卒業論文

光ばね実験における懸架系の開発及びその性能評価

東京工業大学理学部物理学科
宗宮研究室
学籍番号 13B12003 久富　正博

平成29年2月16日 提出

はじめに

Einsteinの一般相対論で予言された重力波だが、近年まで直接観測することはできなかった。しかし、2015年9月にアメリカのレーザー干渉計型重力波検出器LIGOが直接検出を達成する。その際に観測されたのは、太陽質量の36倍のブラックホールと29倍のブラックホールの合体によるものだった。最終的に太陽質量の62倍のブラックホールになったため、残りの太陽質量の3倍分のエネルギーが重力波のエネルギーとなって検出された。このLIGOの直接検出によって重力波の存在は直接的に確かめられたわけだが、今後の重力波検出の意義がなくなったわけではない。今後の重力波検出はより様々な周波数帯における重力波検出を目標としている。より高周波数帯においては中性子星の連星合体などがあり、低周波数帯ではさらに重いブラックホールの連星合体や初期宇宙のインフレーション理論の裏付けにもなる背景重力放射などがある。それらも直接検出に成功すれば、今後の天文学の発展を大いにもたらす。現在世界中では様々な重力波検出器が存在する。そもそも重力波は自由質点に対して、四重極に変位をもたらす性質があるため、その性質を用いて重力波検出器を設計する。主なものは地上あるいは地下におけるレーザー干渉計型重力波検出器であるが、宇宙でレーザー干渉計による重力波検出を試みる計画などもある。

レーザー干渉計型重力波検出器では光ばねという現象を用いた技術を取り入れていることも多い。本論文ではこの光ばねに関する実験におけるミラーの懸架系の開発とその性能評価について記す。今回開発する懸架系はレーザー干渉計の片方の腕に使用されている鏡を吊るすためのものである。対象とするレーザ干渉計ではシグナルリサイクリング(後述する)技術を用いており、そのシグナルリサイクリングミラーと干渉計との間は光ばねで結ばれており、共振器になっている。今回開発する懸架系はLongitudinal方向の共振周波数を光ばねの共振周波数より低く、Yaw方向およびPitch方向の共振周波数をある程度高く(数十Hzならば問題ない)しなければならないならなければならない。そうすることで安定した共振器、干渉計を作れるためである。

今回開発した懸架系は板ばねの原理を用いたもので、素材としては市販されているOHPシートを用いた。素材選定の理由については本章で述べる。ほぼ全方向からミラーをフィックスしているためYawとPitchの方向に固く設計され、YawとPitchの方向に対して対称に設計されたため、それぞれの共振周波数は一致するはずである。本研究では様々な手法で懸架系の共振周波数を測定し、光ばね実験に搭載することができるのか性能評価を行った。

目次

図目次

第1章

一般相対論と重力波

1.1 一般相対論の表記

一般相対論に登場する記法をここにまとめる。

添え字の表記

添え字の表記を以下のように定める：

$$\text{添え字がアルファベットの場合} \quad \cdots \quad 1, 2, 3 \tag{1.1.1}$$

$$\text{添え字がギリシャ文字の場合} \quad \cdots \quad 0, 1, 2, 3 \tag{1.1.2}$$

なお、0が時間、$1, 2, 3$は空間に関する添え字である。

Einsteinの縮約記法

ある一つの添え字が上付きでそれと同じ添え字が下付きで出てくる表式においては、その添え字の取りうる値すべてについての総和をとることにする。この記法をEinsteinの縮約記法という。たとえば

$$A_a B^a \tag{1.1.3}$$

と書かれていたとき

$$\sum_{a=1}^{3} A_a B^a \tag{1.1.4}$$

を意味する。同様に

$$C^\mu D_{\mu\nu} \tag{1.1.5}$$

と書かれていたとき

$$\sum_{\mu=0}^{3} C^\mu D_{\mu\nu} \tag{1.1.6}$$

を意味する。

1.2 Einstein方程式

一般相対論によると、4 次元時空内の異なる 2 点x^μ、$x^\mu + dx^\mu$の間の線素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.2.1}$$

で表される。ここで$g_{\mu\nu}$はメトリックテンソルと呼ばれ、重力場が存在する曲がった時空を記述する計量テンソルである。一方、重力場がない平坦な時空はMinkowski時空と呼ばれ、そのメトリックテンソル$\eta_{\mu\nu}$は

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

と書かれる。そして、重力場が存在する時空でメトリックテンソル$g_{\mu\nu}$が満たす方程式がEinstein方程式(1.2.3)である：

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.2.3}$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.2.4}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{1.2.5}$$

$$R \equiv R^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{1.2.6}$$

ただし、$G_{\mu\nu}$はEinsteinテンソル、$T_{\mu\nu}$はエネルギー・運動量テンソル、$R_{\mu\nu}$はRicciテンソル、RはRicciスカラー、Gは万有引力定数、cは光速である。ここで、Ricciテンソル$R_{\mu\nu}$、RicciスカラーRはRiemannテンソル$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$、Christoffel記号$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$を用いて

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \tag{1.2.7}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\alpha} \tag{1.2.8}$$

である。なお、添え字中のカンマは偏微分を表す：

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu A^\mu = A^{\mu}{}_{,\nu} \tag{1.2.9}$$

1.3 線形化されたEinstein方程式

重力場が弱い場合を考える。このとき、重力場をMinkowski時空からの摂動として考えることができる。そのMinkowski時空からの摂動を$h_{\mu\nu}$とするとメトリックテンソルは

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.3.1}$$

と書ける。この線形近似において、添え字の上げ下げはηを用いる：

$$h^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu} \tag{1.3.2}$$

また、

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{1.3.3}$$

となる。これより、Christoffel記号、Riemannテンソル、Ricciテンソル、Ricciスカラーを順々に求めていくと

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu} + h_{\sigma\nu,\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma}) \tag{1.3.4}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\delta\lambda} = \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda}) \tag{1.3.5}$$

$$R_{\nu\lambda} = \frac{\eta^{\delta\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda}) \tag{1.3.6}$$

$$R = \frac{\eta^{\nu\lambda}\eta^{\delta\sigma}}{2}(h_{\sigma\lambda,\nu\delta} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda}) \tag{1.3.7}$$

となる。これらより、Einstein方程式(1.2.3)の左辺は

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}[h^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + h^{\delta}{}_{\nu,\lambda\delta} - \Box h_{\nu\lambda} - h_{,\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}(h^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma} - \Box h)] \tag{1.3.8}$$

と書ける。ここで

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \tag{1.3.9}$$

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \tag{1.3.10}$$

とした。さらに$h_{\mu\nu}$の逆トレーステンソル$\widetilde{h}_{\mu\nu}$を

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \tag{1.3.11}$$

と定義すれば、

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\widetilde{h}_{\mu\nu} = -h \tag{1.3.12}$$

であり、

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\widetilde{h}^{\delta}{}_{\lambda,\nu\delta} + \widetilde{h}^{\delta}_{\nu,\lambda\delta} - \Box\widetilde{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\widetilde{h}^{\delta\sigma}{}_{,\delta\sigma}) \tag{1.3.13}$$

と表される。ここで、(1.3.13)式を簡略化するために以下のようなゲージ変換を考える：

$$x^{'\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \tag{1.3.14}$$

このとき

$$\begin{aligned} g^{'}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{'\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{'\nu}} g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta^{\alpha}{}_{\mu} - \xi^{\alpha}{}_{,\mu})(\delta^{\beta}{}_{\nu} - \xi^{\beta}{}_{,\nu})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

なので

$$h^{'}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - h_{\nu,\mu} \tag{1.3.16}$$

$$h^{'} = h - 2\xi^{\sigma}{}_{,\sigma} \tag{1.3.17}$$

で表される。これを用いると

$$\widetilde{h}^{'}_{\mu\nu} = h^{'}_{\mu\nu}\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h = \widetilde{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma} \tag{1.3.18}$$

となる。ここで

$$\widetilde{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = \widetilde{h}^{\mu}\ \nu,\mu - \Box\xi_{\nu} \tag{1.3.19}$$

となるから、適当なξ^{μ}を選ぶことによって常に

$$\widetilde{h}'^{\mu}{}_{\nu,\mu} = 0 \tag{1.3.20}$$

とできる。この条件(調和条件)を課すと、Einsteinテンソルの成分は以下のように書き表される：

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\widetilde{h}_{\mu\nu} \tag{1.3.21}$$

したがって、これを(1.2.3)式に代入することで、線形化されたEinstein方程式

$$\Box\widetilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.3.22}$$

を得る。

1.4　重力波の解

線形化されたEinstein方程式は(1.3.22)式で与えられた。真空中においては$T_{\mu\nu}=0$であるから、(1.3.22)式は次のように書き換わる：

$$\Box\widetilde{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.4.1}$$

(1.4.1)式の解として、平面波

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \tag{1.4.2}$$

を考える。(1.4.2)式を（1.4.1）式に代入すると

$$\eta^{\lambda\sigma}k_{\lambda}k_{\sigma}A_{\mu\nu} = 0 \tag{1.4.3}$$

を得る。　同様に(1.3.20)式に代入すると

$$\eta^{\lambda\nu}k_{\nu}A_{\mu\lambda} \tag{1.4.4}$$

を得る。(1.4.3)式、(1.4.4)式より、(1.4.2)式で表される平面波の解は以下の条件を満たす：

$$A_{\mu\nu}k^{\nu} = 0 \tag{1.4.5}$$

$$k_{\mu}k^{\mu} = 0 \tag{1.4.6}$$

(1.4.5)式は、平面波の振幅と波の進行方向が直交していることから、この平面波が横波であることを表している。一方、(1.4.6)式は、この平面波が光速で伝播していくことを表している。

さらに、(1.3.14)式のゲージ変換を行う。ここで、(1.3.19)式から調和条件を満たすためには、$\Box\xi_\mu = 0$を満たす関数でなければならないことが分かる。そこで、定数B_μを用いて

$$\xi_\mu = B_\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda) \tag{1.4.7}$$

とする。(1.3.16)式、(1.3.17)式に従って計算すれば

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - i(B\mu k_\nu + B_\nu k_\mu)\exp(ik_\lambda x^\lambda) \tag{1.4.8}$$

$$\begin{aligned} h' &= h - i\eta^{\mu\nu}(B\mu k_\nu + B_\nu k_\mu)\exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -[\eta^{\mu\nu}A_{\mu\nu} + i\eta^{\mu\nu}(B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu)]\exp(ik_\lambda x^\lambda) \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

となる。上式を見ると、適当なB_μを選べば常に$h' = 0$とできる。一般に、$h = 0$となるとき、トレースレス条件を満たすという。この場合においては$h_{\mu\nu} = \widetilde{h}_{\mu\nu}$である。

ここで、簡単な場合、z方向に重力波が伝播する場合を考える。このとき、$-k_0 = k_3 = k, k_1 = k_2 = 0$であるから、調和条件、トレースレス条件はそれぞれ

$$k(A_{\mu 0} + A_{\mu 3}) = 0 \tag{1.4.10}$$

$$-A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \tag{1.4.11}$$

である。$h'_{\mu\nu} = A'_{\mu\nu}\exp(ik_\lambda x^\lambda)$として、(1.4.8)式に代入すれば

$$A'_{00} = A_{00} + 2iB_0 k \tag{1.4.12}$$

$$A'_{01} = A_{01} + iB_1 k \tag{1.4.13}$$

$$A'_{02} = A_{02} + iB_2 k \tag{1.4.14}$$

$$A'_{03} = A_{03} - i(B_0 k - B_3 k) = A_{03} - 2iB_0 k \tag{1.4.15}$$

となるから、$A'_{0\mu} = 0$となるようにB_μを決める。以上と調和条件、トレースレス条件から$A_{\mu\nu}$の成分のうち0でない成分は$A_{11} = -A_{22}$と$A_{12} = A_{21}$の２つの量のみである。$A_{\mu\nu}$を行列で表すと

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.16}$$

となる。ここで、h_+と$h_\times$は重力波の持つ２つの自由度を表しており、前者はプラスモード、後者はクロスモードと呼ばれる。両者による影響は次節で述べる。

このように適当なゲージを選ぶことで、横波でトレースレス条件を満たすようにできる。このような

ゲージのことをトランスバース・トレースレスゲージ(TTゲージ)という。

以上で、真空中における重力波の満たす方程式の解が求まった：

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - kz)] \tag{1.4.17}$$

1.5　自由質点に対する重力波による影響

前節では、重力波には２つの自由度があるとわかった。ここでは、重力波による自由質点の運動を考える。このとき、自由質点は測地線方程式

$$\frac{du^0}{d\tau} + c^2\Gamma^0{}_{00} + 2c\Gamma^0{}_{0j}u^j = 0 \tag{1.5.1}$$

$$\frac{du^k}{d\tau} + c^2\Gamma^k{}_{00} = 0 \tag{1.5.2}$$

に従う。(1.3.4)式に、$h_{0\mu} = 0$を課すと$\Gamma^\mu{}_{00} = 0, \Gamma^0{}_{0j} = 0$であるから

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \tag{1.5.3}$$

となる。この式は、初期状態で静止していた物体はそのまま静止し続けるということである。したがって、重力波による影響は１つの質点の運動を観測するだけでは現れない。

重力波の影響は、２つの近接した粒子間の固有距離に現れる。２つの近接して静止した質点のTTゲージ上の座標をそれぞれ$x^\mu_{(1)} = (0,0,0,0)$、$x^\mu_{(2)} = (0,\epsilon,0,0)$とする。ただし、$|\epsilon| \ll 1$とする。ここに(1.4.17)式で表される重力波が入射すると、２つの自由質点間の固有距離は

$$\begin{aligned} \int_{x^\mu_{(1)}}^{x^\mu_{(2)}} |g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}} &= \int_0^\epsilon |g_{11}|^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &\simeq |g_{11}|^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq \left\{1 + \frac{1}{2}\widetilde{h}_{11}\right\}\epsilon \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

となって、２つの質点間の固有距離が変化することが分かる。図1.1は、紙面に対して垂直な方向に重力波が入射した時の自由質点群の変位を表したものである。

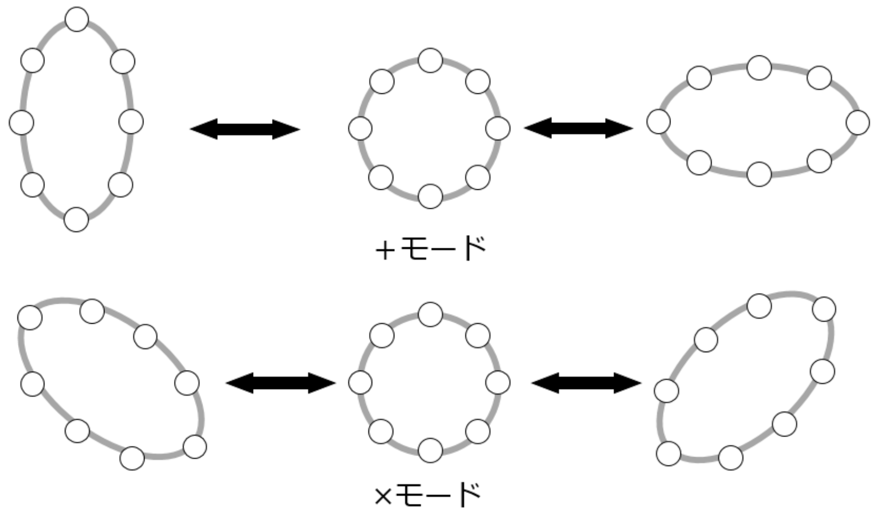

図1.1　紙面に垂直な方向から重力波が入射した時の自由質点間距離の変化

第2章

重力波の検出

近年まで重力波は直接検出が達成されず、Einsteinの予言としてほのめかされていた重力波の存在だが、2015年についにアメリカのレーザー干渉計型重力波検出器であるLIGO(Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory)が重力波の直接検出を達成した。日本で現在建設されている重力波検出器KAGRAもレーザー干渉計型である。この章では、レーザー干渉計型重力波検出器の仕組みと、重力波に対する応答について述べる。

2.1 Michelson干渉計

重力波検出器で用いられているレーザー干渉計の基本はMichelson干渉計である。図2.1はMichelson干渉計を示した図である。レーザーから入射した光はビームスプリッタによって2方向(x方向とy方向)に分けられ、それぞれ鏡で反射して再びビームスプリッタに戻ってくる。その際ビームスプリッタで2つの光が重なり合い、干渉しその干渉光をフォトディテクタで測定する。ここに重力波がやってくるとビームスプリッタと2つの鏡との間の距離(以下'腕'とよぶ)が変化する。その距離の変化が位相の変化を生み、それによる干渉光の強度変化をフォトディテクタで測定するのである。

入射レーザー光の電場E_{in}を

$$E_{in} = E_0 \exp(i\Omega t) \tag{2.1.1}$$

とする。ただし、Ωはレーザー光の角周波数2つにわけられた光(x方向、y方向)がそれぞれϕ_x, ϕ_yだけ位相変化したとする。このとき、フォトディテクタでの電場E_{out}は

$$\text{である。} E_{out} = \frac{1}{2}E_0 \exp(i\Omega t - i\phi_x) + \frac{1}{2}E_0 \exp(i\Omega t - i\phi_y) \tag{2.1.2}$$

となる。このとき、フォトディテクタで光の強度P_{out}は

$$\begin{aligned} P_{out} &= |E_{out}|^2 \\ &= \frac{1}{2}|E_0|^2\{1 - \cos(\phi_x - \phi_y)\} \\ &= \frac{1}{2}P_{in}(1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

となる。ただし、P_{in}は入射レーザー光の強度である。

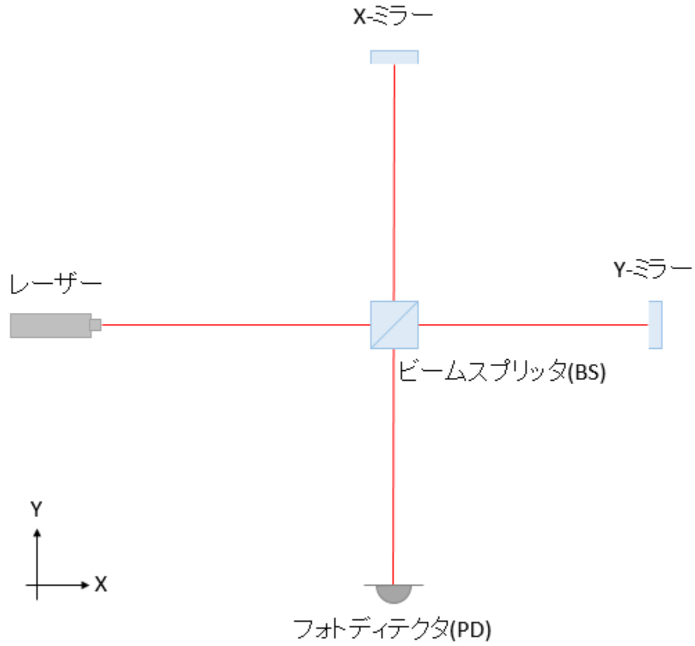

図2.1　Michelson干渉計

2.2　Michelson干渉計の重力波に対する応答

次に重力波に対する応答について考える。図2.1において、z軸方向に＋モードの重力波が入射した場合を考える。つまり、$h_+ = \widetilde{h}(t), h_\times = 0$である。すると、$x$軸方向を運動する光子の世界線に沿った線素は、光の伝播はヌルベクトルであることから

