

卒業論文

高周波重力波観測のための  
信号増幅システムにおける  
ポンプ光増強共振器の開発

東京工業大学理学院物理学系 宗宮研究室

井殿亮

2024年2月13日

# 概要

1916年に A. Einstein の一般相対性理論によって予言された重力波は、2015年9月14日、アメリカの Advanced LIGO によって初めて検出された。以来、天文学の新たな手法として研究が進められており、2023年5月には4度目の長期観測 (O4) が行われている。重力波は空間の歪みが光速の波として伝播する現象であり、発生源としてブラックホール連星合体や中性子星連星合体や超新星爆発などが知られている。2017年の2度目の長期観測 (O2) において、初めて中性子星連星合体による重力波を観測しているものの、現在観測されているイベントの多くはブラックホール連星合体由来のものである。中性子星連星合体や超新星爆発による重力波の周波数は現行の検出器の観測帯域より高く、この帯域では主に量子雑音が感度を制限するとされている。量子雑音を低減する手段の1つとして、光ばねと呼ばれるオプトメカニカルな現象を使った検出器の構成が提案されている。さらに本研究の先行研究では光パラメトリック増幅と呼ばれる非線形光学効果を利用した手法によって光ばねの観測がなされた。光パラメトリック増幅は2次の非線形結晶に信号光と強度の強い信号光の倍波 (ポンプ光) を入射することで起こり、その増幅利得はポンプ光強度に依存している。本研究は、強化した光ばねの観測と重力波検出器への応用を目指し、非線形光学効果を使った信号増幅率をより高めるための光共振器を構築した。結果として、共振器を導入する前の実験系と比較して、3倍以上の増幅利得を実現することができた。

本論文の構成は以下の通りである。第1章では一般相対性理論から重力波を導出し、伝播などの性質について確かめる。そして、第2章ではレーザー干渉計型重力波検出器の一般論について述べる。第3章では量子雑音に焦点を当てて、重力波検出器の各要素が量子雑音に対してどのような感度を持つか議論する。次に第4章では、実験の主題ともいえる非線形光学効果や光ばねなどの原理について言及しながら、実験を支える光学系の制御を取り扱う。第5章で行った実験について述べ、続く第6章でその結論と今後の課題について議論する。

# 目次

第 1 章	重力波	1
1.1	一般相対性理論	1
1.2	弱い重力場における Einstein 方程式	2
1.3	重力波の伝搬	3
1.4	重力波の作用	3
第 2 章	重力波検出器	5
2.1	レーザー干渉計を用いた重力波の観測	5
2.2	Michelson 干渉計	5
2.3	Fabry-Perot 共振器	7
2.4	重力波検出器の雑音	9
2.5	KAGRA の感度曲線	12
第 3 章	重力波検出器における量子雑音	13
3.1	電磁場の量子化	13
3.2	直交位相分解による表現	18
3.3	電場と揺らぎが受ける作用	19
3.4	Michelson 干渉計の量子雑音	22
3.5	Bow-tie 共振器	24
3.6	Signal Recycling Michelson 干渉計の量子雑音	25
第 4 章	実験の原理	29
4.1	非線形光学	29
4.2	光ばね	36
4.3	光学系の制御	41
4.4	フィードバック制御の安定性	42
4.5	Pound-Drever-Hall 法	43
4.6	共振器設計のための理論	46
第 5 章	実験	50
5.1	準備実験	52
5.2	シングルパス OPA 測定実験	55

---

5.3	ポンプ光共振器の設計	57
5.4	ポンプ光共振器の導入	60
5.5	共振器あり OPA 測定実験	64
第 6 章	結論	67
6.1	本研究のまとめ	67
6.2	今後の課題	67
謝辞		68
参考文献		69

# 第 1 章

## 重力波

### 1.1 一般相対性理論

重力波は一般相対性理論によって予言された時空の歪みが波のように伝播する現象である。以下では重力波に関する理論について説明する。計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を持つ時空の 2 点間の微小線素  $ds$  は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &:= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (1.1)$$

と表される。2 つ目の等式は同じ添字を足し上げる際に用いられる縮約記法である。以後、1 つの項の中に同じ添字が現れる場合、同様に縮約を取った表式を用いる。また本章ではギリシャ文字は 0, 1, 2, 3 の数字を取るものとする。式 (1.1) で表される線素は Lorentz 不変のスカラー量であり、ある座標系の 2 点と時空の幾何学を決定する計量テンソルによって与えられる。一般相対性理論によれば、計量テンソルは次のような式を満たす：

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

この式は Einstein 方程式と呼ばれる。  $G$  は万有引力定数、  $G_{\mu\nu}$  は Einstein テンソル、  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである。さらに  $G_{\mu\nu}$  は Einstein テンソルは、Ricci テンソル  $R_{\mu\nu}$ 、Ricci スカラー  $R$  によって、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.3)$$

と表される。ここで Ricci テンソル  $R_{\mu\nu}$ 、Ricci スカラー  $R$  および Riemann テンソル  $R^\mu_{\nu\lambda\kappa}$ 、Christoffel 記号  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  の定義をまとめておく：<sup>\*1</sup>

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \quad R = R^\mu_{\mu}, \\ R^\mu_{\nu\lambda\kappa} &= \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda,\kappa} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\kappa} - \Gamma^\mu_{\sigma\kappa}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}, \\ \Gamma^\mu_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

<sup>\*1</sup> 偏微分の操作を  $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu A^\mu = A_{\mu,\nu}$  と表記している。

重力場のない平坦な時空は Minkowski 時空と呼ばれ、その計量テンソル  $\eta_{\mu\nu}$  は、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

と与えられる。

## 1.2 弱い重力場における Einstein 方程式

ある時空間において重力場が弱く、計量テンソルを Minkowski 時空  $\eta_{\mu\nu}$  と弱い摂動項  $h_{\mu\nu}$  ( $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) の線形和で与えられると仮定する。2 次の摂動項を無視すると Christoffel 記号  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  は、

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\nu,\lambda} + h_{\sigma\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (1.6)$$

となる。 $\eta_{\mu\nu}$  の偏微分はゼロになることを用いた。2 次の摂動項を無視した Ricci テンソルと Ricci スカラーは、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(h_{\beta\nu,\mu}^{\beta} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha}) \\ R &\simeq \eta_{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= h_{\mu\nu,}^{\mu\nu} - \square h \end{aligned} \quad (1.7)$$

と表せる。ここで  $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ ,  $h = h^{\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$  である。従って、Einstein テンソル  $G_{\mu\nu}$  は、

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\beta\nu,\mu}^{\beta} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta,}^{\alpha\beta} - \square h)) \quad (1.8)$$

となる。新たに  $\bar{h}_{\mu\nu}$  を定義して Einstein テンソルを書き直すと、

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &:= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad \bar{h} = \bar{h}^{\mu}_{\mu} = -h, \\ G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\bar{h}_{\beta\nu,\mu}^{\beta} - \square\bar{h}_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,}^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる。ここで座標系の選び方の自由度が4つあることより、次のようなゲージ条件 (Lorentz ゲージ) を課することができる。

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu} = 0 \quad (1.10)$$

このとき Einstein 方程式は、

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

と表される。また真空中では  $T_{\mu\nu} = 0$  となるので、

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.12)$$

という波動方程式が成り立つ。

### 1.3 重力波の伝搬

実際に式 (1.12) を解き、次のような単色平面波解を求めてみる：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (1.13)$$

$a_{\mu\nu}$  は重力波の偏光テンソルと呼ばれる。 $\bar{h}_{\mu\nu}$  が対称テンソルであることと、式 (1.10) で与えたゲージ条件より、偏光テンソル  $a_{\mu\nu}$  の自由度は  $10 - 4 = 6$  と考えられる。しかし実際には、ゲージ条件が  $\square\xi^\mu = 0$  ( $|\xi^\mu| \ll 1$ ) を満たす無限小座標変換  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$  に対しても成り立つため、偏光テンソルの自由度をさらに 4 つ減らすことができる。よって新たに Transverse-Traceless ゲージ (TT ゲージ) と呼ばれる条件：

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu 0} &= 0, & (\text{空間成分のみを持つ}) \\ \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} &= 0, & (\text{Lorentz ゲージ}) \\ \bar{h}^\mu{}_\mu &= 0 & (\text{トレースがゼロ}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

を課す。このとき偏光テンソル  $a_{\mu\nu}$  は  $10 - 8 = 2$  の自由度を持つ対称テンソルとなる。

次に具体的に TT ゲージを課したとき  $z$  方向に進行する平面波解：

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = a_{\mu\nu} \exp[-ik(ct - z)] \quad (1.15)$$

を考える。式 (1.14) より、

$$a_{\mu 0} = 0, \quad a_{i3} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるから、 $a_{11} = a_+$ 、 $a_{12} = a_\times$  とおけば解は、

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[-ik(ct - z)] \quad (1.16)$$

と求められる。以上より重力波は光速で伝わる横波であり、+ と  $\times$  という独立な偏極を持つことがわかる。これらの偏極はそれぞれ + モードと  $\times$  モードと呼ばれる。

### 1.4 重力波の作用

重力波が自由質点に対してどのように作用するか確かめる。先と同様に  $z$  方向に単色平面波が進行している場合を考える。角振動数を  $\omega = kc$  とすれば線素は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\text{TT}}) dx^\mu dx^\nu \\ &= -(cdt)^2 + [1 + a_+ \cos(-\omega t + kz)] dx^2 + [1 - a_+ \cos(-\omega t + kz)] dy^2 \\ &\quad + 2a_\times \cos(-\omega t + kz) dx dy + dz^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

と書ける。よって + モードは  $xy$  方向の距離を角振動数  $\omega$  で変化させ、 $\times$  モードは  $xy$  軸に対して  $\pi/4$  回転した方向の距離を変化させることがわかる。各モードによって自由質点が増減する様子を図 1.1 に示した。

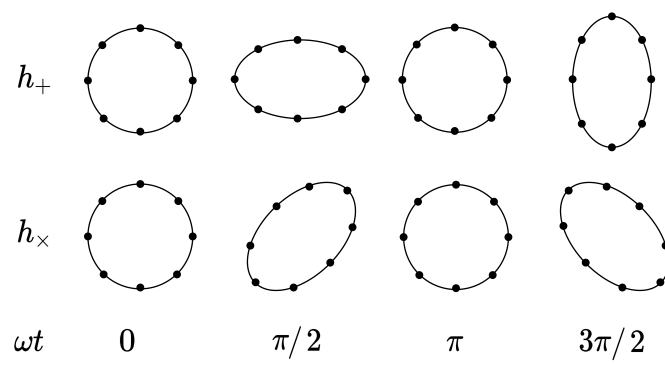


図 1.1 各モードを持つ重力波による自由質点の変化



## 第 2 章

# 重力波検出器

### 2.1 レーザー干渉計を用いた重力波の観測

重力波検出器には、レーザー干渉計型重力波検出器、共鳴型重力波検出器、ドップラートラッキング、ねじれ型重力波望遠鏡 [1]、そしてパルサーが放射する電磁パルスの周期変化から検出する The International Pulsar Timing Array (IPTA) [2]、などの種類がある。本章では現在主流となっているレーザー干渉計型重力波検出器の原理と雑音について述べる。

### 2.2 Michelson 干渉計

本節ではレーザー干渉計型重力波検出器の原理について説明するため、基本的な構成である Michelson 干渉計を考える。Michelson 干渉計の概略図を図 2.1 に示した。Michelson 干渉計の動作原理は次のようなものである。まず、レーザーから出力された光はビームスプリッター

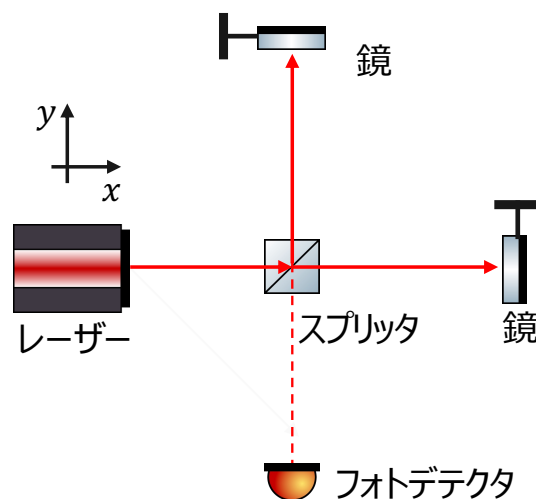


図 2.1 Michelson 干渉計

(Beam Splitter : BS) によって直交する 2 つの光路に分けられる。その後、それぞれの光は鏡によって反射され、再びビームスプリッターに戻ってくる。戻ってきた光が重なることで、フォトデテクタ (Photo Detector : PD) の方向とレーザーの方向に干渉光が現れる。これを利

用して、重力波がもたらす「干渉計の腕の長さの変化」を「干渉光の変化」として検出するのが、レーザー干渉計型重力波検出の基本的な原理である。

次に、重力波に対する Michelson 干渉計の周波数応答を示す。TT 座標系をとり、図 2.1 のように Michelson 干渉計の 2 つの光路の片方を  $x$  軸、他方を  $y$  軸とおく。それぞれの腕の長さは  $L_x, L_y$  とする。ここに周波数  $\Omega$  を持ち、 $z$  方向に進行する + モードの重力波  $h(t)$  が入射する場合を考えると、光子が往復する微小距離はゼロなので、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [1 + h(t)] dx^2 = 0 \quad (2.1)$$

である。ここで  $|h(t)| \ll 1$  であり、 $dx/dt > 0$  とすると、

$$\left[1 - \frac{1}{2}h(t)\right] c dt = dx \quad (2.2)$$

となる。 $x$  軸方向の腕を往復するのにかかる時間を  $\Delta t_x$  とおき、式 (2.2) を時刻  $t - \Delta t_x$  から時刻  $t$  まで積分すると、

$$\begin{aligned} \Delta t_x &= \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t_x}^t h(t') dt' \\ &\simeq \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' \end{aligned} \quad (2.3)$$

である。レーザー光の角周波数を  $\omega_0$  とすると往復で生じる位相変化  $\phi_x = \omega_0 \Delta t_x$  は次のようになる：

$$\phi_x(t) = \frac{2L_x \omega_0}{c} + \frac{\omega_0}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.4)$$

$y$  軸で生じる位相変化について同様に、

$$\phi_y(t) = \frac{2L_y \omega_0}{c} - \frac{\omega_0}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.5)$$

と求まる。両腕の長さ  $L \simeq L_x \simeq L_y$  とすれば、各腕から戻ってきた光の位相差  $\phi_-(t) = \phi_x(t) - \phi_y(t)$  は、

$$\begin{aligned} \phi_-(t) &= \frac{2(L_x - L_y)\omega_0}{c} + \omega_0 \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \\ &:= \frac{2(L_x - L_y)\omega_0}{c} + \delta\phi_{\text{GW}}(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。第 1 項は重力波が入射していないときの、両腕で生まれる位相差であり、第 2 項が重力波による位相差である。重力波が入射することで Michelson 干渉計で測定される干渉光の位相が  $\delta\phi_{\text{GW}}(t)$  だけ変化することを表している。 $h(t)$  の Fourier 変換を

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.7)$$

とすると、重力波の影響による位相差の周波数応答は、式 (2.6) と式 (2.7) より、

$$\begin{aligned}\delta\phi_{\text{GW}}(t) &= \omega_0 \int_{t-\frac{2L}{c}}^t \int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega) e^{i\Omega t'} d\Omega dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega L}{c}\right) e^{-i\frac{\Omega L}{c}} h(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega\end{aligned}\quad (2.8)$$

と表される。ここで  $\delta\phi_{\text{GW}}(t)$  の Fourier 変換：

$$\delta\phi_{\text{GW}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\phi_{\text{GW}}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.9)$$

と式 (2.8) 比較すると、

$$\begin{aligned}H_{\text{MI}} &:= \frac{2\omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega L}{c}\right) e^{-i\frac{\Omega L}{c}} \\ \delta\phi_{\text{GW}}(\Omega) &= H_{\text{MI}}(\Omega) h(\Omega)\end{aligned}\quad (2.10)$$

となる。 $H_{\text{MI}}$  が Michelson 干渉計の周波数応答関数であり、レーザー波長と腕の長さを決めれば角周波数  $\Omega$  の重力波に対する応答が与えられる。式 (2.10) より角周波数  $\Omega$  の重力波を検出するときの最適な腕の長さ  $L$  は、

$$L = \frac{\pi c}{2\Omega} \quad (2.11)$$

で与えられる。例えば周波数 100 Hz の重力波を検出するための最適なアーム長は 750 km となる。しかし地球は丸いために、750km もの長さの干渉計を設置するには最大地下 11km まで掘る必要があるが、これは技術的に困難である。そこで考えられたのが、Michelson 干渉計の腕に光共振器を組み込むというものである。

## 2.3 Fabry-Perot 共振器

LIGO、KAGRA などの検出器では Michelson 干渉計の腕に組み込む共振器として Fabry-Perot 共振器が採用されている。Fabry-Perot 共振器は図 2.2 のように 2 つの鏡によって構成される。本節では Fabry-Perot 共振器内の光のパワーや共振器を特徴づける量について述べる。光を入射させる入射鏡 (Input Test Mass:ITM) の振幅透過率と反射率を  $t_1, r_1$  とし、反射

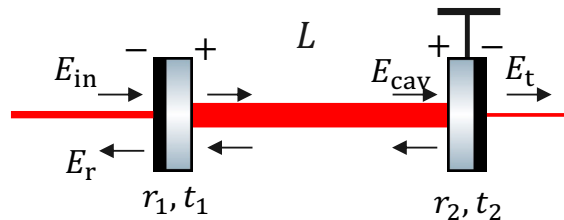


図 2.2 Fabry-Perot 共振器

鏡 (End Test Mass) の振幅透過率と反射率を  $t_2, r_2$  とする。また光学的なロスがない理想的な鏡を仮定して、

$$r_1^2 + t_1^2 = 1, \quad r_2^2 + t_2^2 = 1 \quad (2.12)$$

が成り立つものとする。共振器の長さを  $L$  とすると、共振器を半周することで生じる位相の変化は  $\phi = \omega_0 L/c$  である。

入射鏡に振幅  $E_{\text{in}}$  の光が入射したとき、反射光  $E_r$ 、透過光  $E_t$  はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
 E_r &= -r_1 E_{\text{in}} + t_1^2 r_2 e^{-2i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi})^n E_{\text{in}} \\
 &= -r_1 E_{\text{in}} + \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{\text{in}} \\
 &= \frac{-r_1 + r_2 e^{-2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{\text{in}} \tag{2.13} \\
 E_t &= t_1 t_2 e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi})^n E_{\text{in}} \\
 &= \frac{t_1 t_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{\text{in}}
 \end{aligned}$$

となる。また共振器内光  $E_{\text{cav}}$  は次のようになる：

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cav}} &= t_1 e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi})^n E_{\text{in}} \\
 &= \frac{t_1 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{\text{in}} \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

光のパワーは電場の絶対値の2乗に比例するので、 $P_{\text{in}} \propto |E_{\text{in}}|^2$  とすると、

$$\begin{aligned}
 P_r &= \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\phi}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\phi} P_{\text{in}} \\
 P_t &= \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\phi} P_{\text{in}} \tag{2.15} \\
 P_{\text{cav}} &= \frac{t_1^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\phi} P_{\text{in}}
 \end{aligned}$$

と計算できる。式 (2.12)(2.15) より  $P_{\text{in}} = P_r + P_t$  が常に成り立つ。また、 $\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$  となるとき、共振器内パワー  $P_{\text{cav}}$  が最大となり共振が起こる。 $r_1^2 = 0.95$ ,  $r_2^2 = 0.95$  とした時のパワーと共振器の半周分の位相変化  $\phi$  の関係をプロットしたのが図 2.3 である。縦軸は  $P_{\text{in}}$  で規格化してある。

次に共振器の性能を表す量であるフィネスを導出する。共振状態になる間隔をフリースペクトラムレンジ (Free Spectrum Range : FSR) と呼び、共振器長の間隔またはレーザー周波数の間隔として次のように定義する：

$$\begin{aligned}
 L_{\text{FSR}} &:= \frac{\lambda_0}{2} \\
 f_{\text{FSR}} &:= \frac{c}{2L} \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

また、共振ピークの半値全幅 (Full Width at Half Maximum : FWHM) となる周波数のずれ

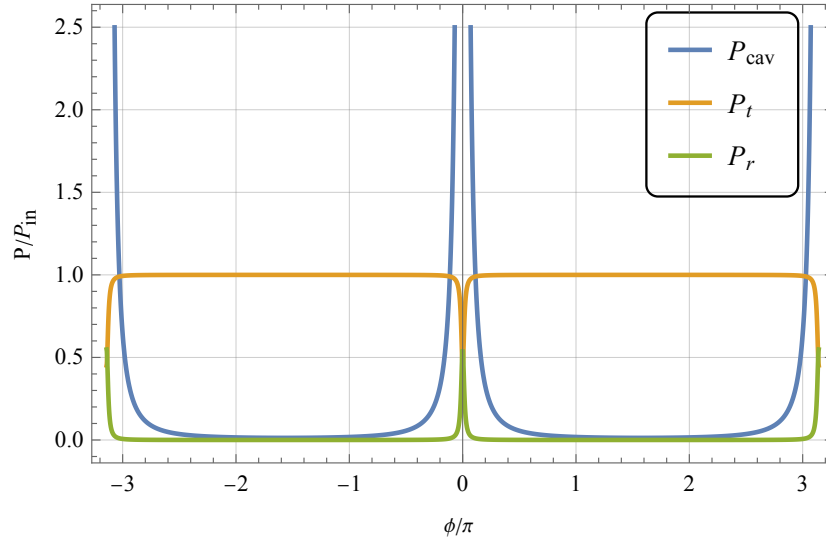


図 2.3 Fabry-Perot 共振器におけるパワー

$f_{\text{FWHM}}$  は  $f_{\text{FSR}} \gg f_{\text{FWHM}}$  の下で解くと、

$$f_{\text{FWHM}} = \frac{1 - r_1 r_2}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} f_{\text{FSR}} \quad (2.17)$$

となる。 $f_{\text{FWHM}}$  と  $f_{\text{FSR}}$  の比はフィネス  $\mathcal{F}$  と呼ばれ、

$$\mathcal{F} = \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (2.18)$$

と表される。また共振点付近  $\phi \simeq 0$  において反射率が十分大きい  $r_1, r_2 \simeq 1$  とき、

$$r_i \simeq 1 - \frac{T}{2} - \frac{T^3}{8} \quad (i = 1, 2) \quad (2.19)$$

であるから、式 (2.15) で与えられた共振器内のパワーは Lorentian で近似できる：

$$P_{\text{cav}} = \frac{T_1^2}{\frac{1}{4}(T_1 + T_2)^2 + 4\phi^2} P_{\text{in}} \quad (2.20)$$

ここで  $T_1, T_2$  は強度反射率であり、 $T_1 = t_1^2$ ,  $T_2 = t_2^2$  と定義している。

## 2.4 重力波検出器の雑音

前節より、Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答が求められた。実際に干渉光の変化として得られる出力には、重力波だけでなく雑音が含まれている。本節では重力波検出器における代表的な雑音と、雑音や感度を表す際に用いられる物理量について説明する。

### 2.4.1 パワースペクトル密度と振幅スペクトル密度

次に重力波検出で感度や雑音を議論するときに用いられるパワースペクトル密度および振幅スペクトル密度について説明する。雑音の評価において、ある観測量に対して平均からのずれ

を長時間積分するとゼロになってしまうため、平均からのずれの2乗平均平方根 (Root Mean Square : RMS) が用いられる。RMS の周波数応答として、パワースペクトル密度  $S(\Omega)$  を定義する。ある物理量  $x(t)$  の Fourier 変換を

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \\ X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\Omega t} dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

とすると、パワースペクトル密度は次式で表される。

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) d\Omega \quad (2.22)$$

具体的に書き下すと、 $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$  を用いて

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) X^*(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (2.23)$$

であるから\*1、パワースペクトル密度  $S(\Omega)$  は

$$S(\Omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\Omega)|^2}{T} \quad (2.24)$$

となる。パワースペクトル密度の平方根を振幅スペクトル密度  $h_n(\Omega)$  という：

$$h_n(\Omega) := \sqrt{S(\Omega)} \quad (2.25)$$

$h_n(\Omega)$  は RMS で表現した雑音の周波数応答を表し、ある周波数  $\Omega$  を持つ信号が  $h_n(\Omega)$  より大きいとき検出することが可能である。またこの式から、振幅スペクトル密度の単位は扱っている物理量  $x(t)$  の単位に  $1/\sqrt{\text{Hz}}$  かけたものである。重力波の大きさは生じた変位  $\delta L$  を元の長さ  $L$  で規格化して表すことが多く、無次元である。従って重力波の振幅スペクトル密度の単位は  $1/\sqrt{\text{Hz}}$  となる。

## 2.4.2 ショットノイズ

ショットノイズはレーザーの光子数の揺らぎによって生じる雑音である。統計的な揺らぎに起因し、周波数に依存しないホワイトノイズであるが、KAGRA などの腕に共振器を導入した検出器においては、共振器の特性によって高周波での信号が減衰するためショットノイズが感

