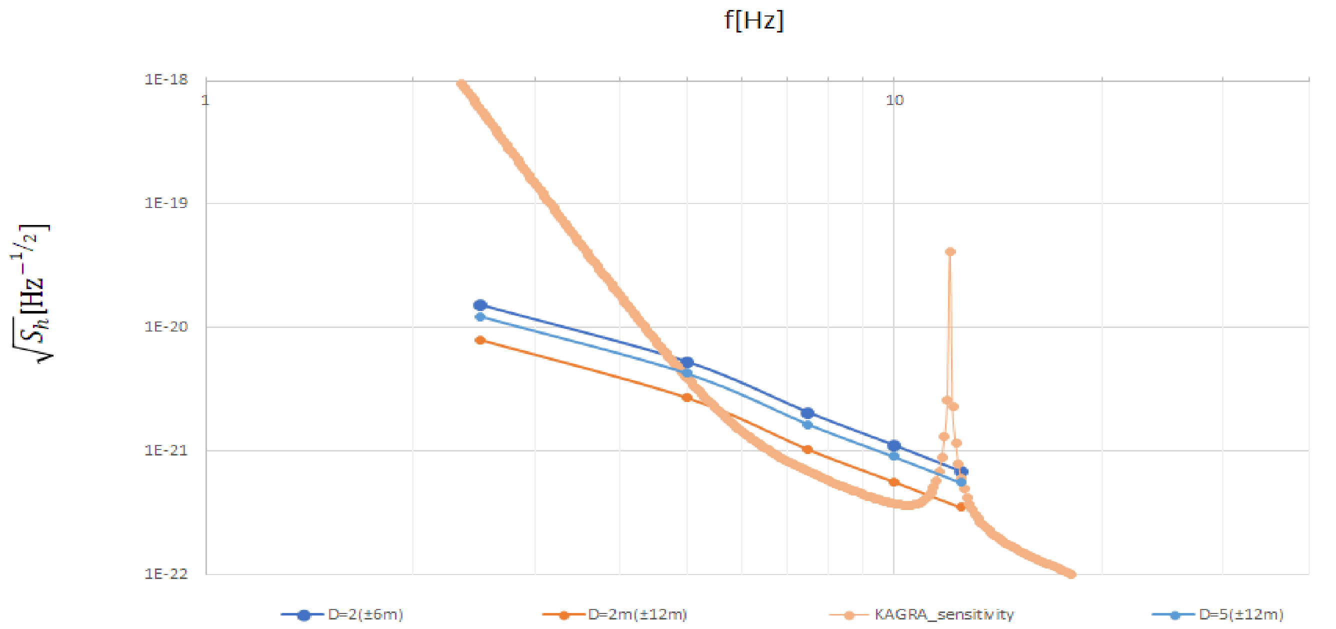

図 8.13　積分範囲± 12m に拡張した D=2,5m

となった。

全般的に積分を大きくるすると、雑音の大きさは小さくなった。また、D=5m の雑音が D=2m による雑音より大きいという西澤モデルに反する不可解な結果になった。さらに、依然として雑音は、KAGRA 感度を 5Hz 以上で制限することが分かった。

8.5　フルード数の計算

今回のモデルにおいて、充分に発達した領域における液面の高さからフルード数を計算すると、

$$F = \frac{v}{\sqrt{gh}} = 0.714 < 1 \tag{8.2}$$

となった。したがって充分に発達した領域は常流であることがわかり、下流域の影響を受けていることがわかる。

8.6　追加実験 $\mathrm{R_a} = 0.2\mathrm{mm}$

今回の実験では、ニュートニアンノイズが脅威的であったため $\mathrm{R_a} = 0.2\mathrm{mm}$ に再設定して v=2.0m/s の同条件で解析を行い, 流速の分布を調べた。その様子を以下に載せる。