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \{1+\widetilde{h}(t)\}dx^2 = 0 \tag{2.2.1}$$

である。さらに、$\widetilde{h}(t) \ll 1$であるから、$\frac{dx}{dt} > 0$のとき、

$$\begin{aligned}(2.2.1) \Leftrightarrow dx &= \frac{c}{\sqrt{1+\widetilde{h}(t)}} \\ &\simeq \{1 - \frac{1}{2}\widetilde{h}(t)\}cdt \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

となる。ここで、x軸、y軸方向の腕の長さをそれぞれl_x, l_yとする。さらに、光子がx軸の腕を往復するのに要する時間をΔt_xとし、式(2.2.2)を両辺積分すると

$$\frac{2l_x}{c} = \int_{t-\Delta t_x}^{t} \left\{1 - \frac{1}{2}\widetilde{h}(t')\right\} dt' \tag{2.2.3}$$

となるから、式変形して

$$\Delta t_x = \frac{2l_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} \frac{1}{2}\widetilde{h}(t')dt' \tag{2.2.4}$$

となる。ここで$\widetilde{h}(t) \ll 1$であるから、積分の下限を$t - \frac{2l_x}{c}$として近似すると

$$\Delta t_x \simeq \frac{2l_x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2l_x}{c}}^{t} \frac{1}{2}\widetilde{h}(t^{'})dt^{'} \tag{2.2.5}$$

となる。よって、光がx軸上を往復するときの位相変化は

$$\begin{aligned}\phi_x &= \Omega\Delta t_x \\ &= \frac{2l_x\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2l_x}{c}}^{t} \frac{1}{2}\widetilde{h}(t^{'})dt^{'}\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

と求められる。同様にして、光がy軸上を往復するときの位相変化は

$$\begin{aligned}\phi_y &= \Omega\Delta t_y \\ &= \frac{2l_y\Omega}{c} - \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2l_y}{c}}^{t} \frac{1}{2}\widetilde{h}(t^{'})dt^{'}\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

と求められる。よって、基線長$l \simeq l_x \simeq l_y$とし、$l_- = l_x - l_y$とすると

$$\phi_- \equiv \phi_x - \phi_y = \frac{2l_-\Omega}{c} + \delta\phi_{GW} \tag{2.2.8}$$

$$\delta\phi_{GW} = \Omega\int_{t-\frac{2l_y}{c}}^{t} \frac{1}{2}\widetilde{h}(t^{'})dt^{'} \tag{2.2.9}$$

と計算できる。式(2.2.8)において、第1項はビームスプリッタから2つの鏡までの距離差で生じる位相変化、第2項は重力波の影響による位相変化を表している。

2.3　周波数応答と基線長

次に、Michelson干渉計の周波数応答を考える。$\widetilde{h}(t)$をFourier変換すると

$$\widetilde{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2.3.1}$$

となる。すると式(2.2.9)は

$$\begin{aligned}\delta\phi_{GW} &= \Omega\int_{t-\frac{2l}{c}}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega dt^{'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{i\omega}\widetilde{h}(\omega)e^{i\omega t}\left(1 - e^{-i\omega\frac{2l}{c}}\right)d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega}\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)e^{-i\frac{l\omega}{c}}\widetilde{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{MI}(\omega)\widetilde{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$H_{MI}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega}\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)e^{-i\frac{l\omega}{c}} \tag{2.3.3}$$

となる。$H_{MI}(\omega)$が重力波に対するMichelson干渉計の周波数応答関数である。観測する周波数ωを固定して考えたとき、H_{MI}は基線長(腕の長さ)lの関数と見ることができる。すると、$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2}$のときに$H_{MI}$の絶対値が最大になる。よって、それ以上に基線長を長くしても感度は向上しない。例えば、観測する重力波

の周波数が1kHzのときは、$l = 75$kmとなる。しかしこのような長い距離で干渉計を組むことは現実的に難しい。そのため、実際には以下で紹介するFabry-Perot共振器(FP共振器)というものを用いて実効的な光路長を稼いでいる。

2.4　Fabry-Perot共振器

現在世界で建設・稼働されているレーザー干渉計型重力波検出器の多くはFabry-Perot方式を利用している。Fabry-Perot方式はMichelson干渉計の 2 つの腕をFabry-Perot共振器に置き換えたものである。Fabry-Perot共振器とは以下の図2.2で表される共振器である。

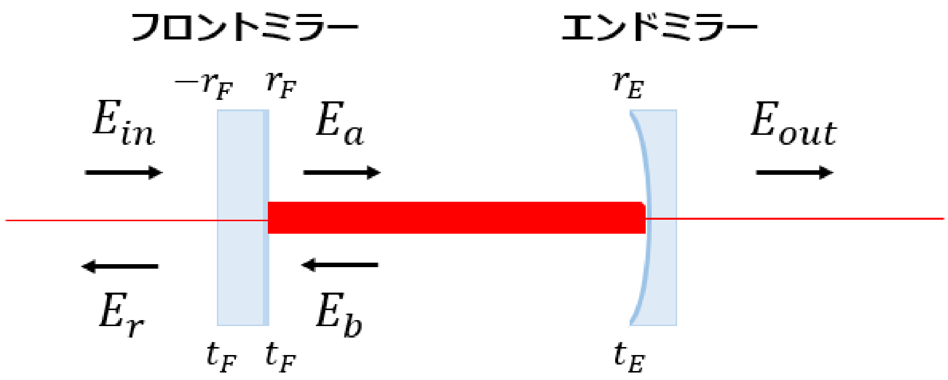

図2.2　Fabry-Perot共振器

光源は図の左にある。ここで、r_F, t_F, r_E, t_Eはそれぞれフロントミラーの反射率、フロントミラーの透過率、エンドミラーの反射率、エンドミラーの透過率を表している。なお、ミラーには表と裏があり、反射率の符号が異なる。

入射電場が式(2.1.1)であるとして、Fabry-Perot共振器からの反射電場、透過電場E_r, E_{out}がどう表されるかを考える。それぞれの場所における電場は以下の連立方程式を満たす。

$$E_a = t_F E_{in} + r_F E_b \tag{2.4.1}$$

$$E_b = r_E e^{-2i\frac{L\Omega}{c}} E_a \tag{2.4.2}$$

$$E_r = t_F E_b - r_F E_{in} \tag{2.4.3}$$

$$E_{out} = t_E e^{-i\frac{L\Omega}{c}} E_a \tag{2.4.4}$$

ただし、共振器の長さをLとした。この連立方程式を解くと

$$E_r = \left(-r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^- i\Phi}\right) E_{in} \tag{2.4.5}$$

$$E_{out} = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} E_{in} \tag{2.4.6}$$

となる。ここで、Φは光が共振器内を往復した時の位相変化である：

$$\Phi = \frac{2L\Omega}{c} \tag{2.4.7}$$

Fabry-Perot共振器を 1 つのミラーと考えたとき、式(2.4.5)、式(2.4.6)よりFabry-Perot共振器の反射率$r_{cav}(\Phi)$、透過率$t_{cav}(\Phi)$を以下のように定義できる：

$$r_{cav}(\Phi) \equiv \frac{E_r}{E_{in}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^- i\Phi} \tag{2.4.8}$$

$$t_{cav}(\Phi) \equiv \frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} \tag{2.4.9}$$

また、反射光強度P_r、透過光強度P_{out}は式(2.4.5)、式(2.4.6)より

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 \\ &= \frac{\{(t_F^2 + r_F^2) r_E - r_F\}^2 + 4 r_F r_E (t_F^2 + r_F^2) \sin^2(\frac{\Phi}{2})}{(1 - r_F r_E)^2 \{1 + F \sin^2(\frac{\Phi}{2})\}} |E_{in}|^2 \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

$$\begin{aligned} P_{out} &= |E_{out}|^2 \\ &= \frac{(t_F t_E)^2}{(1 - r_F r_E)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\Phi}{2})} |E_{in}|^2 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

と求まる。ただし、Fは以下で定義される値である：

$$F \equiv \frac{4 r_F r_E}{(1 - r_F r_E)^2} \tag{2.4.12}$$

透過光強度が最大になるとき、共振器内部の光の強度も最大となり、この状態を’入射レーザー光がFabry-Perot共振器が共振している’と表現する。共振条件は自然数nを用いて

$$\Phi = 2\pi n \tag{2.4.13}$$

と書ける。

式(2.4.11)より、横軸をΦとした透過光強度のグラフ(振幅を規格化している)は図2.3のようになる。

また、$\Phi = \frac{2L\Omega}{c}$において共振器長$L$を固定して考えると、透過光強度は角周波数が$\Omega$の周期関数になっている。この基本周期のことをフリースペクトラルレンジ(FSR)という。すると、

$$\frac{2L\Omega_{FSR}}{c} = 2\pi \tag{2.4.14}$$

より

$$\nu_{FSR} = \frac{\Omega_{FSR}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \tag{2.4.15}$$

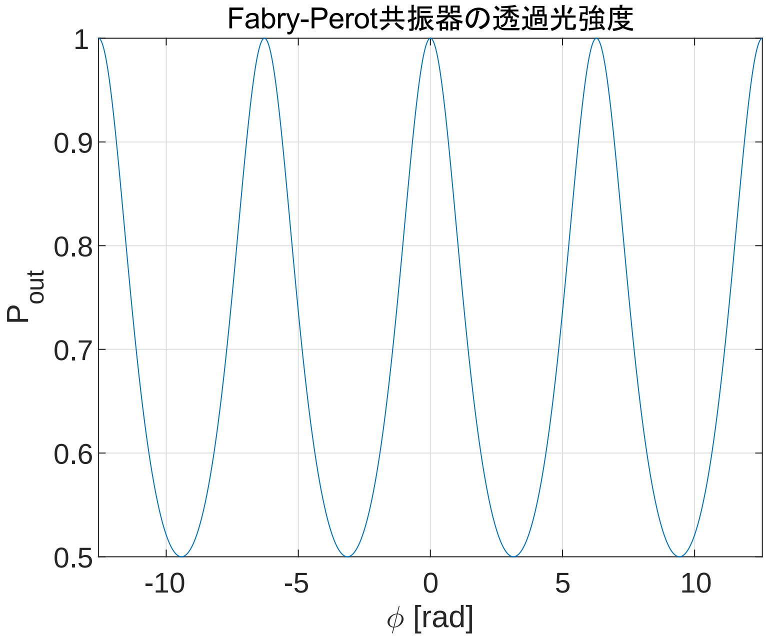

図2.3　Fabry-Perot共振器の透過光強度

となり、共振周波数の間隔が求まる。また、共振ピークの半値全幅ν_{FWHM}は、$\nu_{FWHM} \ll \nu_{FSR}$ならば

$$\nu_{FWHM} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r_F r_E}{\sqrt{r_F r_E}}\frac{c}{L} \tag{2.4.16}$$

である。ν_{FSR}とν_{FWHM}の比はフィネス$\mathcal{F}$と呼ばれ、共振ピークの鋭さを表している：

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{FSR}}{\nu_{FWHM}} = \frac{\pi\sqrt{r_F r_E}}{1-r_F r_E} \tag{2.4.17}$$

このようにフィネスは鏡の反射率のみから決定される値である。フィネスの値を高くすることで共振させたい周波数の幅をより狭くでき、他の周波数の雑音の影響を受けにくくなり、より感度の良い重力波検出器となる。

2.5　Fabry-Perot共振器の重力波に対する応答

Fabry-Perot共振器の重力波に対する応答を考える。x軸方向に横たわっているFabry-Perot共振器に+モードの重力波が入射したとき、光が共振器内をn回往復する時間Δt_nはMichelson干渉計のときと同様に計算すると

$$\Delta t_n \simeq \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L}{c}n}^{t} \widetilde{h}(t')dt' \tag{2.5.1}$$

となる。ここに式(2.3.1)で与えられるフーリエ変換を施すと

$$\Delta t_n \simeq \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(\omega)\frac{1-e^{-2i\frac{L\omega}{c}n}}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega \tag{2.5.2}$$

となる。入射レーザー光とFabry-Perot共振器が共振しているときを考えると、反射電場E_rは

$$E_r = \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E}{1-r_F r_E}\left[1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_{FP}(\omega)\widetilde{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]E_{in} \tag{2.5.3}$$

と計算できる。ここで、$H_{FP}(\omega)$は重力波に対するFabry-Perot共振器の周波数応答関数であり、

$$H_{FP}(\omega) = \frac{\alpha\Omega}{\omega}\frac{\sin\gamma}{1 - r_F r_E e^{-2i\gamma}}e^{-i\gamma} \tag{2.5.4}$$

$$\alpha \equiv \frac{t_F^2 r_E}{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E} \tag{2.5.5}$$

$$\gamma \equiv \frac{L\Omega}{c} \tag{2.5.6}$$

で表される。ここで、光が共振器内を往復する時間内で重力波の時間変化が十分小さいとする。つまり、$\gamma \ll 1$のとき、周波数応答関数$H_{FP}(\omega)$の絶対値は

$$\begin{aligned}|H_{FP}(\omega)| &= \frac{\alpha\Omega}{\omega(1 - r_F r_E)}\frac{|\sin\gamma|}{\sqrt{1 + F\sin^2\gamma}} \\ &\simeq \frac{\alpha\Omega}{\omega(1 - r_F r_E)}\frac{\gamma}{\sqrt{1 + F\gamma^2}} \\ &= \frac{\alpha\Omega L}{c(1 - r_F r_E)}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{F}L}{c}\omega\right)^2}} \\ &= \frac{\alpha\Omega L}{c(1 - r_F r_E)}\frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

と計算できる。この式(2.5.7)を見ると、Fabry-Perot共振器の重力波に対する応答は 1 次のローパス特性を持っていることが分かる。ただし、τは以下の形で書かれる：

$$\tau = \frac{\sqrt{F}L}{c} = \frac{2L}{c}\frac{\sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \tag{2.5.8}$$

このτはフィネス$\mathcal{F}$を用いて

$$\tau = \frac{2L}{\pi c}\mathcal{F} \tag{2.5.9}$$

と表せる。なお、τは共振器内での光の平均滞在時間を表しているため、Fabry-Perot共振器の光の折り返し回数N_{FP}は

$$N_{FP} = \frac{\tau}{\left(\frac{L}{c}\right)} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \tag{2.5.10}$$

と書けるはずである。このようにフィネスは共振器を考えるにあたって非常に重要な値である。

2.6　干渉計における雑音

重力波という非常に小さな信号を検出する際に懸念しなければならないのが雑音である。というのも重力波検出器の感度は重力波の信号と雑音の比(S/N比)で決まっているので、雑音が重力波検出器の感度を制限しているからである。雑音といってもその種類は様々で、今節ではその種類について紹介する。

雑音の種類を紹介する前に、重力波の感度について説明しておく。感度とは各周波数における雑音の合計、つまりノイズスペクトルのことである。単位は$1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$や$\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$が用いられる。

タイムスケール$|t| \leq \frac{T}{2}$で測定した物理量(今回考えるのは雑音による変位である)$x(t)$のFourier変換は

$$x(\omega;T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{i\omega t}dt \tag{2.6.1}$$

である。このとき、パワースペクトル密度$S(\omega)$は次のように定義される：

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\frac{\langle|x(\omega;T)|^2\rangle}{T} \tag{2.6.2}$$

$x(t)$とパワースペクトル密度$S(\omega)$の間には次のような関係がある：

$$\overline{x}^2(t) = \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)d\omega \tag{2.6.3}$$

この式があらわすところは、パワースペクトル密度$P(\omega)$は雑音による変位に対する各周波数成分の寄与を表している、ということである。実際には$\omega = 2\pi f$として$f \geq 0$に対するスペクトルを考える。これは片側パワースペクトル密度と呼ばれ、$G(f)$と表記し、以下のような関係がある：

$$\overline{x}^2(t) = \int_{0}^{\infty} G(f)df \tag{2.6.4}$$

$$G(f) = 4\pi P(\omega) \tag{2.6.5}$$

雑音に関して評価する際にはこのように定義される片側パワースペクトル密度$G(f)$の平方根、つまり$\sqrt{G(f)}$を用いることが多い。そのため、感度の単位として$1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$や$m/\sqrt{\mathrm{Hz}}$が用いられているわけである。

また、先述のパワースペクトル密度$P(\omega)$は片側パワースペクトル密度$G(f)$と区別して、両側パワースペクトル密度と呼ばれることが多い。

図2.4はKAGRAにおける様々な雑音と合計感度のスペクトルである。黒破線で書かれたものがKAGRAの合計感度であり、100Hz付近に良い感度を持っていることが分かる。

2.6.1　散射雑音

散射雑音とは、後述する真空場の位相方向の揺らぎによる雑音である。重力波検出は位相信号検出であるため、この位相揺らぎが直に雑音になってしまう。この雑音はレーザーパワーを上げることによって低減される。

2.6.2　輻射圧雑音と標準量子限界(SQL)

真空場と輻射圧雑音

重力波検出器においてフォトディテクタで検出する干渉光はダークフリンジ(x, y方向からやってくる光が互いに打ち消しあう状態)に制御されている。しかし、このように干渉計がダークフリンジに制御されているとき、フォトディテクタ側から入射する真空場によって雑音が生じる。真空場とは、たとえ光源がない空間においても量子的に光子が揺らいでいる状態である。この光子の揺らぎは振幅方向の揺らぎと位相方

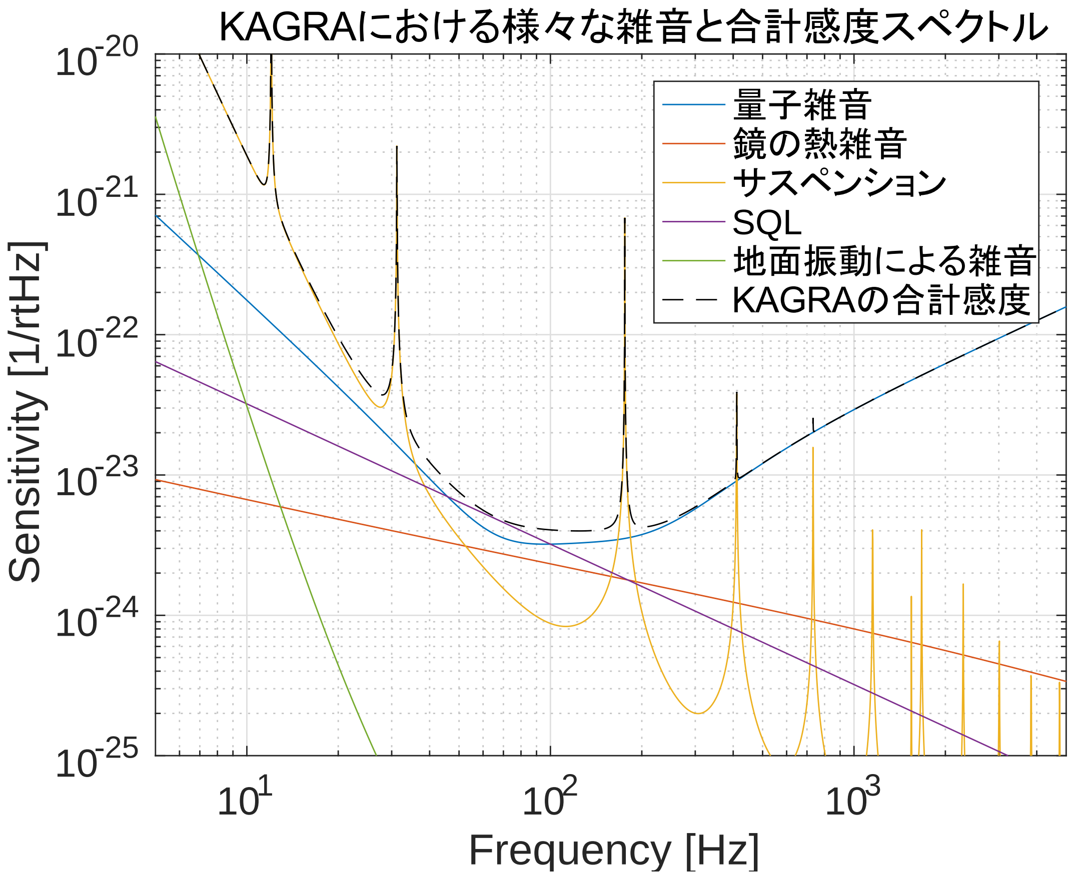

図2.4　KAGRAにおける様々な雑音と合計感度のスペクトル

向の揺らぎに分かれる。振幅方向の揺らぎは干渉計内の光(キャリア光と呼ばれる)のパワーを変化させる。すると、光がミラーを押す力(輻射圧)も変化してしまい、ミラーの変位も揺らいでしまう。最終的にそのミラーの揺らぎが位相変化を生み、雑音となってしまう。この雑音を輻射圧雑音と呼ぶ。