---

\*1 Parseval の等式である。

度を制限する。ダークフリッジで Michelson 干渉計を制御したときのショットノイズによる鏡の変位の振幅スペクトル密度は、

$$\delta x_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P}} \quad (2.26)$$

と表される。ここでレーザー波長  $\lambda$ 、レーザーパワー  $P$  としている。この式からわかるように、ショットノイズは  $1/\sqrt{P}$  に比例することから、レーザーパワーの強化によって低減させることができる。

### 2.4.3 輻射圧雑音

輻射圧雑音は光子数の揺らぎにより、鏡にかかる輻射圧が揺らぐことで生じる雑音である。輻射圧雑音は 100 Hz 以下の帯域において感度を制限する。鏡の質量を  $M$  として輻射圧雑音による鏡の変位の振幅スペクトル密度は

$$\delta x_{\text{rp}} = \frac{1}{M(2\pi f)^2} \sqrt{\frac{16\pi\hbar P}{c\lambda}} \quad (2.27)$$

と表される。輻射圧雑音は  $\sqrt{P}$  に比例しており、ショットノイズとは対照的にパワーの強化によって雑音が増えることがわかる。光子数の揺らぎによって生じるショットノイズと輻射圧雑音はまとめて量子雑音と呼ばれる。

### 2.4.4 熱雑音

熱雑音は鏡および懸架系が熱浴との間でエネルギーのやりとりすることで生じる雑音であり、主に 10 Hz から 100 Hz 付近の感度を制限している。熱雑音のパワースペクトル密度は揺動散逸定理によって求めることができ、熱浴の温度や系のインピーダンスによって表される。また、熱雑音の中には温度勾配による非一様な形状の歪みによる熱弾性雑音や、鏡とコーティングのブラウン運動による Brownian 雑音などのいくつかの分類がある。

### 2.4.5 地面振動雑音

地面の振動によるこの雑音は主に 10 Hz 以下の低周波数帯域で感度を制限する。典型的に地面振動雑音による鏡の変位の振幅スペクトル密度は

$$\delta x_{\text{seis}} \sim \left(\frac{1\text{Hz}}{f}\right)^2 \times 10^{-7} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.28)$$

となる。具体的には 100 Hz では  $10^{-11} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  程度の振動が生じるため、何らかの防振系を用いてこの雑音を低減する必要がある。実際 KAGRA では 9 段の多段振り子によって防振を行っている。

### 2.4.6 ニュートニアンノイズ

ニュートニアンノイズは、大気や地殻といった物質の移動が重力場生み、鏡を揺らすことで生じる雑音である。感度が飛躍的に向上する第 3 世代重力波検出器では 10 Hz 付近で感度を

制限する。

## 2.5 KAGRA の感度曲線

KAGRA は岐阜県神岡の地下に建造された大型低温重力波検出器である。2023年5月からLIGOとともに4度目の長期観測(O4)を行っている。KAGRAの特徴として、地盤の安定した地下に設置されていることや3 kmに及ぶ腕の長さをもっていること、熱雑音低減のためにマイナス250度まで鏡を冷却しており、鏡には低温特性に優れたサファイア結晶を採用していることなどが挙げられる。図2.4にKAGRAの目標感度を示した。

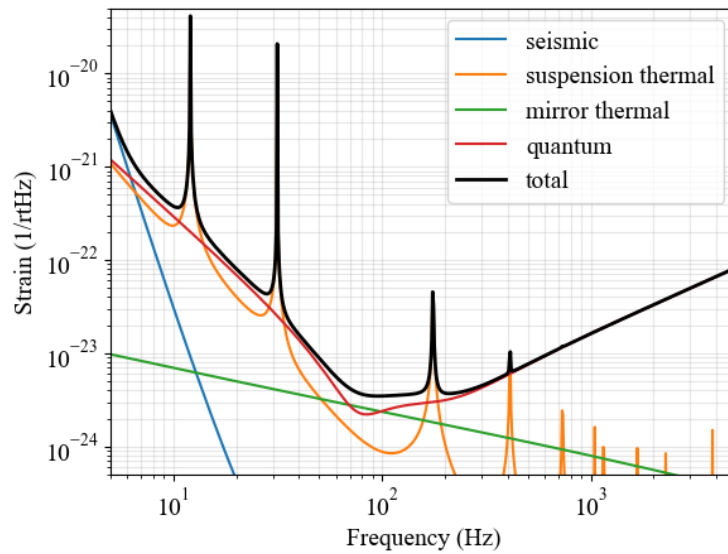


図 2.4 KAGRA の目標感度 [3]



## 第3章

# 重力波検出器における量子雑音

### 3.1 電磁場の量子化

電荷と電流が存在しない自由空間における光の伝搬は次のような Maxwell 方程式によって記述される：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.1}$$

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  を次式で定義する：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\tag{3.2}$$

ここでクーロンゲージ  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を課せば、式 (3.1) より、

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}\tag{3.3}$$

を得る。ある系でのベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  は、その系の境界条件によって決まるモード関数  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  の集まりとして

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k (c_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + c_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t})\tag{3.4}$$

と書ける。  $c_k$  は各モードの複素振幅である。  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  を用いると式 (3.3) は、

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega_k}{c^2} \right) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0\tag{3.5}$$

となる。また、クーロンゲージとモードの完全性関係について次式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) &= 0 \\ \int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \delta_{kk'}\end{aligned}\tag{3.6}$$

ここで具体的に長さ  $l$  の立方体中の平面波モード ( $\mathbf{u}_k \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ) を考えると、 $\nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0$  より、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と電磁場の偏光は直交する。波数ベクトルは次式で与えられる：

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{l}(n_x, n_y, n_z) \quad (n_x, n_y, n_z \text{ は整数}) \quad (3.7)$$

電磁場の偏光を表す単位ベクトルを  $\hat{\mathbf{e}}_\mu$  ( $\mu = 1, 2$ ) とすれば、

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = l^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_\mu \quad (3.8)$$

となる。このとき電場、磁束密度はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{l^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, \mu} i\omega_k \left( c_{k\mu} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - c_{k\mu}^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right) \hat{\mathbf{e}}_\mu \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{l^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, \mu} ik \left( c_{k\mu} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - c_{k\mu}^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_\mu) \end{aligned} \quad (3.9)$$

である。 $k$  は波数ベクトルの大きさ、 $\hat{\mathbf{k}}$  は波数方向の単位ベクトルを表す。ここから電磁場のエネルギーを計算し、生成消滅演算子によって表せることを示す。電場によるエネルギーは、

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E}^2 d\mathbf{r} &= -\frac{1}{l^3} \int_V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{\mu, \nu} \omega_k \omega_{k'} \left( c_{k\mu} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - c_{k\mu}^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right) \\ &\quad \times \left( c_{k'\nu} e^{-i(\omega_{k'} t - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})} - c_{k'\nu}^* e^{i(\omega_{k'} t - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})} \right) \hat{\mathbf{e}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{e}}_\nu d\mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{l^3} \int_V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{\mu, \nu} \omega_k \omega_{k'} \left( c_{k\mu} c_{k'\nu} e^{-i((\omega_k + \omega_{k'})t - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r})} + c_{k\mu}^* c_{k'\nu}^* e^{i((\omega_k + \omega_{k'})t - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r})} \right. \\ &\quad \left. - c_{k\mu} c_{k'\nu}^* e^{-i((\omega_k - \omega_{k'})t - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r})} - c_{k\mu}^* c_{k'\nu} e^{-i((\omega_k - \omega_{k'})t - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r})} \right) \delta_{\mu\nu} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となり、

$$\int_V e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (3.11)$$

が成り立つので<sup>\*1</sup>、最右辺の和は  $\mathbf{k} = \pm \mathbf{k}'$  の項のみが残る。今、 $V = l^3$  であるから、

$$\int \mathbf{E}^2 d\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}, \mu} \left[ -\omega_k \omega_{-k} (c_{k\mu} c_{-k\mu} e^{-i(\omega_k + \omega_{-k})t} + c_{k\mu}^* c_{-k\mu}^* e^{i(\omega_k + \omega_{-k})t}) + 2\omega_k^2 c_{k\mu} c_{k\mu}^* \right] \quad (3.12)$$

となる。同様の計算で、磁束密度のエネルギーは

$$\int \mathbf{B}^2 d\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}, \mu} \left[ k^2 (c_{k\mu} c_{-k\mu} e^{-i(\omega_k + \omega_{-k})t} + c_{k\mu}^* c_{-k\mu}^* e^{i(\omega_k + \omega_{-k})t}) + 2k^2 c_{k\mu} c_{k\mu}^* \right] \quad (3.13)$$

となる。よって式 (3.12)(3.13) と分散関係  $\omega_k = ck$  を用いれば電磁場のエネルギーは、

$$\begin{aligned} H &= \int_V \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) d\mathbf{r} \\ &= 2\varepsilon_0 \omega_k^2 c_{k\mu} c_{k\mu}^* \end{aligned} \quad (3.14)$$

\*1 長さ  $l$  の立方体中の平面波モードではこの式が完全性関係を与える。

と書ける。  $c_{k\mu} = x_{k\mu} + iy_{k\mu}$  とおけば、

$$H = 2\epsilon_0\omega_k^2(x_{k\mu}^2 + y_{k\mu}^2) \quad (3.15)$$

であり、各偏光に対する電磁場のエネルギーは複素振幅の実部と虚部の2つ変数によって表現される。ここで

$$\begin{aligned} Q_{k\mu} &= 2\sqrt{\epsilon_0}x_{k\mu} \\ P_{k\mu} &= 2\omega_k\sqrt{\epsilon_0}y_{k\mu} \end{aligned} \quad (3.16)$$

という変数変換を施せば、調和振動子のハミルトニアンと同じ形で電磁場のエネルギーを表せる：

$$H = \frac{1}{2}(\omega_k^2 Q_{k\mu}^2 + P_{k\mu}^2) \quad (3.17)$$

よって  $Q_{k\mu}, P_{k\mu}$  という変数を次のような交換関係を満たす演算子として定義することで電磁場の量子化がなされる：

$$[\hat{P}_{k\mu}, \hat{Q}_{k'\nu}] = -i\hbar\delta_{kk'}\delta_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

さらに生成消滅演算子を

$$\begin{aligned} \hat{a}_{k\mu} &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}\hat{Q}_{k\mu} + i\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\hat{P}_{k\mu} \\ \hat{a}_{k\mu}^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}\hat{Q}_{k\mu} - i\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\hat{P}_{k\mu} \end{aligned} \quad (3.19)$$

と定義すれば、生成消滅演算子は次の交換関係：

$$[\hat{a}_{k\mu}, \hat{a}_{k'\nu}^\dagger] = \delta_{kk'}\delta_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

を満たし、電磁場のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{k,\mu} \hbar\omega_k \left( \hat{a}_{k\mu}^\dagger \hat{a}_{k\mu} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{k,\mu} \hbar\omega_k \left( \hat{n}_{k\mu} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。  $\hat{n}_{k\mu} := \hat{a}_{k\mu}^\dagger \hat{a}_{k\mu}$  は光子数演算子である。この式を見ると電磁場のエネルギーは各モードの1個あたりの光子のエネルギー  $\hbar\omega_{k\mu}$  に光子数をかけたものと、真空揺らぎによる寄与  $1/2\hbar\omega_{k\mu}$  を足し合わせたものとなっている。

量子化された電場と磁束密度は、生成消滅演算子を使って

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{k,\mu} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} [\hat{a}_{k\mu} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - \hat{a}_{k\mu}^\dagger e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}] \hat{\mathbf{e}}_\mu \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{k,\mu} \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar\omega_k}{2V}} [\hat{a}_{k\mu} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - \hat{a}_{k\mu}^\dagger e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}] \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_\mu \end{aligned} \quad (3.22)$$

と表される。

### 3.1.1 光子数状態について

これまで具体的に長さ  $l$  の立方体中を考えてモードを  $k\mu$  という記号で表していたが、以下では1モードのみ (シングルモード) を考え、記号を省略する。式 (3.21) で与えられるハミルトニアン固有状態  $|n\rangle$  は光子数状態と呼ばれる。電磁場の基底状態 (真空場) は消滅演算子によって、

$$a|0\rangle = 0 \quad (3.23)$$

と定義され、各モードの光子数状態  $|n\rangle$  と生成消滅演算子について以下の式が成り立つ：

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで、 $z$  方向に進行するシングルモードの電場を考える：

$$E(z, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} [\hat{a}e^{-i(\omega t - kz)} - \hat{a}^\dagger e^{i(\omega t - kz)}] \quad (3.25)$$

電場の期待値は  $\bar{E} = \langle n|\hat{E}|n\rangle = 0$  であるので、光子数状態を使って量子化された電場の揺らぎの期待値を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle n|(\hat{E} - \bar{E})^2|n\rangle \\ &= \langle n|\hat{E}^2|n\rangle \\ &= -\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} [\hat{a}e^{-i(\omega t - kz)} - \hat{a}^\dagger e^{i(\omega t - kz)}]^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} (2n + 1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

となり、光子数がゼロのときでも電場は有限の揺らぎを持っていることがわかる。これが量子雑音が生じる原因である。

### 3.1.2 Coherent 状態について

光子数状態を基底として表現する場合、光子数と位相の間に不確定性関係があるために光の位相の不確かさが大きくなってしまう。そのためレーザー光の量子状態の表現には Coherent 状態が用いられることが多い。Coherent 状態とは非可換な物理量の揺らぎの積が最小となる状態 (最小不確定性状態) のことである。

シングルモードの Coherent 状態  $|\alpha\rangle$  はユニタリーな並進演算子  $\hat{D}(\alpha)$  を真空場  $|0\rangle$  に作用させて、

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad \hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \quad (3.27)$$

と定義する。また Coherent 状態  $|\alpha\rangle$  は消滅演算子  $\hat{a}$  の固有状態となり、光子数状態  $|n\rangle$  によって次のように表される：

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \\ |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\end{aligned}\quad (3.28)$$

これより、Coherent 状態の光子数の確率分布はポアソン分布で与えられることがわかる：

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!}\quad (3.29)$$

次に Coherent 状態が最小不確定性状態であることを確かめる。まず、エルミートな直交位相演算子  $\hat{X}_1, \hat{X}_2$  を次のように定義する：

$$\hat{X}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{X}_2 = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\quad (3.30)$$

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  であるから、

$$\begin{aligned}[\hat{X}_1, \hat{X}_2] &= \hat{X}_1\hat{X}_2 - \hat{X}_2\hat{X}_1 \\ &= 2i\end{aligned}\quad (3.31)$$

という交換関係が成り立つ。Coherent 状態における  $\hat{X}_1, \hat{X}_2$  の揺らぎを計算すると

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{X}_1)^2 &= \langle\alpha|X_1^2|\alpha\rangle - (\langle\alpha|X_1|\alpha\rangle)^2 = 1 \\ (\Delta\hat{X}_2)^2 &= \langle\alpha|X_2^2|\alpha\rangle - (\langle\alpha|X_2|\alpha\rangle)^2 = 1\end{aligned}\quad (3.32)$$

となる。よって、Coherent 状態では直交位相演算子  $\hat{X}_1, \hat{X}_2$  の不確かさはそれぞれ等しく、最小不確定性関係：

$$\Delta\hat{X}_1 \cdot \Delta\hat{X}_2 = 1\quad (3.33)$$

が成り立つ。不確定性が最小であるため Coherent 状態は古典的な電磁場に最も近い量子状態であるといえる。また  $\hat{X}_1, \hat{X}_2$  を使って式 (3.25) で与えられたシングルモードの電場を書き直すと次のようになる：

$$\begin{aligned}E(z, t) &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[ \frac{\hat{X}_1 + i\hat{X}_2}{2} e^{-i(\omega t - kz)} - \frac{\hat{X}_1 - i\hat{X}_2}{2} e^{i(\omega t - kz)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[ \hat{X}_1 \sin(\omega t - kz) - \hat{X}_2 \cos(\omega t - kz) \right]\end{aligned}\quad (3.34)$$

$\hat{X}_1$  は sin の振幅、 $\hat{X}_2$  は cos の振幅に対応しており、直交する2つの成分に分解 (直交位相分解) できることがわかる。このうち sin の振幅である  $\hat{X}_1$  位相成分 (phase quadrature)、cos の振幅である  $\hat{X}_2$  は振幅成分 (amplitude quadrature) と呼ばれる。

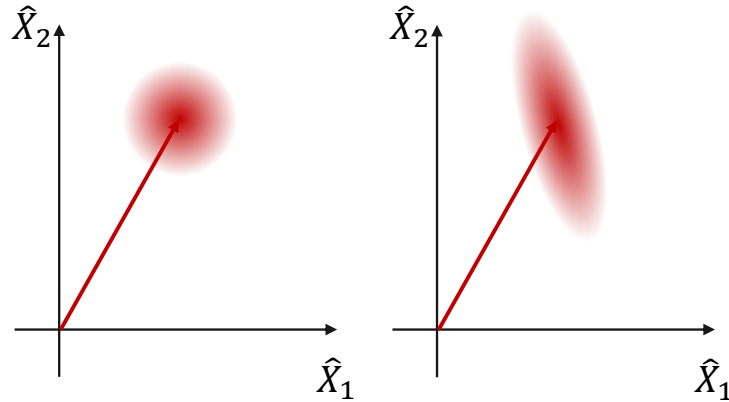


図 3.1 Coherent 状態 (右) と Squeezed 状態 (左) を表す ball picture。横軸が位相成分で、縦軸が振幅成分である。赤線矢印の大きさが古典的な振幅に対応し、赤い誤差円が揺らぎに対応している。Coherent 状態では各方向の揺らぎが等しいのに対して、Squeezed 状態では片方の揺らぎが絞られ、他方が伸びている。

### 3.1.3 Squeezed 状態について

Coherent 状態の最小不確定状態を保ちながら、量子的な揺らぎの直交位相成分間で不確定性を再配分した状態のことを Squeezed 状態という。Coherent 状態および Squeezed 状態について、図 3.1 のように直交空間上に示した ball picture を使うと直感的に理解できる。

Squeezed 状態では直交成分の一方が Coherent 状態の時よりも小さくなり、他方が大きくなっている。Squeezed 状態を実現する物理的な過程 (squeezing) として光パラメトリック増幅や縮退 4 光波混合などの非線形光学効果が知られている。

## 3.2 直交位相分解による表現

量子雑音は光子数の揺らぎによって生じる雑音であり、電場の量子的な揺らぎを考えることによって議論することができる。3.1.2 小節で述べたように電場は直交位相分解を行うことで 2 成分によって表される。そのため古典的な電場  $\mathbf{A}$  とそれに対応する揺らぎ  $\mathbf{a}(\Omega)$  を以下のようなベクトルで表す：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$A_1, a_1$  は振幅成分、 $A_2, a_2$  は位相成分を表す。このベクトル記法を用いて、干渉計や共振器に出入りする古典的な電場や揺らぎの入出力関係 (Input-Output-Relation) を考えることで、量子雑音に対する感度や共振器内の光強度について議論する。また以下では、レーザー周波数は  $\omega_0$  で表し、フーリエ変換を

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ a(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\Omega t} dt \end{aligned} \quad (3.36)$$

と定義する。

### 3.3 電場と揺らぎが受ける作用

本節では、鏡による反射および透過や、空間の伝搬によって電場とその揺らぎが周波数領域においてどのように変化するかを見る。それらを用いて次節以降では、信号と雑音の比から各周波数での感度について議論する。

#### 3.3.1 反射・透過による作用

図 3.2 のように強度反射率および透過率がそれぞれ  $r^2, t^2$  となる対称な鏡を用いて、2つの電場  $A(t), B(t)$  を干渉させることを考える。 $r^2 + t^2 = 1$  を満たし、光学ロスはないものとする。

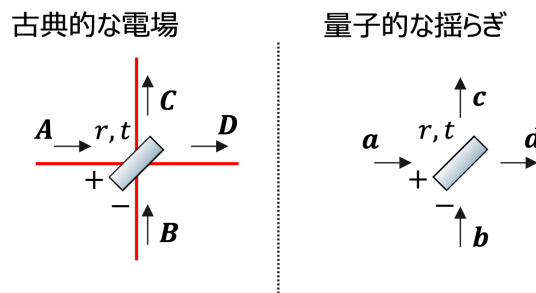


図 3.2 鏡の反射・伝搬と重ね合わせ

透過および鏡の上面で反射されることによる位相の変化はゼロ、鏡の下面で反射されることによる位相の変化は  $\pi$  として、重ね合わせで生じた電場は、

$$\begin{aligned} C(t) &= rA(t) + tB(t) \\ D(t) &= tA(t) - rB(t) \end{aligned} \tag{3.37}$$

と書き表される。これを直交位相分解し、ベクトルで表すと次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= r\mathbf{A} + t\mathbf{B} \\ \mathbf{D} &= t\mathbf{A} - r\mathbf{B} \\ c(\Omega) &= ra(\Omega) + tb(\Omega) \\ d(\Omega) &= ta(\Omega) - rb(\Omega) \end{aligned} \tag{3.38}$$

#### 3.3.2 伝搬による作用

次に図 3.3 のように光が距離  $L$  だけ伝搬するときを考える。

伝搬後の電場  $B(t)$  は、元の電場  $A(t)$  の時間を  $\tau = L/c$  だけ遅らせたものに相当するため、

$$\begin{aligned} B(t) &= A(t - \tau) \\ &= (A_1 + a_1(t - \tau)) \cos \omega_0(t - \tau) + (A_2 + a_2(t - \tau)) \sin \omega_0(t - \tau) \end{aligned} \tag{3.39}$$

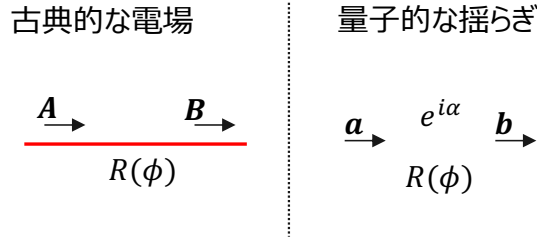


図 3.3 電場の伝搬

が成り立つ。直交位相に分けると、

$$\begin{aligned} B &= R(\phi)A \\ \mathbf{b}(t) &= R(\phi)\mathbf{a}(t - \tau) \end{aligned} \tag{3.40}$$

となる。ここでは伝搬による位相変化  $\phi = \omega_0 L/c = \omega_0 \tau$ 、回転行列  $R(\phi)$  を

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

としている。さらに式 (3.40) を Fourier 変換して、 $\alpha = -\Omega L/c$  とおくと

$$\mathbf{b}(\Omega) = e^{i\alpha} R(\phi)\mathbf{a}(\Omega) \tag{3.42}$$

となる。

### 3.3.3 懸架鏡による Ponderomotive Squeezing

Michelson 干渉計が重力波に対する感度を持つには干渉計の鏡が自由質点として振る舞う必要があるため、懸架鏡が用いられる。懸架鏡にかかる光の輻射圧揺らぎによって、鏡の変位が揺らぎ、さらにその変位揺らぎが位相方向の揺らぎを生じさせることで各 quadrature 間に相関が生まれる。このような懸架鏡の作用は squeezed 状態を生み出し、一般に Ponderomotive Squeezing と呼ばれる。

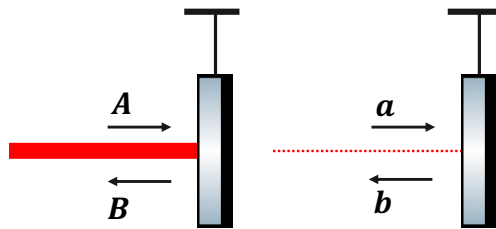


図 3.4 Ponderomotive Squeezing の模式図

懸架鏡が微小変位  $\delta x(t)$  だけ動いたとき、位相は  $2k_0 \delta x(t)$  だけ変化するので、

$$\begin{aligned} B(t) &= [(A_1 + a_1(t)) \cos(\omega_0 t - 2k_0 \delta x(t)) + (A_2 + a_2(t)) \sin(\omega_0 t - 2k_0 \delta x(t))] \\ &\simeq (A_1 + a_1(t) - 2A_2 k_0 \delta x(t)) \cos \omega_0 t + (A_2 + a_2(t) + 2A_1 k_0 \delta x(t)) \sin \omega_0 t \end{aligned} \tag{3.43}$$



となり、直交位相分解すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{b}(t) &= \mathbf{a}(t) + 2k_0 \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} \delta x(t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

と表せる。さらにこれを揺らぎを Fourier 変換すれば

$$\mathbf{b}(\Omega) = \mathbf{a}(\Omega) + 2k_0 \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} \delta x(\Omega) \quad (3.45)$$

である。光の輻射圧は光子数  $N$  と力積  $2\hbar k_0$  を用いて次のように表せる：

$$\begin{aligned} F_{\text{rp}}^{\text{tot}} &= 2\hbar k_0 \times N \\ &= \hbar k_0 ((A_1^2 + A_2^2) + 2(A_1 a_1(t) + A_2 a_2(t))) \\ &= F_{\text{rp}} + \delta F_{\text{rp}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