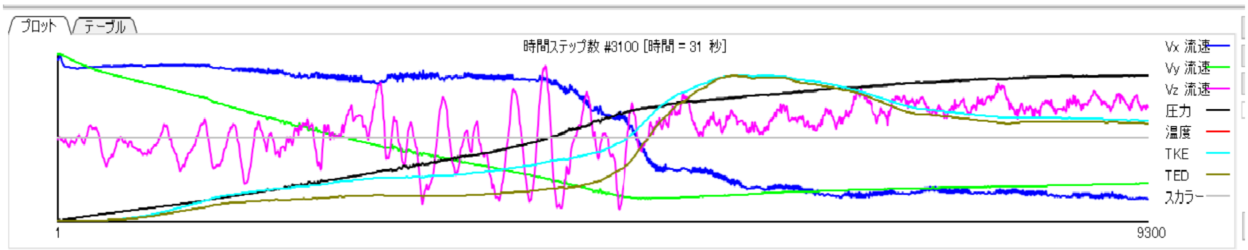

図 8.14　Ra=0.2mm における時間プロット

図 8.14 をみれば、わかるように、v_x, v_y はともに収束していることが見受けられる。

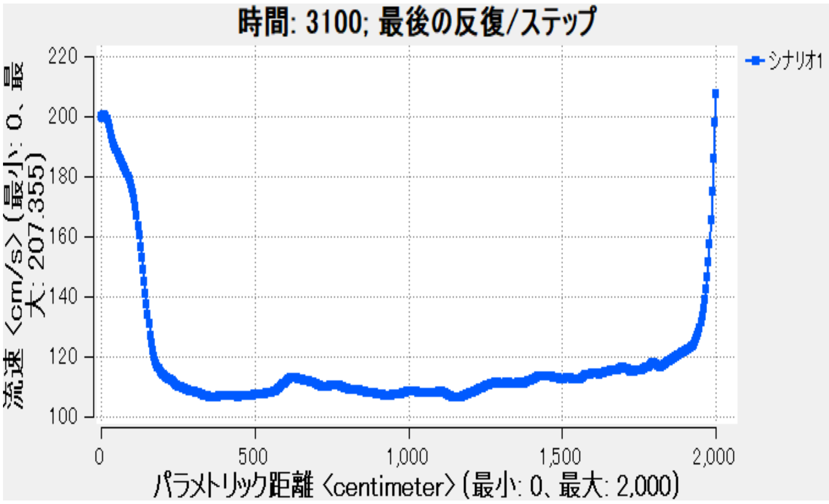

図 8.15　Ra =0.2mm における-10cm の地点における流れ方向の直線分布

雑音スペクトルまで導出はできなかったが、Ra=1.6mm のときより、十分に発達した領域で、流速が落ち着いていることがわかる。このことから、壁の摩擦の平均高さが小さければ、流速の変動も小さく、雑音も小さいのではという関係が推測できる。