いま、真空場$A_{in}(t)$は消滅演算子a_ωを用いて以下のように書ける：

$$A_{in}(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{\mathcal{A}c}} a_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{2.6.6}$$

ここで、$\mathcal{A}$はレーザーのビーム断面積、$\hbar$は換算プランク定数である。なお、生成消滅演算子は以下の交換関係を満たす：

$$[a_\omega, a'^{\dagger}_{\omega}] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \tag{2.6.7}$$

この生成消滅演算子を用いると、ダークポート(フォトディテクタ側)から干渉計に入射する真空場の振幅成分$a_1(\omega)$と位相成分$a_2(\omega)$はそれぞれ以下のように書ける：

$$a_1(\omega) = \frac{a_{\Omega+\omega} + a^\dagger_{\Omega-\omega}}{\sqrt{2}} \tag{2.6.8}$$

$$a_2(\omega) = \frac{a_{\Omega+\omega} - a^\dagger_{\Omega-\omega}}{\sqrt{2}i} \tag{2.6.9}$$

ここで、上式の真空場の振幅成分と位相成分について基底をとったベクトル表示を考える。いま、ダークポートから入射した真空場がFabry-Perot共振器を取り入れた干渉計を通って、再びダークポートに戻ってきてフォトディテクタで検出される場合を考える。このとき干渉計から出てきた真空場の振幅成分b_1、位相成分b_2はそれぞれ以下のように書ける：

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{2i\beta} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{SQL}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} e^{i\beta} \tag{2.6.10}$$

ここで、$\mathcal{K}$は輻射圧とミラーのカップリング係数、βは干渉計を片道通過するときの位相の遅れ、hは重力波による干渉計の腕の歪みである。$\mathcal{K}$は

$$\mathcal{K} = \frac{4I_0\omega_0}{c^2 m\Omega^2} \tag{2.6.11}$$

と表され、レーザーの強度に比例する。また、βは式(2.4.7)で表されるΦの半分である。

標準量子限界(SQL)

前項の散射雑音と輻射圧雑音を合わせて量子雑音と呼ぶことが多い。いま、位相方向に現れる量子雑音の大きさを歪みh_qで表すと

$$h_q = \sqrt{\frac{\mathcal{K}^2+1}{2\mathcal{K}}} h_{SQL} \tag{2.6.12}$$

$$h_{SQL} = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2}} \tag{2.6.13}$$

となる。ここで、mはミラーの質量である。この式を見ると、レーザーパワーに関わらずある限界値h_{SQL}を超えないことがわかる。これを標準量子限界(Standard Quantum Limit:SQL)という。つまり散射雑音を低減させようとレーザーパワーを上げると、そのトレードオフとして輻射圧雑音が大きくなってしまい、レーザーパワーの変更のみだと検出器の感度はSQLによって制限されてしまうということである。

2.6.3　光源による雑音

光源として使用されるレーザーは決して理想的なものではなく、レーザー光源による雑音が様々存在する。

レーザーの周波数雑音

レーザーの周波数ゆらぎによる位相雑音である。これも散射雑音と同様に位相雑音であるために、重力波の信号と同様に位相信号として検出されてしまう。しかし、この雑音は干渉計をシンメトリックにすることで消すことができる。

レーザーの強度雑音

干渉計を用いて位相の情報を取り出すとき、フォトディテクタで強度変化に変換してから信号として取り出す。レーザー光源は位相だけでなく強度も揺らいでしまうため、重力波信号による強度変化と見分け

がつかなくなってしまう。そこで干渉計をダークフリンジに制御することで位相変化による寄与を増やし、強度雑音の影響を減らしている。

ビームジッター雑音

レーザーの出力ビームはビーム径や方向が時間変化してしまう。干渉計が完全に対称でなかったり、ミスアライメントがあると、これらもゆらぎが出力に現れてしまう。これらのゆらぎは高次のガウシアンモードが励起されることによるものなので、この問題はモードクリーナと呼ばれる共振器を取り入れることで解消される。モードクリーナとは高次のガウシアンモードは共振せず、基本モードのみに共振するような共振器のことである。実際のところ、日本の重力波検出器であるKAGRAの出力モードクリーナは、東工大が担当して制作しているところである。しかし、ビームジッターがあった場合、モードクリーナを通すと透過光強度が変化して重力波の信号と区別がなくなってしまう。どの程度モードクリーナで除去すれば干渉計の出力に影響を及ぼさないかを定量的に議論するのは難しい。効率よく除去するためにはフィネスの高い共振器が必要だが、透過効率の問題や高出力のレーザーに対してミラーで発生する熱の問題などが発生してしまう。

2.6.4　熱雑音

重力波検出器は有限温度の熱浴に接しているため、様々な部分で熱振動をが起きている。その熱振動による雑音が熱雑音である。ミラーは振り子にして吊るしているのだが、その振り子の熱雑音であったり、ミラーを吊るすためのワイヤーの弦モードによる熱雑音、ミラー自体の機械共振による熱雑音などが主である。これら雑音を低減するためには、温度を下げたり、振動子の機械的なQ値という値を上げなくてはならない。実際にKAGRAではサファイア製のミラーを低温に冷却している。

2.6.5　地面振動による雑音

地面は地震以外に様々な周波数を持った微小振動を行っている。このように地面が微小振動することによる雑音が存在する。この雑音は1Hz以上において$10^{-7}/f^2[1/\sqrt{\mathrm{Hz}}]$で表され、周波数の２乗に反比例する。この雑音を低減するために防振系(Vibration Isolation System:VIS)という技術を検出器に導入している。先述のとおり、ミラーを振り子で吊るすことによって地面振動の直接的な影響を緩和している。実際にはミラーを単一の振り子で吊るすのではなく、多段振り子で吊るすことによって更なる雑音低減を行っている。

2.7　パワーリサイクリング

高周波数の重力波をターゲットにした重力波検出器はレーザーのパワーを大きくしている。というのも高周波数帯においては支配的である散射雑音を低減するためである。しかし、安定した高出力レーザーの

開発は非常に難しく、現在使われているレーザーの出力はせいぜい数十Wほどである。

前節でも触れたが、重力波検出に用いられる干渉計の干渉光はダークフリンジに制御されている。すると、レーザーから入射した光は最終的にほとんどがレーザーの方向(ブライトポート)に戻っていってしまう。そこで、レーザーとビームスプリッタの間にミラーを入れることで、ブライトポートに戻ってきた光を反射し干渉計内の実効的なレーザーパワーを上げることができる。これをパワーリサイクリング(PR)といい、レーザー光の周波数で反共振するようにパワーリサイクリング共振器を組むことによって実現できる。また、パワーリサイクリングするために導入したミラーのことをパワーリサイクリングミラー(PRM)という。

2.8　シグナルリサイクリング

干渉計とフォトディテクタの間にミラーを入れることで、干渉計からダークポートに漏れてきた信号を反射し信号を増幅することができる。これをシグナルリサイクリング(SR)といい、シグナルリサイクリングするために導入したミラーのことをシグナルリサイクリングミラー(SRM)という。なお、PRとSR両方とも行う場合はデュアルリサイクリング(DR)と呼ぶ。図2.5はDR干渉計を表した図である。

SRMはターゲットとする重力波の周波数帯によって置く位置は変わってくる。例えば、SRMをキャリア光が同じく共振するように置いたとき、干渉計の感度は高周波数帯で悪く、低周波数帯で良くなる。この手法はBroadband Signal Recycling(BSR)と呼ばれる。

一方で、SRMをキャリア光が反共振するようにしたとき、感度は高周波数帯で良くなり、低周波数帯で悪くなる。これは高周波数の重力波が共振器の腕の中で相殺される前に信号を取り出すことと解釈できる。SRMをキャリア光が反共振するように置いたときはBroadband Resonant Sideband Extraction(BRSE)と呼ぶ。

2.9　DRSE干渉計

SRMをキャリア光が共振あるいは反共振するような位置からあえて少しずらすことをデチューンするという。デチューンすることによって良い感度を持つ周波数帯が狭くなるのをトレードオフに感度を改善することができる。この手法をDetuned Resonant Sideband Extraction(DRSE)という。このように、DRSEを取り入れた干渉計のことをDetuned Resonant Sideband Extraction干渉計(DRSE干渉計)という。図2.6はDRSE干渉計の図である。

日本のKAGRAにおいてはこのDRSE干渉計を用いており、100Hz付近に最も良い感度を持っている。

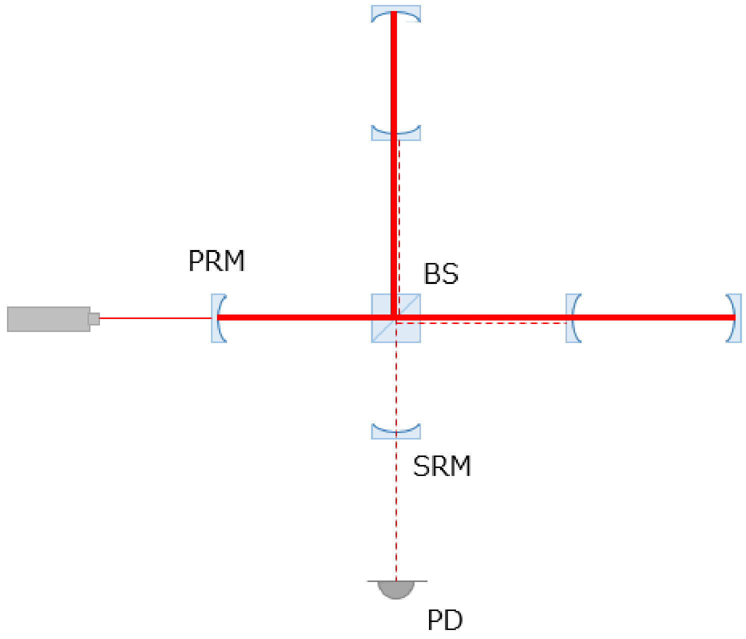

図2.5　DR干渉計

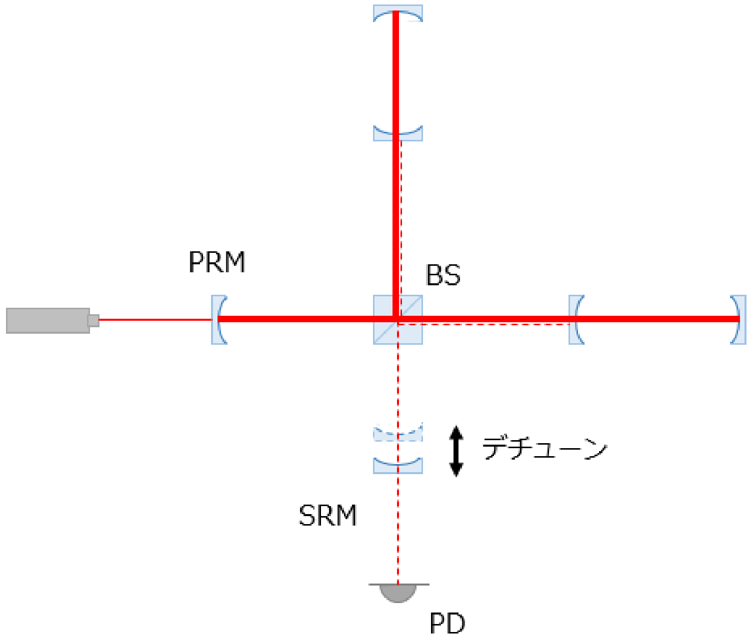

図2.6　DRSE干渉計

第3章

光ばねとスクイーズ

この章では、前章で説明した量子雑音の改善方法の一つである光ばねについて説明する。現在東工大の宗宮研究室では光ばねに関する実験を行っており、その実験に用いられるミラーのサスペンションの開発が本論文の主旨であるため、光ばねの原理を説明することは非常に重要である。また、現在宗宮研究室における光ばね実験で用いられている非線形光学結晶を用いた光スクイーズ技術についても説明する。

3.1　光ばね

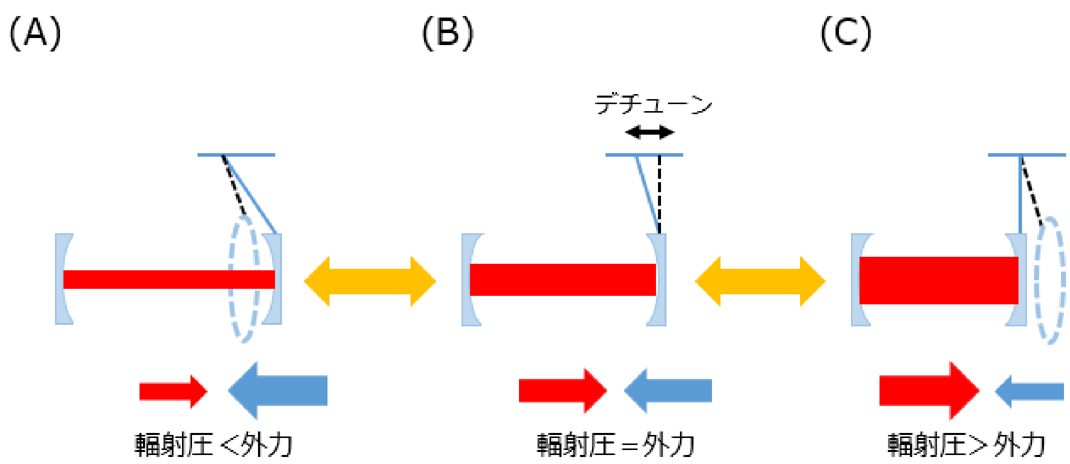

図3.1　光ばねの原理

図3.1は光ばねの原理を表した図である。キャリア光の共振点から少しデチューンし、ミラーが釣り合うように制御された状態が(B)である。この状態からミラーが(A)か(C)の状態になると輻射圧と外力の釣り合いが崩れ、それぞれ(B)の状態に戻るような力、つまり復元力が働く。このように、共振器を共振点から少しデチューンすることで共振器の間に光によって復元力が働くことから光ばねと呼ばれる。光ばねにも普通のばねと同様に共振周波数が存在する。このとき干渉計の感度は光ばねの共振周波数付近で向上する。実際に、SRMをデチューンすることによって、SRMと干渉計との間に光ばねを作っている。

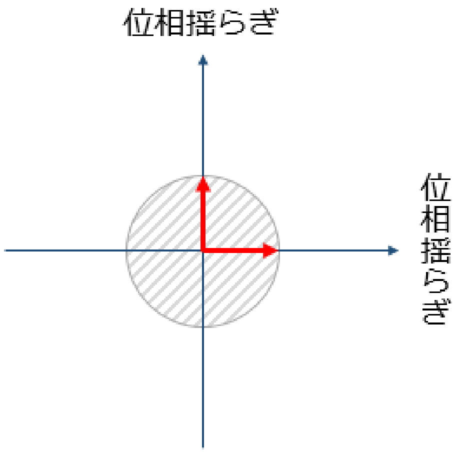

図3.2　コヒーレント状態における揺らぎ

3.2　スクイーズ

Heisenbergの不確定性原理は

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{4} \tag{3.2.1}$$

であった。ただし、$\Delta q, \Delta p$はそれぞれ位置q、運動量pの分散である。上式において等号が成り立つときのことを最小不確定性状態と呼んだ。真空場、つまり振幅と位相の揺らぎにおいても同様に不確定性原理が成り立ち、最小不確定性状態が存在する。この最小不確定性状態において、振幅と位相が同様に揺らいでいる光のことをコヒーレント光と呼び、コヒーレント光は最も干渉性を示す。真空場はコヒーレント状態にある。図3.2はコヒーレント状態における振幅、位相の揺らぎを表した図である。

重力波検出は位相検出であるため、真空場の位相の揺らぎを低減することで量子雑音を低減したい。そこで、最小不確定性関係を満たしつつ位相の揺らぎを低減する(振幅の揺らぎは増加する)技術を重力波検出器に組み込む。このように一方の揺らぎを増加させる代わりに他方の揺らぎを低減させた状態のことをスクイーズド状態と呼び、この手法をスクイージングと呼ぶ。特に、振幅の揺らぎを増加させる代わりに位相の揺らぎを低減することを位相スクイーズ、逆を振幅スクイーズと呼ぶ。それぞれの状態を表した図が図3.3である。また、スクイーズド状態にある光のことをスクイーズ光と呼ぶ。

3.3　スクイーズ光の生成

スクイーズ光は、非線形光学結晶を用いたパラメトリック増幅過程を用いることで生成できる。パラメトリック増幅過程は、非線形光学結晶に異なる周波数の光が入射したときにそれらの間に相互作用が発生することを基本にしている。今回は周波数Ωで記述されるキャリア光とその２倍の周波数2Ωで記述される