平均的な輻射圧  $F_{\text{rp}}$  は懸架鏡の機械的な復元力と釣り合っているとして無視すると、鏡の微小変位  $\delta x(t)$  に対する運動方程式は、重力波  $h(t)$  と光の輻射圧揺らぎ  $\delta F_{\text{rp}}$  によって

$$m \frac{d^2(\delta x(t))}{dt^2} = \delta F_{\text{rp}} + \frac{1}{2} m L \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \quad (3.47)$$

と書ける。ここで鏡の質量を  $m$ 、干渉計の腕の長さを  $L$  としている。運動方程式 (3.47) を Fourier 変換して整理すると、

$$\delta x(\Omega) = -\frac{2\hbar k_0}{m\Omega^2} (A_1 a_1(\Omega) + A_2 a_2(\Omega)) + \frac{1}{2} L h(\Omega) \quad (3.48)$$

を得る。よって式 (3.45) より、

$$\mathbf{b}(\Omega) = P(\kappa, \xi_A) \mathbf{a}(\Omega) + \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \mathbf{n}_{A\perp} h(\Omega) \quad (3.49)$$

と求められる。ここで

$$\mathbf{n}_{A\perp} = \begin{pmatrix} -\sin \xi_A \\ \cos \xi_A \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

は  $\mathbf{A}$  に垂直な単位ベクトルである。 $\xi_A = \arctan A_2/A_1$  は入射光の偏角を表しており、ホモサイン角と呼ばれる。 $P(\kappa, \xi_A)$  は Ponderomotive squeezing 行列と呼ばれ、次のように与えられる：

$$\begin{aligned} P(\kappa, \xi_A) &= R(\xi_A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} R(\xi_A) \\ \kappa &= \frac{8P_A \omega_0}{mc^2 \Omega^2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$\kappa$  は揺らぎの振幅成分と位相成分の相関を表す結合定数である。また  $h_{\text{SQL}}$  は標準量子限界 (Standard Quantum Limit) と呼ばれる、干渉計の測定限界を表す量である：

$$h_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{8\hbar}{mL^2\Omega^2}} \quad (3.52)$$

以上をまとめると光の振幅方向の揺らぎに起因する輻射圧揺らぎが懸架鏡によって位相方向に揺らぎに変換される。また各成分同士の結合の大きさは  $\kappa$  に依存し、重力波の信号は入射電場の偏角と垂直な方向に現れる。

### 3.4 Michelson 干渉計の量子雑音

前節では干渉計を構成する各要素での電場と揺らぎの変化を導いた。ここから干渉計全体の入出力関係を計算することによって、量子雑音が評価を行う。まずは重力波検出器の最も基本的な構成である Michelson 干渉計について議論する。ビームスプリッターの強度反射率と透

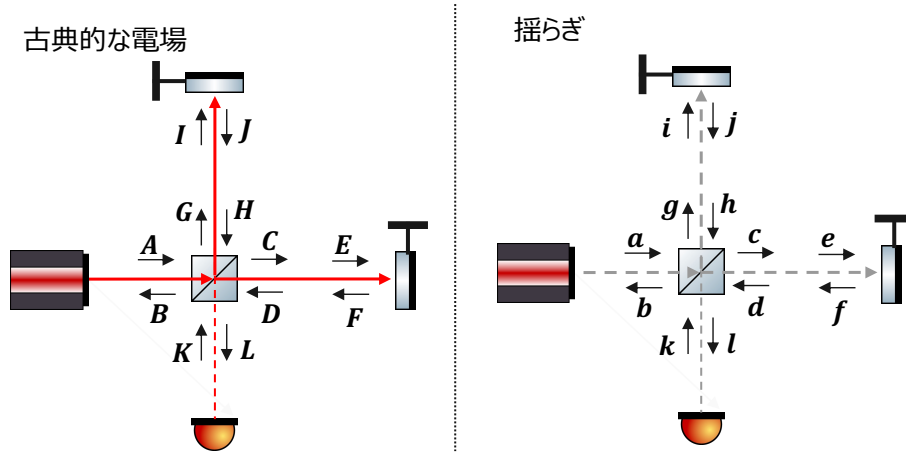


図 3.5 MI 干渉計の入出力関係

過率はそれぞれ  $1/2$  とする。2 つ腕の長さはそれぞれ  $L_x, L_y$  として、各腕で起こる位相変化は  $\phi_x = \omega_0 L_x / c$ ,  $\phi_y = \omega_0 L_y / c$  である。さらに腕の長さがほとんど等しい  $L_x \simeq L_y \simeq L$  として、揺らぎに生じる位相遅れは  $\alpha = \Omega L / c$  とする。以上を踏まえて Michelson 干渉計の古典的な電場に対する入出力関係を書き下すと次のようになる：

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{H + D}{\sqrt{2}}, \quad C = \frac{A - K}{\sqrt{2}}, \quad G = \frac{A + K}{\sqrt{2}}, \quad L = \frac{H - D}{\sqrt{2}} \\
 D &= R(\phi_x)F, \quad E = R(\phi_x)C, \quad F = E \\
 H &= R(\phi_y)J, \quad I = R(\phi_y)G, \quad I = J
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

これらを入射電場  $A = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $K = 0$  として出力信号  $B, L$  について解くと、

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{2}R(2\phi_y)(I + R(2\phi_-))A \\
 L &= \frac{1}{2}R(2\phi_x)(I - R(2\phi_-))A
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

となる。ここでは  $\phi_- = \phi_x - \phi_y$  とした。  $\phi_- = 0$  のとき、AS ポート<sup>\*2</sup>の出力は  $L = 0$  となり出力側に信号が現れない (ダークフリンジ)。一方、  $\phi_- = \frac{\pi}{2}$  のとき、AS ポートと RFL ポートの出力はそれぞれ  $L \neq 0$ ,  $B = 0$  となり信号が全て出力側に現れる (ブライトフリンジ)。

<sup>\*2</sup> 出力ポートは Anti-Symmetric port (AS ポート) と呼ばれ、入力ポートは Symmetric port あるいは Reference Feedback Light port (RFL ポート) と呼ばれる。

次に電場の揺らぎの入出力関係を書き下すと次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{h} + \mathbf{d}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{h} - \mathbf{d}}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{d} &= e^{i\alpha} R(\phi_x) \mathbf{f}, \quad \mathbf{e} = e^{i\alpha} R(\phi_x) \mathbf{c}, \quad \mathbf{f} = P(\kappa, \xi_E) \mathbf{e} - \frac{\sqrt{\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \mathbf{n}_{E\perp} h(\Omega) \\ \mathbf{h} &= e^{i\alpha} R(\phi_y) \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} = e^{i\alpha} R(\phi_y) \mathbf{g}, \quad \mathbf{j} = P(\kappa, \xi_J) \mathbf{i} + \frac{\sqrt{\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \mathbf{n}_{J\perp} h(\Omega) \end{aligned} \quad (3.55)$$

ここで干渉計に入射する電場のパワー  $P_A$  に対して各腕に入射されるパワーは  $P_E = P_J = 1/2P_A$  であるから  $\kappa = 4P_A\omega_0/(mc^2\Omega^2)$  として、 $h_{\text{SQL}} = \sqrt{4\hbar/mL^2\Omega^2}$  としている。<sup>\*3</sup> また  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  であるとき、 $\xi_J = \arctan\left(\frac{\sin\phi_y}{\cos\phi_y}\right) = \phi_y$ ,  $\xi_E = \arctan\left(\frac{\sin\phi_x}{\cos\phi_x}\right) = \phi_x$  となる。これにより、

$$\begin{aligned} P(\kappa, \xi_J) &= R(\phi_y)P(\kappa, 0)R(-\phi_y) \\ P(\kappa, \xi_E) &= R(\phi_x)P(\kappa, 0)R(-\phi_x) \\ R(\phi_y)\mathbf{n}_{J\perp} &= \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_y \\ \cos 2\phi_y \end{pmatrix} \\ R(\phi_x)\mathbf{n}_{E\perp} &= \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_x \\ \cos 2\phi_x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.56)$$

が成り立つ。これらを用いて量子的な揺らぎ  $\mathbf{k}$  はゼロにならないことに注意しながら、 $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{l}$  について解けば、

$$\begin{aligned} R(-2\phi_x)\mathbf{b} &= \frac{e^{2i\alpha}}{2}[I + R(2\phi_-)]P(\kappa, 0)\mathbf{a} + \frac{e^{2i\alpha}}{2}[-I + R(2\phi_-)]P(\kappa, 0)\mathbf{k} \\ &\quad + \frac{e^{i\alpha}}{2} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_- \\ -1 + \cos 2\phi_- \end{pmatrix} h(\Omega) \\ R(-2\phi_x)\mathbf{l} &= \frac{e^{2i\alpha}}{2}[-I + R(2\phi_-)]P(\kappa, 0)\mathbf{a} + \frac{e^{2i\alpha}}{2}[I + R(2\phi_-)]P(\kappa, 0)\mathbf{k} \\ &\quad + \frac{e^{i\alpha}}{2} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_- \\ 1 + \cos 2\phi_- \end{pmatrix} h(\Omega) \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる。ここで  $\mathbf{b}' = R(-2\phi_x)\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{l}' = R(-2\phi_x)\mathbf{l}$  と置き直す。ダークフリンジに制御する ( $\phi_- = 0$ ) ときは、RFL ポートへの揺らぎ  $\mathbf{b}'$  には重力波の影響は現れない。重力波の影響は AS ポートへの揺らぎ  $\mathbf{l}'$  のみに現れて、

$$\mathbf{l}' = e^{2i\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k} + e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \quad (3.58)$$

という式でかける。ダークフリンジの Michelson 干渉計では入射する揺らぎ  $\mathbf{a}$  はゼロとなる。また重力波信号は入射電場と垂直な位相方向に現れている。このとき AS ポートから侵入する揺らぎ  $\mathbf{k}$  の位相成分だけでなく、 $\kappa$  倍された振幅成分が雑音として現れる。検出したい信号  $h(\Omega)$  の振幅  $e^{i\alpha}\sqrt{2\kappa}/h_{\text{SQL}}$  で、式 (3.58) の第 1 項で与えられる雑音の位相成分を規格化して、

$$\hat{h}_n = \frac{h_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\kappa}}(-\kappa k_1 + k_2)e^{i\alpha} \quad (3.59)$$

<sup>\*3</sup>  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{j}$  に現れる  $h(\Omega)$  の項の符号の違いは、重力波の四重分極によって片方の鏡は縮み、他方は伸びるためである。

という演算子を定義すれば\*4、感度のパワースペクトル密度は

$$S_{\text{MI}}(\Omega) = \frac{h_{\text{SQL}}^2}{2} \left( \kappa + \frac{1}{\kappa} \right) \quad (3.60)$$

となる。ここでは  $\hat{h}_n = \eta_1 \hat{a}_1 + \eta_2 \hat{a}_2$  と表せるとき

$$2\pi\delta(\Omega - \Omega')S(\Omega) = \langle 0 | h(\Omega)h^\dagger(\Omega') + h^\dagger(\Omega')h(\Omega) | 0 \rangle = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 \quad (3.61)$$

が成り立つことを用いた。Michelson 干渉計の感度として式 (3.60) をプロットしたのが図 3.6 である。

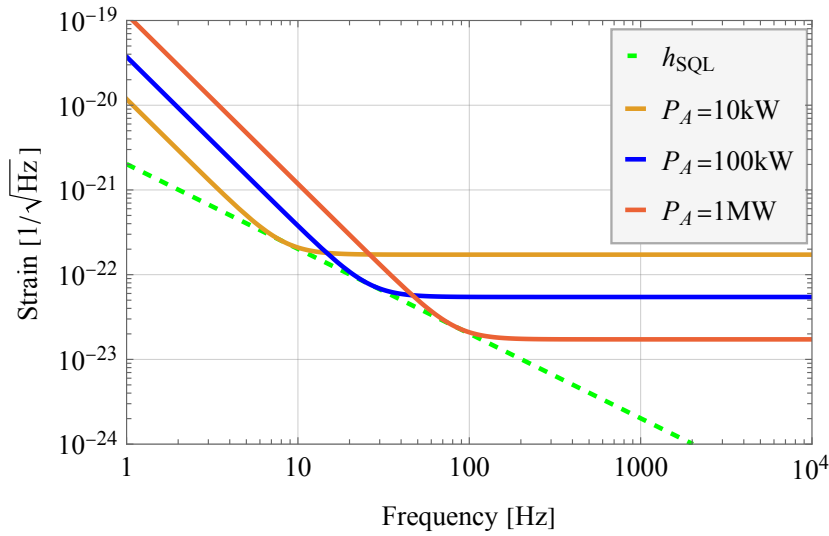


図 3.6 Michelson 干渉計の感度

図よりレーザーパワーを上げるほど高周波の感度が改善されることがわかる。しかし技術的な安定性や熱雑音の影響から、レーザー出力を上げるには限度があり、100 W 程度とされている。この問題の解決するために、主干渉計内への光共振器の導入などが行われる。

### 3.5 Bow-tie 共振器

本実験で導入する Bow-tie 共振器について説明する。2.3 節で説明した Fabry-Perot 共振器との大きな違いは光の進行方向が 1 方向の Ring 型共振器である点だ。Bow-tie 共振器は図 3.7 のように 4 つの鏡から構成されており、それぞれの鏡の振幅反射率と透過率は  $r_i, t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とする。 $F$  から  $G$  に伝搬する際に、振幅透過率  $\kappa$  をかけているのは後の実験での計算をしやすいよう、 $\sqrt{1 - \kappa^2}$  分のロスが生じると仮定しているためである。

Bow-tie 共振器の古典的な電場に対する入出力関係を書き下すと次のようになる：

$$\begin{aligned} B &= -r_1 A + t_1 D, & C &= t_1 A + r_1 D, \\ D &= R(\phi_4) J, & E &= R(\phi_1) C, & F &= r_2 E \\ G &= \kappa R(\phi_2) F, & H &= r_3 G, & I &= R(\phi_3) H, \\ J &= r_4 I, & K &= t_3 G, & L &= t_4 I \end{aligned} \quad (3.62)$$

\*4 信号  $h(\Omega)$  の信号雑音比 (Signal to Noise Ratio : SNR) を表す。

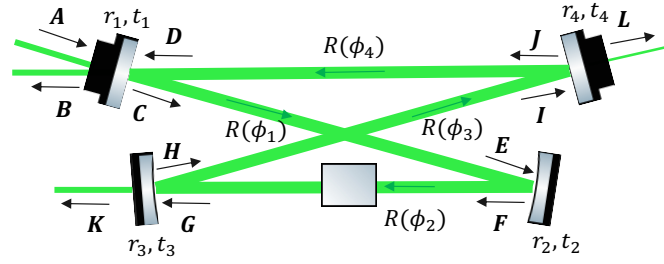


図 3.7 Bow-tie 共振器の入出力関係

これを  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  として解くと、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= (-rI + [1 - rR(\phi)]^{-1}t_1^2rR(\phi)) \mathbf{A} \\
 &= -r_1A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t_1^2rA_0}{1 + r_1^2r^2 - 2r_1r \cos \phi} \begin{pmatrix} \cos \phi - r_1r \\ \sin \phi \end{pmatrix} \\
 \mathbf{K} &= [1 - r_1rR(\phi)]^{-1}t_1t_3\kappa r_2R(\phi_1 + \phi_2)\mathbf{A} \\
 &= \frac{t_1t_3\kappa r_2A_0}{1 + r_1^2r^2 - 2r_1r \cos \phi} \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) - r_1r \cos(\phi_3 + \phi_4) \\ \sin(\phi_1 + \phi_2) + r_1r \sin(\phi_3 + \phi_4) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{L} &= [1 - r_1rR(\phi)]^{-1}t_1t_4\kappa r_2r_3R(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)\mathbf{A} \\
 &= \frac{t_1t_4\kappa r_2r_3A_0}{1 + r_1^2r^2 - 2r_1r \cos \phi} \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) - r_1r \cos(\phi_4) \\ \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + r_1r \sin(\phi_4) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

となる。ここでは反射率をまとめて  $r = r_2r_3\kappa r_4$  とし、共振器を一周して生じる位相変化を  $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$  としている。さらに  $|A_0|^2 = P_A$  とおき、光のパワーを計算すると

$$\begin{aligned}
 P_B &= \frac{r_1^2 + r^2 - 2r_1r \cos \phi}{1 + r_1^2r^2 - 2r_1r \cos \phi} P_A \\
 P_K &= \frac{t_1^2t_4^2\kappa^2r_2^2}{1 + r_1^2r^2 - 2r_1r \cos \phi} P_A \\
 P_L &= \frac{t_1^2t_4^2\kappa^2r_2^2r_3^2}{1 + r_1^2r^2 - 2r_1r \cos \phi} P_A
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

となる。これは式 (2.15) で見たように Fabry-Perot 共振器のパワーと同じ表記で表されている。また Bow-tie 共振器のフィネスも同様に定義できて、

$$\mathcal{F}_{\text{BT}} = \frac{\pi\sqrt{r_1r}}{1 - r_1r} \tag{3.65}$$

となる。

### 3.6 Signal Recycling Michelson 干渉計の量子雑音

Signal Recycling Michelson 干渉計 (SRMI) は、図のように通常の Michelson 干渉計の出力ポートに鏡をおくことによって構成される。干渉計のインプット鏡と出力ポートに置かれた

鏡 (SR 鏡) が共振器を構成しており、Signal Recycling(SR) 共振器と呼ばれる。本節ではこの干渉計の量子雑音を計算する。

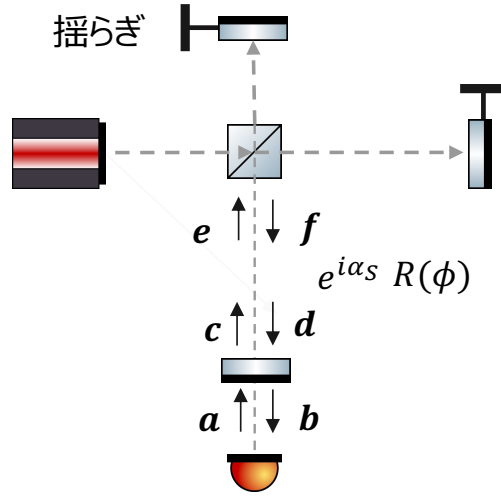


図 3.8 SRMI の入出力関係

BS から SR 鏡までの位相変化を  $\phi = \frac{\omega_0 L_S}{c}$ 、SR 鏡の振幅反射率と透過率をそれぞれ  $r_S, t_S$  とおく。このとき電場の揺らぎについて書き下すと次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -r_S \mathbf{a} + t_S \mathbf{d}, \quad \mathbf{c} = t_S \mathbf{a} + r_S \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = e^{i\alpha_S} R(\phi) \mathbf{f}, \\ \mathbf{e} &= e^{i\alpha_S} R(\phi) \mathbf{c}, \quad \mathbf{f} = e^{2i\alpha} P(\kappa, 0) \mathbf{e} + e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \end{aligned} \quad (3.66)$$

ここで Michelson 干渉計の腕で揺らぎに生じる位相遅れを  $\alpha = \Omega L/c$ 、BS から SR 鏡の間で揺らぎに生じる位相遅れを  $\alpha_S = \Omega L_S/c$  としている。これを解くと次式を得る：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [I - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(\phi) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} \left[ -r_S I + e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(\phi) P(\kappa, 0) R(\phi) \right] \mathbf{a} \\ &+ [I - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(\phi) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} t_S e^{i(\alpha+\alpha_S)} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} h(\Omega) \\ &= \frac{1}{M} \left[ e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \mathbf{a} + \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} t_S e^{i(\alpha+\alpha_S)} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} h(\Omega) \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

各係数と行列要素は次のようにおいた：

$$\begin{aligned} M &= 1 + r_S^2 e^{4i(\alpha+\alpha_S)} - 2r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \left( \cos 2\phi + \frac{\kappa}{2} \sin 2\phi \right) \\ C_{11} &= C_{22} = -2r_S \cos(2(\alpha + \alpha_S)) + (1 + r_S^2) \left( \cos 2\phi + \frac{\kappa}{2} \sin 2\phi \right) \\ C_{12} &= -t_S^2 (\sin 2\phi + \kappa \sin^2 \phi) \\ C_{21} &= t_S^2 (\sin 2\phi - \kappa \cos^2 \phi) \\ H_1 &= - \left( 1 + r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \right) \sin \phi \\ H_2 &= \left( 1 - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \right) \cos \phi \end{aligned} \quad (3.68)$$

式 (3.67) より感度のパワースペクトルは

$$S_{\text{SR}} = \frac{|C_{21}|^2 + |C_{22}|^2}{2T_S |H_2|^2} \frac{h_{\text{SQL}}^2}{\kappa} \quad (3.69)$$

で与えられる。SR 共振器が共振している ( $\phi = 0$ ) とき、感度曲線は図 3.9 のようになる。ここでパワーは 10 kW としている。図 3.9 から反射率の高い SR 鏡を用いることで、通常の Michelson 干渉計と比べて帯域幅を保ったまま高周波での感度が向上することがわかる。

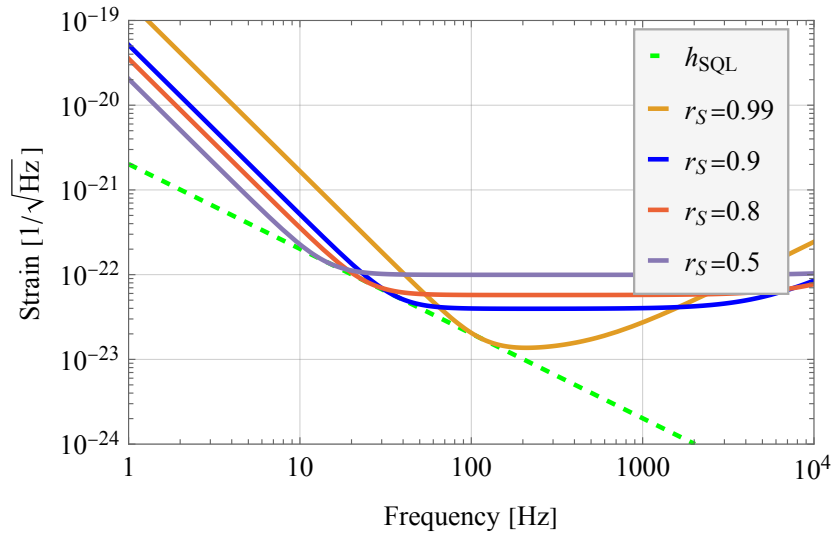


図 3.9 共振しているときの SRMI の感度曲線。共振器長  $l_s = 1$  m、パワーは 10 kW としており、SR 鏡の反射率を変化させた。

また SR 共振器が離調されているとき ( $\phi \neq 0$ ) の感度曲線は図 3.9 に示した。このような干渉計は Detuned Signal Recycling Michelson 干渉計 (Detuned SRMI) と呼ばれる。

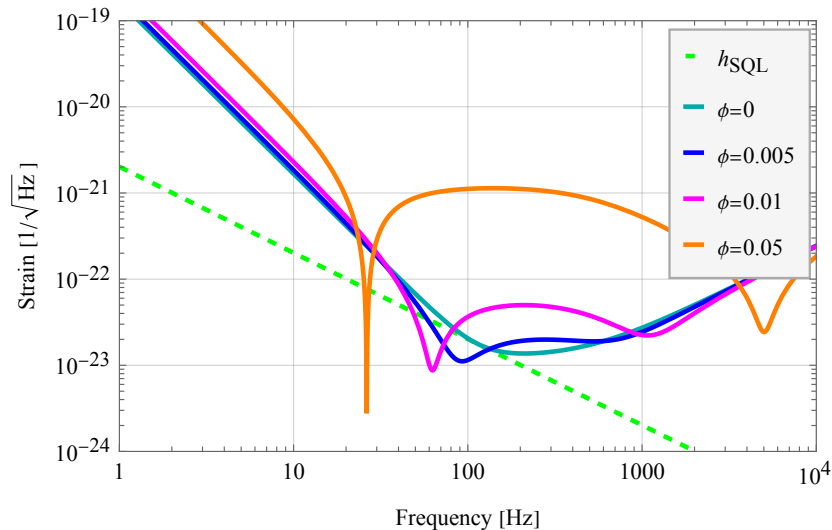


図 3.10 Detuned SRMI の感度曲線。共振器長  $l_s = 1$  m、パワーは 10 kW、SR 鏡の反射率は  $r_s = 0.99$  として、離調度  $\phi$  を変化させている。

この図 3.9 では離調度合い  $\phi$  に応じて感度の向上が見られ、ある帯域では標準量子限界

(SQL) を超えることができている。式 (3.68) より、 $M = 0$  となる時、信号  $h(\Omega)$  と雑音となる揺らぎ  $\mathbf{a}$  が発散することがわかる。 $\alpha + \alpha_S$  を微小量としてその周波数を求めると、

$$\Omega_{OS} = \sqrt{\frac{4P_{in}\omega_0}{mc^2} \frac{\sin 2\phi}{r_S + \frac{1}{r_S} - 2\cos 2\phi}} \quad (3.70)$$