8.7　より厳密は液面高さの変動の取得

また、より厳密に高い精度で液面の高さ $b(x,t)$ を求める方法を考える。

図 8.16 のように VOF=0.5 における、液面をマウスポインタであてると左下にデカルト座標で表示できる機能が発見された。

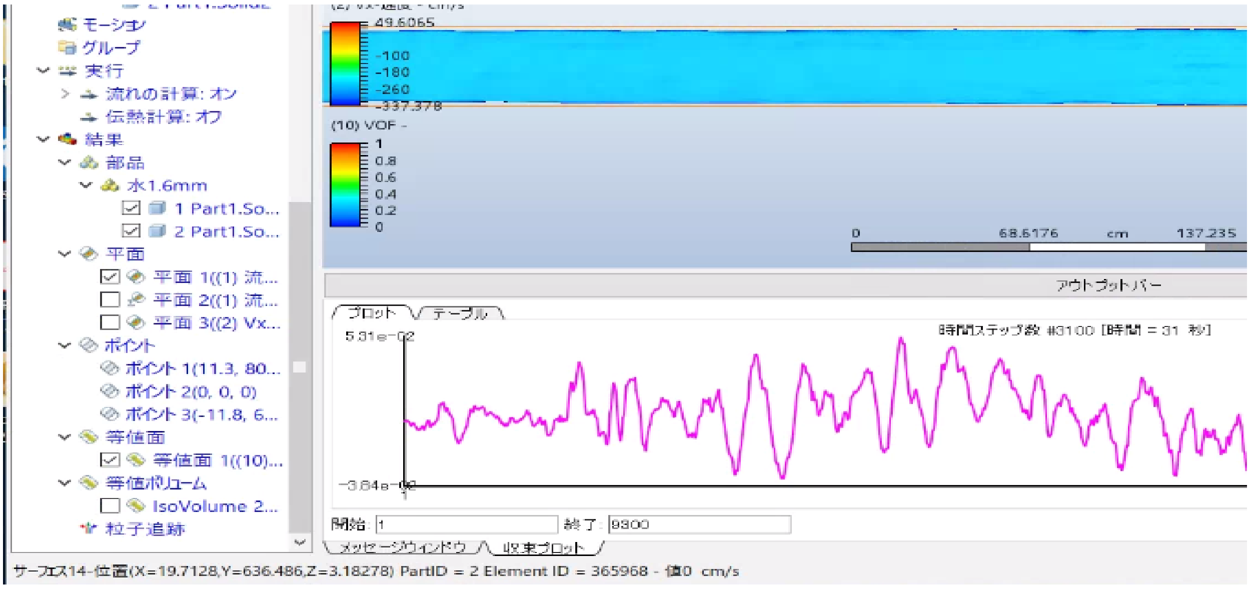

図 8.16　液面高さの 3 次元表示　マウスポインタを流体に当てている。

これを最終時刻から 0.04sec ずつ 10 点前までをサンプリングし、位置に関して充分に発達した領域で１００点ほどサンプリングすれば、より厳密な液面の高さがわかる。ただ、この方法は手動でマウスを扱って取得することは困難である。