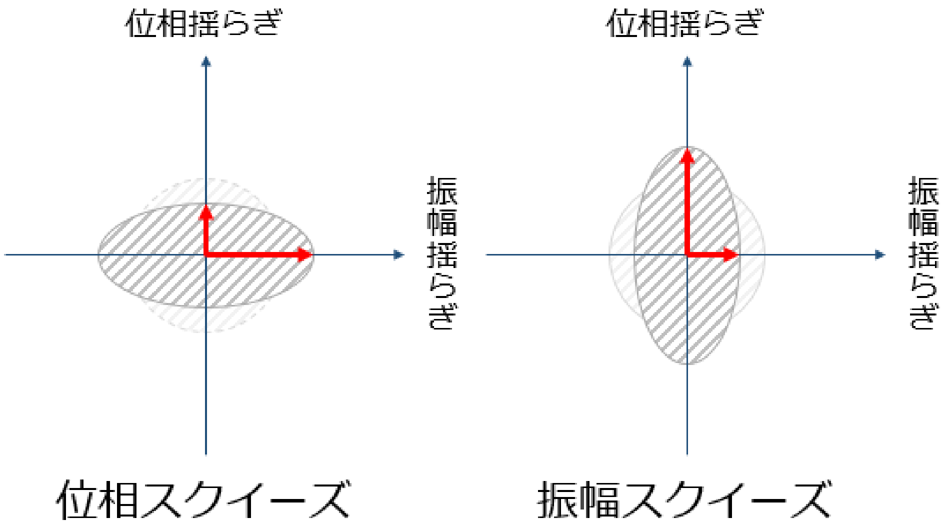

図3.3　スクイーズド状態における揺らぎ

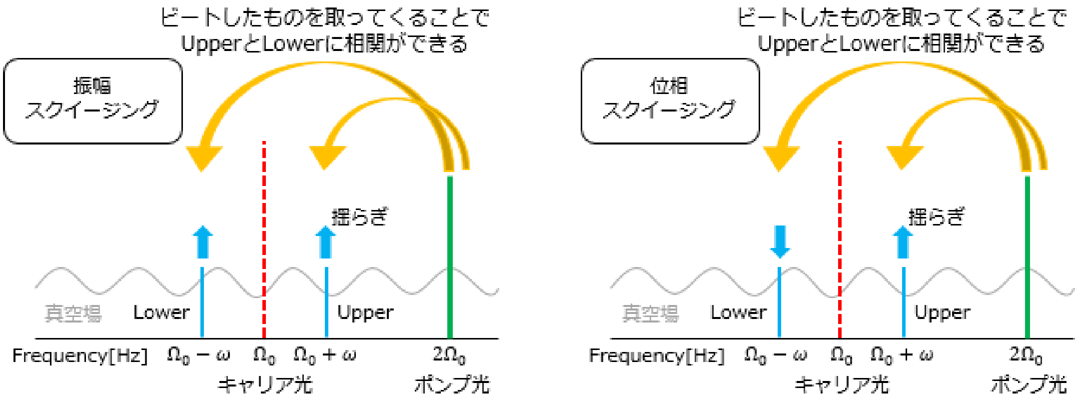

図3.4　スクイーズ光の生成

ポンプ光を非線形光学結晶に入射させることで、キャリア光とポンプ光のまわりの真空場がビートを取り、周波数が$\Omega+\omega$のUpperサイドバンドと$\Omega-\omega$のLowerサイドバンドとの間に相関を持たせる。

位相スクイーズをすると、UpperサイドバンドとLowerサイドバンドの振幅が逆符号で揺らぐように相関が働き、キャリアにとって真空場の振幅成分が減少し、位相成分が増加する。一方で、振幅スクイーズをすると、UpperサイドバンドとLowerサイドバンドが同符号で揺らぐように相関が働き、キャリア光にとって真空場の位相成分が減少し、振幅成分が増加する。このようにしてスクイーズ光は生成される。なお、非線形光学結晶を用いてスクイーズ光を生成する装置のことをOPO(Optical Parametric Oscillator)という。また、ポンプ光はキャリア光を非線形光学結晶に入射することで生成できる。このポンプ光を生成する装置のことをSHG(Second Harmonic Generator)という。

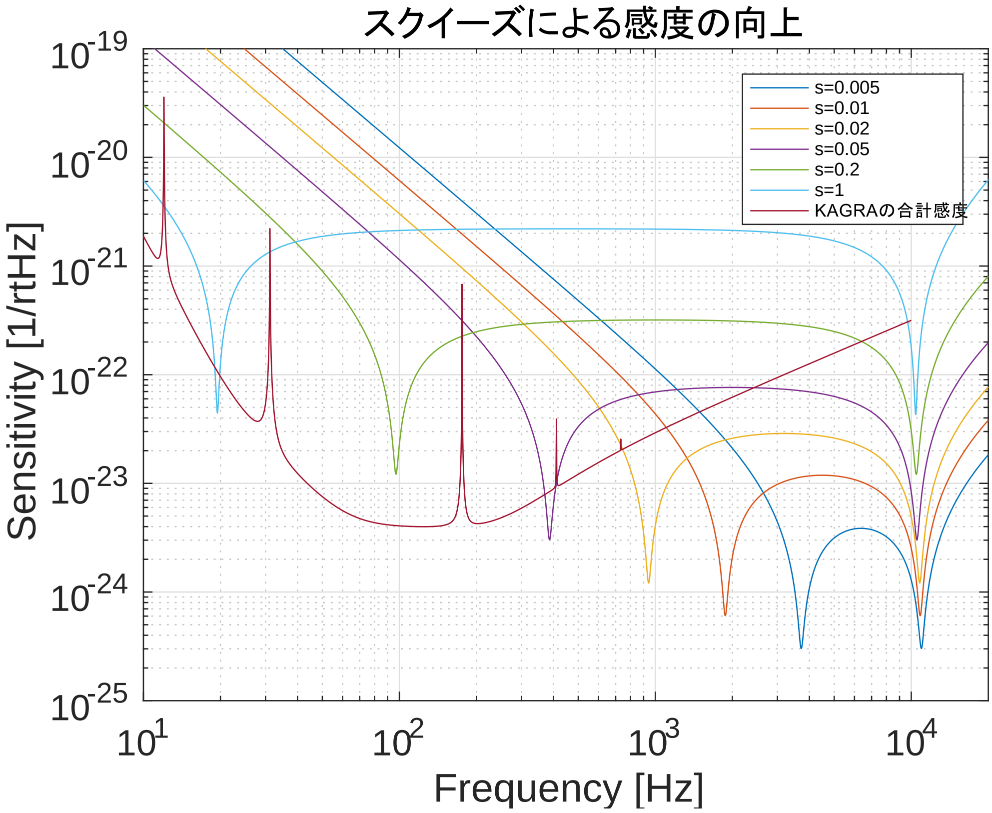

図3.5　OPOのゲインを変化させたときの干渉計の感度の変化

3.4　光ばねとスクイーズによる感度の向上

前節のように、位相スクイーズすることでキャリア光にとって真空場の位相成分を減らすことができる。しかし、位相スクイーズをしても量子雑音を減らすことはできない。最もスクイーズが効果を発揮するのは光ばねと振幅スクイーズを組み合わせたときである。具体的には、SRMと干渉計との間にOPOを組み込み、振幅スクイーズすることで重力波の感度を高周波数側にシフトすることができる。SRMを組み込んだMichelson干渉計のダークポートにOPOを入れたとき、光ばねの共振周波数$\Omega_{光ばね}$は以下のようにかける：

$$\Omega_{光ばね} \propto \sqrt{\frac{s \times \sin 2\phi}{\left(r+\frac{1}{r}\right)-\left(s+\frac{1}{s}\right)\cos 2\phi}} \tag{3.4.1}$$

ここで、s, r, ϕはそれぞれOPOのゲイン、SRMの反射率、SRMのデチューン位相である。このように、OPOを入れたときの光ばねの共振周波数はOPOのゲインを変化させることで調整できる。そこで、OPOのゲインを変化させたときの干渉計の感度の変化は図3.5のようになる。比較のためにKAGRAの最終感度も一緒に載せておく。

なお、共振器内に貯められた光の強度を10kW、テストマス(重力波の影響を受けるように懸架されたミラー)の重さを0.5g、SRMの反射率を0.995として計算している。

OPOによってスクイーズされた干渉計の感度を見るとわかるように、それぞれ２つのディップがある

ことが分かる。より低い周波数に存在するディップはOPOのゲインとともに変化していることから分かるように、光ばねの共振周波数である。一方、より高い周波数に存在するディップはSRC(Signal Recycling Cavity)で共振する光の共振周波数である。

このようにOPOのゲインを調整することにより光ばねの共振周波数を高周波数側にシフトすることができ、KAGRAの最終感度よりも高周波数帯域においてより良い感度を実現できることが分かる。また、観測したい重力波の周波数に合わせてOPOのゲインを調整することで、様々な周波数帯域での重力波観測が可能になるという汎用性を持つ。

第4章

実験の理論背景

前章までは重力波検出に欠かせない知識及び技術について紹介した。この章では、光ばね実験における懸架系の開発に必要な理論を述べる。

なお、懸架系の開発の際には、西オーストラリア大学(The University of Western Australia)のJohn Winterflood氏に教授いただき、懸架系の考案をしていただいた。巻末の謝辞でも述べるが、同氏には感謝してもしきれない。

4.1　光ばね実験

懸架系の開発について述べる前に、光ばね実験におけるどの部分の懸架系の開発を行ったかについて述べる。

光ばね実験の光学系は図4.1に示されたようになっている。基本的な構成はSRを取り入れたMichelson干渉計である。これはドイツにあるレーザー干渉計型重力波検出器GEOに取り入れる可能性のあるもので、日本のKAGRAとは異なりFabry-Perot共振器を使っていない。Fabry-Perot共振器は実効的な光路長を伸ばすために取り入れるものであったが、この光学系ではその代わりにy方向の腕に折り返しミラーがあり、実効的な光路長を延ばしている。今回私が開発した懸架系は図4.1における点線で囲まれたミラーの部分である。このミラーが重力波の影響を受けて変位することで、y方向の腕の長さが変わり、x, y方向から来た光の干渉光のが変化する。この干渉光の変化を検出することによって重力波の検出を行う。このように今回開発する懸架系は重力波の影響を直接受ける部分なので非常に重要な役割を持っている。

また、スクイーズするためにSRMと干渉計との間にOPOをいれる。レーザーと干渉計との間にBSをいれ、キャリア光をSHGに入射することでOPOに入射させるポンプ光を生成している。

4.2　一般的な振り子の伝達関数

今回開発する懸架系は基本的には振り子の原理を用いている。そこで今節では一般的な振り子の振る舞いについて述べる。

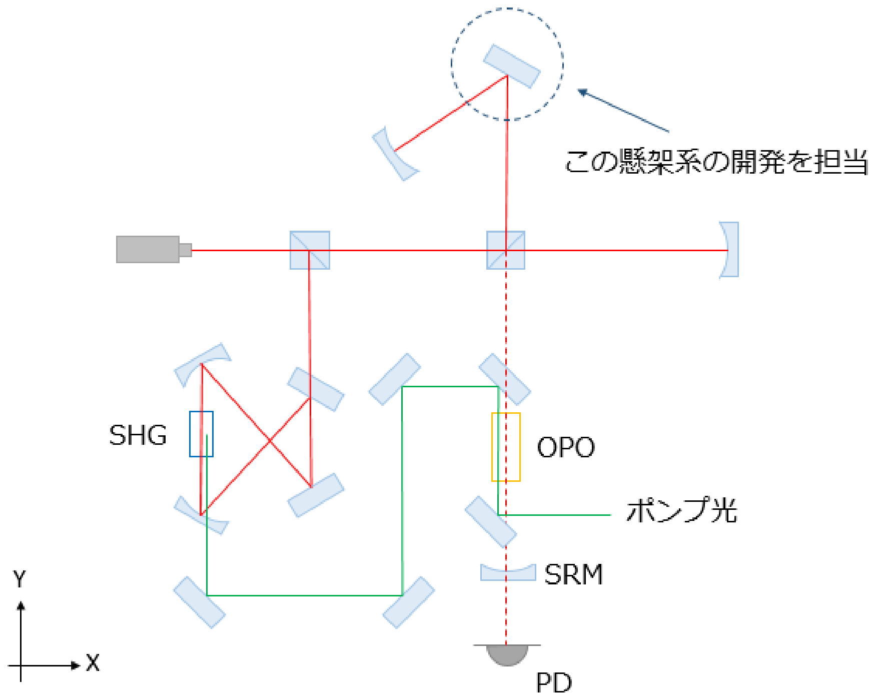

図4.1　光ばね実験の光学系

そもそも物体の運動は６つの次元がある。しかし、今回の懸架系で重要になってくるのはそのうち３つの自由度であり、それぞれ図4.2に示したとおりである。まず、説明のため図4.2で示されたようなX, Y, Z軸を取る。このときX軸方向の周期的運動はLongitudinal方向の運動、Z軸まわりの周期的回転運動をYaw方向の運動、Y軸周りの周期的回転運動をPitch方向の運動という。以下で、それぞれの自由度がどういった条件を満たせば良いかを明確にするため、振り子の伝達関数について説明する。

伝達関数について説明を簡単にするため、単一の振り子のLongitudenal方向について考える。伝達関数とは図4.3のように、振り子の端点(ワイヤー等)を$X_1(\omega)$だけ動かしたときに懸架されたミラーの変位を$X_2(\omega)$としたときの$|X_2(\omega)/X_1(\omega)|$のことである。

いま、ミラーの重さをm、重力加速度をg、振り子の傾き角をθ、振り子の長さをlとすると、ミラーの運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_2(t) &= -mg\theta \\ &= -\frac{mg}{l}(X_2(t) - X_1(t)) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

ただし、時間微分をドットで表した。また、振り子の傾き角θを十分小さい、ミラーの大きさを十分小さいとした。この式を式(2.3.1)と同様にFourier変換すると

$$-\omega^2 mX_2(\omega) = -\frac{mg}{l}(X_2(\omega) - X_1(\omega)) \tag{4.2.2}$$

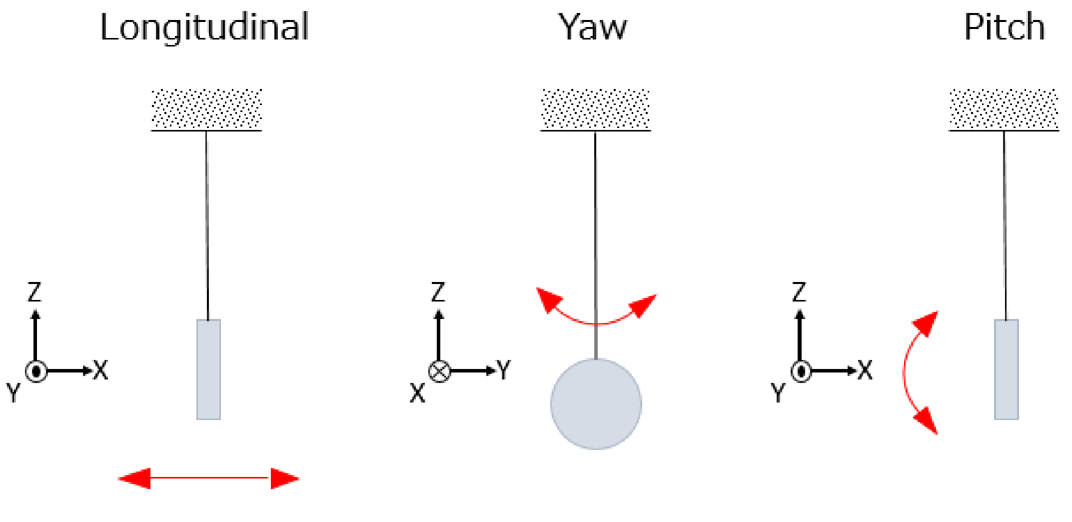

図4.2　振り子における重要な３つの自由度

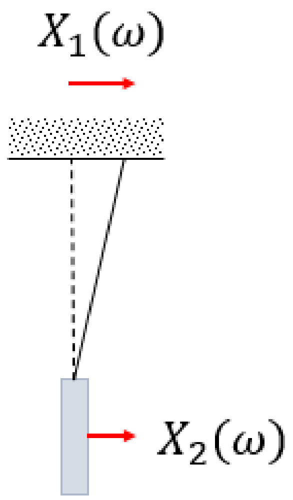

図4.3　Longitudenal方向の伝達関数

となる。ここで、Fourier変換の性質：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\dot{x}(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \left[x(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= i\omega x(\omega)
\end{aligned}
\tag{4.2.3}
$$

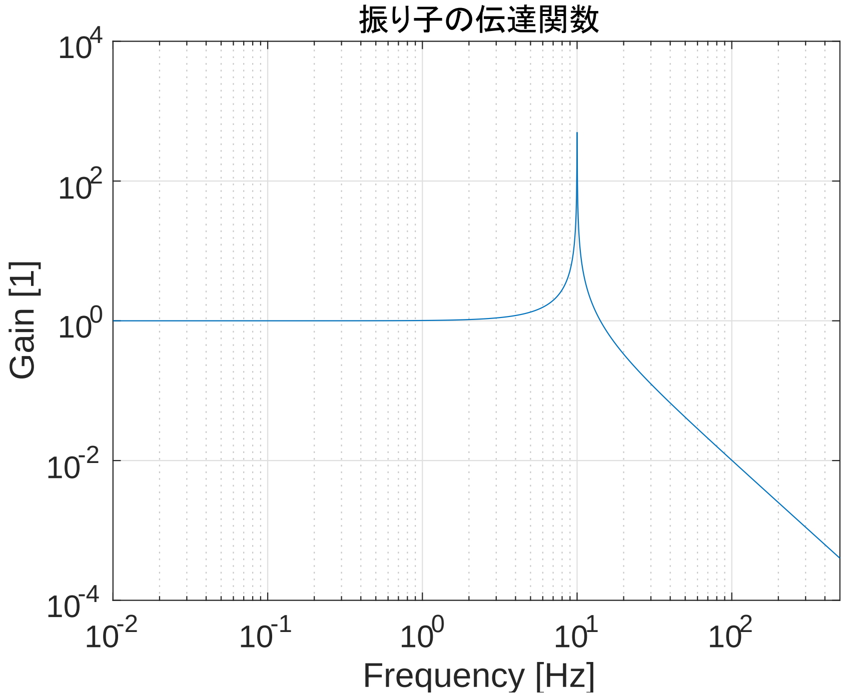

図4.4　振り子における変位から変位の伝達関数のグラフ

を用いている。共振角周波数ω_0を用いると伝達関数は

$$\left|\frac{X_2(\omega)}{X_1(\omega)}\right| = \left|\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right| \tag{4.2.4}$$

$$\omega_0 = \frac{g}{l} \tag{4.2.5}$$

と表せる。この伝達関数を横軸周波数、縦軸ゲインにとったグラフが図4.4である。なお、共振周波数$f_0 = \omega_0/2\pi$を10Hzに設定して描いた。共振周波数f_0より低い周波数帯域においては、式(4.2.4)右辺の分母でω_0^2が支配的になるため図のようにゲインはほぼ1である。一方、共振周波数f_0より高い周波数帯域においては、式(4.2.4)右辺の分母でω^2が支配的にになるため図のようにゲインは周波数fの2乗で下がっていく。このグラフは変位から変位の伝達関数である。これを力から変位の伝達関数に直すと図4.5のようになる。図4.5を見ると、振り子の共振周波数より低い周波数帯域の外力は低減され、共振周波数より高い周波数帯域の外力はそのまま伝達することが分かる。

また、今回は省略するが、YawとPitchについても同様の伝達関数が得られる。以上のことから今回開発する懸架系は以下の条件を満たす必要があることが分かる。

- Longitudinalの共振周波数が光ばねの共振周波数よりも低い。
- YawとPitchの共振周波数がそれなりに高い(数十Hzであれば十分)。

まず、１つ目の条件は、光ばねによる効果を低減させたくないからである。光ばねの共振周波数がLongitudinalの共振周波数よりも低いと、図4.5のグラフを見ればわかるとおり、周波数fの２乗に比例して