となる。光ばね (Optical Spring) と呼ばれる光の輻射圧と光の変位がオプトメカニカルな相互作用が生じており、 $\Omega_{OS}$  は光ばねの共振周波数に対応する。これは SR 共振器だけでなく Detuned させた共振器の特徴であり、この現象を用いた重力波検出アンテナなども提案されている [4]。また図 3.9 で  $\phi = 0.05$  のときの感度曲線には2つのディップが生じているが、高周波に現れるディップは離調によるサイドバンドの共振を表しており、低周波に現れるディップは次節で扱う光ばねの共振によって説明される。式 (3.70) より  $r_S \simeq 1$  であるときは、離調が小さくなるほど  $\Omega_{OS}$  は大きくなることがわかる。これは図 3.10 の低周波側のディップが高周波にシフトすることに相当する。また共振器長の離調度が大きくなると、より高い周波数の重力波によって生じるサイドバンドが共振を起こし、高周波でのディップが右にシフトする。



## 第 4 章

# 実験の原理

### 4.1 非線形光学

本節では実験に用いる非線形光学効果について説明する。誘電体結晶に電場が入射すると、結晶内の原子の電荷が平衡位置から移動して分極が生じる。また電場の振動によって分極も振動し、分極電場を作り出す。電場が小さい場合、分極の振動は電場の振動に追従するが、強力な電場に対しては線形な応答を示さなくなり非線形光学効果を起こす。一般に非線形な分極と電場の関係は次のように書き表される：

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots \\ &= \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\varepsilon_0$  真空での誘電率である。 $\chi^{(1)}$  は線形感受率であり、 $\chi^{(n)}$  は  $n$  次の非線形感受率を表しており、 $n+1$  次のテンソルである。全体の分極は線形項  $\mathbf{P}_L$  と非線形項  $\mathbf{P}_{NL}$  に分けられる。

Maxwell 方程式から非線形結晶中での電磁波の伝搬は、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

で与えられる。この式に式 (4.1) を代入すれば、非線形分極から生じる電場の方程式が得られる：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

ここでは  $n^2 = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + \chi^{(1)}$ ,  $c_n = c/n$  という関係を使った。得られた式から非線形な分極  $\mathbf{P}_{NL}$  が電場の放射源として機能することがわかる。

#### 4.1.1 周波数コンバージョン

2 次の非線形結晶が持つ周波数を変化させる性質について述べる。そのため、以下では 3 次以上の非線形感受率はゼロとする。まず周波数  $\omega_1, \omega_2$  を持つ次のような電場を考える：

$$E(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t \quad (4.4)$$

この電場が非線形結晶に入射すると、分極の非線形成分  $P_{NL}$  は

$$P_{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \left( \frac{E_1^2 + E_2^2}{2} + \frac{E_1^2}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{E_2^2}{2} \cos 2\omega_2 t + E_1 E_2 (\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t) \right) \quad (4.5)$$

となり、 $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$  という5つの周波数を生じさせることがわかる。ある周波数  $\omega$  の電場入射させたとき、その倍波である周波数  $2\omega$  の電場が発生する現象を第2高調波発生 (Second Harmonic Generation : SHG) という。この過程を模式的に表したのが図4.1である。また2種類の周波数  $\omega_1, \omega_2$  の電場を入射させたとき、その和周波 (up-conversion) や差周波 (down-conversion) が発生する。この過程は図4.2に示した。

このように2次の非線形結晶は電場の周波数を変換する機能を持つため、様々な波長のレーザーを作るのに用いられる。本実験では、第2高調波発生 (SHG) によって波長 1064 nm の信

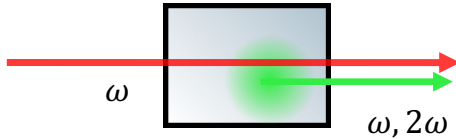


図 4.1 第2高調波発生

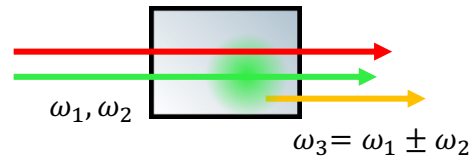


図 4.2 和周波発生と差周波発生

号光から発生させた 532 nm の波長の光を利用する。

またどの周波数変換が優位に起こるかは結晶の方位と電場の偏光によって決まっており、位相整合条件が成り立つ変換が効率の良く起こる。 $z$  方向を進行方向として、非線形分極  $P_{NL}(z, t) = P_0 \exp(i(\omega t - kz))$  によって、電場：

$$E_{NL}(z, t) = E_0(z) \exp(i(\omega t - k'z)) \quad (4.6)$$

が生じるとする。分極  $P_{NL}(z, t)$  と電場  $E_{NL}(z, t)$  を式 (4.3) に代入すれば、

$$\frac{\partial^2 E_0(z)}{\partial z^2} - 2ik' \frac{\partial E_0(z)}{\partial z} = \mu_0 \omega^2 P_0 \exp(-i(k - k')z) \quad (4.7)$$

ここで、電場の振幅が  $z$  に対してゆっくり変化すると仮定して：

$$\left| \frac{\partial^2 E_0(z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k' \frac{\partial E_0(z)}{\partial z} \right| \quad (4.8)$$

$\partial^2 E_0(z)/\partial z^2$  の項を無視すると、式 (4.7) より、

$$\frac{\partial E_0(z)}{\partial z} = \frac{\mu_0 \omega^2}{2k'} P_0 \exp(i\Delta k z) \quad (4.9)$$

となる。これを非線形結晶の長さを  $L$  として積分すると、

$$E_0(z) = \frac{\mu_0 \omega^2 L}{2k'} P_0 \exp(i\Delta k L/2) \frac{\sin(\Delta k L/2)}{\Delta k L/2} \quad (4.10)$$

$$\Delta k := k - k'$$

となり、発生する電場の強度は  $L^2 \frac{\sin^2(\Delta k L/2)}{(\Delta k L/2)^2}$  に比例することがわかる。また  $\Delta k = 0$  のとき、長さ  $L$  の2乗に比例して増え、最も効率が良い電場が発生する。 $\Delta k = 0$  が成り立つことを位相整合条件といい、これを満たすとき効率良い変換が実現される。

### 4.1.2 疑似位相整合

一般に結晶中の屈折率は波長によって異なり、伝搬速度が異なる。そのため各点で生じる第 2 高調波の位相は一致せず、位相整合条件  $\Delta k = 0$  は満たされない。また結晶長がある程度長さを超えると生成された電場同士が弱め合ってしまう。その様子は図 4.3 に示した。屈折率に

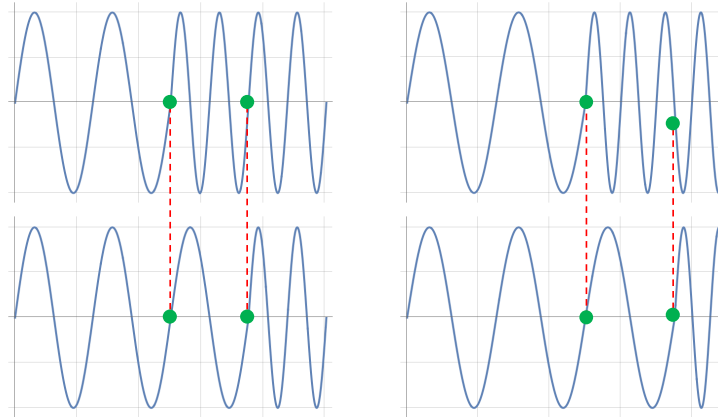


図 4.3 非線形結晶中で生じた第 2 高調波の位相を表した図。左図の 2 つの波形は屈折率の分散がないとき 右図の 2 つの波形は分散があるときを表している。図中の緑の点で波長変換が起きた点を比較した。結晶の分散がある場合、発生する場所が異なると、非線形光学波の位相はずれる。

分散がない場合、結晶内のどこで変換が起きたとしても位相条件が満たされている一方で、分散がある場合、変換が起きた場所によって生成される電場の位相が異なっている。

このような状況下で位相整合させるには複屈折を用いる手法などが存在するが、本実験では疑似位相整合を採用した。

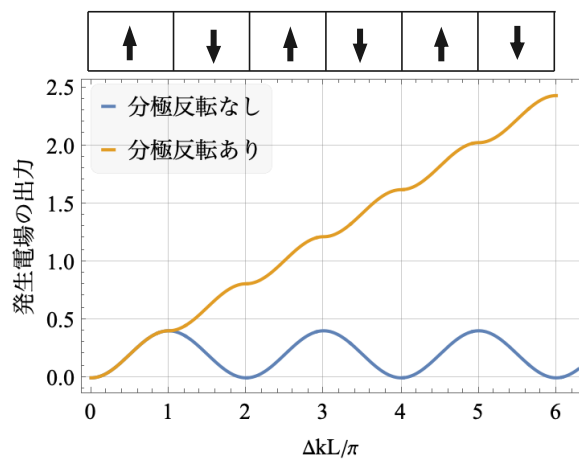


図 4.4 疑似位相整合の模式図。式 (4.5) で与えられた発生電場の出力と結晶長の関係を表している。コヒーレンス長  $l_c$  ごとに分極反転させている。

$\Delta k \neq 0$  のとき結晶長  $L$  による位相変化  $\Delta kL = \pi$  で発生する電場の強度は最大となり、そ

の後  $\Delta kL = 2\pi$  で最小になる。<sup>\*1</sup>従って、コヒーレンス長  $l_c$  ごとに結晶の分極を反転させれば、電場強度を大きくし続けることができる。このように周期的に分極反転させることで疑似的な位相整合を実現させることを疑似位相整合という。発生電場が減衰しないためには分極反転させる周期  $\Lambda$  を  $2l_c$  の整数倍にすればよい。よって周期  $\Lambda$  あたりの波数  $K = 2\pi/\Lambda$  をとすると疑似位相整合は、

$$\begin{aligned} 2ml_c &= \Lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \Delta k &= \pm mK \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。本実験では非線形結晶として周期分極反転させたニオブ酸リチウム  $\text{LiNbO}_3$  (Periodically Poled Lithium Niobate : PPLN) を用いる。ニオブ酸リチウムの非線形感受率は入射光とその第2高調波の偏光が異常光線であるとき最大になる。また実験系ではオープンによる温度設定によって結晶長を調整できるようにしてある。

### 4.1.3 3光波混合の結合方程式による表現

次に、2次の非線形結晶中の3光波混合過程を表す結合方程式を導出する。 $z$ 方向に進行し、周波数が  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  で複素振幅が  $E_1(z), E_2(z), E_3(z)$  の3つの波の重ね合わせからなる電場を考える：

$$E(t) = \sum_{q=1,2,3} \text{Re}[E_q(z)e^{i(\omega_q t - k_q z)}] \quad (4.12)$$

この式は  $\omega_{-q} = -\omega_q$ ,  $E_{-q} = E_q^*$  として、

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{q=1,2,3} \frac{1}{2} \left[ E_q(z)e^{i(\omega_q t - k_q z)} + E_q(z)^* e^{-i(\omega_q t - k_q z)} \right] \\ &= \sum_{q=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \frac{1}{2} E_q(z) e^{i(\omega_q t - k_q z)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

と書き直せる。この電場が発生させる非線形分極  $P_{NL}$  を微分方程式 (4.3)：

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (4.14)$$

の右辺に代入すると、

$$\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \mu_0 \chi^{(2)} \sum_{q,r=\pm 1, \pm 2, \pm 3} (\omega_q + \omega_r)^2 E_q(z) E_r(z) e^{i[(\omega_q + \omega_r)t - (k_q + k_r)z]} \quad (4.15)$$

となる。方程式 (4.14) は  $\omega_{\pm 1}, \omega_{\pm 2}, \omega_{\pm 3}$  いずれかの周波数成分のみから構成される6つの式に分離できて、

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_1^2) E_1(z) &= -S_1 \\ (\nabla^2 + k_2^2) E_2(z) &= -S_2 \\ (\nabla^2 + k_3^2) E_3(z) &= -S_3 \end{aligned} \quad (4.16)$$

<sup>\*1</sup> 最大値を与える結晶の長さ  $l_c = \pi/\Delta k$  はコヒーレンス長と呼ばれる。

と表せる。周波数  $\omega_{-q}$  ( $q = 1, 2, 3,$ ) から構成される式は  $\omega_q$  の式の共役をとったものである。また波数は  $k_q = n\omega_q/c$  で、 $S_q$  は周波数  $\omega_q$  の成分を持つ項の振幅である。式 (4.15) には周波数  $\omega_1 + \omega_2, \omega_3 - \omega_2$  で振動する項が現れるが、これらの項と  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  で振動する項は一般的に相互作用を起こさない。しかし、ここで

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (4.17)$$

という条件\*2を課すと、周波数  $\omega_1 + \omega_2, \omega_3 - \omega_2$  の振動が  $\omega_3, \omega_1$  の放射源として機能するようになる。この条件下で式 (4.16) を書き直すと、

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_1^2)E_1 &= -\mu_0\varepsilon_0\chi^{(2)}\omega_1^2 E_3 E_2^* \\ (\nabla^2 + k_2^2)E_1 &= -\mu_0\varepsilon_0\chi^{(2)}\omega_2^2 E_3 E_1^* \\ (\nabla^2 + k_3^2)E_1 &= -\mu_0\varepsilon_0\chi^{(2)}\omega_3^2 E_1 E_2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。この式は3光波混合の結合方程式と呼ばれ、異なる周波数を持つ電場の振幅が非線形分極  $\chi^{(2)}$  を介して混合されていることがわかる。

#### 4.1.4 パラメトリック増幅による信号増幅

光パラメトリック増幅 (Optical Parametric Amplification : OPA) とは、非線形結晶に周波数  $\omega_1$  の信号光と周波数  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  の強いポンプ光を入射することで、差周波発生によって  $\omega_1$  の信号光と  $\omega_2$  のアイドラー光が同時に増幅される現象である。以下では結合方程式を用い、光パラメトリック増幅について議論する。

まず結晶中を  $z$  軸方向に伝搬する周波数  $\omega_q$  ( $q = 1, 2, 3$ ) を持つ電場  $E_q(z)$  について考える。電場を  $z$  方向に進む平面波として  $E_q(z) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_q}{n_q}} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}} A_q(z) \exp(-ik_q z)$  とおく。 $A_q(z)$  は複素包絡面である。パワーを  $P_q$ 、断面積を  $A$  としてこの電場の強度を求めると、

$$\frac{P_q}{A} = \frac{n_q}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} |E_q|^2 = \hbar\omega_q |A_q|^2 \quad (4.19)$$

となる。\*3これを式 (4.18) に代入すると、

$$\left( \frac{d^2 A_1}{dz^2} - 2ik \frac{dA_1}{dz} \right) = -\mu_0\varepsilon_0\chi^{(2)}\omega_1 \sqrt{\frac{2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3 n_1}{n_2 n_3}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}} A_3 A_2^* \exp(-i\Delta k z) \quad (4.20)$$

となる。ここで先と同様に振幅  $A_q(z)$  が  $z$  に対してゆっくり変化すると仮定して、 $\frac{d^2 A_1}{dz^2}$  の項を無視すると、

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{i}{2}\varepsilon_0\chi^{(2)} \sqrt{\frac{2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3 n_1}{n_1 n_2 n_3}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{3}{4}} A_3 A_2^* \exp(-i\Delta k z) \quad (4.21)$$

ここで非線形光学係数  $d$  と結合定数  $g$  を次のように与える：

$$\begin{aligned} d &:= \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi^{(2)} \\ g &:= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3}{n_1 n_2 n_3}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)^{3/4} d \end{aligned} \quad (4.22)$$

\*2 この条件は光のエネルギー保存則に対応する。

\*3  $|A_q(z)|^2$  が光子数密度に対応するように電場を変形している。

これらを用いて式 (4.21) を書き直すと、

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -igA_3A_2^* \exp(-i\Delta kz) \\ \frac{dA_2}{dz} &= -igA_3A_1^* \exp(-i\Delta kz) \\ \frac{dA_3}{dz} &= -igA_1A_2 \exp(i\Delta kz)\end{aligned}\quad (4.23)$$

となる。位相整合条件  $\Delta k = 0$  と、信号光よりも十分強くポンプ光が変化しない  $A_3(z) = \text{const.}$  を仮定すると結合方程式は次のようになる：

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -i\frac{\gamma}{2}A_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= i\frac{\gamma}{2}A_1\end{aligned}\quad (4.24)$$

ここで  $\gamma = 2gA_3(z)$  としている。 $\gamma$  は結晶中の単位長さあたりの変換量を表す係数であり、一般に複素数となる。 $z = 0$  における境界条件を  $A_q(0) = |A_q(0)|e^{i\phi_q}$  ( $q = 1, 2$ ) として、結合方程式 (4.24) の解は次のようになる：

$$\begin{aligned}A_1(z) &= A_1(0) \cosh \frac{|\gamma|z}{2} - ie^{i\phi_3} A_2^*(0) \sinh \frac{|\gamma|z}{2} \\ A_2^*(z) &= A_2^*(0) \cosh \frac{|\gamma|z}{2} + ie^{-i\phi_3} A_1(0) \sinh \frac{|\gamma|z}{2}\end{aligned}\quad (4.25)$$

この結果を用いて信号光とアイドラー光が縮退している ( $\omega_1 = \omega_2$ ) 場合の OPA を考える。信号光とポンプ光を  $z = 0$  から長さ  $L$  の結晶に入射させると、結晶通過した信号光の強度  $I_1(L)$  は、信号光とアイドラー光の振幅から  $\hbar\omega_1|A_1(L) + A_2(L)|^2$  で与えられるので、

$$I_1(L) = I_1(0)(\cosh \gamma L - \sin \Delta\phi \sinh \gamma L)\quad (4.26)$$

となる。 $I_1(0) = \hbar\omega_1|A_1(0) + A_2(0)|^2$  とし、 $\Delta\phi = 2\phi_1 - \phi_3$  とした。この式から信号光とポンプ光の初期位相によって増幅率が変化し、 $\Delta\phi = 2\phi_1 - \phi_3 = 2\pi m$  ( $m$  は整数) のとき  $e^{\gamma L}$  倍されて最大の増幅率となることがわかる。また増幅の利得係数  $\gamma$  は  $\gamma = 2gA_3(0)$  より、

$$\gamma = \left[ 8\eta_0^3 \omega_1 \omega_2 \frac{d^2 P_3}{n^3 A} \right]^{1/2}\quad (4.27)$$

と書き表される。

この過程は光の場を squeezing する作用があるため、squeezing 現象としてしばしば説明される。4.2.1 小節で OPA が電場と量子揺らぎに与える作用を示している。squeezing は次式で与えられる squeezing factor  $s$  および squeezing angle  $\theta$  で特徴づけられる：

$$\begin{aligned}s &= e^{\gamma L/2} = e^u \\ 2\theta &= 2\phi_1 - \phi_3 + \pi/2\end{aligned}\quad (4.28)$$

これらを用いると式 (4.26) は

$$I_1(L) = I_1(0)(\cosh 2u + \cos 2\theta \sinh 2u)\quad (4.29)$$

となる。初期位相は squeezing angle  $\theta$  に対応して、増幅率は squeezing factor によって表されている。OPA ゲインは squeezing factor  $s$  によって、

$$G_{\text{OPA}} := 20 \log_{10} s \text{ [dB]} \quad (4.30)$$

と定義される。

#### 4.1.5 光パラメトリック発振器

前節では適切にポンプ光の初期位相を与えることで、ポンプ光強度に応じて信号が増幅されるのを確かめた。非線形結晶を共振器内に入れ、ポンプ光強度を高めていくと増幅利得が共振器内での信号光とアイドラー光の損失を上回ることによって発振を起こす。この現象を光パラメトリック発振 (Optical Parametric Oscillator : OPO) という。ここでは OPO を起こすポンプ光パワーの閾値について議論する。共振器一周の長さ  $2l_S$ 、結晶長  $L$  とすると、損失を加味した共振器中の結合方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -\frac{1}{2}\alpha_1 A_1 - i\frac{\gamma L}{2l_S} A_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 A_2^* + i\frac{\gamma L}{2l_S} A_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

と書き表される。単位長さあたりの増幅利得は共振器全体に分布していると仮定して  $\gamma L/l_S$  としている。ここで  $\alpha_1, \alpha_2$  はそれぞれ信号光とアイドラー光の単位長さあたりの損失を表す係数であり、鏡の反射率や結晶内の散乱や吸収などを含めた共振器一周あたりの全損失は  $\exp\{-2\alpha_i l_S\}$  ( $i = 1, 2$ ) と表せる。発振の条件は利得と損失が釣り合うことであるから、信号光とアイドラー光の変化量はゼロ：

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{dA_2^*}{dz} = 0 \quad (4.32)$$

となる。すなわち、式 (4.31) において

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha_1 A_1 - i\frac{\gamma L}{2l_S} A_2^* &= 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_2 A_2^* + i\frac{\gamma L}{2l_S} A_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

が成り立つ。従って  $A_1, A_2^*$  がゼロでない解を持つばよいので\*4、パラメトリック発振の条件は  $\gamma^2 L^2 = \alpha_1 \alpha_2 l_S^2$  で与えられ、信号光とアイドラー光が縮退している ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ) とすれば、

$$\gamma L = 2\alpha l_S \quad (4.34)$$

となる。OPA による信号増幅率が共振器一周あたり全損失を超えるとき ( $s^2 e^{-2\alpha l_S} \geq 1$ )、発振が起こる。信号増幅は共振器一周あたり結晶長  $L$  に対応した squeezing factor で書き表されるので、

$$s^2|_{\text{閾値}} = e^{\gamma L} = e^{2\alpha l_S} \quad (4.35)$$

\*4 行列式がゼロとなれば良い。

となる。ビームの断面積を  $A$  として式 (4.27) よりポンプ光の発振閾値は次のように表せる：

$$P_3|_{\text{閾値}} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu}\right)^{3/2} \frac{(2\alpha l_s)^2 n^3}{8\omega_1\omega_2 L^2 d^2} A \quad (4.36)$$

以上より共振器の強度損失率  $\alpha$  が分かれば、発振条件から必要な squeezing factor や OPA ゲインを計算できる。さらに発振閾値は非線形光学係数  $d$ 、ビーム断面積  $A$  などを与えることで計算することができるがわかる。

また入射鏡の振幅反射率  $r_I$ 、反射鏡の振幅反射率  $r_E$ 、共振器内のロス  $\kappa$  によって  $\alpha$  を表すと、共振器一周あたり全損失は  $e^{-2\alpha l_s} = r_I^2 r_E^2 \kappa^2$  なので、

$$\alpha = \frac{1}{2l_s} \left( \ln \frac{1}{r_I^2 r_E^2 \kappa^2} \right) \quad (4.37)$$

となる。これを使って squeezing factor を表せば

$$s = \frac{1}{r_I r_E \kappa} \quad (4.38)$$

である。

## 4.2 光ばね

3.6 節で見たように離調した Signal Recycling Michelson 干渉計では光ばねが形成され、ある帯域において標準量子限界を超えた感度を実現される。本節では光ばねの定性的なイメージと現象を特徴づける量について述べ、本実験で扱う非線形結晶による光ばねの強化について議論する。

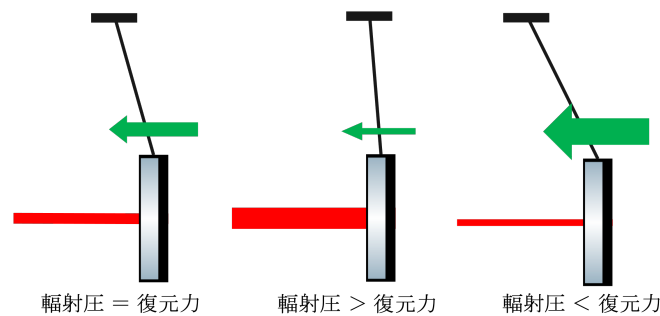


図 4.5 光ばねの模式図

まず、共振点から離調した共振器において、輻射圧と懸架鏡の復元力が釣り合っており、そこに重力波などによって鏡の変位が生じる場合を考える (図 4.5 左)。生じた変位が共振器長が縮む方向であれば光の輻射圧が懸架鏡の復元力より強くなることで押し戻され、逆に共振器長が伸びる方向であれば懸架鏡の復元力が光の輻射圧より強くなることで引き戻される (図 4.5 中央と右)。結果として輻射圧と懸架鏡の復元力によって鏡の位置は束縛される。また共振器の離調度に応じた鏡の変位  $\delta x(\Omega)$  が生じると共振が起こり、信号が増幅される。



次に、現象を特徴づける光ばね定数や共振周波数を導出する。電場と揺らぎ  $\mathbf{A}, \mathbf{a}(\Omega)$  によって、輻射ゆらぎ  $\delta F_{\text{rp}}$  と鏡の変位  $\delta x(\Omega)$  との間に

$$\delta F_{\text{rp}} = 2\hbar k_0(A_1 a_1(\Omega) + A_2 a_2(\Omega)) = -K_{\text{opt}}(\Omega)\delta x(\Omega) + \delta \quad (4.39)$$

という式が成り立つとき  $K_{\text{opt}}$  は複素光ばね定数と呼ばれる。 $K_{\text{opt}}$  の具体的な表式を求める。鏡の変位を使って Michelson 干渉計の AS ポートでの応答を表すには式 (3.55) の  $\mathbf{f}, \mathbf{j}$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{e} - 2k_o E_0 \mathbf{n}_{E_\perp} \delta x(\Omega) \\ \mathbf{j} &= \mathbf{i} + 2k_o I_0 \mathbf{n}_{J_\perp} \delta x(\Omega) \end{aligned} \quad (4.40)$$

