

卒業論文

半古典重力効果の測定に関する研究

東京工業大学理学院物理学系 宗宮研究室

浜野神威

2025年2月13日

概要

量子重力理論とは、量子力学と一般相対性理論を統一する理論を目指す研究分野である。現在、一般相対性理論は重力を記述する理論の中で最も成功している理論であるが、プランクスケールと呼ばれる 10^{-35} m 程度のスケールでは量子効果を考慮する必要があるが出てくる。しかし現在の量子力学の枠組みでは重力を適切に記述できず、両者を統一する量子重力理論が求められている。

本研究では量子力学と重力の関係を考察するために提案されたモデルである半古典重力理論、とりわけシュレーディンガー・ニュートン理論に焦点をおき、この理論が正しいことを確かめる実験装置を考察する。本理論は重力については非相対論的極限であるニュートン重力を考え、時空を連続的、重力を原理的に古典的であると仮定した理論であるが、この理論から導かれるシュレーディンガー・ニュートン方程式から重力が波動関数の崩壊 (重力デコヒーレンス) を引き起こす可能性を示唆しており、またマクロな量子系の振舞いの理解にも適している。重力は極めて弱い力であるため、実験での検証が困難であるが、自己重力に関しては、振動子の共振周波数が 10^{-3} Hz 程度と極端に小さく、また極低温、高 Q 値の理想的な環境であれば測定できる可能性が示唆されている。

本研究では、これまでにいくつか報告されている、標準量子限界 (SQL) に到達した実験系において、自己重力の影響が観測できるかを検証し、さらに当研究室で実施中であるマ磁気浮上を用いた極低周波振動子において、どのような技術を導入すれば自己重力の影響が観測できるかを考察する。

目次

図目次	iv
表目次	v
第 1 章 量子測定	1
1.1 量子測定とは	1
1.2 密度演算子	1
1.3 射影測定	3
1.4 一般化測定	4
1.5 間接測定	5
1.6 連続測定	7
第 2 章 半古典重力理論	10
2.1 量子重力理論	10
2.2 半古典重力理論の概要	10
2.3 シュレーディンガー・ニュートン方程式	11
2.4 量子的不確定性と古典的不確定性	14
2.5 熱雑音を含んだハイゼンベルグ方程式	16
2.6 非線形量子光学の測定	18
第 3 章 半古典重力の予測	21
3.1 標準量子力学の場合	21
3.2 前選択処方での予測	22
3.3 理想的環境での半古典重力の予測	24
第 4 章 研究結果	29
4.1 Teufel[1] での光学系の場合	29
4.2 Regal[2] での光学系の場合	31
4.3 Miao[3] での光学系の場合	33
第 5 章 展望: 磁気浮上を用いた実験系による検証	35
5.1 磁気浮上を用いた実験系	35
5.2 結果	36

第 6 章	まとめ	38
付録 A	サンプルコード	39
A.1	第 3 章で用いたコード	39
A.2	第 4 章で用いたコード	42
A.3	第 5 章で用いたコード	44
謝辞		47
参考文献		48

1.1	間接測定の様式図	5
1.2	量子連続測定モデル	7
1.3	連続測定の様式図	9
2.1	標準量子力学における位相空間内の不確定性楕円	12
2.2	シュレーディンガー・ニュートン理論における位相空間内の不確定性楕円	12
2.3	ねじれ振子を用いた光学実験系の様式図	16
3.1	表 3.1 のパラメータにおける出射光位相スペクトル密度 (温度 $T_0 = 0$ K の場合)	25
3.2	図 3.1 での $\omega = \omega_m$ まわりでのピーク	25
3.3	図 3.1 での $\omega = \omega_q$ まわりでのピーク	26
3.4	温度 $T_0 = 10^{-7}$ K での図 3.1	27
3.5	温度 $T_0 = 10^{-13}$ K での図 3.1	27
3.6	温度 $T_0 = 1$ K での $\omega = \omega_q$ まわりでのピーク	28
4.1	表 4.1 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度	30
4.2	温度が 10^{-5} K の場合の表 4.1 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度	31
4.3	温度が 10^{-12} K の場合の表 4.1 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度	31
4.4	表 4.2 出射光位相スペクトル密度	32
4.5	表 4.3 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度	34
5.1	磁気浮上を用いた実験系	35
5.2	表 5.1 での $\omega = \omega_q$ まわりでのピーク	37