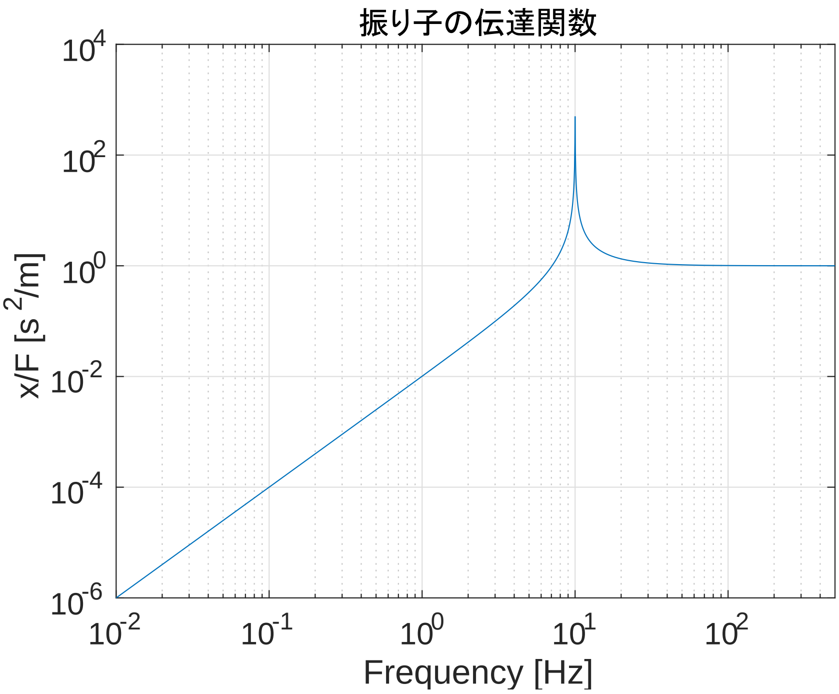

図4.5　振り子における力から変位の伝達関数のグラフ

光ばねによる復元力が低減してしまう。

２つ目の条件は、YawとPitchの共振周波数が十分に低くなければ地面振動などの低周波数の外力による影響を受けやすくなってしまう。懸架されたミラーがYawやPitchの方向に不安定だと、この懸架系に吊るされたミラーは光ばね実験では折り返しミラーとしても使用されているため揺れてしまい、上手く干渉光を検出できなくなってしまう。そのため二つ目の条件も重要である。

4.3　懸架における問題点

実際の重力波検出器では100Wほどのハイパワーレーザーが使用される(KAGRAにおいてはサファイア製のミラーを冷却しなければならないので100W弱ほどのレーザーが使用されている)が、東工大で行うプロトタイプ実験ではそのようなハイパワーレーザーを用いることはできない。するとミラーにかかる輻射圧の影響は小さくなってしまうが、代わりに用いるミラーを小さくすることで実際の検出器と同じ輻射圧による影響を実現させている。実際に本実験で用いたミラーは重さ0.2g、直径6mmのものである。しかし、ミラーを小さくするとその分懸架も難しくなってしまう。例えば懸架系とミラーを接続する際の動作がどうしても緻密なものになってしまうために、大きなミラーを使用する場合と比較して相対的な誤差が大きく出てしまう。また、YawとPitchの制御が難しくなったり、理想的なLongitudinal方向の振る舞いを達成するのも難しくなってしまう。

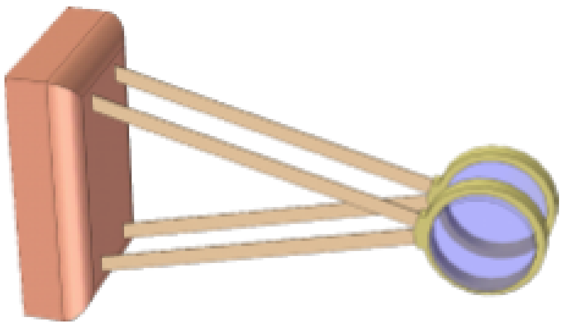

図4.6　懸架系その１

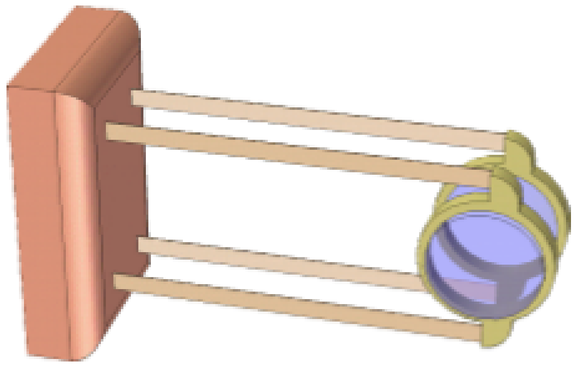

図4.7　懸架系その２

4.4　考案された懸架系その１

まず、はじめに考案された懸架系を図4.6、図4.7で示す。双方ともに板ばねの原理を用いている。

図4.6と図4.7で示された懸架系はLongitudinalの方向以外には固く設計できる。しかし、この２つの懸架系には問題点がある。これらの懸架系においてYawやPitchの固さを保持したまま、Longitudinalの共振周波数を十分に柔らかく(数Hz程度)にするためには板ばねの長さを極めて長くしなければならないのである。現状のプロトタイプ実験においては、全光学系を光学定盤上に置かなくてはいけないため、このようにスペースをとるような懸架系はプロトタイプ実験にはあまり適さない。逆に板ばねの大きさをコンパクトにしてしまうと、他の方向の固さが十分に保たれない。しかし、最も重大な問題は、板ばねが長くなることによってアライメントの難易度が上がることである。アライメントをとるために、図における懸架系を支えている赤色の四角い部分を動かして(ねじを回して)調整するわけだが、板ばねが長いと微調整が難しく、センタリングがずれてしまう。

このように実用的な面でこれらの懸架系は本開発に適さないため、また別の懸架系を開発しなければならない。

4.5　考案された懸架系その２

前節のように板ばねで懸架するためには板ばねの長さを十分に長くしなければならない。そこで、次に考案された懸架系は図4.8のような構造になっている。具体的な設計値は図4.9を示す。単位はすべてmmである。

図4.8は前節で紹介した懸架系を応用したものである。問題となっていた板ばねの長さであるが、板ばねを巻いたような形にしたことによりコンパクトな空間でも十分な長さを実現することができるようになった。また、YawとPitchの方向に対して対称な設計になっているため、それぞれの共振周波数は一致するはずである。この懸架系の全体の大きさは1インチ用のミラーマウントにはめ込むために直径25.4mmになっ

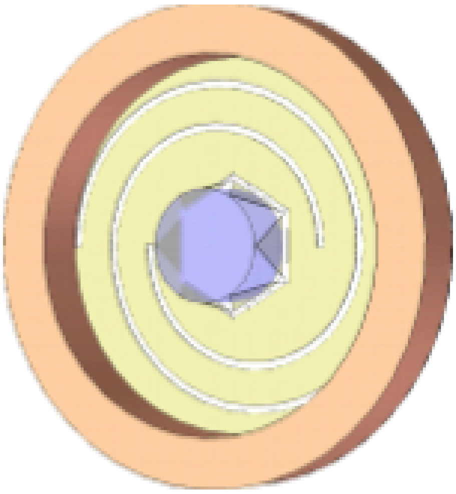

図4.8　懸架系その３

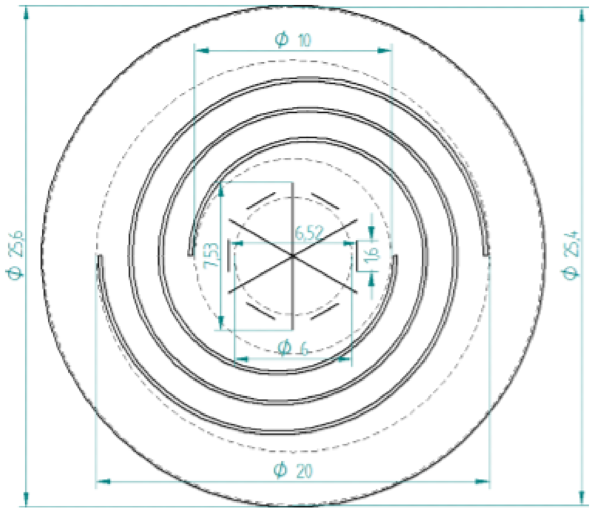

図4.9　具体的な設計値

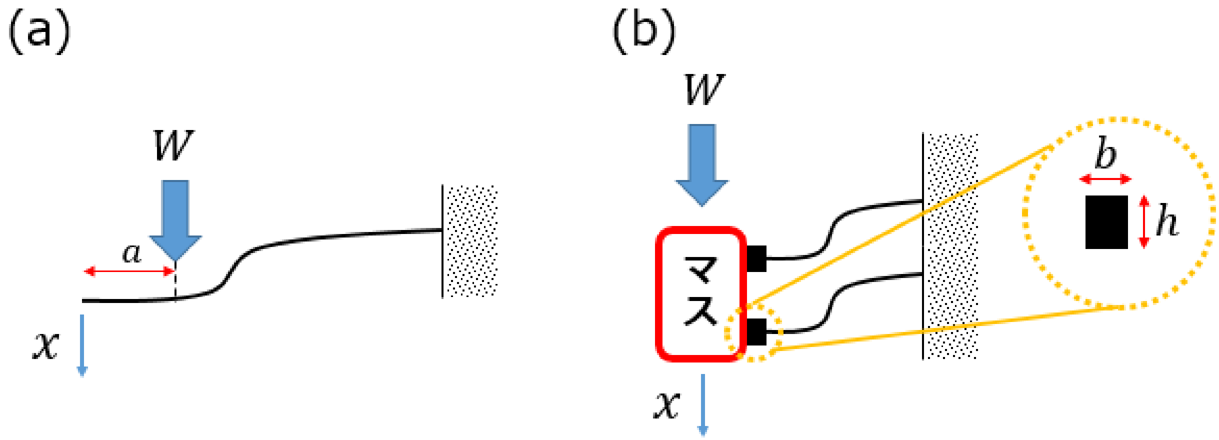

図4.10　Roark's Formulaの適用

ている。また、懸架系の中央部にミラーをはめ込むことで支える設計になっているため、ミラーの大きさに合わせて設計している。実際にはミラーを安定に固定したいため、この懸架系をミラーの表と裏から１つずつはめ込むことにした。本研究ではこの懸架系の開発及び性能評価をすることにした。

4.6　Longitudinal方向の共振周波数の理論計算

今節ではLongitudinal方向の共振周波数の理論計算を行う。

まず、図4.10(a)のように壁に右端が固定されている板ばねを考える。なお、左端はばねがLongitudinalの方向のみにしか変位しないように制御されている。今、板ばねの左端からaの距離のところに力Wを与えたときの左端の変位がxであったとする。参考文献[5]によると、Roark's Formulaよりxは以下のように表

される：

$$x = \frac{W}{12EI}(l-a)^2(l+2a) \tag{4.6.1}$$

ここで、E, I, lはそれぞれ板ばねのヤング率、断面二次モーメント、板ばねの長さである。

次に、このRoark's Formulaを開発する懸架系に適用すると、図4.20(b)のような設定を考えればよい。このとき、$a = 0$である。また、板ばねとマス(今回の場合はミラー)の接続部(今回の場合は中央の正三角形が６つあるところ)の各方向の厚みは図の通りb, hである。すると、式(4.6.1)における断面二次モーメントIは次のように書ける：

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{4.6.2}$$

すると、式(4.6.1)、式(4.6.2)から、板ばねのばね定数kは

$$\begin{aligned} k &= \frac{W}{x} = \frac{12EI}{l^3} \\ &= Eb\frac{h^3}{l^3} \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

と求まる。ここで、開発する懸架系においては表と裏に２つずつサイクルしたばねが取り付けられているので、実際には式(4.6.3)で求めたばね定数の４倍である。よって、開発する懸架系のLongitudinal方向の共振周波数f_{sus}は

$$\begin{aligned} f_{sus} &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}} \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{Ebh^3}{ml^3}} \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

と求まる。ここで、mはマスの質量である。具体的な値については次節で述べる。

4.7　素材の選定・製作方法

前節で紹介した懸架系を作る際の素材選定・製作方法について以下で述べる。

まず、素材として最初に選択したのがアルミホイルである。選んだ理由として、アルミホイルの厚さが10μm程と薄く、さらに簡単に購入することができるからである。強度がどれくらいなものなのか不確かであったために大量生産しなければならず、その点で簡単に購入できるというのは非常に重要なメリットである。しかし、アルミホイルには様々な問題点があった。１つ目は、図4.9のような形にアルミホイルを切り出す際に精密な下書きが必要なわけだが、その手段がなかったことである。コピー機を用いてアルミホイルの上に下書きをしようと試みたが、コピー機がアルミホイルを印刷用紙と認識せずコピーができなかった。２つ目は、アルミホイルを精密に切り出す手段がなかったことである。人間の手による切断ではどうしても精密に切り出すことができなかった。

次に素材として選択したのがOHPシートである。このOHPシートは100μm程の厚さで、アルミホイル程とはいかないが十分薄い。さらに、大学生協に販売されており簡単に購入することができる。このOHP

図4.11　懸架系の完成品

シートには精密な切断方法があったため、今回開発する懸架系の素材として決定した。

さて、OHPシートを用いた懸架系の製作方法について述べる。切断には東工大内にあるものつくりセンターのレーザー加工機を用いた。このレーザー加工機は、まず切断パスをAdobe社のIllustratorを用いて描画し、そのデータをレーザー加工機付属のPCから遠隔で切断することができる。アルミホイルの場合はレーザー加工機では切断できないため、この点でOHPシートがアルミホイルよりも優れているわけである。こうして切断された2つのOHPシート製のサイクルしたばねをただミラーマウントに入れるだけではうまく固定できない。そこで、アクリル製のリング3つ作成し、そのリングでサイクルしたばねを挟み込むことでうまく固定できるようになる。図4.11は完成品である。

式(4.6.4)に実際の値を代入して、Longitudinal方向の共振周波数を見積もる。各値を$E = 0.5 \times 10^9$Pa$, b = 1.13 \times 10^{-3}m, h = 0.1 \times 10^{-3}m, l = \pi \times 17 \times 10^{-3}m, m = 0.2 \times 10^{-3}$kgとして代入すると、$f_{sus} \sim 1.4$Hzとなり、理論的には理想的な値となった。

次章では、この懸架系の実際の共振周波数を求めるために行った様々な実験の結果とその考察について述べる。

第5章

実験結果と考察

この章では、今回開発したサイクルばねを用いた懸架系の共振周波数を求めるために行った実験結果とその考察について述べる。

5.1　光てことQPD

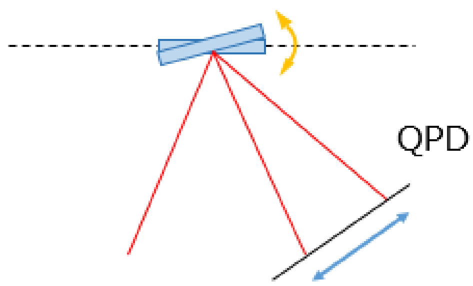

図5.1　光てこの原理

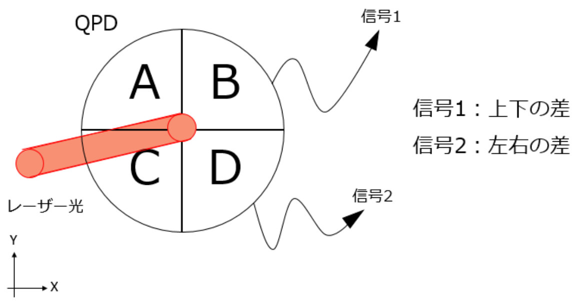

図5.2　QPDの原理

YawやPitchの運動を観察したいとき、光てこの原理を利用してQPD(４分割フォトディテクタ)で測定することが多い。図5.1、図5.2はそれぞれ光てこの原理、QPDの原理を表した図である。図5.1においてミラーがYawあるいはPitch方向に回転したとき、そのミラーによって反射した光の出射方向が変化する。この構造がてこの原理類似していることから、光てこと呼ばれる。図5.2で表されるQPDは、A,B,C,Dで表される４つの部分がそれぞれフォトディテクタの役割をしており、$(A+B)-(C+D)$と$(A+C)-(B+D)$の２つの信号を出力する。このQPDを用いれば、YawやPitch方向の変位による光てこの変位を各部分に入射する光の強度変化として出力することができ、YawやPitchの共振周波数を測定することができる。

5.2　QPDのキャリブレーション

共振周波数の測定に入る前に、QPD上での変位と出力電圧のキャリブレーションを行う。キャリブレーションを行うことで、懸架系が実験の際どの程度変位しているかを見積もることができる。実験系の実際

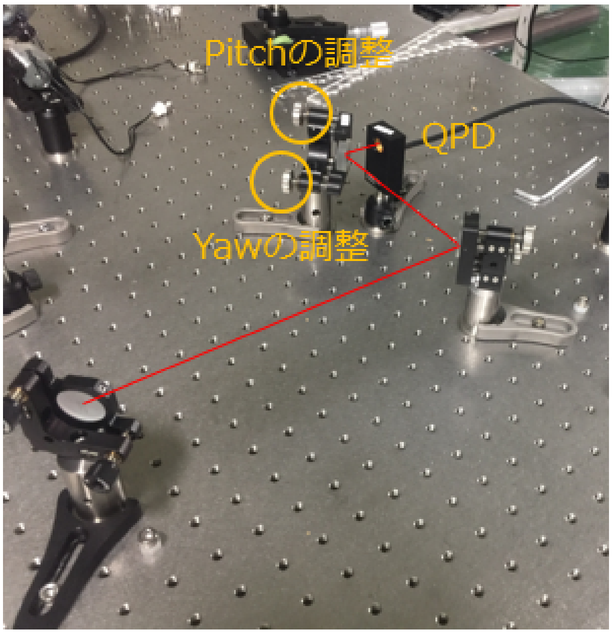

図5.3　QPDキャリブレーションの実験系

の写真を図5.3で示す。QPD手前のミラーのねじで調整することでQPD上で変位を生じさせ、そのときの出力電圧を測定する。今回用いた調整用のミラーマウントはThorlabs社のkm100であり、仕様書によるとねじを１回転させるとミラーは8mrad回転するようになっている。ミラーマウントを回転させる角度がϕ、調整用ミラーとQPDとの距離がLのとき、QPD上での変位は$2L\sin\phi$とかける。今回はねじを0.1回転ずつ、$L = 25$mmとして測定した。その結果を図5.14に示す。測定値の中央値まわりに重みをつけてフィッティングした結果が赤線である。フィッティング関数は

$$V = 5150.9x + 0.0025 \tag{5.2.1}$$

であった。つまり、QPDの出力電圧をQPD上の変位に変えたい場合は5150.9[V/m]という値を用いればよい。また、この線形性が保たれる範囲は図5.4の通り、$1\mathrm{V_{p-p}}$と分かる。そのため、QPDを用いた実験では出力された波形がこの線形性が保たれる範囲にあることを確かめる必要がある。実際に本研究でQPDを用いて行った実験は全てこの範囲内に収まっていたので問題はなかった。

5.3　QPDとSpectrum Analyzerを用いた共振周波数の測定

5.1節で説明したQPDの２つの出力をSpectrum Analyzer(以下、スペアナと表記する)で高速フーリエ変換(FFT)することでスペクトルを測定した。図5.5がこの実験系を模した図である。また、実験結果を図5.6に示す。

この実験系においては、Longitudinal方向の共振周波数は図5.7の通りYaw方向の信号とカップリングして現れるはずである。このように、Yaw方向のスペクトルにはYawとLongitudinalが、Pitch方向にはPitch