そこで、例えば、次のような Python を用いたプログラムをつかって、効率的な液面の高さを求める方法で液面高さを取得する。

液面の断面を VOF の値によって次ページの図 8.17のように色をレベル分けする

1.マウスを鉛直方向にずらし、VOF = 0.5 の色になったら、スクリーンショットをとる

マウスを液面より上の位置に移動させ、波の進行方向にマウスを 2 ポイントだけ移動させる。1 に戻る

これにより、手でマウスを動かす手間が省ける。これをそれぞれの時間ごとで行う。また、そのあとは手順は

ファイル内のスクリーンショットの文字の部分を抜き出す→ファイル内の文字を csvや txt 形式に書き出す

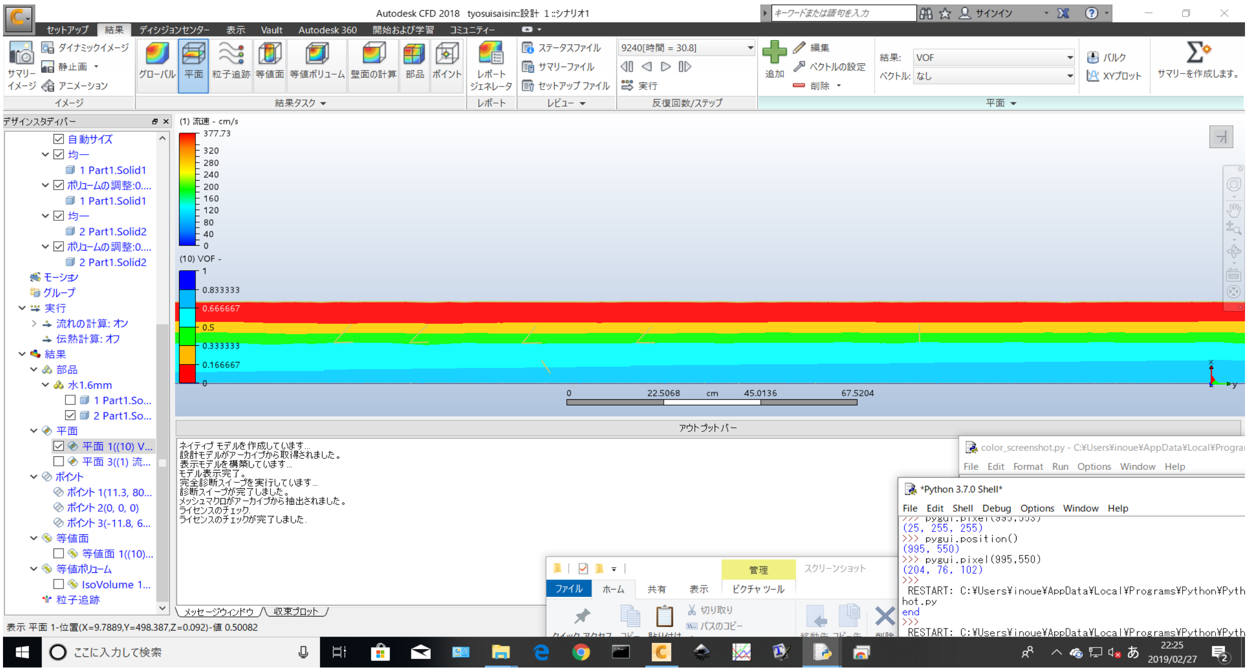

図 8.17　鉛直方向で切った断面を VOF の値ごとにレベル分けした図

次ページの図 8.18 は VOF ＝ 0.5 の位置の色 (=緑色と水色の境界) までマウスを鉛直方向に移動させ、その地点でスクリーンショットをとり進行方向に 2pixel だけ移動させ、鉛直方向の位置を初期状態に戻し、また鉛直方向に液面の境界探す作業を繰り返すというプログラムのコードである。充分に発達した領域は入口から 13m～15m とした。

```
import os
import time
import pyautogui as pygui
x=492#初期位置の設定
y=540
x_end=1515
dx = 2
dy=1
pygui.moveTo(x,y)
time.sleep(1)
while x<1838:
            pygui.moveTo(x,y)
            rgb = pygui.pixel(x,y)#rgb値を取得
            time.sleep(0.04)
            if float(rgb[2])  >200: #bが200以上の場合
                 pygui.typewrite(['printscreen'])
                 x=x+dx #x方向に移動
                 y= 540#初期化
            else:
                 y=y+dy#y方向に移動
print('end')
#VOFは色ラベルに分け、色を反転させている。
#邪魔な記号が存在するため。
```

図 8.18

次ページの図 8.19, 図 8.20 はスクリーンショットで取得した画像から液面の文字を読み取るプログラムコードである。図 8.21 は切り出した文字の画像である。これを X と Y について文字として読み取り csv ファイルに起こす。今回文字を読みとる方法としては TesseractOCR[13] を利用した。

```
from PIL import Image
from PIL import ImageEnhance
import csv
import sys
import pyocr
import pyocr.builders
import re
tools = pyocr.get_available_tools()
if len(tools) == 0:
    print("No OCR tool found")
    sys.exit(1)
# The tools are returned in the recommended order of usage
tool = tools[0]
X=[]
Y=[]
Z=[]
R = 673 #画像数
num = 4711 #初期番号
F = [[0 for i in range(3)] for j in range(R)]#csvファイルの行列表現
for k in range(R):
      s = '2019-02-27'+' ('+str(k+num)+ ')' +'.png'#参照ファイル名
      m = '2019-02-27'+'('+str(k+num)+ ')cut'+'.png'#切り出しファイル名
      im = Image.open(s)
      im = im.crop((130, 998, 297, 1030))#切り出し
      #読み取りやすいように調整
      im= ImageEnhance.Color(im)
      im= im.enhance(1.5)
      im= ImageEnhance.Sharpness(im)
      im = im.enhance(1)
      im = im.resize((400,60))
      im= ImageEnhance.Color(im)
      im= im.enhance(1.3)
      im= ImageEnhance.Sharpness(im)
      im = im.enhance(1.0)
      gray = im.convert("L")
      gray.point(lambda x: 0 if x < 2000 else x)
      #セーブ
      gray.save(m, quality=600)
      #文字の読み取り
      txt = tool.image_to_string(
         Image.open(m),
         lang="eng",
         builder=pyocr.builders.TextBuilder(tesseract_layout=6)
       )
      X= re.split('[=,]',txt)#テキストの分割
      Y= re.split('[=,]',txt)
      Z = re.split('[=)]', txt)
      u=Y[3].lstrip('-')
      v=u.strip(' ')#誤読対策としてY後の-を除く
      F[k][0]= X[1]
      F[k][1]= v
```

図 8.19　ピクチャから文字を切り出すプログラムコード 1

```
      F[k][0]= X[1]
      F[k][1]= v
     # F[k][2]= Z[3]
      print('残り',R-k,'回')
with open('data.csv', 'w') as file:
        writer = csv.writer(file, lineterminator='¥n')
        writer.writerows(F)
print('end')
#AutodeskCFDが最大表示のときに対応している。
```