表目次

2.1	元素ごとの ω_{SN} の値	13
3.1	理想的な光学系のパラメータ	24
4.1	Teufel[1] の光学系のパラメータ	29
4.2	Regal[2] の光学系のパラメータ	32
4.3	Miao[3] の光学系のパラメータ	33
5.1	磁気浮上を用いた光学系のパラメータ	36

第 1 章

量子測定

本研究のテーマは量子重力の検証であり、そこでは量子測定を考える必要が出てくる。この章では量子測定の理論について詳しく説明する。

1.1 量子測定とは

古典論では、局所実在論が暗に仮定されている。局所実在論とは、任意の時刻について、すべての物理量が確定した値を持っているとするものである。そのため古典論における測定とは、観測者が確定している物理量の値を知ること、とされている。しかし量子論では、不確定性原理により局所実在論は成り立たない。そのため量子論における測定とは、**観測者が物理量の測定値を一つ得ること**、とされている [4]。それは全く同様の状態に対して全く同様の測定を行ったとしても、測定結果は同じになるとは限らないことを意味している。測定結果は、測定前の状態と測定方法に依存する確率分布に従う。このことから古典論での測定と量子論での測定とは根本的に異なったものであることが分かる。

一般に量子論における測定を記述するのに必要なことは以下の三つである。

- 測定結果
- 測定結果が得られる確率
- 測定後の状態

これらを表すのに必要な密度演算子について説明した後、実際に測定でこれらがどのように記述されるのかを見ていく。

1.2 密度演算子

ここでは測定の記述に必要な密度演算子について説明していく。

1.2.1 量子状態と混合状態

ある定まった量子状態 $|\psi\rangle$ にある 1 粒子に対してある物理量 $\hat{A}$ を測定したときの期待値は、

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (1.1)$$

として求められる。これは完全に同等の量子状態 $|\psi\rangle$ を繰り返し生成し、その上で同じ測定を繰り返した際に得られた物理量の平均に対応する。この完全に同等の量子状態を繰り返し生成できる状態を純粋状態という。

完全に同じ状態を繰り返し生成するためには、扱う系について、可能な限りの情報が既に得られている必要がある。しかし現実的には全ての情報は得られておらず、系に対する情報が不足している場合が多い。この場合特定の 1 個の波動関数を系に対応させることはできず、測定ごとに複数の状態の中からある一つの状態がその実現確率に伴って現れる。このような状態を混合状態と呼ぶ。混合状態 ρ に対する $\hat{A}$ の期待値は、

$$\langle \hat{A} \rangle_\rho = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle \quad (1.2)$$

と与えられる。ここで p_i は状態 $|\psi_i\rangle$ の実現確率であり、起こり得るすべての状態について和をとっている。ここで p_i は確率より、

$$p_i \geq 0 \quad (1.3)$$

$$\sum_i p_i = 1 \quad (1.4)$$

が成り立つ。

1.2.2 密度演算子とその性質

前節で取り扱った純粋状態と混合状態を統一的に記述するためには密度演算子を考えると便利である。(1.2) 式で扱った状態 $|\psi_i\rangle$ とそれに対応する p_i を用いて密度演算子 $\hat{\rho}$ を、

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i p_i \hat{P}_i \quad (1.5)$$

$$\hat{P}_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.6)$$

と定義する。ここで $\hat{P}_i$ は量子状態 $|\phi_i\rangle$ に対応する射影演算子である。また $p_i = 1$ となる時、状態 $|\psi_i\rangle$ の純粋状態の密度演算子を表しており、それ以外では混合状態の密度演算子を表している。この密度演算子を用いると、任意の物理量 $\hat{A}$ の期待値は、(1.2) 式から、任意の正規直交完全系 $|\phi_j\rangle$ を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_\rho &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \left[\sum_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j| \right] \hat{A} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i \sum_j p_i \langle \psi_i | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \hat{A} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_j \langle \phi_j | \hat{A} \left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right] | \phi_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \phi_j | \hat{A} \hat{\rho} | \phi_j \rangle \\ &= \text{Tr}[\hat{A} \hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{A}] \end{aligned} \quad (1.7)$$

のように書きなおせる。ここで期待値は正規直交完全系 $|\phi_j\rangle$ の取り方によらない。密度演算子を適当な基底に対して行列として表現したものを密度行列と呼ぶ。