として解けばよく、

$$\mathbf{l}' = e^{2i\alpha} \mathbf{k} + 2\sqrt{2}e^{i\alpha} k_0 I_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta x(\Omega) \quad (4.41)$$

となる。また本実験の干渉計では、片腕は固定鏡、他方の腕を懸架鏡にしているため、片腕のみ懸架鏡の場合も計算すると：

$$\mathbf{l}' = e^{2i\alpha} \mathbf{k} + \sqrt{2}e^{i\alpha} k_0 I_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta x(\Omega) \quad (4.42)$$

となる。

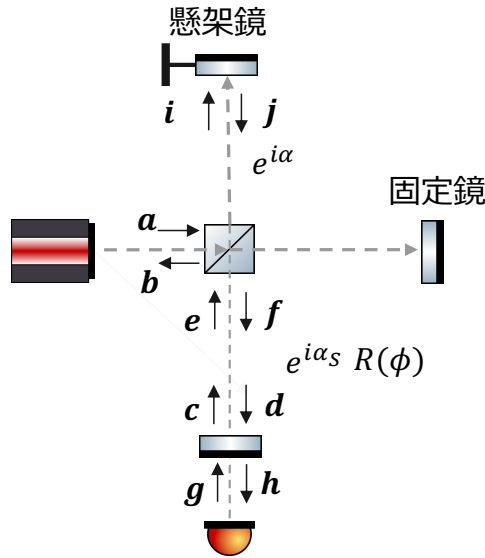


図 4.6 片腕のみ懸架鏡の SRMI の入出力関係

$\mathbf{a} = \mathbf{0}$  として図 4.6 のような、片腕のみ懸架鏡の Signal Recycling Michelson 干渉計の入出力関係を導く：

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= r_S \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = e^{i\alpha_S} R(\phi) \mathbf{f}, \quad \mathbf{e} = e^{i\alpha_S} R(\phi) \mathbf{c}, \\ \mathbf{f} &= e^{2i\alpha} \mathbf{e} - \sqrt{2}e^{i\alpha} k_0 I_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta x(\Omega), \quad \mathbf{i} = e^{i\alpha} \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

これを解くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= [I - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(2\phi)]^{-1} r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(2\phi) k_0 I_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta x(\Omega) \\ &= -\frac{1}{M} r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \begin{pmatrix} -\sin 2\phi \\ \cos 2\phi - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.44)$$

となる。ここで

$$M = 1 - 2r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \cos 2\phi + r_S^2 e^{4i(\alpha+\alpha_S)} \quad (4.45)$$

とした。式 (4.39) より  $K_{\text{opt}} = 2\hbar k_0 (I_1 i_1 + I_2 i_2)$  であるから、複素光ばね定数は、

$$K_{\text{opt}}(\Omega) = \frac{2P_A \omega_0}{c^2} \frac{\sin 2\phi}{r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} + \frac{1}{r_S} e^{-2i(\alpha+\alpha_S)} - 2 \cos 2\phi} \quad (4.46)$$

と表される。この式では  $\mathbf{I} = \mathbf{A}/\sqrt{2} = (A_0, 0)$  と用いており、また  $\mathbf{A}$  のパワーを  $P_A = \hbar\omega_0 |A_0^2|/2$  とした。

光ばね定数から光ばねの共振周波数  $\omega_{\text{OS}}$  を次のように定義する：

$$\omega_{\text{OS}} := \sqrt{\frac{K_{\text{opt}}(0)}{m}} = \sqrt{\frac{2P_A \omega_0}{mc^2} \frac{\sin 2\phi}{r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} + \frac{1}{r_S} e^{-2i(\alpha+\alpha_S)} - 2 \cos 2\phi}} \quad (4.47)$$

$\alpha + \alpha_S$  が微小量だと仮定すれば  $\omega_{\text{OS}}$  は式 (3.70) と一致する。

#### 4.2.1 非線形結晶による光ばねの強化

高周波重力波観測において、光ばねを利用した光学構成が提案されている。その1つの例が非線形結晶による光ばねの強化である。非線形結晶を離調した Signal Recycling Michelson 干渉計の BS と SR 鏡の間に置くことで、鏡の変位と光の輻射圧のダイナミクスを変化させ、光ばねの共振周波数を高周波にシフトさせることができる [5]。ここでは非線形結晶を含めた Detuned Signal Recycling Michelson 干渉計の入出力関係を考える。

BS から SR 鏡までの位相変化を  $\phi = \frac{\omega_0 l_S}{c}$ 、SR 鏡の振幅反射率と透過率をそれぞれ  $r_S, t_S$  とおく。電場  $\mathbf{A}$  とその揺らぎ  $\mathbf{a}$  が非線形結晶を透過することで  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{b}$  に変化すると、この過程は squeezing 行列  $S(u, \theta)$  によって、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= S(u, \theta) \mathbf{A} \\ \mathbf{b} &= S(u, \theta) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.48)$$

と表される。ここで squeezing 行列  $S(u, \theta)$  は次式で与えられる：

$$S(u, \theta) = \begin{pmatrix} \cosh u + \sinh u \cos 2\theta & \sinh u \sin 2\theta \\ \sinh u \sin 2\theta & \cosh u - \sinh u \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

また  $\theta = 0$  のとき、

$$S(u, 0) = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} = S(s) \quad (4.50)$$

となる。 $s = e^u$  は squeezing factor、 $\theta$  は squeezing angle である。

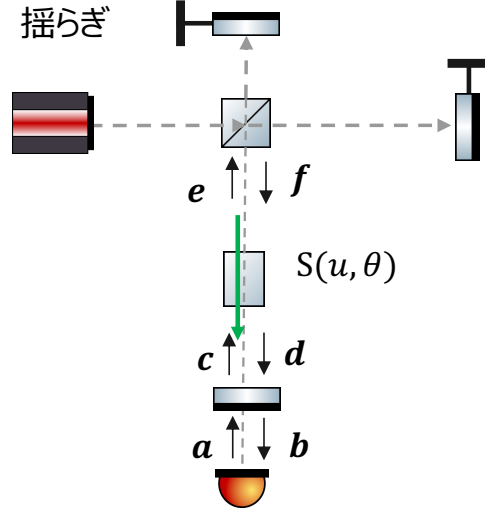


図 4.7 非線形結晶を含む Detuned SRMI の入出力関係

ここでは  $\theta = 0$  として、図 4.7 で示した電場揺らぎの入出力関係を書き下すと次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -r_S \mathbf{a} + t_S \mathbf{d}, \quad \mathbf{c} = t_S \mathbf{a} + r_S \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = e^{i\alpha_S} R(\phi) S(s) \mathbf{f}, \\ \mathbf{e} &= e^{i\alpha_S} R(\phi) \mathbf{c}, \quad \mathbf{f} = e^{2i\alpha} P(\kappa, 0) \mathbf{e} + e^{i\alpha} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} h(\Omega) \end{aligned} \quad (4.51)$$

ここで Michelson 干渉計の腕で揺らぎに生じる位相遅れを  $\alpha = \Omega L/c$ 、BS から SR 鏡の間で揺らぎに生じる位相遅れを  $\alpha_S = \Omega l_s/c$  としている。これを解くと次式を得る：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [I - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} \left[ -r_S I + e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(\phi) S(s) P(\kappa, 0) R(\phi) \right] \mathbf{a} \\ &\quad + [I - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} R(\phi) P(\kappa, 0) R(\phi)]^{-1} \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} t_S e^{i(\alpha+\alpha_S)} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} h(\Omega) \\ &= \frac{1}{M'} \left[ e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & C'_{22} \end{pmatrix} \mathbf{a} + \frac{\sqrt{2\kappa}}{h_{\text{SQL}}} t_S e^{i(\alpha+\alpha_S)} \begin{pmatrix} H'_1 \\ H'_2 \end{pmatrix} h(\Omega) \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

各係数と行列要素は次のようにおいた：

$$\begin{aligned} M' &= s - r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \left( (1+s^2) \cos 2\phi + \kappa \sin 2\phi \right) + s r_S^2 e^{4i(\alpha+\alpha_S)} \\ C'_{11} &= -2s r_S \cos(2(\alpha+\alpha_S)) + (1+r_S^2) \left( \frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\kappa}{2} \sin 2\phi \right) - \frac{1-s^2}{2} t_S^2 \\ C'_{22} &= -2s r_S \cos(2(\alpha+\alpha_S)) + (1+r_S^2) \left( \frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\kappa}{2} \sin 2\phi \right) + \frac{1-s^2}{2} t_S^2 \\ C'_{12} &= -t_S^2 \left( \frac{1+s^2}{2} \sin 2\phi + \kappa \sin^2 \phi \right) \\ C'_{21} &= t_S^2 \left( \frac{1+s^2}{2} \sin 2\phi - \kappa \cos^2 \phi \right) \\ H'_1 &= - \left( 1 + s r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \right) \sin \phi \\ H'_2 &= \left( 1 - s r_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} \right) \cos \phi \end{aligned} \quad (4.53)$$

このときの感度のパワースペクトル密度は

$$S_{\text{SR}} = \frac{|C'_{21}|^2 + |C'_{22}|^2}{2T_S |H'_2|^2} \frac{h_{\text{SQL}}^2}{\kappa} \quad (4.54)$$

で与えられる。このときの感度曲線を図 4.8 に示した。非線形結晶によって光の輻射圧と鏡の変位のダイナミクスが変化し、その影響がディップの間隔やディップの深さとして現れている。図 4.8 から同じ離調に対してはある程度まで squeezing を強めるとディップは浅くなるものの光ばねの周波数が高周波に移動し、感度が向上できることがわかる。また信号  $\mathbf{b}$  を検出するホモダイン角  $\xi_B$  を考慮すると感度のパワースペクトル密度は、

$$S'_{\text{SR}} = \frac{|C'_{11} \cos \zeta_B + C'_{21} \sin \xi_B|^2 + |C'_{12} \cos \xi_B + C'_{22} \sin \xi_B|^2}{2T_S |H'_1 \cos \xi_B + H'_2 \sin \xi_B|^2} \frac{h_{\text{SQL}}^2}{\kappa} \quad (4.55)$$

となる。このときの感度曲線を図 4.9 に示した。この図 4.9 から、squeezing を強くすることでそれに応じた離調において、ディップの深さを保ったまま光ばねの共振周波数がシフトし、高周波での感度を大きく改善できる。

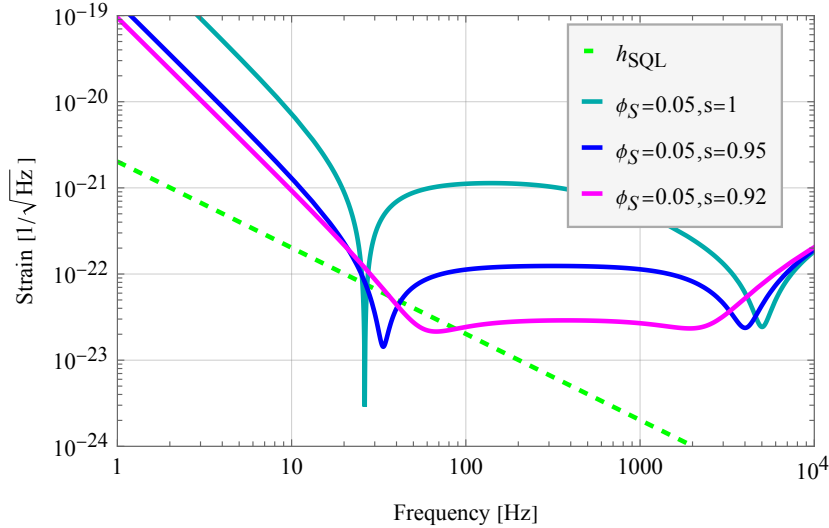


図 4.8 非線形結晶によって光ばねを強化したときの Detuned SRMI の感度曲線。squeezing factor を変化させている。 $\theta = 0$  かつ重力波が位相方向に現れているため、 $s$  が 1 以下で信号増幅され感度が良くなる。

非線形結晶を考慮した複素光ばねは式 (4.46) を導いたときと同様にして、

$$K_{\text{opt}}(\Omega) = \frac{2P\omega_0}{c^2} \frac{\sin 2\phi}{sr_S e^{2i(\alpha+\alpha_S)} + \frac{s}{r_S} e^{-2i(\alpha+\alpha_S)} - (s^2 + 1) \cos 2\phi} \quad (4.56)$$

と求められる。 $\alpha + \alpha_S$  が微小量とすると、このときの光ばねの共振周波数  $\omega_{\text{OS}}$  は

$$\omega_{\text{OS}} = \sqrt{\frac{2P\omega_0}{c^2} \frac{\sin 2\phi}{sr_S + \frac{s}{r_S} - (s^2 + 1) \cos 2\phi}} \quad (4.57)$$

で与えられる。分母がゼロになるとき、この値は発散するので

$$\left(r_S + \frac{1}{r_S}\right) = \left(s + \frac{1}{s}\right) \cos 2\phi \quad (4.58)$$

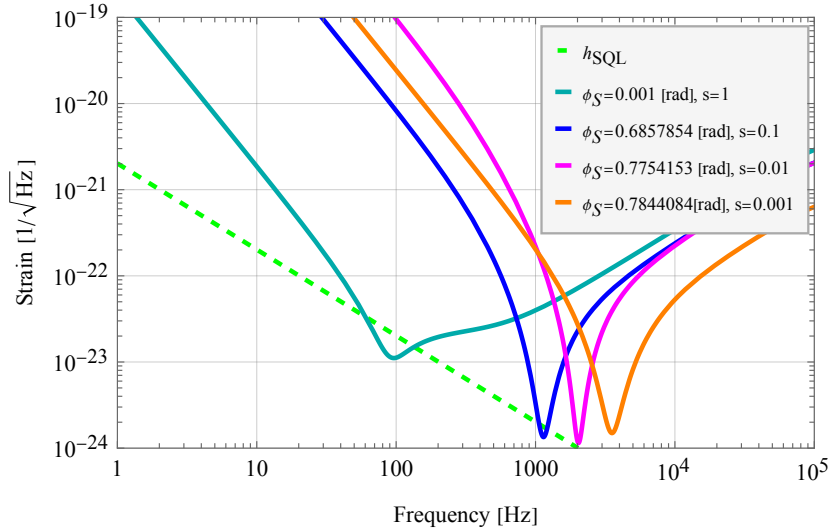


図 4.9 ホモサイン角を  $\xi_B = \pi/4$  としたときの非線形結晶を含む Detuned SRMI の感度曲線。離調の変化に応じて適した squeezing factor を選んだ。

となる。離調が十分小さいときこの式は光学ロスのない SR 共振器 ( $\kappa = 1$ ) に対する OPO の条件式 (4.38) と一致する<sup>\*5</sup>。したがって、OPO 条件付近まで squeezing を強めることで光ばねの共振周波数を高周波に大きくシフトさせることができると考えられる。

### 4.3 光学系の制御

ある系の入力に対する出力の周波数応答を表す関数を伝達関数という。入力  $X(\omega)$ 、出力  $Y(\omega)$  として系の伝達関数を  $H(\omega)$  とすると次のような関係式が成り立つ。

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (4.59)$$

この伝達関数から制御している系の安定性などを議論できる。本節では制御系の安定性や手法について記述する。

#### 4.3.1 負帰還制御

重力波検出器の共振器長や干渉計の腕の長さを精密に制御するため、負帰還制御が用いられる。負帰還制御とは入力に対してある出力を与える系において、出力を入力側に帰還することである値に制御する手法であり、以下でその原理について簡単に説明する。

まず、ある伝達関数  $H(\omega)$  で表される系からの出力信号  $Y(\omega)$  を、系外部のフィルタ  $F(\omega)$  で処理して、入力信号  $X(\omega)$  に再び戻すことを考える。これをブロック線図を用いて表したのが図 4.10 である。図における  $+$ 、 $-$  はそれぞれ信号を加算、減算することに相当する。ブロック線図より、以下の式が成り立つ：

$$Y = XH - YFH \quad (4.60)$$

<sup>\*5</sup> SR 共振器の入射鏡は Michelson 干渉計なので  $r_I = 1, r_E = r_S$  である。

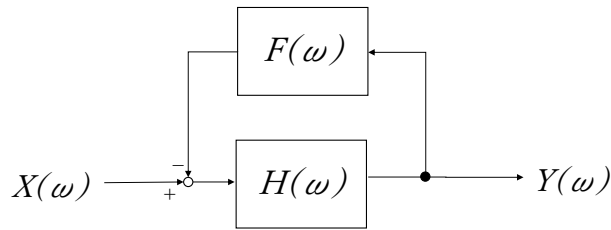


図 4.10 負帰還制御のブロック線図

これを解けば、

$$Y(\omega) = \frac{H}{1 + FH} X(\omega) \quad (4.61)$$

となる。系全体の周波数応答を表す  $\frac{H}{1+FH}$  はクローズドループ伝達関数  $G_{CL}$  と呼ばれ、その大きさ  $|\frac{H}{1+FH}|$  はクローズドループゲインという。また負帰還 1 回分の応答である  $FH$  は、オープンループ伝達関数  $G_{OL}$  と呼ばれ、その大きさ  $|FH|$  をオープンループゲインという。被制御下において ( $|G_{OL}| \gg 1$ )、出力信号は

$$Y \simeq \frac{1}{F} X \quad (4.62)$$

であるから、実効的な入力  $X_{\text{actual}} = 1/HY$  は、

$$X_{\text{actual}} = \frac{1}{1 + G_{OL}} X \simeq \frac{1}{G_{OL}} X \quad (4.63)$$

となり、オープンループゲインに応じて雑音の入力を小さくできる\*6。

#### 4.4 フィードバック制御の安定性

フィードバック制御をする上で伝達関数が発散し、入力に対する適切な応答が得られない場合がある。ここでは伝達関数を用いて系の安定性を議論する。一般に、伝達関数は周波数に依存した複素関数であり、次のように表される。

$$G(\omega) = |G(\omega)|e^{i\theta(\omega)} \quad (4.64)$$

$|G(\omega)| = 1$  となるときの周波数をユニティゲイン周波数 (Unity Gain Frequency) という。ユニティゲイン周波数において、位相が  $\pi$  となるとき、式 (4.64) から  $G(\omega) = -1$  となる。このとき先に見たシステム全体の伝達関数

$$G_{CL} = \frac{H}{1 + FH} X$$

\*6 重力波の信号も同じく小さくなる。

は発散してしまう。従って、制御の安定性を考えるにはユニティゲイン周波数における位相<sup>\*7</sup>におけるを確かめて、必要に応じて調節することが重要である。ユニティゲイン周波数における位相を容易に確かめられるため、制御系の応答や安定性を議論するときには、Bode 線図がよく用いられる。Bode 線図は伝達関数のゲイン vs. 周波数の図と、位相 vs. 周波数の図の2つに分けてプロットしたグラフである。一般的なゲインの単位としては [dB] が用いられ、 $20 \log_{10} |G(\omega)|$  で与えられる。

## 4.5 Pound-Drever-Hall 法

共振器長を共振状態となる長さに制御するためには、鏡の変位 (光の位相変化) に対する線形な信号となる。しかし多くの場合、重力波や雑音によってもたらされる信号は鏡の変位に対して線形な形を取らない。そこで、共振器長を制御するための線形な信号<sup>\*8</sup>を得るために用いられる Pound-Drever-Hall (PDH) 法という手法を紹介する。

### 4.5.1 位相変調

PDH 法では、信号光 (キャリア) に対して位相変調を行い Radio Frequency (RF) サイドバンドを発生させ、復調することによって共振器周りの線形信号を得る。位相の変調は Electro Optic Modulator (EOM) という結晶を使って行う。EOM 結晶は印加電圧に応じて屈折率が変化することを利用して光路長を変える、位相変調素子である。ある電場  $E_0 e^{i\Omega t}$  が EOM 結晶によって光路長が  $X_0 \cos \omega_m t$  だけ変化したとき、透過してくる電場  $E(t)$  は

$$E(t) = E_0 \exp \left( i\Omega t + i\Omega \frac{X_0 \cos \omega_m t}{c} \right) = E_0 \exp(i\Omega t + im_m \cos \omega_m t) \quad (4.65)$$

となる。ここで  $m_m (\ll 1)$  は変調指数と呼ばれる、EOM 結晶に印加する電圧や結晶の変換効率によって決まる量である。 $\omega_m$  は変調周波数を表す。ベッセル関数  $J_n(m_m)$  は次のような母関数で表されることから、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = \exp \left[ \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] \quad (4.66)$$

$x = m_m, t = ie^{i\omega_m t}$  として電場の式を変形していくと、

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \exp(i\Omega t + im_m \cos \omega_m t) \\ &= E_0 e^{i\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_m) i^n e^{in\omega_m t} \end{aligned} \quad (4.67)$$

となる。さらに、ベッセル関数の性質：

$$\begin{aligned} J_{-n}(m_m) &= (-1)^n J_n(m_m) \\ J_n &\simeq \frac{1}{n!} \left( \frac{m_m}{2} \right)^n \quad (m_m \ll 1) \end{aligned} \quad (4.68)$$

<sup>\*7</sup> ユニティゲイン周波数での位相が  $\pi$  からどれだけ離れているかを位相余裕という。

<sup>\*8</sup> この信号のことをエラー信号という。

を用いて  $m_m$  の1次の項まで取り出すと、

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \{ J_0 m_m e^{i\Omega t} + i J_1(m_m) (e^{i(\Omega+\omega_m)t} + e^{i(\Omega-\omega_m)t}) \} \\ &= E_0 \left\{ e^{i\Omega t} + \frac{i m_m}{2} (e^{i(\Omega+\omega_m)t} - e^{i(\Omega-\omega_m)t}) \right\} \\ &= E_0 e^{i\Omega t} + E_1 e^{i(\Omega+\omega_m)t} + E_{-1} e^{i(\Omega-\omega_m)t} \end{aligned} \quad (4.69)$$

となる。係数は  $E_{\pm 1} = \pm i \frac{m_m}{2} E_0$  として改めて定義した。この式 (4.69) からわかるように、EOM 結晶によって周波数  $\Omega + \omega_m$ ,  $\Omega - \omega_m$  の成分からなるサイドバンドが生じている。この電場のパワー  $P$  は

$$P = |E_0|^2 + |E_1|^2 + |E_{-1}|^2 + 2\text{Re}[(E_0^* E_1 + E_0 E_{-1}^*) e^{i\omega_m t}] + 2\text{Re}[E_1 E_{-1}^* e^{2i\omega_m t}] \quad (4.70)$$

と書ける。ここでは  $\text{Re}[A] = \text{Re}[A^*]$  であるから  $\text{Re}[E_0^* E_1 e^{i\omega_m t}] = \text{Re}[E_0 E_1^* e^{-i\omega_m t}]$  などの関係を使った。

#### 4.5.2 Local Oscillator による復調

先に求めた強度  $P$  のうち  $e^{i\omega_m t}$  に比例した成分に、鏡の変位に対して線形な信号が含まれている。これを位相変調に用いた周波数  $\omega_m$  と同一の周波数を持つ Local Oscillator(LO)<sup>\*9</sup> を掛け合わせることで、復調を行う。この復調を通じて線形信号を得るのだが、LO の出力波の位相に応じて In phase(I-phase)、Quadrature phase(Q-phase) 呼ばれる2つの方法がある。I-phase は加えた変調と同じ位相を持つ波 (先の例では  $\cos \omega_m t$ )、Q-phase は位相を90度だけずらした波 (先の例では  $\sin \omega_m t$ ) によって復調が行われる。復調した信号をフィルターによって振動する項を落とすことによってエラー信号  $v_I, v_Q$  が得られる。

#### 4.5.3 Michelson 干渉計の制御

PDH 法を用いることで Michelson 干渉計の制御がなされることを確かめる。Michelson 干渉計にキャリアとそのサイドバンドからなる電場  $E(t)$  が入射する場合を考える：

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 e^{i\Omega t} + E_{\pm 1} e^{i(\Omega \pm \omega_m)t} \\ &= E_{ca}(t) + E_{SB, \pm 1}(t) \end{aligned} \quad (4.71)$$

キャリア  $E_{ca}(t)$  とサイドバンド  $E_{SB, \pm 1}(t)$  は次式で与える：

$$\begin{aligned} E_{ca}(t) &:= E_0 e^{i\Omega t} \\ E_{SB, \pm 1}(t) &:= E_{\pm 1} e^{i(\Omega - \omega_m)t} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Michelson 干渉計の AS ポートに現れるキャリア由来の信号  $E_{AS, ca}(t)$  は、

$$E_{AS, ca}(t) = \frac{1}{2} E_0 e^{i\Omega t} \left( e^{2iL_y/c} - e^{2iL_x/c} \right) \quad (4.73)$$

\*9 局部発進器とも呼ばれる。



となる。同相長  $l = L_x + L_y$  と差動長  $d = L_x - L_y$  とすれば、式 (4.73) は、

$$E_{AS,ca}(t) = iE_0 e^{i\Omega t} \sin\left(\frac{\Omega l}{c}\right) \sin\left(\frac{\Omega d}{c}\right) \quad (4.74)$$