図 8.20　ピクチャから文字を切り出すプログラムコード 2

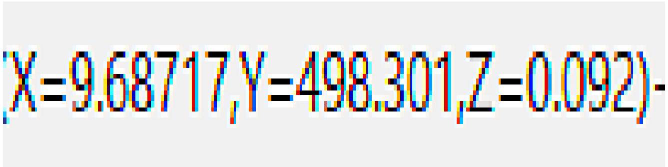

図 8.21　切り出された文字の画像

図 8.22 は重力勾配雑音の積分、式 (6.5) を計算するコードである。これを用いて液面は VOF を用いた重力勾配雑音と同じように、積分区間は入口から 13m～15m の充分に発達した領域が繰り返し出現するものとして± 1km の区間で計算した。また D=2m の場合は積分区間を 2m で計算した。

```
import csv
import sys
import numpy as np
R =500#くりかえし回数
D_1=200#ミラーとの距離
D_2=500
D_3=100
U=673 #画像数

rho =997
G=6.67408/100000000000
w=0.4
s=0
l=0
q=0
#for y in range(10):
#    name = 'data'+str(y)+'.csv'
data = np.loadtxt('data.csv', comments=' ', delimiter=',', dtype='float')
inter =data[0][1]-data[U-2][1]
for k in range(2*R+1):
    for i in range(U-2):
         a = data[0][1]-data[i][1] +inter*(R-k)
         b = data[i+1][0]-data[i][0]
         s += b/np.sqrt(D_1*D_1+a*a)
         l += b/np.sqrt(D_2*D_2+a*a)
         q += b/np.sqrt(D_3*D_3+a*a)
Dans=G*rho*w*s
Dans2=G*rho*w*l
Dans3=G*rho*w*q
print('間隔','∓'+str(inter*R/100),'m')
print('D=2',Dans)
print('D=5',Dans2)
print('D=1',Dans3)
```