密度演算子の時間発展

純粋状態に対する時間発展はユニタリ演算子 U を用いたユニタリ変換により、

$$|\psi_i\rangle \rightarrow U |\psi_i\rangle \quad (1.8)$$

で表されていた。よって密度演算子の時間発展は、

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \\ &\rightarrow \sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger = U \hat{\rho} U^\dagger \end{aligned} \quad (1.9)$$

のように表現される。

1.2.3 部分系と部分トレース

系 A と系 B の二つの系からなる複合系 AB を考える。複合系 AB を全系としたときの系 A、または系 B を部分系と呼ぶ。また系 A と系 B の密度演算子をそれぞれ $\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_B$ とし、複合系 AB の密度演算子を $\hat{\rho}_{AB}$ とすると、系 A と系 B が互いに独立である時、

$$\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B \quad (1.10)$$

のように直積 (テンソル積) で書かれる。しかし一般には $\hat{\rho}_{AB}$ は直積状態ではない。このように直積状態で書かれないとき、系 A と系 B は量子エンタングル状態 (エンタングルメント) であるという。

また、複合系 AB の密度演算子 $\hat{\rho}_{AB}$ が与えられているとき、系 A の密度演算子 $\hat{\rho}_A$ は、

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB}) \quad (1.11)$$

で計算できる。ここで Tr_B は系 B に対してのみトレースをとる部分トレースである。同様に系 B の密度演算子 $\hat{\rho}_B$ は、

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_{AB}) \quad (1.12)$$

のように系 A に対する部分トレースをとることにより求められる。

1.3 射影測定

量子論で最も広く知られている測定モデルは、射影測定と呼ばれる理想的な測定である。通常の量子力学の講義や教科書で扱う測定の大部分がこの射影測定である。

1.3.1 射影測定での記述

測定結果

ある物理量 $\hat{Q}$ に対して射影測定を行ったとする。このとき $\hat{Q}$ は、

$$\hat{Q} |q_n\rangle = q_n |q_n\rangle \quad (1.13)$$

となる固有状態 $|q_n\rangle$ とその固有値 q_n が一つ以上存在し、この固有値のうちの一つ (すなわち q_n) が観測結果となる。

測定結果が得られる確率

固有値 q_n が得られる確率 $P(q_n)$ は、固有状態 $|q_n\rangle$ を用いて、

$$P(q_n) = \text{Tr}(|q_n\rangle \langle q_n| \otimes \hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{P}_{q_n} \otimes \hat{\rho}) \quad (1.14)$$

で与えられる。ここで $\hat{P}_{q_n} = |q_n\rangle \langle q_n|$ は固有状態 $|q_n\rangle$ に対応する射影演算子である。

測定後の状態

固有値 q_n が測定された後の状態 (密度演算子) $\hat{\rho}(q_n)$ は、

$$\hat{\rho}(q_n) = \frac{1}{P(q_n)} |q_n\rangle \langle q_n| \hat{\rho} |q_n\rangle \langle q_n| = \frac{1}{P(q_n)} \hat{P}_{q_n} \hat{\rho} \hat{P}_{q_n} \quad (1.15)$$

と与えられる。

確率分布が (1.14) 式のようになることを Born の確率規則、測定後の状態が (1.15) 式のようになることを射影仮説という。これらのことから、射影測定は測定結果が q_n であったとき、その測定直後に再度物理量 $\hat{Q}$ を測定しても、測定結果は変わらず q_n が得られる。射影測定はこの性質を満たすという意味で、理想測定とも呼ばれている。

1.4 一般化測定

射影測定は理想化された測定であるが、実際の量子測定では射影仮説が成り立たない非理想的な測定である場合も多い。このような非理想的な測定も含めた測定は一般測定と呼ばれており、

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = I \quad (1.16)$$

を満たす測定演算子 (Kraus 演算子) $\hat{M}_k$ によって定式化されている。ただし k は可能な測定結果を表す。

測定結果が得られる確率

測定結果が k になる時の確率 $p(k)$ は、

$$p(k) = \text{Tr}(\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \otimes \hat{\rho}) \quad (1.17)$$

で与えられる。

測定後の状態

測定結果が k と測定された後の状態 (密度演算子) $\hat{\rho}(k)$ は、

$$\hat{\rho}(k) = \frac{1}{P(q_n)} \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger \quad (1.18)$$