となる。同様にして、AS ポートに現れるサイドバンド由来の信号も求められるので、まとめると AS ポートで得られる信号  $E_{AS}$  は次のようになる：

$$E_{AS}(t) = iE_0 e^{i\Omega t} \sin\left(\frac{\Omega l}{c}\right) \sin\left(\frac{\Omega d}{c}\right) + iE_{\pm} e^{i(\Omega \pm \omega_m)t} \sin\left(\frac{(\Omega \pm \omega_m)l}{c}\right) \sin\left(\frac{(\Omega \pm \omega_m)d}{c}\right) \quad (4.75)$$

これと式 (4.70) から検出される信号を求めると  $\cos(\omega_m + \theta)$  によって復調ができ、I-phase( $\theta = 0$ )、Q-phase( $\theta = \pi/2$ ) で復調したときのエラー信号はそれぞれ、

$$v_{AS,I} = |E_0||E_1| \sin\left(\frac{\omega_m l}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega_m d}{c}\right) \sin\left(\frac{2\Omega d}{c}\right) \\ v_{AS,Q} = |E_0||E_1| \cos\left(\frac{\omega_m l}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega_m d}{c}\right) \sin\left(\frac{2\Omega d}{c}\right) \quad (4.76)$$

と計算できる。図 4.11 に変調された生信号と、復調して得られたエラー信号を示した。

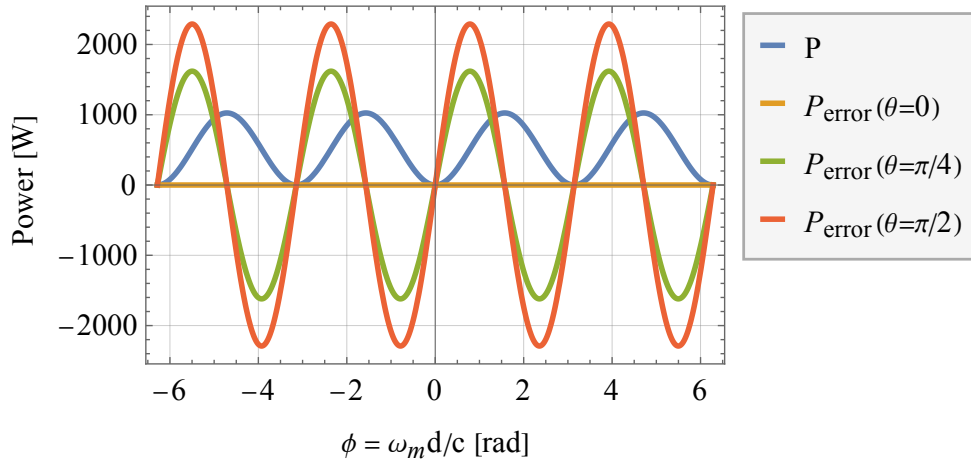


図 4.11 生信号とエラー信号。 $\theta$  は復調位相を表しており、 $\theta = 0$  のとき I-phase、 $\theta = \pi/2$  のとき Q-phase に対応している。

#### 4.5.4 共振器の制御

式 (2.15) で見たように共振器から得られる信号も共振器長に対して線形ではないため、PDH 法を用いてエラー信号を取得する。共振器からの反射光を用いる場合、電場は式 (2.13) で与えられる：

$$E_r = \frac{-r_1 + r_2 e^{-2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{in} \\ E_t = \frac{t_1 t_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{in} \quad (4.77)$$

共振器の反射率  $r_c(\Omega)$  を  $r_c(\Omega) := E_r/E_{\text{in}}$  として定義すると、

$$E_r = \frac{-r_1 + r_2 e^{-2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{\text{in}} = r_c(\Omega) E_{\text{in}} \quad (4.78)$$

となる。入射電場  $E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$  に変調を加えると、反射電場は式 (4.69) より、

$$\begin{aligned} E_{r,\text{mod}} &= r_c(\Omega) E_{\text{in,mod}} \\ &= r_c(\Omega) E_0 e^{i\Omega t} + r_c(\Omega + \omega_m) E_1 e^{i(\Omega + \omega_m)t} + r_c(\Omega - \omega_m) E_{-1} e^{i(\Omega - \omega_m)t} \end{aligned} \quad (4.79)$$

と書き換えられる。よって得られる信号は、

$$\begin{aligned} P_{r,\text{mod}} &= P_{\text{DC}} + 2m_m |E_0|^2 (\text{Re}[r_c^*(\Omega) r_c(\Omega + \omega_m) - r_c(\Omega) r_c^*(\Omega - \omega_m)] \cos \omega_m t \\ &\quad + \text{Im}[r_c^*(\Omega) r_c(\Omega + \omega_m) - r_c(\Omega) r_c^*(\Omega - \omega_m)] \sin \omega_m t) + \mathcal{P}(2\omega_m) \end{aligned} \quad (4.80)$$

となる。 $P_{\text{DC}}$  は DC 成分であり、 $\mathcal{P}(2\omega_m)$  は  $2\omega_m$  で振動する項である。これを  $\cos(\omega_m + \theta_m)$  で復調し振動成分を除くと、

$$\begin{aligned} v_{r,I} &= m_m |E_0|^2 \text{Re}[r_c^*(\Omega) r_c(\Omega + \omega_m) - r_c(\Omega) r_c^*(\Omega - \omega_m)] \\ v_{r,Q} &= m_m |E_0|^2 \text{Im}[r_c^*(\Omega) r_c(\Omega + \omega_m) - r_c(\Omega) r_c^*(\Omega - \omega_m)] \end{aligned} \quad (4.81)$$

となる。また透過光をエラー信号とする場合も同様に計算ができる。

#### 4.5.5 Signal Recycling 共振器の制御

MI 干渉計をダークフリンジで制御する場合、SR 共振器内にキャリアがほとんど入射されず、共振器長を制御する信号を取得できない。そのためキャリアに位相変調をして生成したサイドバンドや周波数の異なるサブキャリアを使って制御する方法がとられる [6]。

## 4.6 共振器設計のための理論

本研究では新たに Bow-tie 共振器を構築して実験を行う。共振器を設計する上で共振器の安定性や共振器内モードについて、議論する必要がある。本節では共振器設計に必要な物理量を導入し、安定性の条件などについて述べる。

### 4.6.1 Gaussain ビーム

レーザービームの空間モードは  $z$  方向に進む単一周波数  $\omega_0 (= k_0/c)$  を持つ電場  $u(t, x, y, z)$  は平面波因子  $e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$  と平面波からのズレ  $\psi(x, y, z)$  によって

$$u(t, x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

と表される。ここで電場  $u(t, x, y, z)$  は媒質の等方性、単一偏光などを仮定してスカラー近似が施されている。さらに近軸近似 (paraxial approximation) をしたときの、平面波からのズレ  $\psi$  が満たす方程式は、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(t, x, y, z) = 0 \quad (4.82)$$

となる。これを解くことによって基本 Gaussian モードの形の解を得る。

$$\psi^{\text{FG}}(x, y, z) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[ \left( -\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik_0}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i\zeta(z) \right] \quad (4.83)$$

基本 Gaussian モードの特性を示すパラメータは次のようになる。

$$\begin{aligned} R(z) &:= z \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad ; \text{ビームの曲率半径} \\ w(z) &:= w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} \quad ; \text{ビーム半径} \\ z_R &:= \frac{kw_0^2}{2} \quad ; \text{Rayleigh range} \\ \zeta(z) &:= \arctan \frac{z}{z_R} \quad ; \text{Gouy 位相} \end{aligned} \quad (4.84)$$

ビーム半径は  $x = 0, y = 0$  における強度が  $e^{-2}$  となる位置の幅である。 $w_0$  はビームウエストといい、ビーム半径の最小値であり、この値を取る位置を  $z = 0$  としている。Rayleigh range は Gaussian ビームを平面波と見なせる範囲であり、ビーム半径が  $w(z) \leq \sqrt{2}w_0$  となる範囲である。Gouy 位相は高次モードとの位相差を表す。

基本 Gaussian モードによって強度分布と等位相面に関する議論はできるが、実際の電磁波を表すには不十分である。平面波因子が  $x, y, z$  に依存するとして、方程式を解き直すと高次モードを含む式が得られる。 $xy$  平面において適切な直交座標とり、方程式を解いた解が Hermite-Gaussian モードである。

$$\begin{aligned} \psi_{lm}^{\text{HG}}(x, y, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \frac{1}{\sqrt{2^{l+m} l! m!}} H_l \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ &\quad \times \exp \left[ \left( -\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik_0}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i(l + m + 1)\zeta(z) \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

$l = m = 0$  のとき基本 Gaussian モードと一致する。

#### 4.6.2 モードマッチング

光共振器の設計をするためには、レーザー光源のビームのモード形状（曲率半径とビーム半径）と共振器の固有モードを一致させる必要がある。複素振幅分布から定位相因子を除いた空間モードを一致させることをモードマッチングという [7]。空間モードはビームウエスト  $w_0$  とビームウエストからの距離  $z$  によって決まる。

2つのミラーから構成される Fabry-Perot 共振器の安定性は g-factor と呼ばれる量で評価され、次のように定義される：

$$\begin{aligned} g_1 &:= 1 - \frac{L}{R_1} \\ g_2 &:= 1 - \frac{L}{R_2} \end{aligned} \quad (4.86)$$

ここで  $L$  は cavity の長さであり、 $R_1, R_2$  はそれぞれ共振器を構成する鏡の曲率半径である。 $g_1 g_2$  が次のような条件を満たすとき、共振器は安定な固有モードを持つ：

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (4.87)$$

### 4.6.3 ABCD 行列

Bow-tie 共振器などの ring 型共振器の安定性評価には ABCD 行列の計算によってなされる。ABCD 行列とは行列を用いた、光学系における光線の伝播を表現方法である：

$$\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

$A, B, C, D$  は行列の成分であり、光線は  $(x, p)$  のようなベクトルで表される。ここで  $x$  は光軸からの距離、 $p$  は光軸に対する傾きである。

$z$  方向に伝播する波数  $k$  の Gaussian ビームはウエストからの距離  $z$  と Rayleigh range  $z_R$  によって記述されるので、 $z$  と  $z_R$  の関数である q-parameter

$$\frac{1}{q(z)} := \frac{1}{z + iz_R} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (4.89)$$

を定義すると、Gaussian ビームの光線ベクトルは q-parameter と定数  $a$  によって  $(q, a)$  と表される。ここでパラメータ  $q$  を持つ光が、ある ABCD 行列を持つ光学素子を通過したとする。式 (4.88) より通過後のパラメータ  $q'$  は、

$$q' = \frac{Aq + Bq}{Cq + D} \quad (4.90)$$

となる。共振器が安定であるの条件は、共振器を一周分の ABCD 行列を経ても q-parameter が変化しないことである。従って共振器の安定条件は、

$$q = \frac{Aq + Bq}{Cq + D} \quad (4.91)$$

である。これは自己無頓着方程式 (Self Consistent Equation) と呼ばれる。これを解くと、

$$q = \frac{A - D \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4}}{2C} \quad (4.92)$$

となる。ここでは ABCD 行列のユニタリー性  $AD - BC = 1$  を用いた。さらに q-parameter が複素数であることから、以下の式が得られる：

$$-1 \leq \frac{A + D}{2} \leq 1 \quad (4.93)$$

これが一般の共振器の安定性のために課せられた条件である。また、共振器内のビームウエストの大きさは q-parameter の虚部によって与えられ、

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{|B|}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}} \quad (4.94)$$

となる。次に ABCD 行列の計算について考える。距離  $L$  の伝搬を  $S(L)$ 、曲率半径  $R_{\pm}$  の鏡での反射を  $F(R_{\pm})$ 、入射角がゼロでないときの水平モードの位相反転を  $M_{\pm}$  で表し、次のような行列で与えられる：

$$S(L) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F(R_{\pm}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_{\pm}} & 1 \end{pmatrix}, M_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

$M_{\pm}$  は Bow-tie 共振器のように偶数枚の鏡を持つ場合、1 となるため無視してよい。± の符号はそれぞれ光線の垂直、水平モードに対応している。ゼロでない入射角で曲率付き鏡を反射するとき、非点収差 (astigmatism) により実効的な曲率半径  $R_{\pm}$  は、

$$R_{\pm} = R \cdot (\cos \theta)^{\pm 1} \quad (4.96)$$

と表される。 $M_{\pm}$  と同様に  $R_{\pm}$  の符号はそれぞれ光線の垂直、水平モードに対応する。図

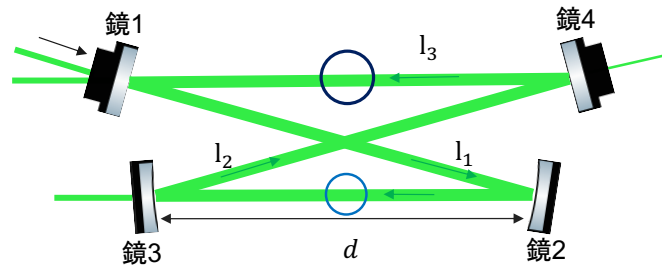


図 4.12 Bow-tie 共振器の図

4.12 のように図上部の 2 枚の平面鏡と、図下部の 2 枚の同じ曲率半径の鏡を対称に設置した Bow-tie 共振器では、上下の向かい合う鏡の中心にビームウエストができることが知られている。下部にあるビームウエストを起点に一周にしたときの ABCD 行列  $C$  は以下のように計算できる：

$$\begin{aligned} C_{\pm} &= S(d/2)M_{\pm}F(R_{\pm})S(l_1)M_{\pm}S(l_2)M_{\pm}S(l_3)M_{\pm}F(R_{\pm})S(d/2) \\ &= S(d/2)F(R_{\pm})S(l)F(R_{\pm})S(d/2) \end{aligned} \quad (4.97)$$

ここで  $l = l_1 + l_2 + l_3$  としている。この行列の成分を用いれば、式 (4.94) と曲率半径と各鏡の距離によってビームウエスト  $w_0$  が計算できる。

## 第5章

# 実験

高周波重力波観測の手段として、光ばねというオプトメカニカルな現象を用いる手法が知られている。本研究室での先行研究 [6] では、Signal Recycling 共振器内に非線形結晶を入れることで信号増幅を行い、生成された光ばねを観測している。さらにこの先行研究内では、MI 差動長、SR 共振器長、SHG 共振器、ポンプ光の位相制御を含む5つの自由度をデジタルシステムを用いた安定的な制御を実現している。非線形結晶による信号増幅は増幅する信号光の倍波であるポンプ光の強度に依存しているが、これまで使用してきた実験系においては、ポンプ光生成用結晶の損傷閾値などの原因で出力されるポンプ光強度に限度がある。

そこで本実験では、新たに構築したポンプ光共振器を導入し、結晶に入射されるポンプ光パワーを高めることで、さらなる信号増幅を試みた。干渉計やその他の共振器の制御を行いながら、OPA による増幅利得の測定を試みた。

本実験では信号光 (キャリア) として 1064nm のレーザー光源を用いる。この波長のレーザーは重力波検出器において一般的に採用されている。以下では混乱を減らすため、信号光をキャリアと呼称し、ポンプ光を生成するために用いる SHG 共振器に入射させる 1064nm の光を IR 光と呼ぶ。また SHG 共振器で生成されたポンプ光として用いる波長 532nm の緑の光をポンプ光と呼び、干渉計制御に用いる緑の光を MI 制御光と呼び、OPA 用の非線形結晶を通過したキャリアが生成する第2高調波は SHG 光と呼ぶこととする\*1。

---

\*1 いずれも同じ波長が 532 nm の緑の光である

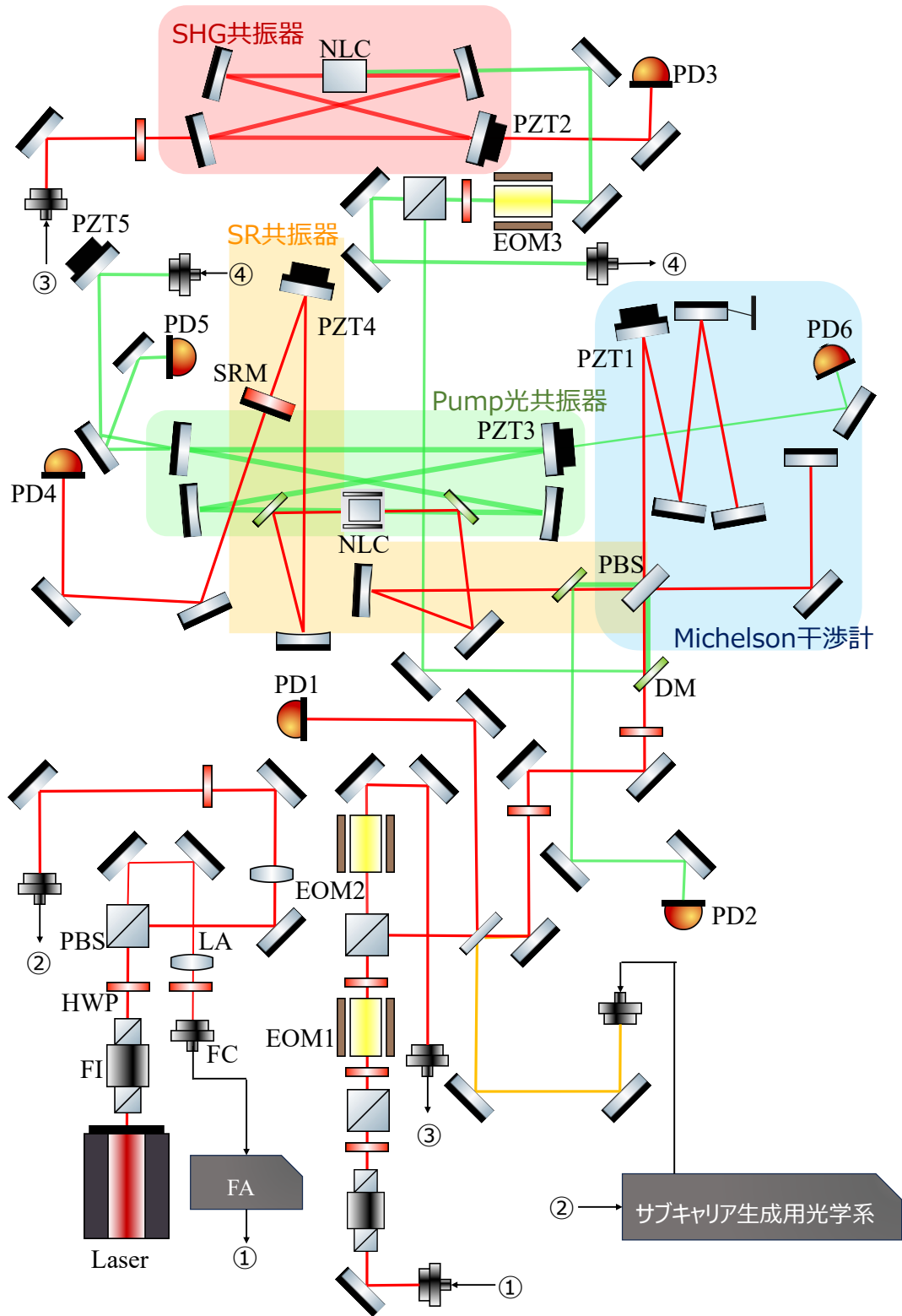


図 5.1 光学系の概略図

表 5.1 主な実験器具

実験器具名	メーカー / 型番	備考
キャリアレーザー	Coherent/ Mephisto	出力 1W
ファラデーアイソレータ (FI)	Thorlabs	
ファイバーアンプ (FA)	KEOPSYS	
STEMlab 125-14	Red Pitaya	
電気光学変調器 (EOM)	Thorlabs / EM-PM-NR-C4 など	20MHz, 波長 400-600nm
フォトデテクタ (PD)	Thorlabs / PDA36A2 など	350-1100nm
ピエゾ素子 (PZT)		
ピエゾドライバ		
1/2 波長板 (HWP)	Thorlabs	
ファイバーカップラ (FC)		
偏光ビームスプリッタ (PBS)		
ダイクロイックミラー (DM)	Thorlabs	
SR 鏡 (SRM)		振幅反射率 $r_S = \sqrt{0.98}$
曲率付き鏡	Thorlabs / CM254-150-E03	ポンプ光共振器用
その他の鏡	Layertech など	
非線形光学結晶 (NLC)	Coversion	

## 5.1 準備実験

OPA 測定実験を行うにあたって必要な光学系の制御や測定を行う。まず、ポンプ光と Michelson 制御用の光を生成するための共振器 (SHG 共振器) の制御を行う。次に、Michelson 干渉計をダークフリンジにロックする。最後に SR 共振器のフィネスを測定することで共振器内のロスを見積り、OPO を起こすポンプ光の発振閾値を導く。

### 5.1.1 SHG 共振器の制御

共振器からの透過光を PD3 で検出し、復調することでエラー信号を取得して共振器の制御を行う。SHG 共振器を制御したときの PD3 での信号を図 5.2 に示した。この図は、フリーランの状態からピエゾ (PZT 2) に三角波を掃引し、1 秒のあいだピークの半値に制御したあと、ピーク値 (共振状態) になるよう共振器長を制御した様子である。この信号から共振器長を共振ピーク付近で制御できていることがわかる。また共振器内に 1064 nm の光を 800 mW 入射させたとき、得られるポンプ光は 200 mW 程度であった。

### 5.1.2 Michelson 干渉計の制御

Michelson 干渉計の制御には SHG 共振器で生成した緑の光を用いる。アライメントを行い、Michelson 干渉の腕に設置したピエゾ付き鏡 (PZT 1) の印加電圧を sweep させたときの AS



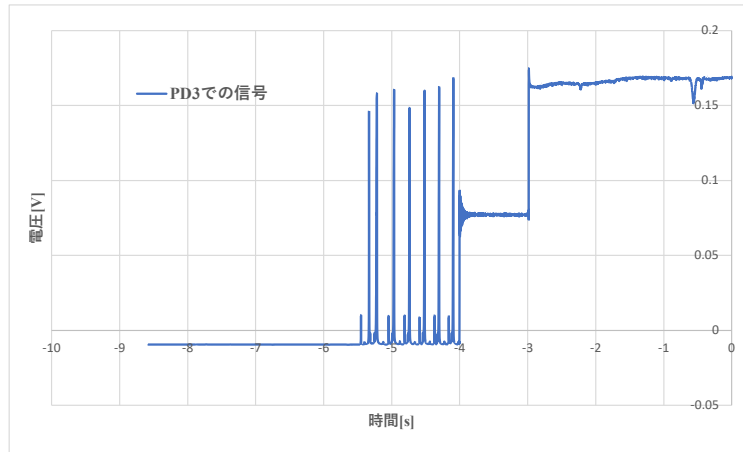


図 5.2 SHG 共振器を制御したときの信号

ポートの信号を図 5.3 に示した。

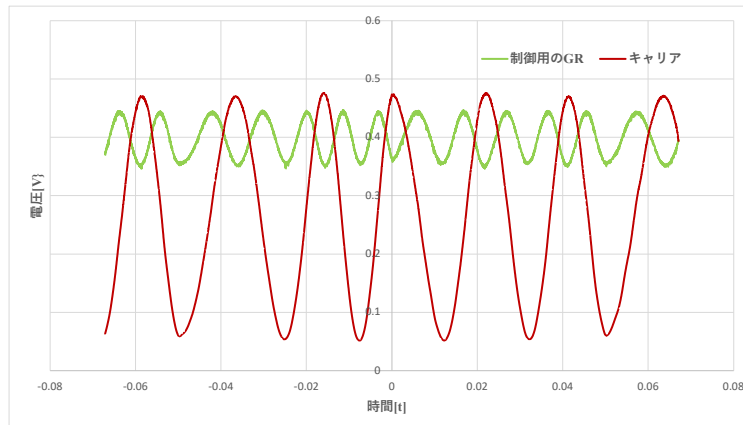


図 5.3 [

AS ポートでの生信号。この信号は図 5.1 中の SR 鏡を外して PD2 で MI 制御光、PD4 で AS ポートのキャリアを測定したものである。]

緑色の曲線が MI 制御光 (532 nm)、赤色の曲線がキャリア (1064 nm) の光を表している。図 5.3 より MI 制御光をダークフリンジに制御するとキャリアはダークまたはブライトに制御されることがわかる。どちらに制御されるかは適切な変調位相とオフセットを設定することで決定できる。MI 制御光からエラー信号を取得し、実際に制御したときの様子を図 5.4 に示した。図 5.4 は-6 秒まで PD4 の信号を遮断したバックグラウンドを測定し、-6 秒から-3.5 秒までピエゾに電圧を印加し、1 秒間ミドルフリンジに制御したのち、ダークフリンジに制御したときの様子を表している。この結果から干渉計のコントラスト  $C$  を計算すると、