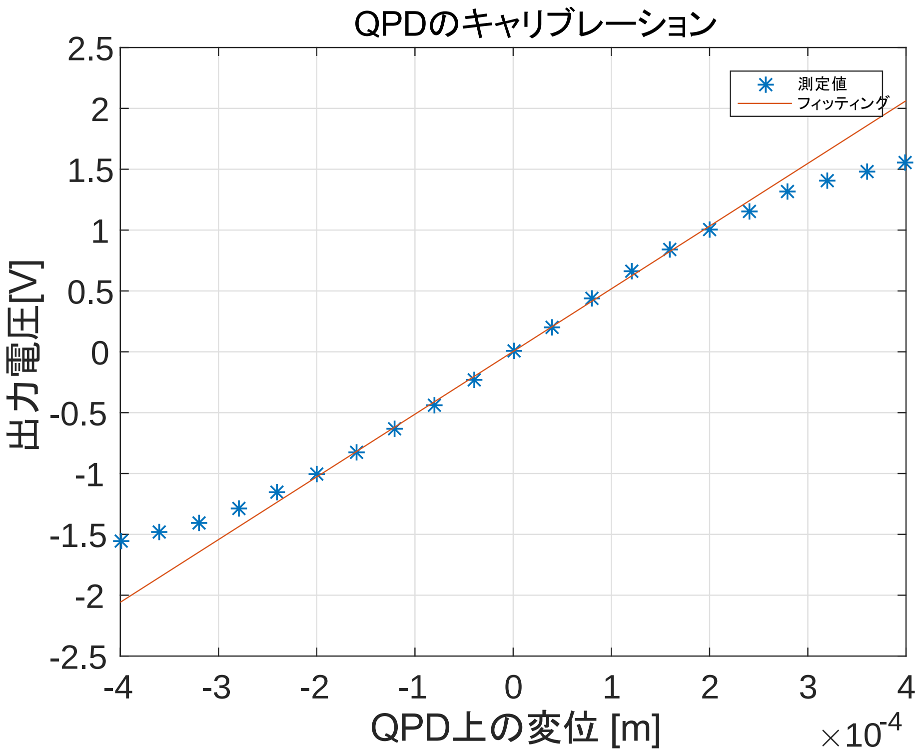

図5.4　QPDキャリブレーションの結果

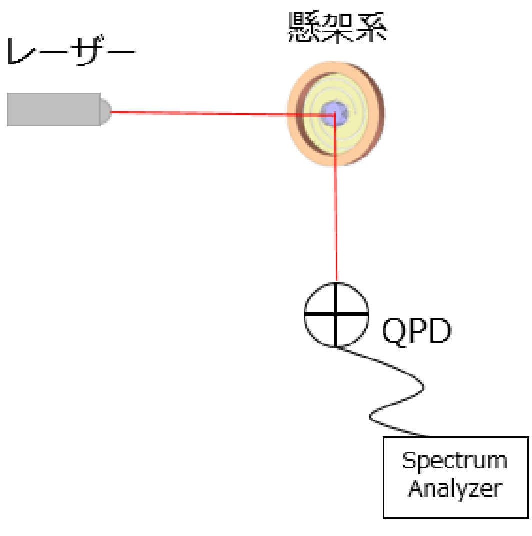

図5.5　QPDの２出力のスペクトルを測定する実験

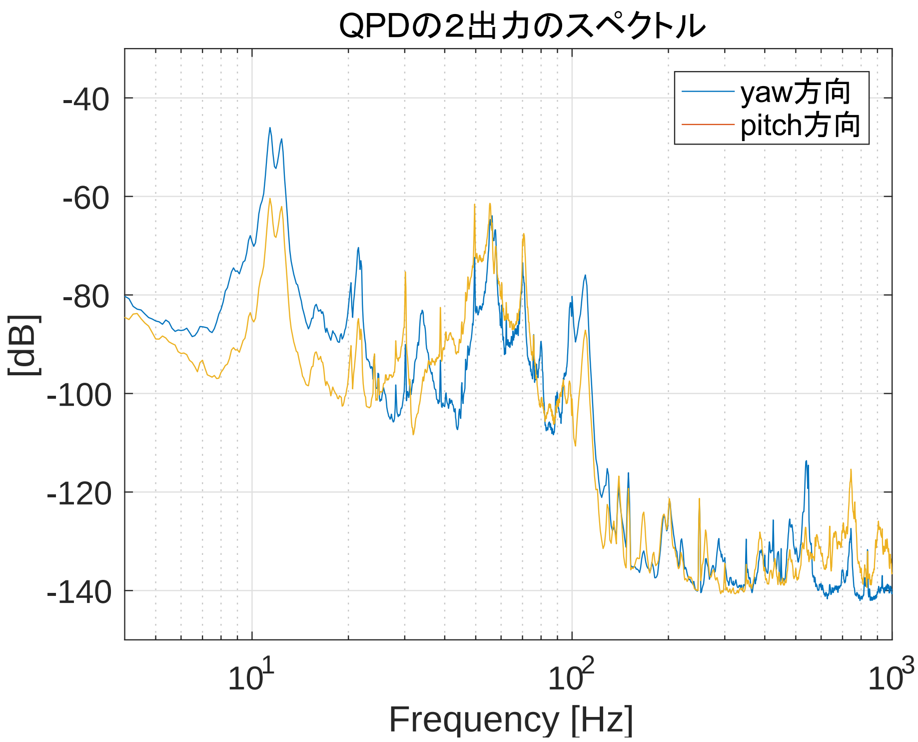

図5.6　QPDの２出力のスペクトル

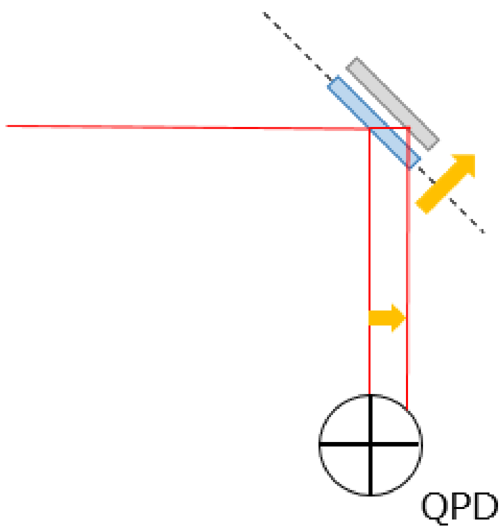

図5.7　Longutudinalの変位によるYaw方向とのカップリング

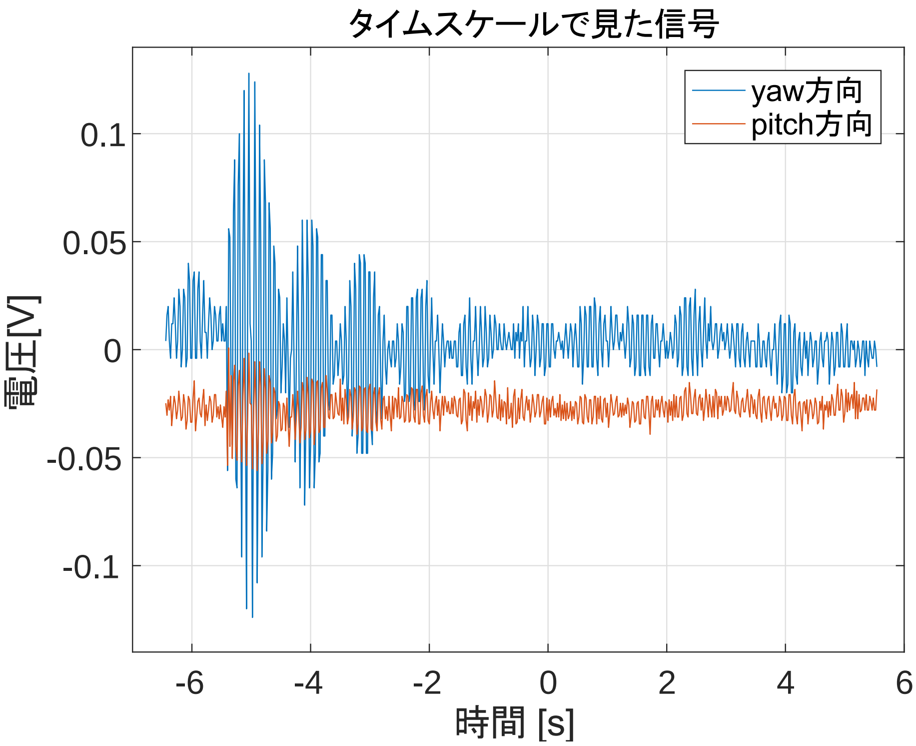

図5.8　タイムスケールで見た信号

のみが現れるはずであるが、図5.6の通り２つのスペクトルに大差がない。このことは、懸架系に支えられたミラーがまっすぐ取り付けることができておらず、Pitch方向にもLongitudinalの変位がカップリングしてしまっていることが原因であると考えられる。また、理論値とされる1.4Hz付近は地面振動による雑音と思しき雑音によって見えなくなっている。顕著なピークとしては11Hz付近のもの、数十Hz帯にあるもの、数百 Hz帯にあるものであり、数百Hz帯にあるものはミラーマウント自体の共振周波数であると考えられる。また、振り子の伝達関数を考えると10Hzのピークから周波数の２乗で下がっているはずだが、数十Hzのピークに隠れて見えていない。このように、この実験だけではどのピークがどの自由度の共振ピークのものであるかがわからなかったため、また別の手法を用いた実験が必要となった。

5.4　QPDとオシロスコープを用いた共振周波数の測定

まず、前節の実験系のアライメントを崩さないまま、スペアナをオシロスコープに変えてタイムスケールで測定した。外部から何も力を加えないと直流成分しかみえないため、開発した懸架系のミラーマウントを軽く叩きながら測定した。その結果が図5.8である。

この結果を見るに、yaw方向で顕著に現れていて、Pitch方向では少ししか見えていいない10Hz程度の周波数がLongitudinalの共振周波数と推測できる。また、1Hz以下の周期振動も見えており、この振動がLongitudinalの振動である可能性がある。そこで、具体的なパラメータを決定するためにYaw方向のデータをフィッティングした。そして、その結果が図5.9である。

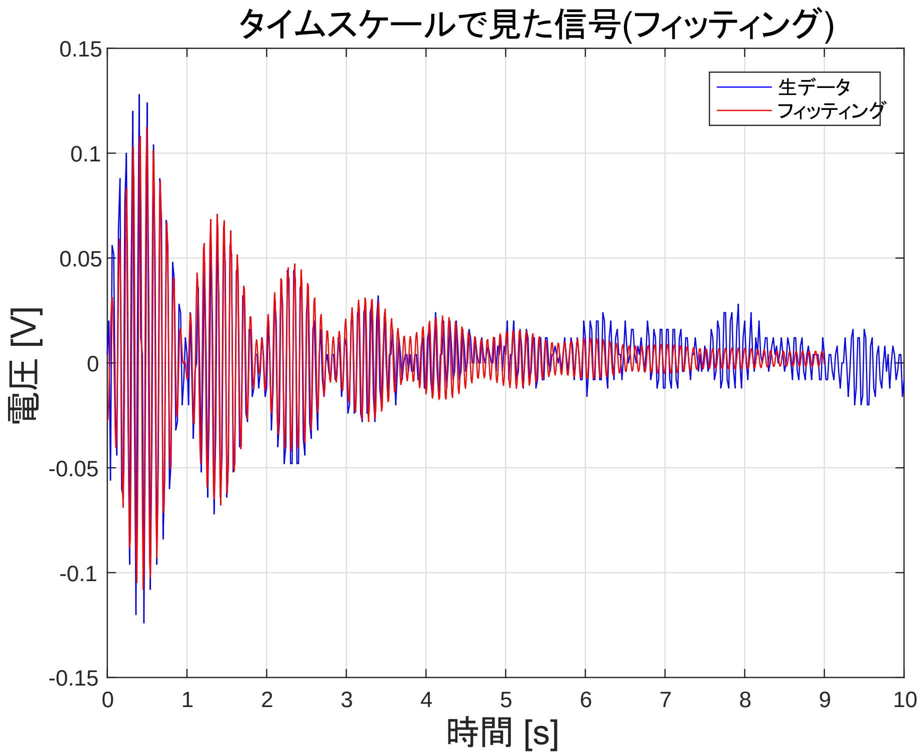

図5.9　タイムスケールで見た信号(フィッティング結果)

フィッティング関数を説明するために振動子の運動方程式を考える。mを質量、Fを外力として

$$m\ddot{x} + \Gamma_m \dot{x} + k_m x = F(t) \tag{5.4.1}$$

と書ける。ただし、Γ_mは振動子の速度に比例して働く減衰項の比例定数、k_mはばね定数である。ばね定数は振動子の共振角周波数ω_mを用いて

$$k_m = m\omega_m^2 \tag{5.4.2}$$

と表される。また、散逸γ_mを

$$\gamma_m \equiv \frac{\Gamma_m}{2m} \tag{5.4.3}$$

と定義すれば、Q値(Quality factor)Q_mが定義できる：

$$Q_m \equiv \frac{\omega_m}{2\gamma_m} \tag{5.4.4}$$

Q値は振動の状態を表す無次元量であり、Q値が高いほど振動の減衰具合が緩やかになるので振動が安定していることを表す。今、ミラーマウントを一瞬軽く叩いて外力を加えたため、式(5.4.1)において$F(t) = F\delta(t)$とできる。このとき式(5.4.1)の解は簡単に求められて

$$x(t) \propto \exp\left(-\frac{\omega_m t}{2Q_m}\right) \sin \omega_m t \tag{5.4.5}$$

となる。図5.8のように複数の共振周波数がみられる場合、力によって励起された振動の平衡状態に至るまでの変位は式(5.4.5)で表される解の線形和で書き下せる。そのためフィッティング関数は

$$x(t) = A_1 \exp\left(-\frac{\omega_1 t}{2Q_1}\right) \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \exp\left(-\frac{\omega_2 t}{2Q_2}\right) \sin(\omega_2 t + \phi_2) + B \tag{5.4.6}$$

と設定できる。なお、$A_1, A_2, \omega_1, \omega_2, Q_1, Q_2, \phi_1, \phi_2, B$はフィッティングパラメータである。

式(5.4.6)でフィッティングした結果は表5.1のようになった。これら２つの周波数は図5.6における２股

表5.1　フィッティング結果

A_1	0.057301	A_2	0.08551
f_1	12.39	f_2	11.32
Q_1	123.84	Q_2	53.623
ϕ_1	0.70815	ϕ_2	-2.2369
B	0.002006		

に分かれた共振ピークにそれぞれ一致した。図5.8で見える1Hz以下の周期運動と10Hz程度の周期運動はそれぞれ先の２つの周波数のビートである。この10Hz程度の周波数がLongitudinalの共振周波数だと断定できれば、数十Hzの共振ピークがYawやPitchの共振周波数だと断定できる。また、10Hzのピークが２股に分かれている理由について考える。ミラーを懸架系に取り付ける際に、懸架系でミラーを傷つけないように、かつ折れてミラーを懸架する力を失わないようにする必要がある。このような実用的な問題から表と裏のサイクルばねがミラーとの接触具合がそれぞれ異なってしまい、このことが原因だと推測される。

しかし、以上の結果ではこの10Hz程度のピークがLongitudinalのものだとは断定できなかった。

5.5　Longitudinalの影響の分離

前節の実験ではLongitudinalの周波数が断定できなかったため、Longitudinalの影響を分離する実験を行った。その実験系を図5.10に、実際の実験系の写真を図5.11で示す。図5.10で表されるように懸架系に２回光が反射する(ダブルパス)ように理想的な実験系を組むとLongitudinalの影響は分離できるはずである。というのも、懸架系がLongitudinal方向に変位しても光は入射したときと同じ道筋を辿るようになっているからである。一方、YawやPitch方向に回転するとQPD上で光が入射する場所が変わってくる。このようにして、QPDで取得される信号はYaw或いはPitchの影響のみに限られる。

外力を加えるために、今回もミラーマウントを一瞬軽く叩いて力を与えた。測定した結果は図5.12のようになった。また、前節と同様のフィッティング関数でフィッティングした結果を図5.13に示す。 図5.12を見ると、Yaw方向とPitch方向は同じ周波数で振動していることが分かる。しかし、Longitudinalの共振周波数と推測されていた10Hz程度の共振周波数が見えている。ここで、正確なパラメータを以下の表5.2に示す。この結果は、前節におけるミラーマウントを軽く叩いた時に励起された振動の周波数と同じ結果になった。この結果から以下の２つのことが考えられる。

１つ目は10Hz程度の振動はLongitudinal方向の共振周波数ではなく、Yaw方向やPitch方向の共振周波

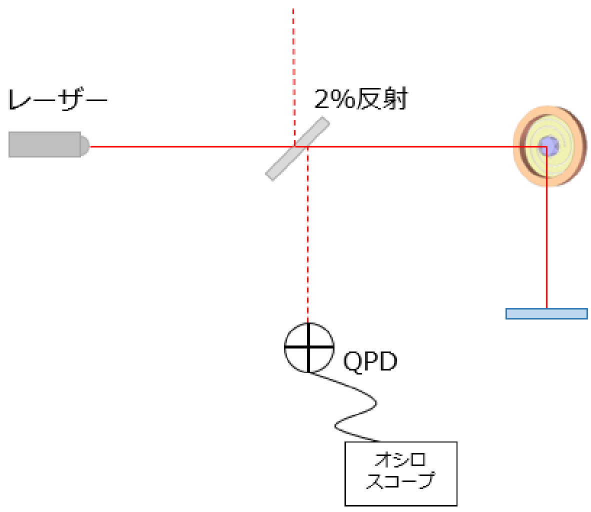

図5.10　Longitudinal分離実験の実験系

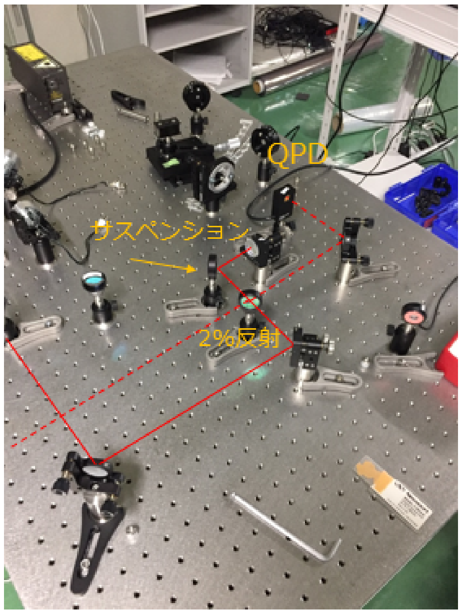

図5.11　Longitudinal分離実験の実験系(写真)