で与えられる。

1.5 間接測定

一般化測定は間接測定モデルで記述されることが示されている [5]。ここでは間接測定がどのような測定なのか、どのように記述されるのかを説明する。

1.5.1 間接測定の仕組み

今までの議論では、測定の対象となるシステム系があり、その系に対して直接測定を行う計測器を用いたものを考えてきた。これに対し間接測定では、システム系、計測器の他に新たにプローブ系を導入する。以下で間接測定の手順を説明する。

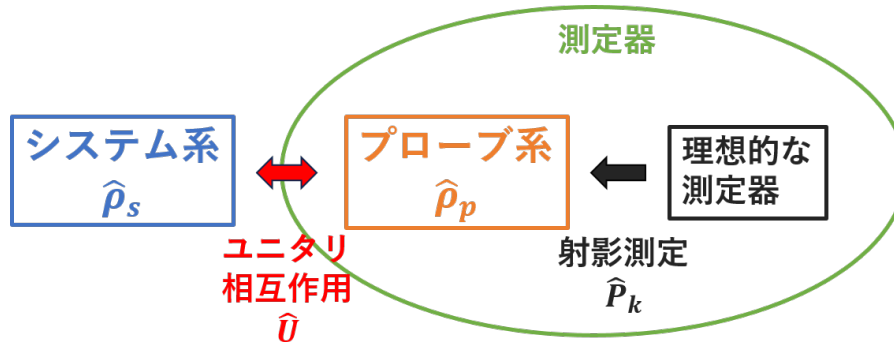


図 1.1 間接測定の模式図

0. 初期状態

測定前の初期状態について考える。この時システム系とプローブ系は互いに独立なので、全系の初期状態の密度演算子 $\hat{\rho}_i$ は、システム系、プローブ系の密度演算子を $\hat{\rho}_s, \hat{\rho}_p$ とすると、(1.10) 式から、

$$\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \quad (1.19)$$

のように直積状態となっている。

1. システム系とプローブ系の相互作用

測定の第一段階として、システム系とプローブ系に対して相互作用をさせ、システム系で測定したいある物理量 $\hat{Q}_s$ の情報をプローブ系の観測量 $\hat{p}_p$ に転写させる。この時の相互ハミル

トニアンを $\hat{H}_I$ として t 秒相互作用した時のユニタリ演算子 $\hat{U} = \exp\left(-i\frac{\hat{H}_I}{\hbar}t\right)$ を考えると、 t 秒相互作用させた後の全系の密度演算子 $\hat{\rho}_f$ は、(1.9) 式から、

$$\hat{\rho}_f = U \hat{\rho}_i U^\dagger = \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger \quad (1.20)$$

のように時間発展する。ここでシステム系とプローブ系は相互相関状態となっている。この時のプローブ系 $\hat{\rho}_{pf}$ は、(1.11) 式から、

$$\hat{\rho}_{pf} = \text{Tr}_s(\hat{\rho}_f) = \text{Tr}_s(\hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger) \quad (1.21)$$

で与えられる。

2. プローブ系を射影測定

測定の第二段階として、相互作用を打ち切り、巨視的な計測器でプローブ系の観測量 $\hat{p}_p$ を射影測定する。この時、プローブ系の密度演算子は任意のポインター基底 $|P\rangle_p$ により対角化される。ポインター基底の例としては、光ホモダイン検出器と呼ばれる測定器の場合、直交位相振幅がポインター基底として選ばれる。この第二段階では射影測定であるため、 $\hat{p}_p$ の正確な測定が行われる。ここで $\hat{p}_p$ の測定結果から求めた物理量 $\hat{Q}_s$ の推定値を k とすると、この時の射影演算子は、

$$\hat{P}_k = |k\rangle_p \langle k| \quad (1.22)$$

で与えられる。これを用いると、推定値が k となる時の確率 $P(k)$ は、プローブ系だけを測定していることと (1.14) 式から、

$$\begin{aligned} P(k) &= \text{Tr}_p(\hat{P}_k \otimes \hat{\rho}_{pf}) \\ &= \text{Tr}_p\{|k\rangle_p \langle k| \otimes (\text{Tr}_s(\hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger))\} \\ &= \text{Tr}_s\{\text{Tr}_p(\hat{U}^\dagger |k\rangle_p \langle k| \hat{U} \hat{\rho}_p) \otimes \hat{\rho}_s\} \\ &= \text{Tr}_s(\hat{X}_k \otimes \hat{\rho}_s) \end{aligned} \quad (1.23)$$