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \simeq 0.97 \quad (5.1)$$

となる。電圧を印加しているとき明瞭な干渉縞が見えており、干渉計はダークフリンジにロックできているといえる。

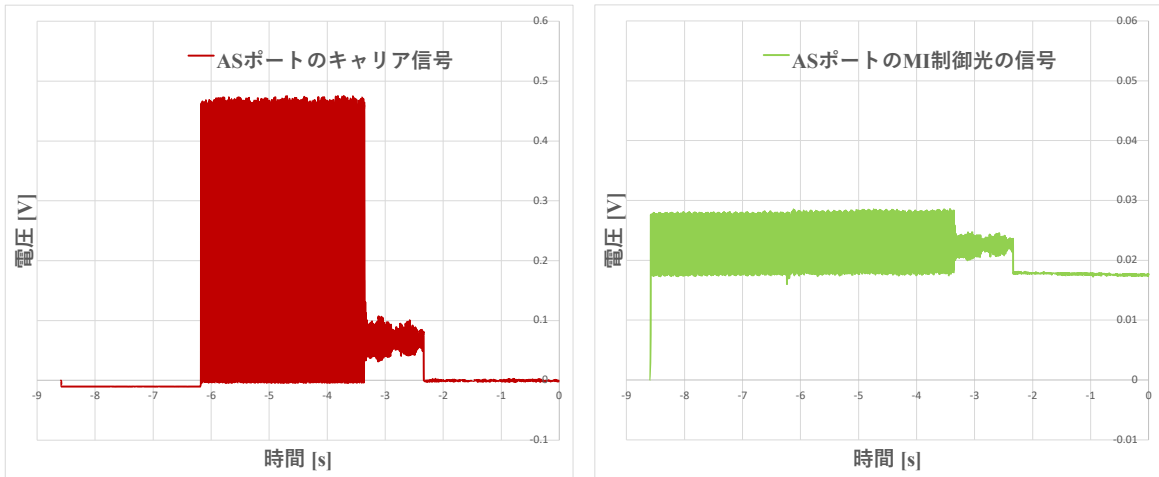


図 5.4 Michelson 干渉計を制御したときの信号。緑色は MI 制御用の光を表し、赤色はキャリアの信号を表す。MI 制御光のグラフの縦軸はキャリアの 1/10 倍の縮尺にしてある。ここではダークフリンジに制御できている様子が明らかたため、説明上の便宜を図り、SR 鏡を外して AS ポートのキャリア信号を見ているが、実際に SR 共振器を使う場合は PD1 で RFL ポートのキャリア信号を見る。

### 5.1.3 SR 共振器のフィネスの測定

次に、干渉計を制御した状態で piezo (PZT 4) を使って SR 共振器長を変化させることで SR 共振器のフィネスを計算する。このときの測定結果を図 5.5 に示した。図 5.5 においてピークの値が揺らいでいる原因としては、SR 共振器内の光学素子による反射や Michelson 干渉計の片腕を構成している懸架鏡によるロスなどが考えられる。このデータから、SR 共振器

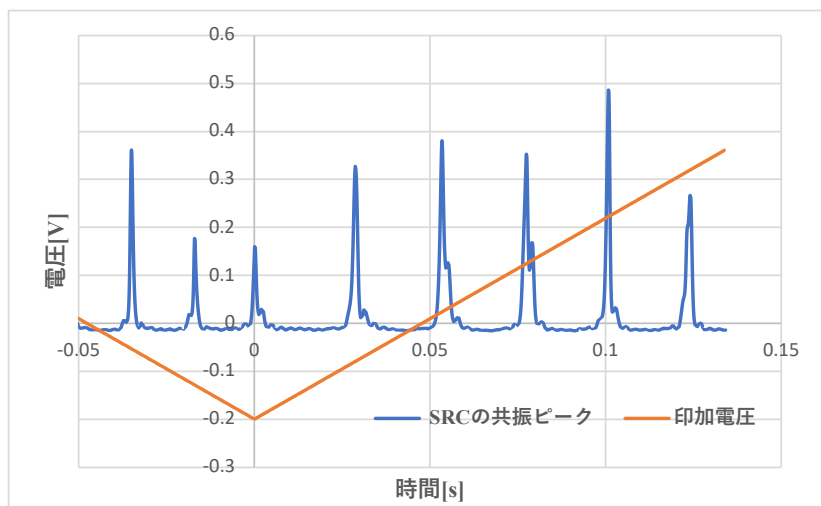


図 5.5 SR 共振器のピーク信号

のフィネスを計算すると、 $\mathcal{F}_{\text{SR}} \approx 22.6$  となった。SR 鏡の振幅反射率  $r_S = \sqrt{0.98}$  と入射鏡の

振幅反射率  $r_I$  にロスを含めた量  $r (= r_I \kappa)$  を用いると Fabry-Perot 共振器と同じ式：

$$\mathcal{F}_{\text{SR}} = \frac{\pi\sqrt{r_S r}}{1 - r_S r} \quad (5.2)$$

でフィネスが与えられることから、 $r \simeq 0.88$  と見積もることができる。共振器一周あたりの全損失は式 (4.37) と  $r_S, r$  より  $2\alpha l_s = \ln(1/r_S^2 r^2) \simeq 0.275$  となる。よって SR 共振器内で光パラメトリック発振が起こる squeezing factor の閾値は式 (4.35) から、

$$s^2|_{\text{閾値}} = e^{2\alpha l_s} \simeq 1.32 \quad (5.3)$$

となる。またこのとき OPA ゲイン  $G_{\text{OPA}}$  は

$$G_{\text{OPA}} = 20 \log_{10} s|_{\text{閾値}} \simeq 1.2 \text{ [dB]} \quad (5.4)$$

である。このゲインを実現できたとき、SR 共振器内で OPO が起こり、光ばねの共振周波数を高周波に大きくシフトさせることができる。

## 5.2 シングルパス OPA 測定実験

共振器導入前の実験系で SR 共振器内部にフォトデテクタを設置して OPA を測定する。この実験系ではポンプ光は結晶を 1 度だけ通過するシングルパスになっている。

Michelson 干渉計の懸架鏡がある腕を塞ぎ、片腕からのキャリア信号と、位相をピエゾ素子によって変化させたポンプ光を結晶に入射させることで OPA 測定実験を行う。この実験系ではキャリアとポンプ光生成用の SHG 共振器に入射する 1064 nm の IR 光は同じレーザー光源を使っており、FA によって 2W まで増幅させてから PBS を使って分けている。OPA を起こす非線形結晶に 10 mW のキャリアを入射させる場合、SHG 共振器から出力されるポンプ光は最大 200 mW 程度となる。

OPA された光を PD4 で検知する場合、SR 共振器内での共振が増幅率の測定を妨げるため、SR 鏡の手前で反射させて OPA 測定用 PD に入射させた。結晶から OPA 測定用 PD の間にはダイクロイックミラー 1 枚と 1064 nm 用のレーザーミラー 2 枚があり、さらに PD 本体にポンプ光のような可視光の入射を防ぐフィルタを装着している。PD に入射されるの信号のほとんどはキャリアであり、ポンプ光は 1 mV 以下である。

### 5.2.1 シングルパス OPA 測定の結果

非線形結晶にキャリアを 10 mW、ポンプ光を 200 mW 入射させ、ポンプ光位相の自由度を制御するピエゾを sweep させたときの信号は図 5.6 のようになった。-3.45 秒あたりまでピエゾに電圧を印加してポンプ光を入射させている。-3.45 秒以降はポンプ光を入射させるのをやめ、キャリアのみの信号が検出されている。この結果からバックグラウンドを加味して OPA ゲインを見積もると 0.12 dB とわかった。またシングルパスの場合、入射させるポンプ光のパワーは 150 mW 以上でないと OPA の信号増幅が十分に見えなかった。squeezing factor は  $s \propto e^{\sqrt{P}}$  であるので OPA ゲインとポンプ光のパワーの間には

$$G_{\text{OPA}} = 20 \log_{10} s = \sigma \sqrt{P} \quad (5.5)$$

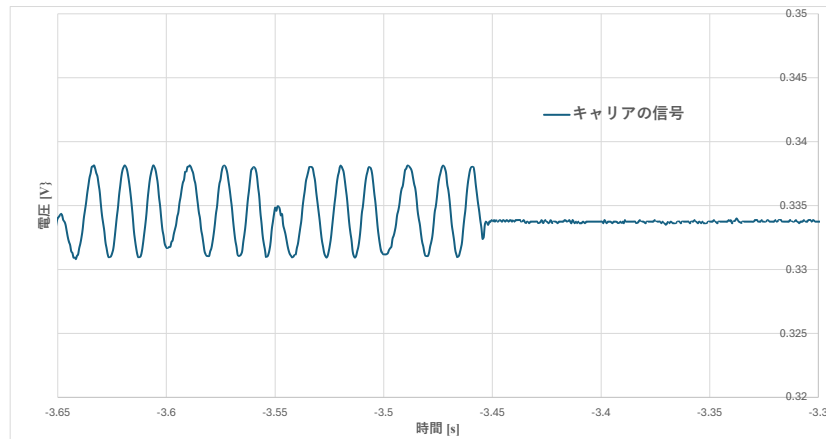


図 5.6 シングルパス OPA によって増幅された信号

という関係が成り立つ。この式に実験結果から  $P = 200 \text{ mW}$  と  $G_{\text{OPA}} = 0.12 \text{ dB}$  を代入すると  $\sigma = 0.0106$  となる。したがって発振条件をみたすポンプ光パワーは、

$$P_{\text{閾値}} = \left( \frac{1.2}{0.0106} \right)^2 \simeq 13 \text{ [W]} \quad (5.6)$$

と見積もることができる。

### 5.2.2 新たな共振器を導入する動機

ここで共振器導入前の実験系において OPA ゲインを上げるために、新たな共振器を導入する動機について述べる。式 (4.27) および (4.30) で見たように OPA ゲインを上げるためには結晶に入射させるポンプ光強度を最大まであげれば良い。ポンプ光の強度を上げる方法として、SHG 共振器に入射させる IR 光としてキャリアとは別のレーザー光源を使う、ファイバーアンプによるパワー増幅率を上げるなどが考えられるが、これらの方法にはレーザーやファイバーアンプの性能、SHG の変換効率、SHG 共振器内の結晶のレーザー損傷閾値 (Laser Damage Threshold : LDT) などによる限界がある。

このうち最終的にポンプ光強度を制限すると考えられるのが SHG 共振器内の結晶の損傷閾値である。結晶の損傷閾値は波長やレーザー種類によって異なるが、Covercion 社の PPLN 結晶の場合、1064 nm の連続波に対しては  $500 \text{ kW/cm}^2$  程度であるとされる [8]。これを用いて SHG 共振器から得られるポンプ光パワーを概算してみると、先行研究から [9] より SHG 共振器内の結晶でのビームウエストは  $50 \mu\text{m}$  になるように設計されているので、損傷閾値  $P_{\text{LDT}}^{1064\mu\text{m}}$  は、

$$P_{\text{LDT}}^{1064\mu\text{m}} = 500 \text{ [kW/cm}^2] \times \pi \times (50 \text{ [\mu m]})^2 \simeq 40 \text{ [W]} \quad (5.7)$$

となる\*2。IR 光のパワーは SHG 共振器内でおよそ 20 倍されるので入射できる IR 光は 2 W 程度であり、SHG 変換効率をどれだけ高めたとしても、得られる最大のポンプ光パワーも 2 W

\*2 ビーム半径を大きくすれば損傷閾値は高くなるが、一方で SHG の変換効率は悪くなってしまふ。

以下に制限されてしまう。従って、本実験ではポンプ光用の共振器を導入することで SHG 共振器による制限の影響を受けることなくポンプ光パワーを上げ、OPA ゲインの向上を目指す。

## 5.3 ポンプ光共振器の設計

### 5.3.1 ビームプロファイル

共振器の設計するためには、共振器内を伝播する光の空間モードと共振器の固有モードを一致させる、モードマッチングが必要である。キャリア光の空間モードをビームプロファイルによって測定し、それに合うように共振器を設計する。以下では、光の進行方向を  $z$  軸方向として考える。ここで光が 00 モードのみを持つと仮定すると、位置  $(x, y, z)$  での強度分布は、

$$I(r) = |A\psi_{00}^{HG}|^2 = \frac{2|A|^2}{\pi w^2(z)} \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2(z)}\right] \quad (5.8)$$

と表される。ここで  $A$  は任意の複素数で、 $|A|^2$  は  $xy$  平面内のビームパワーの最大値である。キャリアによって生成される SHG 光に対して、異なる位置  $z$  での光の強度分布をビームプロファイルで測定し、式 (5.8) を用いてフィッティングすることで、その位置  $z$  でのビーム半径  $w(z)$  を推定できる。結晶の位置を  $z = 0$  として、 $z = 8, 19, 42, 60$  cm での強度分布測定をした。以下の図 5.7 にその結果を示す。

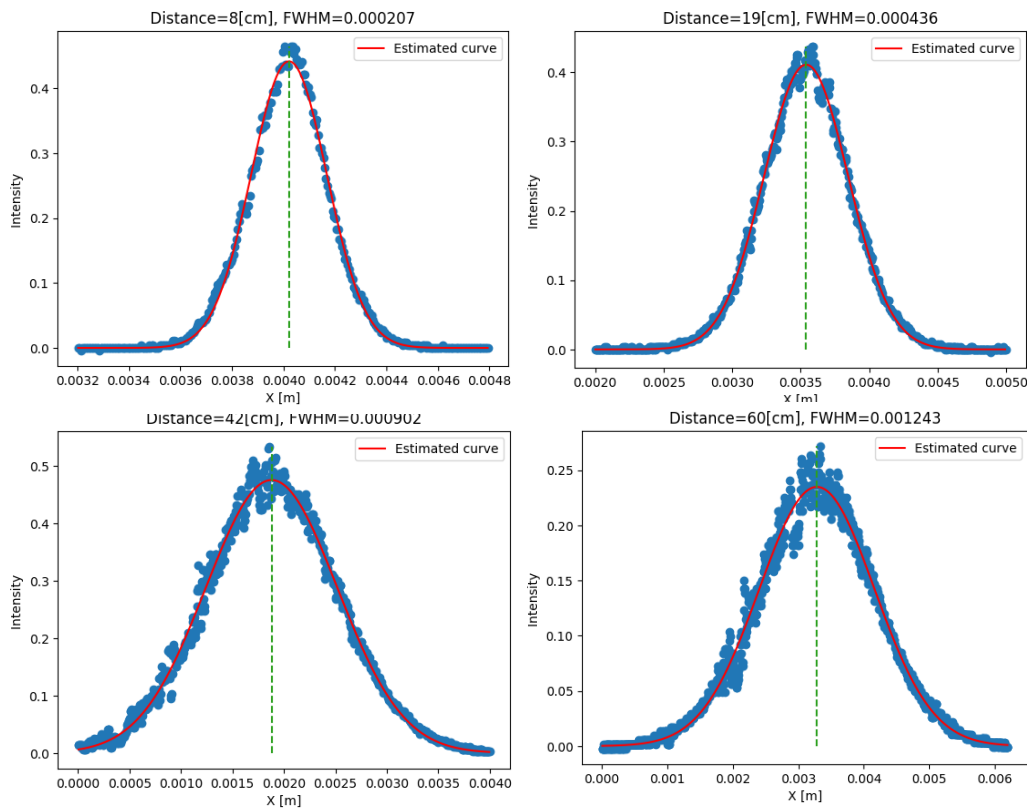


図 5.7 強度測定とフィッティング曲線。青点が Gaussian フィッティングで得られた各点でのビーム半径である。赤の曲線はビーム半径と位置の関係をフィッティングしたものを表す。緑の直線がピーク点を表している。

この結果から強度ピークの大きさの  $1/\sqrt{e}$  倍となる距離をビーム半径とするとそれぞれ  $207 \mu\text{m}$ 、 $436 \mu\text{m}$ 、 $902 \mu\text{m}$ 、 $1243 \mu\text{m}$  と推定された。

さらにこれらの結果を位置  $z$  とビーム半径  $w(z)$  の関係としてプロットし、式 (4.94) によってフィッティングすれば、ビームウエストの位置と大きさを見積もることができる。図 5.8 に測定で得られたビーム半径と位置の関係をプロットしたものと、それに対するフィッティング曲線を示した。

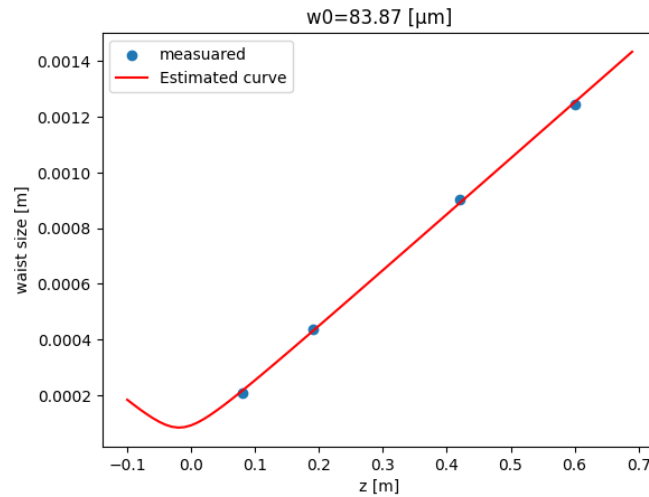


図 5.8 ビーム半径のフィッティング曲線

結果として、 $z = -0.018 \text{ m}$  の位置に大きさ  $w_0 = 84 \mu\text{m}$  程度のビームウエストがあると推定された。

### 5.3.2 鏡の曲率と共振器長の設定

次にキャリアの SHG 光のモードにマッチするように共振器を設計する。大きさの限られた実験系に  $w_0 = 84 \mu\text{m}$  程度のウエストサイズを実現することと、ポンプ光の進行が 1 方向という利点があるため今回は Bow-tie 共振器を採用する。共振器の固有モードは ABCD 行列によって計算にできる。式 (4.97) より、対称な Bow-tie 共振器の ABCD 行列は

$$C_{\pm} = S(d/2)F(R_{\pm})S(l)F(R_{\pm})S(d/2) \quad (5.9)$$

となる。2つの曲率付き鏡と結晶の間の距離を  $d/2$  として、残りの共振器長を  $l$  とした。この行列の各成分を式 (4.94) :

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{|B|}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}} \quad (5.10)$$

に代入し、図示したものが図 5.9 である。ここで、 $l = 1.2 \text{ m}$ 、 $d = 0.38 \text{ m}$ 、入射角を  $\theta = 0.1 \text{ rad}$  ( $\approx 5.7 \text{ deg}$ ) としている。一般にゼロでない入射角で曲率付き鏡から反射される場合、非点収差によって垂直方向と水平方向の焦点距離がずれる。これを考慮し、図 5.9 は各方向に対する結晶の位置でのウエストサイズを表している。この図 5.9 から曲率半径

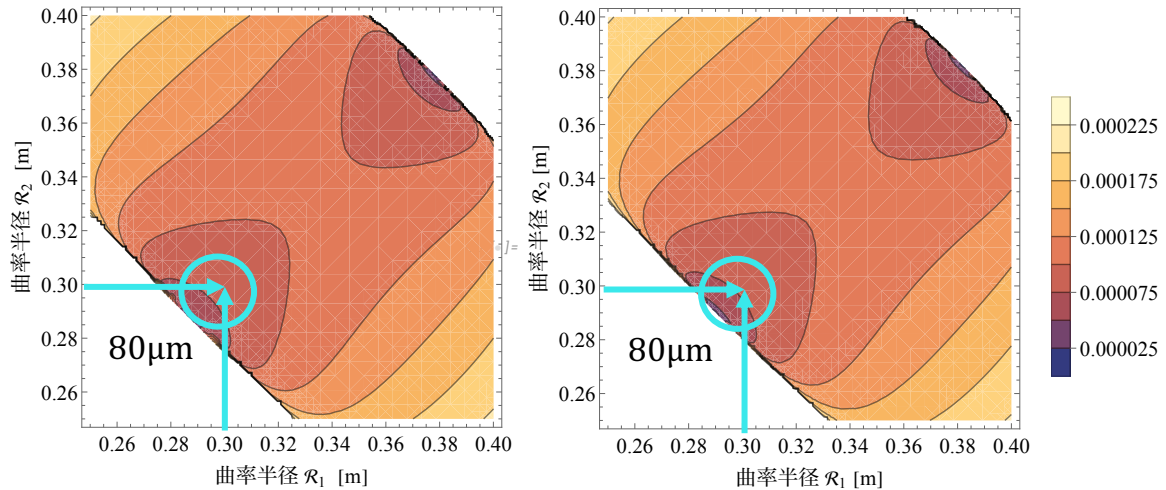


図 5.9 ビームウエストの大きさ。左が式 (5.9) の + に対応する垂直方向で、右が - に対応する水平方向を表す。各軸は 2 つの曲率付き鏡の曲率半径  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  を表し、色の濃淡がビーム半径の大きさを表している。各軸とビームウエストの単位は全て [m] である。

$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 300 \text{ mm}$  で垂直、水平の両方向で  $w_0 = 80 \text{ }\mu\text{m}$  程度のウエストサイズを実現できることがわかる。実際に曲率半径  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 300 \text{ mm}$ 、入射角  $\theta = 0.1 \text{ rad}$  として計算すると、垂直は  $w_{0,\text{vert}} \simeq 80 \text{ }\mu\text{m}$ 、水平は  $w_{0,\text{hori}} \simeq 85 \text{ }\mu\text{m}$  となる。ここで OPA に用いる結晶の損傷閾値についても計算しておく。532 nm の連続波に対しては  $200 \text{ kW/cm}^2$  程度であるとされるので [8]、ビームウエストが  $80 \text{ }\mu\text{m}$  であるときの損傷閾値  $P_{\text{LDT}}^{532\mu\text{m}}$  は

$$P_{\text{LDT}}^{532\mu\text{m}} \simeq 40 \text{ [W]} \tag{5.11}$$

となる。この値はシングルパスの結果から見積もられたポンプ光パワーの閾値 (5.6) より高く、発振条件を満たすポンプ光パワーを入射することができると考えられる。キャリアが生成する SHG 光を検知して行うアライメントの容易さを考慮して反射率が 90 % 以下の入射鏡を採用することにした。以上を踏まえて、次のような共振器を設計した。

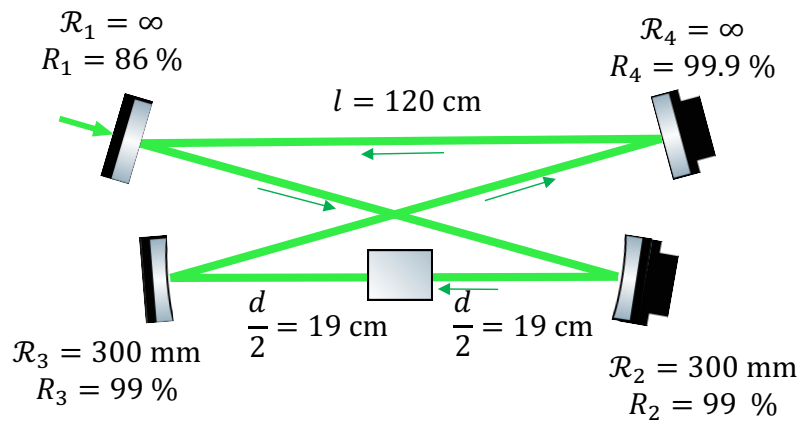


図 5.10 設計する Bow-tie 共振器の図

非点収差を減らすため入射角は  $0.1 \text{ rad}$  程度になるように設置する。この共振器は式

表 5.2 共振器を構成する鏡

呼称	メーカー	型番	強度反射率 $R_i$	曲率半径 $\mathcal{R}$ [mm]
鏡 1	Layertech	106718	86%(@532nm)	$\infty$
鏡 2	Thorlabs	CM254-150-E03	99%(@400~750nm)	300
鏡 3	Thorlabs	CM254-150-E03	99%(@400~750nm)	300
鏡 4	Layertech	110858	99.9%(@532nm)	$\infty$

(4.93) で与えた安定性条件を満たしている。また鏡 4 に共振器を制御するピエゾ素子を装着した。共振器を構成する鏡の反射率を使ってフィネスを計算する。光学ロスが生じない理想的な共振器である場合、3.5 で用いたロスを表す係数  $\kappa$  は 1 である。振幅反射率  $r_1 = \sqrt{0.86}$ ,  $r_2 = r_3 = \sqrt{0.99}$ ,  $r_4 = \sqrt{0.999}$  を用いて、式 (3.65) から共振器の理想的なフィネスは、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{BT}} &= \frac{\pi\sqrt{r_1 r}}{1 - r_1 r} \\ &= 36.5 \end{aligned} \quad (5.12)$$

となる。またロスがないとき、200 mW の光共振器内のパワーは式 (3.64) より、4.1 W となる。実際には共振器内にはロスが存在するため、フィネスと共振器内パワーはこれら値よりも小さくなる。共振器内でのロスの値はフィネスを測定することで推定できる。

## 5.4 ポンプ光共振器の導入

設計した共振器を実験系に導入する。共振器の導入の手順は次の通りである。まず共振器とキャリアの SHG によって生じる Green 光のモードをマッチさせ、共振を確認し、キャリアとポンプ光の光路を一致するようにアライメントを行う。そして共振器からの透過光からエラー信号を取得して共振器を制御する。