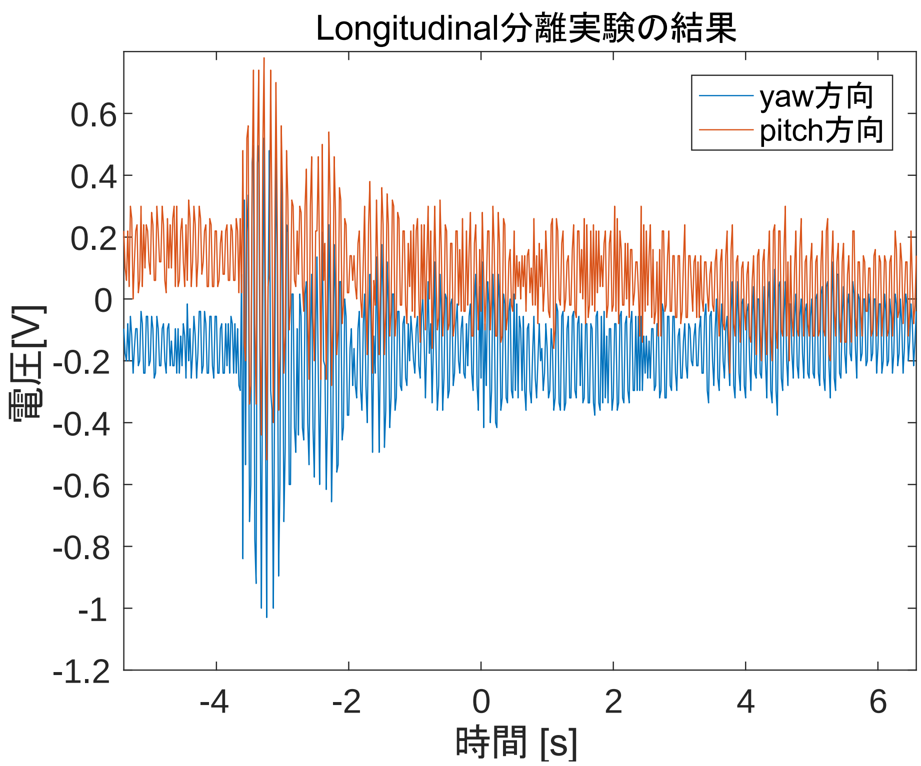

図5.12　Longitudinal分離実験の結果

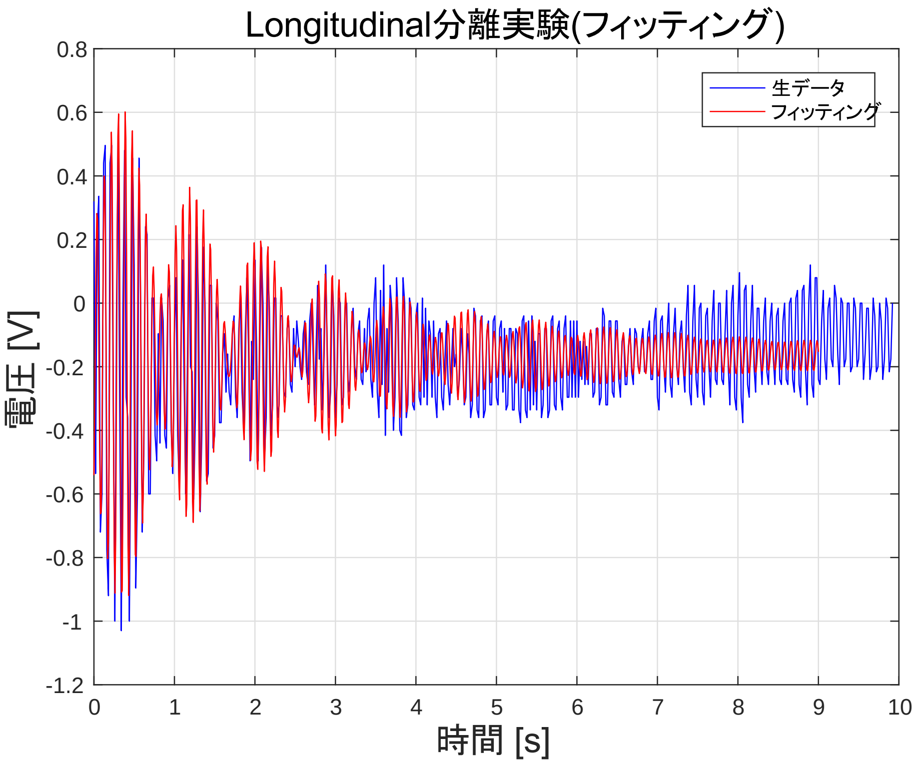

図5.13　Longitudinal実験の結果(フィッティング結果)

表5.2　フィッティング結果

A_1	-0.25863	A_2	-0.67602
f_1	12.45	f_2	11.28
Q_1	199.71	Q_2	60.146
ϕ_1	-0.65462	ϕ_2	2.2322
B	-0.016532		

数であるということである。この場合、Longitudinalの共振周波数は10Hz以下になるので、図5.6では低周波数帯の雑音に埋もれて見えなかったということになる。しかし、前節と今節の実験でミラーマウントに力を与えた時の懸架系の様子を見るに、1Hz程度の振動はしていないように感じられた。

２つ目は、折り返しミラーのミスアライメントによってLongitudinalが完全に分離できなかったことである。以下で幾何的に考察する。折り返しミラーがミスアライメントされていて入反射する光の入射角と反射角が$\phi/2$となっているときを考える。また、懸架系から折り返しミラーまでの距離をL_1、懸架系から２％反射ミラーまでの距離をL_2とする。ϕが十分小さいとすれば、懸架系におけるレーザー側から入射してきた光と折り返しミラー側から入射してきた光の反射点の差は$L_1\phi$とできる。すると２％反射ミラーにおける同様の２つの光の透過点・反射点の差は$(L_1+L_2)\phi$と計算できる。このようにして計算していくと結果

的にQPD上でも受光点が変化し、Longitudinalの影響が分離できなくなってしまう。完全なアライメントを達成するのは非常に難しいため、この原因の方がもっともらしく思われる。

このように、この実験には不確かさが残っており、各自由度の共振周波数は未だに断定できておらず、さらに別の手法での測定が必要となった。

また、式(5.2.1)の値を用いて、5.4節のミラーマウントに力を与えたときの懸架系の変位を見積もる。図5.9で表される波形はLongitudinalの波形かYawの波形か断定できていないため、双方の場合について考える。

まず、Longitudinalの波形であった場合を考える。Longitudinal方向の振幅がd、懸架系への入射角をθとしたとき、QPD上での変位は$2d\sin\theta$で与えられる。5.3節の実験では懸架系への入射角は$\theta = 45^\circ$であった。また、図5.7を見ると最大振幅は0.13[V]ほどである。以上から、Longitudinal方向の最大変位d_{max}は

$$d_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{0.13}{5150.9} \sim 18[\mu\mathrm{m}] \tag{5.5.1}$$

と求められる。用いているレーザーの波長は1064[nm]であるから、もしこの振動がLongitudinal方向の振動であるならば、17波長分変位していたことになる。

次に、Yawの場合についてQPDのキャリブレーションをしたときと同じ理論で考える。5.3節の実験では$L = 20\mathrm{cm}$であった。以上からYaw方向の最大回転角ϕ_{max}は

$$\phi_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{2 \times 0.4} \times \frac{0.13}{5150.9}\right) \sim 3.6[\mathrm{mrad}] \tag{5.5.2}$$

$$= 0.21[^\circ\ ] \tag{5.5.3}$$

と求められる。

5.6　Michelson干渉計のアナログ制御

QPDでの測定では完全にどの共振ピークがどの自由度のものなのかを断定することができなかった。そこで、Michelson干渉計を組み、片腕のエンドミラーとして開発した懸架系とミラーを設置する。QPDでの測定では懸架系に吊るされたミラーで反射した光を直接観測していたが、その手法ではミスアライメント等が原因で複数の自由度がカップリングしてしまうという問題点があった。一方、Michelson干渉計を組むことによって、YawやPitch方向の変位による測定値への影響は完全に除去され、Longitudinal方向の影響のみを取り出すことができる。Longitudinal方向に変位が生じると、PDにおける干渉光の光度が変化するため、その変化を測定することでLongitudinal方向の共振周波数がわかる。

懸架系に取り付けたミラーはしっかりと真っ直ぐになっていなかったため、折り返しミラーでレーザーを向きを調整する。両エンドからくる光がしっかり揃っていないとPDで干渉縞が生じてしまい、うまく測定することができなくなってしまう。

また、Michelson干渉計をミッドフリンジに制御するための系を図5.14に示す。図5.14のように干渉光を2

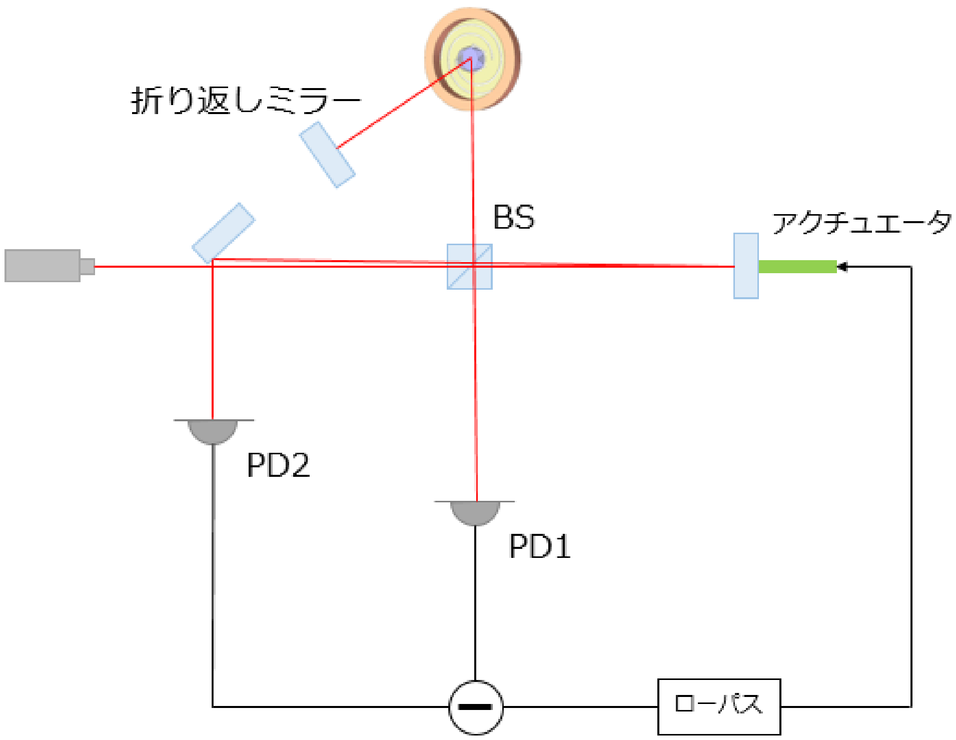

図5.14　Michelson干渉計のアナログ制御

つのポートから取り出す。PD 2 で取得される信号はPD 1 で取得される信号と位相がπずれた信号であり、これらの信号の差をとることで干渉計のエラー信号(オフセットからのずれを 2 倍したもの)が得られる。このエラー信号をローパスフィルタに通して片腕のエンドミラーに取り付けられたアクチュエータ(ピエゾ)に返すことで、アクチュエータがついたミラーがエラー信号の通りに腕の長さを変化させてミッドフリンジに制御することができる。このように制御されたMichelson干渉計を組んでエラー信号のスペクトルを見ることで開発した懸架系のLongitudinal方向の共振周波数を測定することができる。

このようなアナログ制御を試みたが、結果として制御することができなかった。原因については次節で考察する。

5.7　Michelson干渉系を用いた共振周波数の測定

前節のように、開発した懸架系を取り入れたMichelson干渉計をアナログ制御することはできなかった。そこで、アナログ制御をしないままMichelson干渉計の干渉光信号を測定した。その実験系を図5.15に示す。

実際にPDで取得したデータは図5.16のようになった。ここで、干渉計の具合を示すコントラストCは

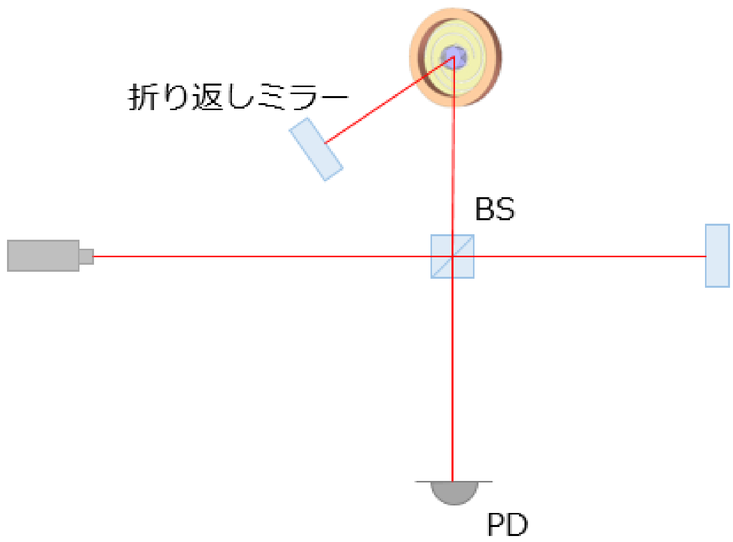

図5.15　制御されていないMichelson干渉計を用いた測定

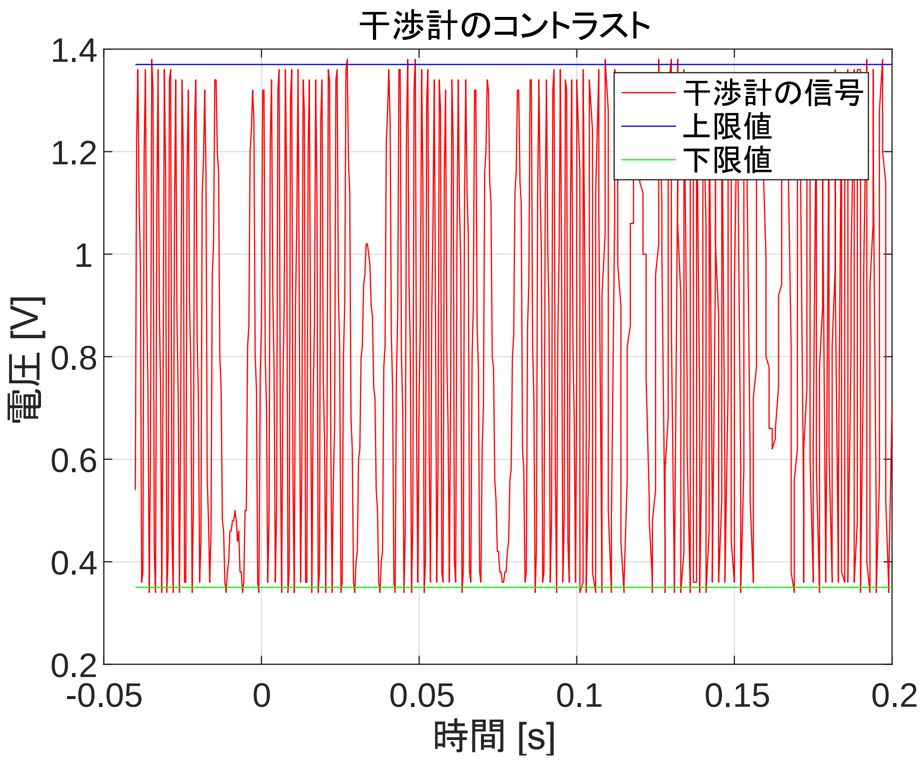

図5.16　Michelson干渉計の干渉光

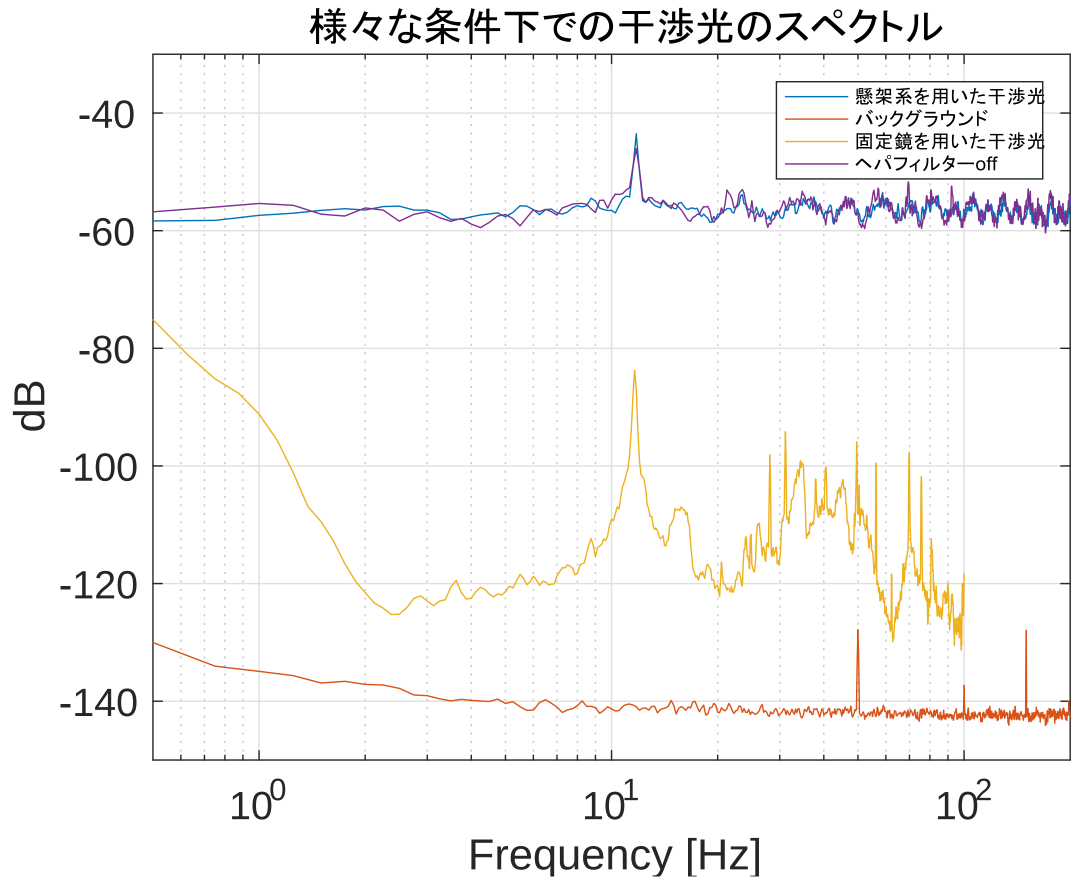

図5.17　様々な条件下での干渉光のスペクトル

$$C \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{5.7.1}$$
$$= \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}}$$
$$= \frac{1.36 - 0.35}{1.36 + 0.35} \sim 59\% \tag{5.7.2}$$

であった。添字のmax, minはそれぞれ上限値、下限値を表している。Iは光の強度である。図5.16において周波数に着目すると、200Hz程の振動の中に遅い振動が混ざっている。この周波数は、干渉計の腕の長さを完全に同じにできなかったことによるレーザーの周波数雑音であると考えられる。次に、振幅について着目すると、振幅も揺らいでいる。これはレーザーの強度雑音によるものだと考えられる。

この200Hz程度の振動がLongitudinal方向の振動によるものとは考えにくいので、次にPDからの信号をスペアナでFFTした。その結果を図5.17に示す。図5.17を見るに、制御していない状態でも共振周波数のピークが見られた。まず、、顕著なピークとして11.75Hzが挙げられる。この周波数はLongitusdinal方向の共振周波数として考えられていたものであった。この結果から、開発した懸架系のLongitudinal方向の共振周波数は11 ∼ 12Hzと考えて良さそうである。しかし、4.2節の図4.4のように共振周波数以下で周波数の２乗で下がるようなスペクトルは得られなかった。これは数十Hzの帯域に何らかの雑音があり、それに埋もれて見えなくなっているからであると推測できる。まず雑音源として考えたのが風や音などの外部から