として得られる。ここで $\hat{X}_k = \text{Tr}_p(\hat{U}^\dagger \hat{P}_k \hat{U} \hat{\rho}_p)$ は一般化された射影演算子である。 $\hat{X}_k$ は間接測定で行われる3つの過程、すなわち初期状態でどのようなプローブ系を用意するか ($\hat{\rho}_p$)、どのようにシステム系とプローブ系を相互作用させ情報を転写させるか ($\hat{U}$)、実際の測定結果は何であったか ($\hat{P}_k$) を特定している。ここでプローブ系の初期状態は任意より、純粋状態 $\hat{\rho}_p = |\psi\rangle_p \langle \psi|$ を考えると、

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= \text{Tr}_p(\hat{U}^\dagger |k\rangle_p \langle k| \hat{U} |\psi\rangle_p \langle \psi|) \\ &= {}_p \langle \psi | \hat{U}^\dagger |k\rangle_p \langle k| \hat{U} |\psi\rangle_p = \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \end{aligned} \quad (1.24)$$

と表される。ここで $\hat{M}_k = {}_p \langle k | \hat{U} |\psi\rangle_p$ はプローブ系がユニタリ演算子 $\hat{U}$ を経て初期状態 $|\psi\rangle_p$ から終状態 $|k\rangle_p$ へ変化することを表す演算子振幅であり、測定演算子でもある。(1.24) 式を (1.23) 式に代入すると、一般測定の (1.17) 式と同様の式が得られる。

また k が測定された直後の状態 (密度演算子) $\hat{\rho}(k)$ は、

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(k) &= \frac{1}{P(k)} {}_p \langle k | \hat{\rho}_f | k \rangle_p \\ &= \frac{1}{P(k)} {}_p \langle k | (\hat{U} \hat{\rho}_s \otimes |\psi\rangle_p \langle \psi| \hat{U}^\dagger) | k \rangle_p \\ &= \frac{1}{P(k)} {}_p \langle k | \hat{U} |\psi\rangle_p \hat{\rho}_{sp} \langle \psi| \hat{U}^\dagger | k \rangle_p = \frac{1}{P(k)} \hat{M}_k \hat{\rho}_s \hat{M}_k^\dagger\end{aligned}\quad (1.25)$$

となり、この場合も一般化測定の (1.18) 式と同様の式が得られる。

間接測定では、測定後のプローブ系の状態は巨視的計測器の擾乱のため全く予測不可能であるが、システム系の状態はプローブ系から切り離されているため、計測器からの雑音から守られることが特徴となっている。

1.6 連続測定

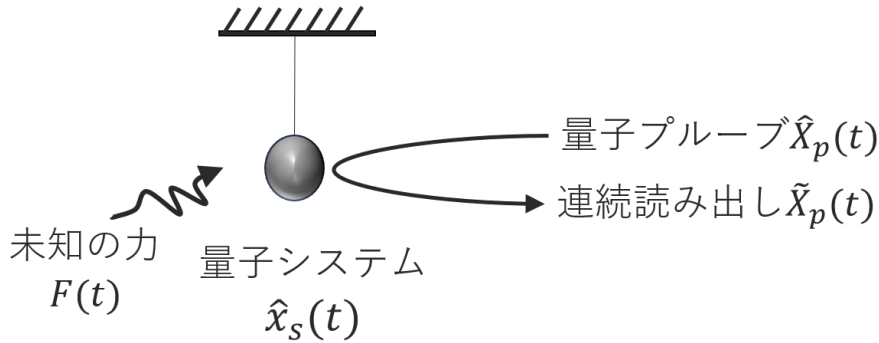


図 1.2 量子連続測定モデル

これまでではある時刻に行われる離散的な測定についての議論であった。しかし実際の物理的な測定では、未知の外力 $F(t)$ が量子システムに影響を及ぼすことがあり、その時間波形 $F(t)$ を検出するためにプローブ系の読み出し観測量 $\hat{X}_p(t)$ を用いてシステム系の観測量 $\hat{x}_s(t)$ を連続的に測定したいことも多い。このような連続測定では、2 種類の反作用雑音が現れる。一つは揺らぎ的な反作用雑音 (散乱雑音) であり、被測定観測量の不確定性 $\langle \Delta x_s^2 \rangle$ に課せられるランダムで予測不可能な擾乱である。もう一つが動的な反作用雑音 (輻射圧雑音) であり、被測定観測量の期待値 $\langle \hat{x}_s(t) \rangle$ の時間変化に起こる規則的で予測可能な変動である。両者が独立であれば、動的な反作用雑音は原理的には除外することができる。そのような測定を線形連続測定と呼ぶ。一方両者が分離不可能であると、動的な反作用雑音は除外することはできない。このような測定を非線形連続測定と呼ぶ。この章では線形連続測定についてのみ述べる。