### 5.4.1 共振器長の制御について

Red Pitaya 社の STEMLab 125-14 (以下 Red Pitaya) というデバイスを用いてポンプ光共振器の制御する。Red Pitaya の入力にはエラー信号に使う参照光の信号、出力には共振器長を制御するピエゾ素子、および変調と復調を施す EOM を接続している。Red Pitaya の操作は Kastler Brossel 研究所で光学系制御用に開発されたソフトウェアである Python Red Pitaya Lockbox(PyRPL) を用いて行なった。PyRPL 上の lockbox モジュールで電圧の掃引や PDH 法によるエラー信号の取得、制御の設定などを行うことができる。

### 5.4.2 Finesse の測定と干渉を使ったアライメント

まず設計した共振器長になるように鏡を設置し、キャリアの SHG によって生じる SHG 光を共振させる。共振器長制御用のピエゾ (PZT 3) に振幅  $\pm 60$  V、周波数 0.5 Hz の三角波を印加し、SHG 光の共振ピークを確認しながらアライメント調節をした。そのときの PD5 での測



定結果を図 5.11 に示す。

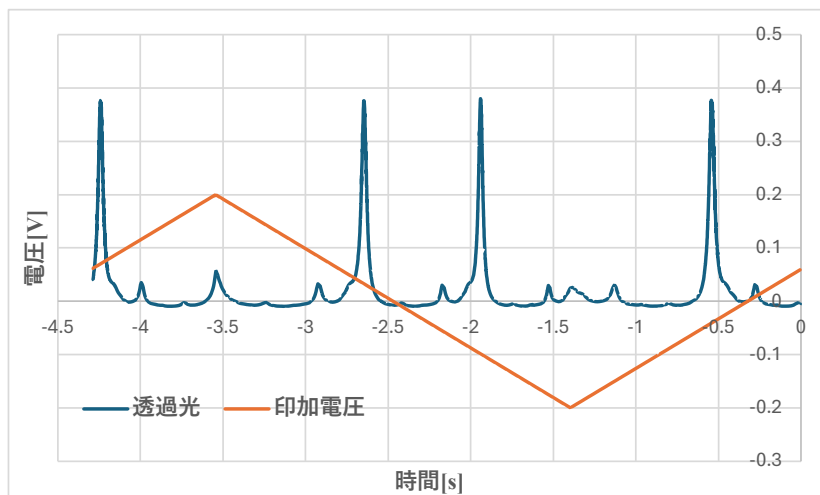


図 5.11 電圧を印加したとき SHG 光の信号。図中の橙色の印加電圧は Red Pitaya の出力を表示しているため最大 0.2 V になっている。実際には、これを piezo ドライバで増幅したものが印加されている。

図中の最も高いピークがビームの 00 モードのピークであると考えられる。またピークの横にわずかであるが高次モードが見られる。得られたデータから共振器のフィネスを見積もると  $\mathcal{F}_{\text{BT,SHG 光}} \simeq 20$  程度であるとわかった。

次に共振器に入射するポンプ光のアライメントを行う。キャリアの SHG 光とポンプ光の光路が十分に重なっていないければ、OPA による信号増幅を測定することはできない。光路が重なるようにアライメントをするために、図 5.12 のようなセットアップを用意した。ポンプ

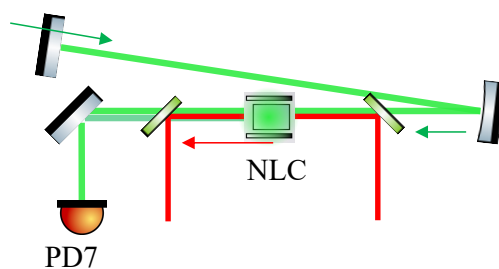


図 5.12 入射させるポンプ光のアライメントセットアップ

光とキャリアを結晶にシングルパスで入射させ、ダイクロイックミラーを透過した信号を新たに設置した PD7 で検出する。ポンプ光の強度はキャリアの SHG 光とを同程度になるように調節して 2 つの光が干渉を起こすようにする。そして干渉縞のコントラストが最大になるようにポンプ光の入射位置と角度を調節することで、SHG 光と光路を一致させた。

以上で、キャリアの SHG 光と入射するポンプ光に対してアライメントが完了する。アライメント後に共振器長制御用の piezo に電圧をかけて、PD6 に見られたポンプ光の共振ピークの信号を図 5.13 に示す。

この信号は PD6 で取得した信号であり、強度反射率  $R = 99.9\%$  の鏡を透過した光であるた

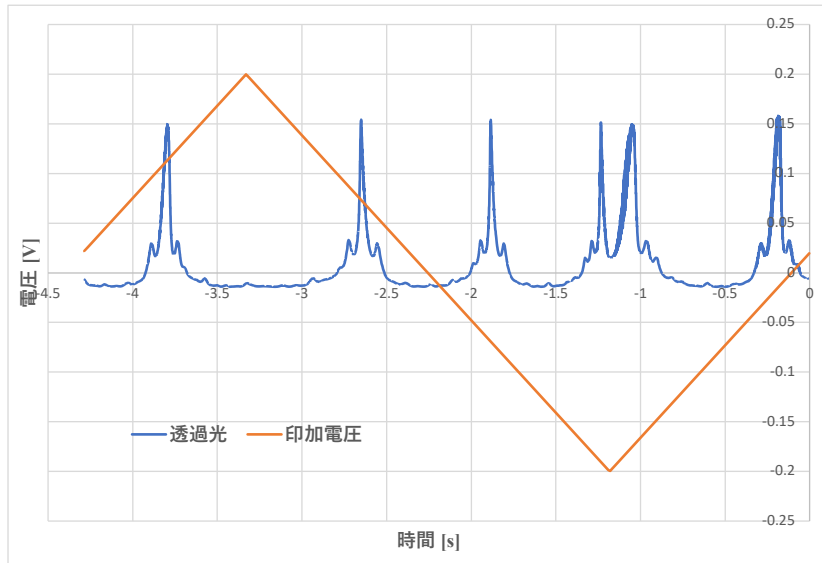


図 5.13 電圧を印加したときの PD6 のポンプ光の信号

め、図 5.11 で見たキャリアの SHG 光の信号より弱くなっている。また SHG 光の信号と比較すると 00 モード以外の波形が強く表れているが、SHG 共振器で生成したポンプ光自体が 00 モード以外を持っていることに起因し SHG 共振器のアライメントの調整で改善されると考えられる。得られたデータから共振器のフィネスを見積もると

$$\mathcal{F}_{\text{BT}} \simeq 26 \tag{5.13}$$

程度であるとわかった。式 (5.12) で推定したフィネスは光学ロスがなく、 $\kappa = 1$  と仮定したときの値であった。測定結果を用いて、

$$\frac{\pi\sqrt{r_1 r}}{1 - r_1 r} = 26 \tag{5.14}$$

という式を  $\kappa$  について解くと、 $\kappa = 0.965$  となる。今得られた  $\kappa$  と式 (3.64) を用いると、入射光パワーとポンプ光共振器内のパワーの対応は表 5.4.2 のようになる。表より共振器内パワー

表 5.3 ロスから見積もられるポンプ光共振器内のパワー。 $\kappa = 0.965$  としている。

入射パワー [mW]	共振器内パワー [mW]
10	107
20	214
50	534
100	1068
150	1602
200	2136

は入射パワーのおよそ 10 倍程度になっていることがわかる。ポンプ光のパワー  $P_{\text{pump}}$  に対して OPA ゲイン  $G_{\text{OPA}}$  は、 $\sqrt{P_{\text{pump}}}$  倍されるので、最大  $\sqrt{10}$  倍の OPA ゲインを得られる。

### 5.4.3 ポンプ光共振器の制御

次に PD6 から得られる信号を復調することでエラー信号を取得して共振器の制御を行う。図 5.14 に制御するためのセットアップを示した。EOM3 を使ってポンプ光を変調し共振器に入射している。共振器からの透過光の信号を PD6 で読み取り、復調することでエラー信号を取得している。エラー信号はピエゾドライバを経由して鏡 4 に装着されたピエゾ素子に送られる。

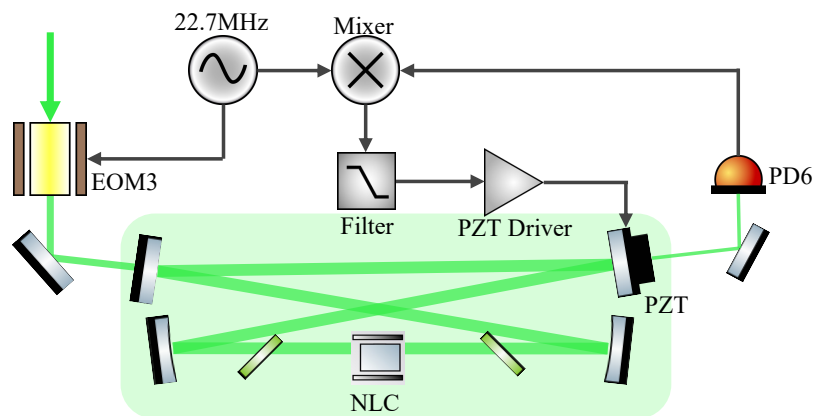


図 5.14 ポンプ光共振器制御の制御

ポンプ光共振器を制御したときの PD6 での信号は図 5.15 のようになった。この図ではフリーランの状態からピエゾに三角波を掃引し、1 秒のあいだピークの半値に制御したあと、ピーク値 (共振状態) になるよう共振器長で制御している。

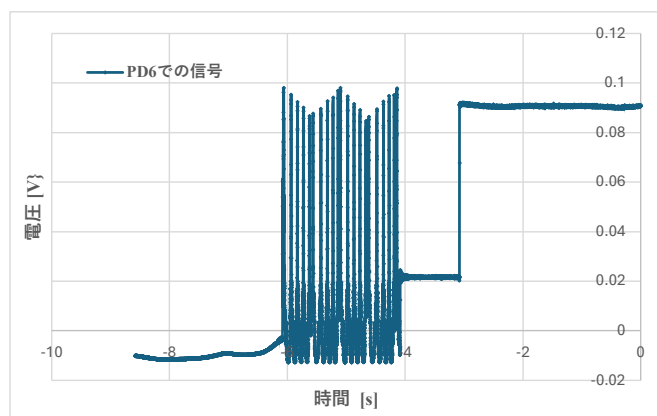


図 5.15 ポンプ光共振器を制御したときの信号

得られた信号は三角波を掃引しているときに見られるピークと同程度の値で安定しており、共振点にロックできたといえる (写真 5.19)。

### 5.5 共振器あり OPA 測定実験

ポンプ光共振器の制御をして OPA 測定を行う。シングルパスのときと同様に Michelson 干渉計の懸架鏡がある腕を塞ぎ、片腕からのキャリア信号を結晶に入射させる。それに加えて位相を piezo 素子 (PZT 5) によって変化させながらポンプ光を結晶に入射させることで OPA 測定実験をする。測定を行うときのセットアップを図 5.16 に示す。

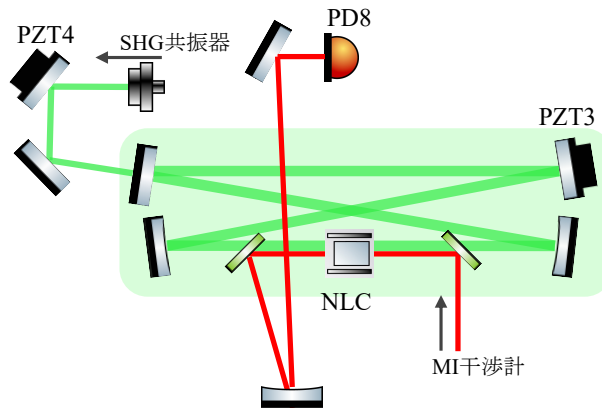


図 5.16 共振器あり OPA 測定実験のセットアップ

OPA された光を PD4 で検知する場合、SR 共振器内での共振が増幅率の測定を妨げるため、SR 鏡の手前で反射させて OPA 測定用 PD8 に入射させている。また PD8 に入射する光量は ND フィルターで調節した。

#### 5.5.1 共振器あり OPA 測定の結果

10 mW のキャリアを入射させて、10 mW のポンプ光を共振器に入射して測定をし、その後、入射させるポンプ光のパワーを 20, 50, 100, 150 mW と変化させて測定を行なった。ポンプ光 20 mW 入射時の測定結果を図 5.17 に示した。シングルパスのときと同様に -2.47 秒あたりまで piezo に電圧を印加してポンプ光を入射させている。-2.47 秒以降はポンプ光を入射させるのをやめ、キャリアのみの信号が検出されている。ポンプ光共振器あり OPA 測定をまとめると次の表のようになった。

表 5.4 共振器あり OPA 測定結果。入射させるキャリアのパワーは全て 10 mW とした。

入射したポンプ光 [mW]	共振器内のポンプ光 $P_{\text{pump}}$ [mW]	OPA ゲイン $G_{\text{OPA}}$ [dB]
10	107	0.087
20	214	0.11
50	534	0.20
100	1068	0.27
150	1602	0.37

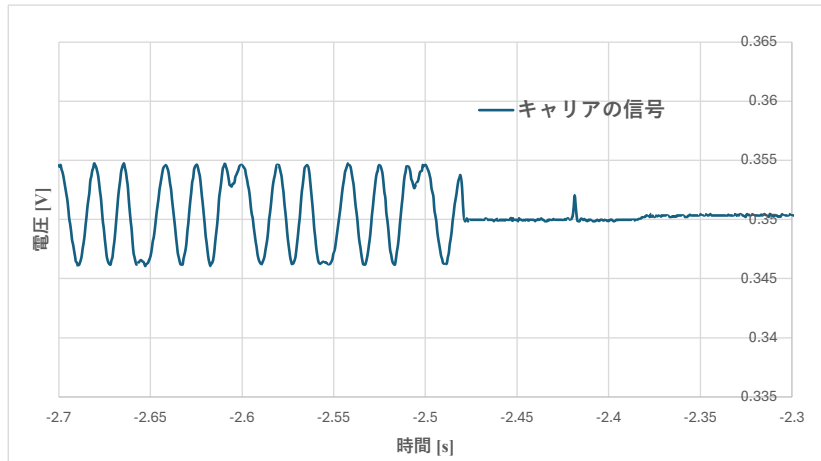


図 5.17 共振器あり OPA によって増幅された信号

表 5.5.1 より、ポンプ光パワーの増幅に従って、OPA ゲインも大きくなっており、シングルパスのときよりも高い OPA ゲインを実現できていることがわかる。ポンプ光パワーと OPA ゲインの関係を  $G_{OPA} = \sigma\sqrt{P_{pump}}$  という式でフィッティングすると次図 5.18 のようになる。フィッティング曲線は次式で与えられた：

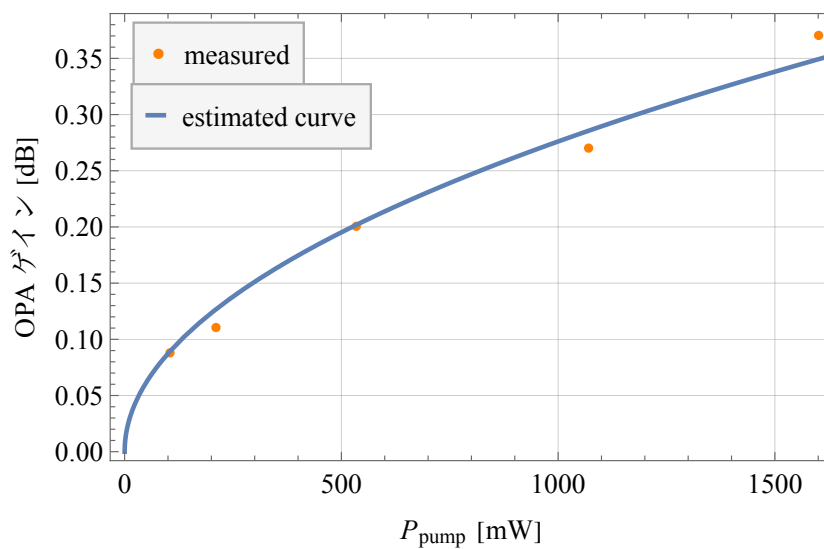


図 5.18 測定結果から得られた、結晶に入射するポンプ光パワーと OPA ゲインの関係。橙色の点が測定値で、青色がフィッティング曲線を表す。

$$G_{OPA} = 0.0087\sqrt{P_{pump}} \quad (5.15)$$

この式 (5.15) から OPA ゲインが 1.2 dB になり、OPO を起こすポンプ光パワーを計算すると、

$$P_{pump}|_{\text{発振閾値}} \simeq 19 \text{ [W]} \quad (5.16)$$

となる。したがって今回設計したポンプ光共振器に 2 W 程度のポンプ光を入射すればこの値を実現できる。また式 (5.16) がシングルパス実験から予想される発振閾値 (5.6) より大きい

原因として、アライメントとモードマッチが不十分なため、OPA の変換効率が低くなってしまっていることが考えられる。それに加えて OPA 測定を行うために必要なポンプ光パワーに下限 (150 mW 程度) があることから、シングルパスで取得したデータは1つだけであり、シングルパス実験から予想される発振閾値の精度が低い可能性がある。

またこの値も OPA 用の結晶の損傷閾値  $P_{\text{LDT}}^{532\mu\text{m}}$  である 40 W を下回っており、現状の実験系で OPO を起こし、光ばねの共振周波数を大きくシフトさせることができると考えられる。

最後に損傷閾値  $P_{\text{LDT}}^{532\mu\text{m}}$  からポンプ光共振器を導入した系での最大の OPA ゲインを計算する。式 (5.15) に 40 W を代入すれば、この系での最大の OPA ゲインは、

$$G_{\text{OPA,max}} \simeq 1.7 \text{ dB} \quad (5.17)$$

となる。

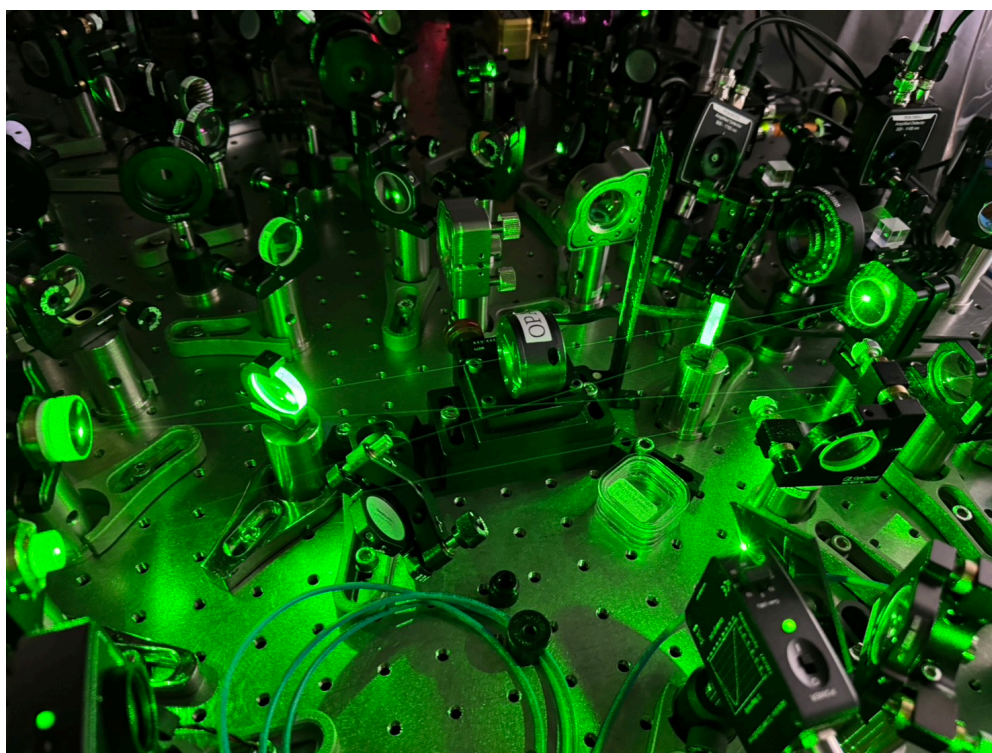


図 5.19 ポンプ光共振器を制御したときの様子

## 第6章

# 結論

### 6.1 本研究のまとめ

光ばねを使った高周波重力波検出を背景に、本研究では、ポンプ光共振器による光パラメトリック増幅 (OPA) の増幅利得を向上させる実験を行った。まず準備実験として SHG 共振器と Michelson 干渉計の制御を行い、SR 共振器のフィネスの測定を測定した。その結果から SR 共振器内のロスを見積り、光パラメトリック発振 (OPO) 条件には 1.2 dB 以上の OPA ゲインが必要であるとわかった。したがってこの程度の OPA ゲインを実現できれば、光ばねの共振周波数を高周波へ大きくシフトさせることができると考えられる。

次に閾値を超える OPA ゲインの実現するために、新たにポンプ光共振器の設計し、共振器の制御に成功した。これにより、シングルパスのみの実験系と比べて 10 倍程度のポンプ光パワーを得られる。シングルパスのみのセットアップと、共振器ありのセットアップのそれぞれに対して OPA 測定を行った。結果として共振器導入前では 0.12 dB だった OPA ゲインを 0.37 dB まで上げることができた。また OPA で用いる結晶の損傷閾値と実験結果から、この実験系において入射するポンプ光パワーを上げることで、1.7 dB 程度まで OPA ゲインを上げることができると結論づけた。

### 6.2 今後の課題

今後の課題は大きく分けて 2 つある。1 つ目は本研究で分かった発振条件程度まで OPA ゲインを高めることである。この課題の解決策としてはポンプ光共振器の入射鏡を反射率の高い鏡に変更し、共振器内パワーを高めることが挙げられる。またファイバアンプや新しいレーザー光源の使用、SHG 共振器のアライメントの改善などによって、生成できるポンプ光を増やすことも検討する。2 つ目の課題は、本研究の最終的な目標である非線形光学結晶による光ばねの強化の原理検証を行うことである。これはポンプ光共振器を導入した実験系で SR 共振器を制御して、伝達関数を測定することで光ばねの周波数シフトを観測することで実現される。

## 謝辞

本論文執筆にあたり、多くの方々から多大な助言と支援をいただきました。指導教員である宗宮健太郎先生には、研究テーマの選びからさまざまなサポートしていただきました。私の素朴な疑問にも丁寧に答えてくださり、そこから新たな気づきを得たり、理解を深めることにつながりました。感謝申し上げます。

特任講師の原田健一先生には、基本的な実験手法や理論についてたくさんのことを学ばせていただきました。研究に行き詰まったときには、豊富な実験の経験からの確かなアドバイスをくださるだけでなく、今後の研究生活についても相談に乗っていただきました。ありがとうございました。

博士2年の阿部誉さんとは研究分野は異なりますが、先生や先輩方と議論している姿は研究に対する熱意に溢れており、研究に対する姿勢を学ばせていただきました。

博士1年の鈴木海堂さんには本当にたくさんのご指導をいただきました。数ヶ月の間、研究者の先輩と一緒に実験を行い、議論するという経験は自分にとって非常に貴重なものとなりました。ここまで楽しく研究を続けることができたのは海堂さんのおかげです。

修士2年の笹岡さん、武田さん、竹口さん、白倉さん、Diegoさんにもお世話になりました。研究室では皆さん気さくに話しかけてくださり、雰囲気の良い環境でのびのびと研究することができました。笹岡さんにはpythonでのデータ処理を教えていただいたり、研究面においてもサポートしていただきました。修士1年の羽場さんは、同じく光学実験している先輩としていつも親身に相談に乗ってくださいました。同期の竹下くんとも研究だけでなく、たわいもない日常的な話を通じて仲良くさせていただきました。大学院入試や論文の時期には、特に研究室の方々との何気ない会話に励まされました。ここに深くお礼申し上げます。最後に、不自由なく研究できる環境を与えてくれた両親に心より感謝いたします。



## 参考文献

- [1] M. Ando, K. Ishidoshiro, K. Yamamoto, K. Yagi, W. Kokuyama, K. Tsubono, and A. Takamori, Torsion-Bar Antenna for Low-Frequency Gravitational-Wave Observations, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 161101 (2010).
- [2] G. Hobbs *et al.*, The International Pulsar Timing Array project: using pulsars as a gravitational wave detector, *Classical and Quantum Gravity* **27**, 084013 (2010).
- [3] *Latest estimated sensitivity of KAGRA (v201708)*, Tech. Rep. T1707038-v9 (JGW Document, 2017).
- [4] V. Braginsky, M. Gorodetsky, and F. Khalili, Optical bars in gravitational wave antennas, *Physics Letters A* **232**, 340 (1997).
- [5] K. Somiya, Y. Kataoka, J. Kato, N. Saito, and K. Yano, Parametric signal amplification to create a stiff optical bar, *Physics Letters A* **380**, 521 (2016).
- [6] 鈴木海道, 次世代重力波検出器のための非線形光学効果を用いた信号増幅技術の開発, 修士論文, 東京工業大学 (2023).
- [7] 川村静児, 重力波物理の最前線 (共立出版, 2018).
- [8] <https://covesion.com/en/resources/faqs/>.
- [9] 片岡優, 非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発, 修士論文, 東京工業大学 (2017).