図 8.22　重力勾配雑音積分を簡略したコード

図 8.23 に雑音の結果を載せる。

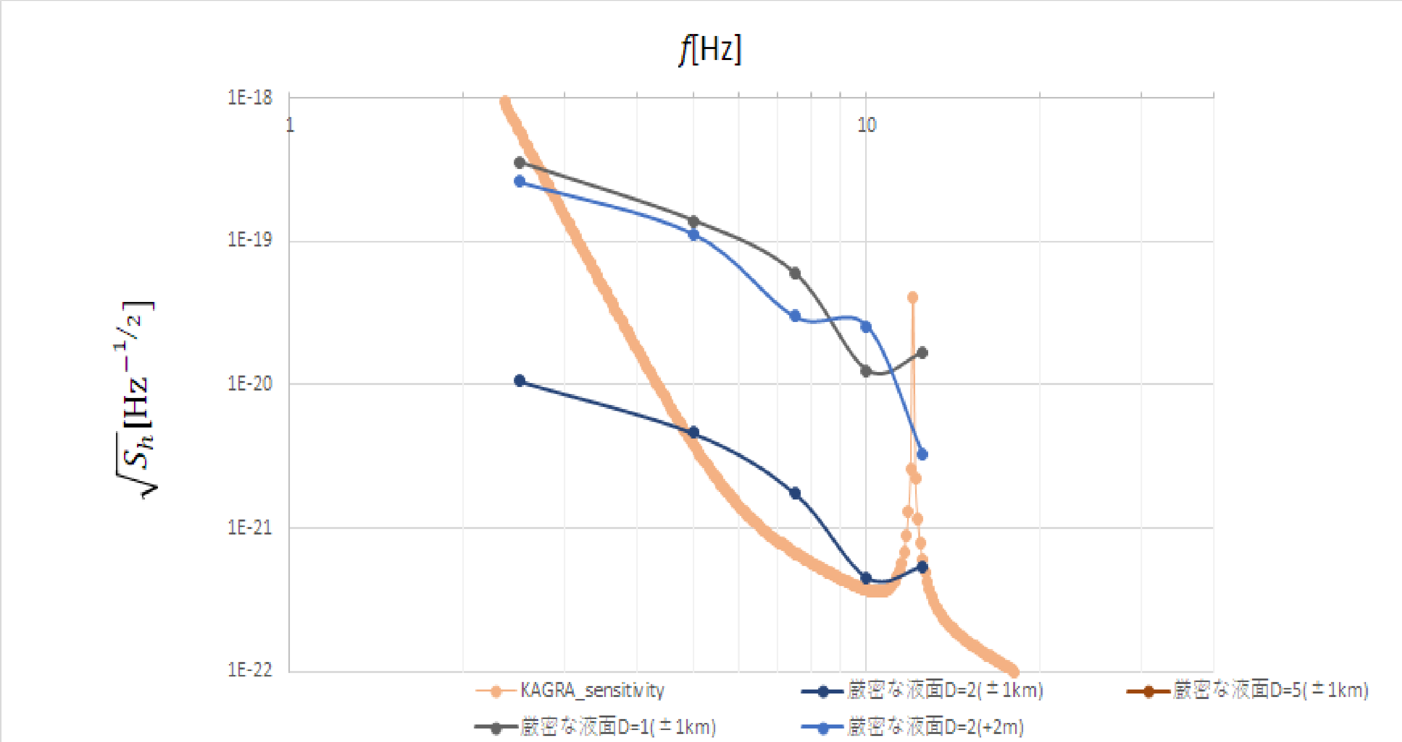

図 8.23　重力勾配雑音積分を簡略したコード

D=2,1m では重力勾配雑音は依然として 4Hz 以上で KAGRA 感度を制限することがわかる。また、D=5m の計算結果は 0 となり、グラフに載せることはできなかった。また D=2m(± 1km) と D=1m(± 1km) は 10Hz 付近で特異的なふるまいを見せている。D=2m(+ 2m) の急激な減衰とは対照的である。D が大きくなれば、急激に雑音が落ちていることから、西澤モデルには反さないこともわかる。

第 9 章

総括と今後の課題

9.1 総括

VOF の変動から液面高さの変動を見積った方法では、積分領域を ± 12m とっても波によるニュートニアンノイズの大きさは脅威的であることが判明した。D=5m の雑音が D=2m による雑音より大きいという西澤モデルに反する不可解な結果になり、雑音は、KAGRA 感度を 4Hz 以上で制限することが分かった。また OCR 機能を用いた厳密な液面の高さから取得した重力勾配雑音も依然として 4Hz 以上で KAGRA 感度を制限することが分かった。この場合は 10Hz 付近で雑音が急上昇している。D が大きくなれば、急激に雑音が落ちていることから、西澤モデルとは矛盾しないこともわかる。仮に、今回の実験がうまくいかったのだとしたら、積分範囲が小さく十分な長さが取れていない。また常流であり、出口が充分に発達した領域と近く、加速されてる効果が効いてくるのが余分な効果になっている。また、メッシュが粗く十分な精度が得られていないなどがあげられる。

9.2 今後の課題

今後の課題としてはパイプの傾きが実は 1% であることが判明したので、その場合での重力勾配雑音を求めることや、今回の流量より少ない流量での雑音の挙動などを調べることは重要である。また、水の流入面積や流入速度を変化させ、細かな違いが重力勾配雑音にどの程度変化を及ぼすのか調べることで重力勾配雑音の性質に関する新たな知見を得ることもできるだろう。

参考文献

[1] 粗度係数と Ra の関係 http://soil.en.a.u-tokyo.ac.jp/jsidre/search/PDFs/15/7-03.pdf

[2] マニングの公式
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9E%E3%83%8B%E3%83%B3%E3
%82%B0%E5%85%AC%E5%BC%8F

[3] マニングストリンクラーの公式開水路における壁面の凹凸から水の粗度係数を求める試み
https : //www.naro.affrc.go.jp/publicity$_r$eport/publication/files/207 − 14.pdf

[4] 藤井孝蔵 (1994 年)「流体力学の数値計算法」pp.16 東京大学出版会

[5] [cradle][もっと知りたい、熱流体の基礎]
https://www.cradle.co.jp/tec/column06/024.html

[6]「KEYENCE ここが知りたい形状測定」
https://www.keyence.co.jp/ss/3dprofiler/keijou/roughness/parameter/

[7] 技術コラム「岡さんの「混相流は流体シミュレーション解析で勝負！」　第 3 回
https://www.cradle.co.jp/tec/column02/003.html

[8] 流体解析の基礎講座　第 8 回 https://www.cradle.co.jp/tec/column01/008.html

[9] 開水路の様子 https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%96%8B%E6%B0%B4%E8%B7%AF

[10] もっと知りたい！ 熱流体解析の基礎 https://www.cradle.co.jp/tec/column06/024.html

[11] クリモトポリマー株式会社 http : //www.kuripoly.jp/product/kurimoto_press/

[12] Water Newtonian noise for KAGRA Atsushi Nishizawa, Junko Kasuya, Kazuhiro Hayama (Dated: November 17, 2017)

[13] TesseractOCR https://github.com/tesseract-ocr/tesseract/wiki

謝辞

私は、人と接するのが正直、得意ではなく、あまり研究室メンバーともあまり、上手に接することができずに申し訳なく思います。ただ、誕生日に祝っていただいたり、一緒にゲームをしていただいたりしたことは楽しかったです。また、研究を進めるにあたって、宗宮先生、端山先生、西澤先生の鋭いツッコミになかなか私の勉強量が追い付かず、困らせてしまったことも多々あったと思います。この場でお詫び申し上げます。短い間でしたが、ありがとうございました。