1.6.1 線形連続測定

$\hat{x}_s(t)$ に対して時間 τ の間に行われる n 回の連続測定を考える。この時、各測定は微小時間 $\Delta t = \tau/n$ の間に行われる、ということになる。一般に、各測定についての推定観測量 $\hat{x}(t)$ は、

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_s(t) + \Delta \hat{x}_{\Delta t}(t) \quad (1.26)$$

のように表される。ここで $\Delta\hat{x}_{\Delta t}(t)$ は時間間隔 Δt で行われる各測定に対する、プローブ内部雑音による測定誤差を表す。このような個別の測定が時間 τ の間に n 回行われた時の全体の測定誤差 $\langle\Delta\hat{x}_\tau^2\rangle$ は、標本誤差の考え方から、

$$\langle\Delta\hat{x}_\tau^2\rangle = \frac{\langle\Delta\hat{x}_{\Delta t}^2\rangle}{n} = \frac{\langle\Delta\hat{x}_{\Delta t}^2\rangle \Delta t}{\tau} \xrightarrow{(\Delta t \rightarrow 0)} \frac{S_x}{\tau} \quad (1.27)$$

と与えられる。ここで $S_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle\Delta\hat{x}_{\Delta t}^2\rangle \Delta t$ は $\Delta\hat{x}_{\Delta t}$ のスペクトル密度である。(1.27) 式より、測定雑音は、測定時間 τ を長くするほど減少することが分かる。

一方測定後のシステム系の共役観測量 $\hat{p}(t)$ は、同様に、

$$\hat{p}(t) = \hat{p}_s(t) + \Delta\hat{p}_{\Delta t}(t) \quad (1.28)$$

と表される。ここで $\Delta\hat{p}_{\Delta t}(t)$ は、時間 Δt で行われる各測定に対する。プローブ内部雑音による反作用雑音を表す。プローブ系は各測定で独立に用意されるので、反作用雑音は n 回の繰り返し測定で独立である。このことから測定が時間 τ の間に n 回行われた時の全反作用雑音 $\langle\Delta\hat{p}_\tau^2\rangle$ は、

$$\langle\Delta\hat{p}_\tau^2\rangle = \langle\Delta\hat{p}_{\Delta t}^2\rangle n = \frac{\langle\Delta\hat{p}_{\Delta t}^2\rangle \tau}{\Delta t} \xrightarrow{(\Delta t \rightarrow 0)} S_p \cdot \tau \quad (1.29)$$

と与えられる。ここで $S_x = \lim_{\theta \rightarrow 0} \langle\Delta\hat{p}_{\Delta t}^2\rangle / \Delta t$ は $\Delta\hat{p}_{\Delta t}$ のスペクトル密度である。(1.6.1) 式より、全反作用雑音は、測定時間 τ を長くするほど増加することが分かる。

各測定において最小不確定波束にあるプローブ系を用意すると、2つのスペクトル密度は、

$$S_x \cdot S_p = \langle\Delta\hat{x}_{\Delta t}^2\rangle \langle\Delta\hat{p}_{\Delta t}^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.30)$$

のようにハイゼンベルグ限界を満たす。

次に、プローブ系に測定されつ未知の外力 $F(t)$ で駆動されているシステム系の時間発展を考える。システム系の初期密度演算子 $\hat{\rho}_i$ は、一度目の測定ではユニタリ演算子 $\hat{V}_1 = \exp\left(-i\frac{\hat{H}_s}{\hbar}\Delta t\right)$ により時間発展する。ここで $\hat{H}_s$ はシステム系と未知の外力の相互作用を記述するハミルトニアンであり、

$$\hat{H}_s = \frac{\hat{p}_s^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_s^2\hat{x}_s^2 - F(t)\hat{x}_s \quad (1.31)$$