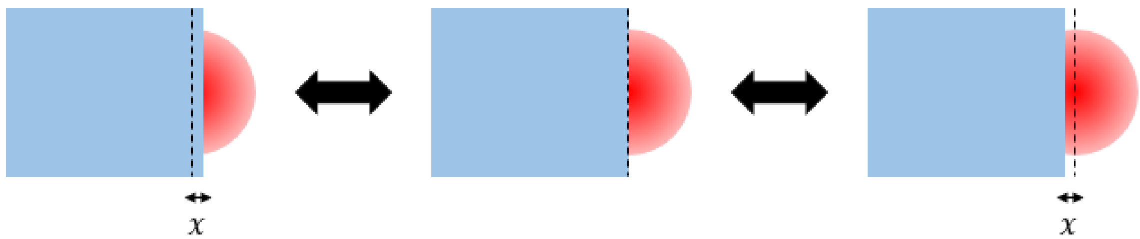

図5.18　シャドーセンサー法の原理

の励起である。そこで、実験室内のヘパフィルターや実験室外のエアコンの電源を落とし、風や音が出ない環境にして測定した。その結果が図5.17における紫色のスペクトルである。しかし、結果は先のものとあまり変わらなかったため、風や音が原因では無いとわかった。そこで考えられる原因が地面振動による雑音である。しかし、このMichelson干渉計をアナログ制御することができなかったために詳しい原因は明白にはできない。

Michelson干渉計を制御できなかった原因としては開発した懸架系のLongitudinal方向の変位がピエゾの可動域を超えたからである。図5.17の結果から、Longitudinal方向の共振周波数は11 ～ 12Hzであると考えられるが、一方で図5.16を見ると200Hz程の周波数が見えている。これは約5波長分の振幅内を11 ～ 12Hzの周波数で振動していることが原因であると考えられる。この5波長という長さがピエゾの可動域を超えてしまったがために、エラー信号にゲインをある程度与えても制御ができなかったわけである。

実際に、開発した懸架系が光ばね実験に搭載される場合は制御しなければならないため、搭載する際にはダンピングをしてLongitudinal方向の変位を抑える必要があることがわかった。

5.8　シャドーセンサー法による共振周波数の測定

10Hz程度の共振周波数がLongitudinalのものであることを確固たるものにするためにさらに他の手法で測定した。Longitudinal方向の変位が大きいときに有効な共振周波数の測定方法にシャドーセンサー法と言われるものがある。この実験原理を簡単に説明する。

懸架系にレーザー光を透過しないもの(本実験では紙)を取り付け、揺れていない状態でビームの半分が紙によって遮られるように懸架系を置く。すると、懸架系が振動したとき取り付けられた紙も合わせて振動し、紙によって遮られるビームの面積が変化する。その変化によるビームの強度変化を測定することによって、懸架系の共振周波数を測定できる。

ここで紙の変位によるビームの強度変化について考える。ガウシアンビームは位置に関する光子の存在確率がガウシアンで記述される。ガウシアンビームの強度をIとすると、図5.18のようにガウシアンビーム

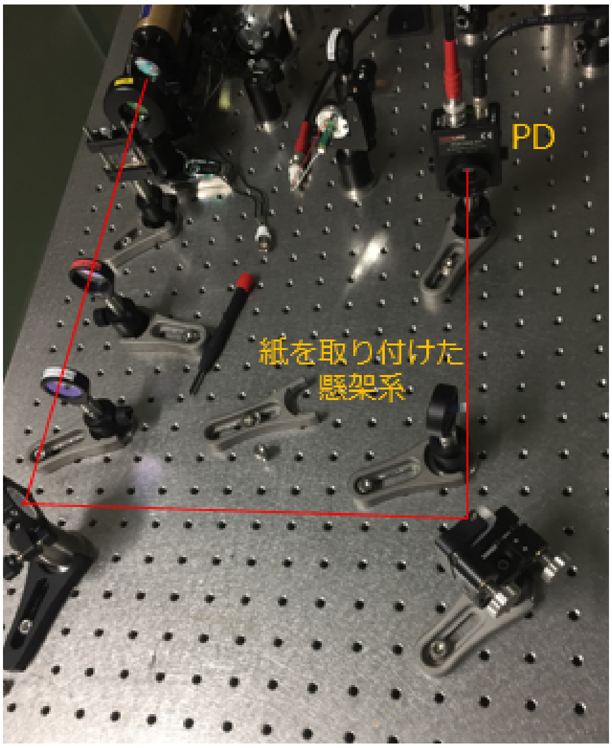

図5.19　シャドーセンサー法の実験系

の中心からxだけ紙が変位したとき、ビームの強度変化ΔIは誤差関数$erf(x)$を用いて

$$\Delta I = erf(x)I \tag{5.8.1}$$

となる。ここで誤差関数$erf(x)$は以下のように定義される：

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{5.8.2}$$

また、紙の変位xは時間の関数で式(5.4.5)のように表されるはずである。よって、シャドーセンサー法によってPDから得られる信号$V(t)$は

$$\begin{aligned} V(t) &\propto erf(x(t)) \\ &= Aerf\left(B\exp\left(-\frac{\omega_m}{2Q_m}t\right)\sin\omega_m t\right) \end{aligned} \tag{5.8.3}$$

とかける。ただし、A, Bは定数である。

実際の実験系を図5.19に示す。また、PDからの信号をスペアナでFFTした結果は図5.20のようになった。図5.20を見ると、Longitudinal方向の共振周波数と思しき11Hz程の共振周波数が二股に分かれて見られる。具体的な値はそれぞれ10.625Hz, 11.625Hzであった。また、20Hz台にある２つのピークは２次の共振であると考えられる。50Hzの小さいピークは電源による雑音で100Hzのピークはその倍波である。

PDからの信号をタイムスケールで見ると図5.21のようになった。また、この信号を式(5.8.3)をもとに以下の式でフィッティングした結果を図5.22に示す。

$$V(t) = Aerf\left(B\exp\left(-\frac{\omega_m}{2Q_m}t\right)\sin(\omega_m t + \phi)\right) + V_{offset} \tag{5.8.4}$$

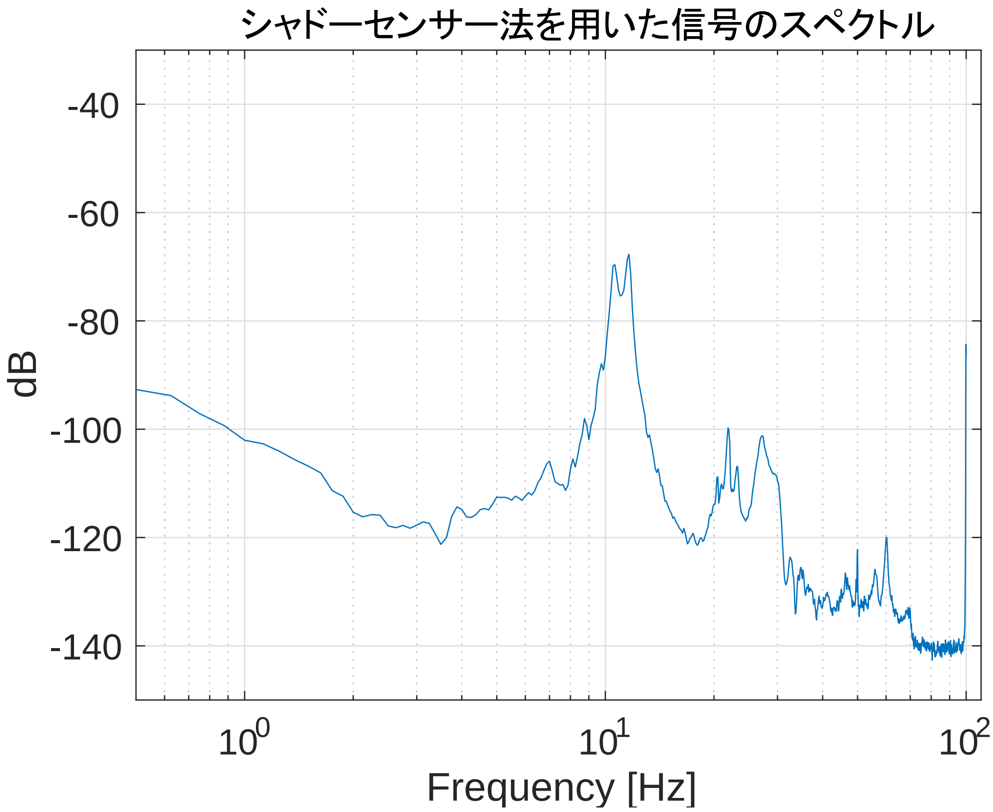

図5.20　シャドーセンサー法を用いた信号のスペクトル

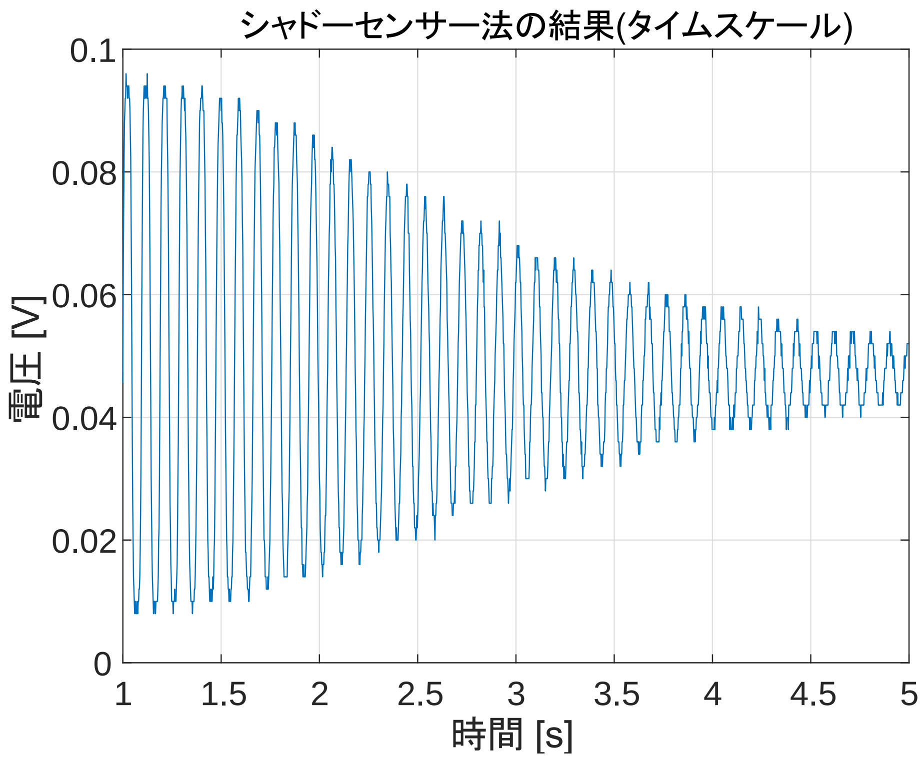

図5.21　シャドーセンサー法の結果(タイムスケール)

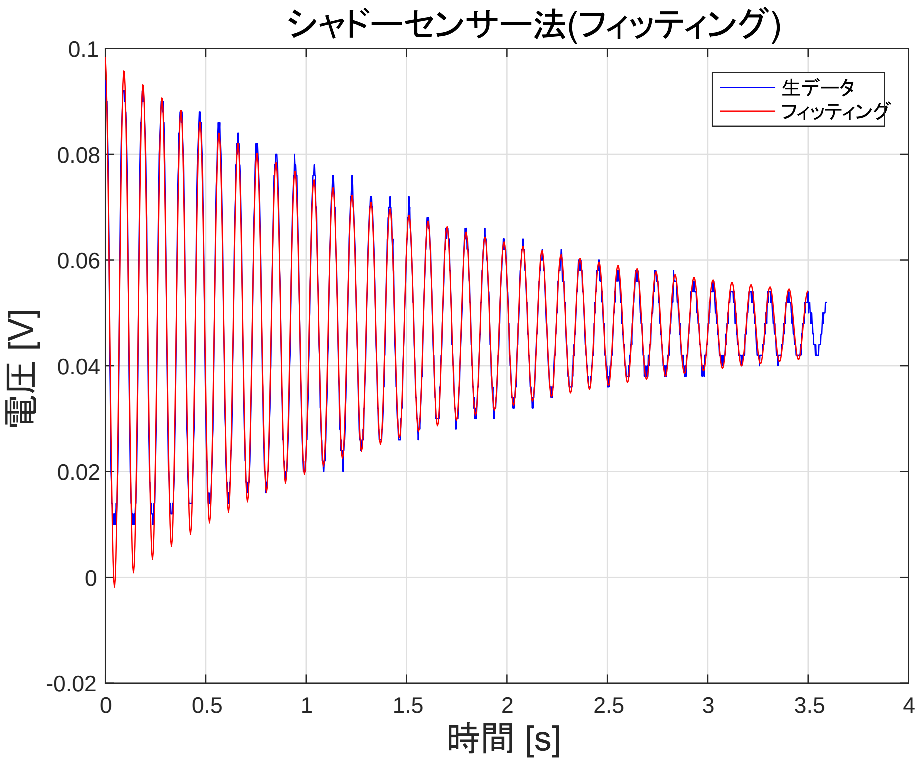

図5.22　シャドーセンサー法の結果(フィッティング)

なお、V_{offset}は信号の平均値(ビームが半分遮られたときの電圧)である。フィッティングによって得られた各パラメータは表5.3のようになった。この結果から、懸架系の共振周波数f_mは$f_m = 10.57$Hzと求まり、

表5.3　フィッティング結果

A	1280.8	B	3.5269×10^{-5}
f_m	10.57	Q_m	56.019
V_{offset}	0.047763	ϕ	1.6927

FFTした結果と大差ない結果が得られた。

第6章

結論および今後の課題

前章の結果を以下の表6.1にまとめる。なお、表中の◯は対応する実験手法で観測されるはずの自由度であることを表し、×は対応する実験手法で観測されない自由度であるということを表している。この表6.1

表6.1　実験手法に対応する自由度と測定結果

	Longitudinal	Yaw	Pitch	観測された周波数
QPD(シングルパス)	◯	◯	◯	11.32Hz,12.39Hz,数十Hz
QPD(ダブルパス)	×	◯	◯	11.28Hz,12.45Hz
Michelson干渉計	◯	×	×	11.75Hz
シャドーセンサー法	◯	×	×	10.57Hz

の結果からLongitudinal方向の共振周波数は11.6 ± 0.43Hzと求められた。しかし、YawとPitchの共振周波数は数十Hzであることは推測できるが、明確な値を特定することはできなかった。

また、とりわけ重要な役割を持つLongitudinal方向の共振周波数は理論値である1.4Hzの10倍という結果となった。原因として考えられるのは用いたOHPシートのヤング率Eの見積りが間違っていたことである。OHPシートの素材であるポリエステルのヤング率の代表的な値がないために、そこから理論と実験値の誤差が生じたと考えられる。しかし、共振周波数が10倍になるためにはヤング率が100倍ほどでないといけないために、もしこの見積り間違いが本当だとしたら重大なミスである。本研究の後に、加速度計を用いたOHPシートのヤング率補正を行う予定である。しかし、Longitudinal方向の共振周波数が上記の結果の通りなので、光ばね実験に搭載できる可能性はある。

しかし、YawとPitchの明白な共振周波数の特定は出来ていないので、今後ダブルパスの実験を再度見直したり、また他の手法を用いて特定に励む予定である。　また、開発した懸架系を搭載したMichelson干渉計をアナログ制御することができなかった。これはピエゾの可動域を超えるほど懸架系がLongitudinal方向に振動していたことが原因であると考えられる。光ばね実験に搭載する際には、制御しないといけないためダンピングする必要がある。懸架系の後部に薄い銅箔を接着し、その後ろに磁石を置くことによりダンピングできる。しかし、取り付ける銅箔の質量によって懸架系の共振周波数は変わってしまうので、なるべく薄い銅箔を使用する必要がある。この実験も、本研究の後に行う予定である。

謝辞

様々な方のご協力なしでは本論文を書くことはできなかったと心の底から感じています。この場を借りて感謝の気持ちを書き連ねたいと思います。

指導教員である宗宮先生には、私が宗宮研究室に所属してから 1 年間面倒を見ていただきました。物理そのものに疎かった私に重力波検出に関する知識や物理の面白さ・醍醐味をご教授いただきました。また、忙しいにも関わらず私の実験の質問に丁寧に答えてくださったり、興味深い論文を見つけてくださりました。先生のおかげでこの 1 年間で私は成長できたと感じております。

研究室の方々への感謝も欠かすことはできません。

藤本先生にはゼミの際に高度かつ興味深い質問を投げかけていただいて、多角的な考え方を身につけることができました。　修士 2 年の熱田さんにはゼミや発表練習の度に的確な指摘をいただきました。また、研究室の雰囲気を和やかにしていただいたおかげで、気持ちのいい研究生活をこの 1 年間で送ることができました。

修士 2 年の片岡さんには理論や実験面で本当にお世話になりました。特に実験に関する知識、技術、考え方を分かりやすくご教授いただいて、光学実験に対する興味もより深めることができました。本論文提出直前に行き詰まっていた実験に対しても、解決策や他の手法を提示していただいたおかげで次のステップへ進むことができました。その他にも、研究に対する熱心な姿勢は見習わなければならないと改めて実感しました。

修士 1 年の粕谷さんには実験面でお世話になりました。研究室に入りたてのときに一緒にビームプロファイリングの実験をしたのが印象的です。粕谷さんの「ものつくり」に対する姿勢は圧巻です。

修士 1 年の柳沼さんにはゼミの度に理論面での指摘をいただきました。理論を研究しているからこそ考えつくような質問のおかげで、自分の研究に対して視野を広げて考えることができました。また、世間話に花を咲かせたり楽しかったです。

学士 4 年の下井くんとはたくさん話ができたと思います。 1 年前に同じスタートラインに立って、一緒に重力波検出器の勉強をして、いい意味でお互い切磋琢磨出来ていたと思います。卒論執筆の際に、制御に関する私の質問に答えてくれて非常にためになりました。また、私のくだらない話にも優しく耳を傾け

てくれて感謝しています。

本研究における懸架系の開発の際には西オーストラリア大学のJohn Winterflood氏になりました。同氏の考案した懸架系は力学的に非常に興味深いデザインでした。また、開発した懸架系に関する質問に丁寧に答えてくださり、心の底から感謝しております。

東京大学宇宙線研究所の川村先生には基礎レクチャーの際にお世話になりました。干渉計や制御に関する基礎的な知識を身に付けることができました。

そして何よりも感謝しているのが両親です。私がこの大学に通えて、したい勉強ができているのは全て両親のおかげです。

ここに書ききれなかった方々にも感謝しております。ご協力いただいた皆様、ありがとうございました。

参考文献

[1] 三尾典克. "相対性理論　基礎から実験的検証まで" サイエンス社(2007)

[2] 安東正樹. "Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波の制御" (修士論文)

[3] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 "重力波をとらえる　存在の証明から検出へ" (1998)

[4] 矢野和城. "神岡における環境雑音の測定および非線形光学素子を用いた信号増幅" (学士論文)

[5] WARREN C. YOUNG, RICHARD G. BUDYNAS "Roark's Formulas for Stress and Strain"