で与えられる。ここで m, ω はそれぞれシステム系の質量、固有角振動数である。時間発展後の状態 $\hat{\rho}_1$ は、

$$\hat{\rho}_1 = \hat{V}_1 \hat{\rho}_i \hat{V}_1^\dagger \quad (1.32)$$

のように表される。また一度目の測定で推定測定量 k_1 が測定された後の状態 $\hat{\rho}'_1$ は、(1.25) 式から、

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_1 &= \frac{1}{P(k_1)} \hat{M}_{k_1} \hat{\rho}_1 \hat{M}_{k_1}^\dagger \\ &= \frac{1}{P(k_1)} \hat{M}_{k_1} \hat{V}_1 \hat{\rho}_i \hat{V}_1^\dagger \hat{M}_{k_1}^\dagger \end{aligned} \quad (1.33)$$

として与えられる。この過程が n 回繰り返されると、最終の密度演算子 $\hat{\rho}_f$ は、

$$\hat{\rho}_f = \hat{\rho}'_n = \frac{1}{P(k_1, k_2, \dots, k_n)} \hat{Y}(k_1, k_2, \dots, k_n) \hat{\rho}_i \hat{Y}(k_1, k_2, \dots, k_n)^\dagger \quad (1.34)$$

と求められる。ただし、

$$\hat{Y}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \hat{M}_{k_n} \hat{V}_n \cdots \hat{M}_{k_1} \hat{V}_1 \quad (1.35)$$

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = P(k_1)P(k_2) \cdots P(k_n) \quad (1.36)$$

とおいた。これが線形連続測定における記述である。(1.34) 式から、推定測定量の組 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ が測定される時の確率が $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 、その時の測定演算子が $\hat{Y}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ であると見なすことができる。

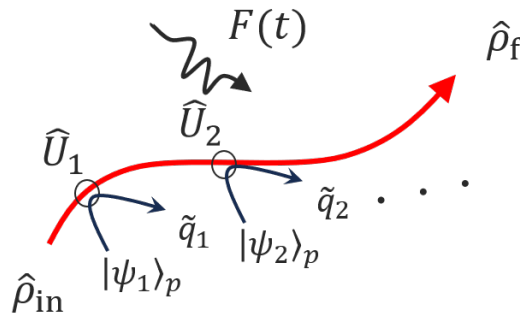


図 1.3 連続測定の模式図

第2章

半古典重力理論

半古典重力理論とは、量子重力を説明するうえで候補となっている理論のうちのひとつである。まず初めに一般的な量子重力理論について触れ、その後半古典重力理論について詳しく見ていく。

2.1 量子重力理論

現在、一般相対性理論は重力を記述する理論の中で最も成功している理論であるが、量子力学の枠組みでは重力を適切に記述できず、両者を統一する理論が求められている。この理論を量子重力理論という。しかし重力は他の力と比較して非常に微弱であり、量子重力効果が表れるのはプランクスケールと呼ばれる 10^{-35} m 程度のスケールであり、実験的検証が非常に困難とされている。そのため仮説理論も複数あり、どの理論が正しいかは未解明である。

主な論点としては重力が古典的か量子的か、時空は連続的か離散的か、というところであり、例えば時空が離散的であるととらえ、時空そのものの量子化を行い、それによって重力を量子化しようとするループ量子重力理論、時空は連続的であるが4次元時空ではなく高次元と捉え、また物質の基本的構成要素を「点」ではなく「一次元のひも」と捉えなおして自然に重力の量子化を導けるとする超ひも理論などがある。

本研究ではこのうち時空は連続的であると捉え、また重力も原理的に古典的であるとする立場に立った半古典重力理論、とりわけその非相対論的極限でのシュレーディンガー・ニュートン理論に焦点をおいて考察を行う。

2.2 半古典重力理論の概要

一般相対論では、アインシュタイン方程式は重力波の章で述べたように、

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

で与えられるのであった。しかしここでは時空幾何学を表すアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ 、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は古典的な値であった。しかし量子力学では少なくともエネルギーや運動量は決まった値ではなく演算子として扱われ、その期待値が観測量として与えられる。そのためこのアインシュタイン方程式にも修正を加える必要が出てくる。

半古典重力では、アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ には手を加えず、エネルギー・運動量テンソルを演算子 $\hat{T}_{\mu\nu}$ に置き換え、さらに物理量は期待値でしか観測されないことから、アインシュタイン方程式は、

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \langle \Phi | \hat{T}_{\mu\nu} | \Phi \rangle \quad (2.2)$$

と書きなおすことができる。ここで $|\Phi\rangle$ は古典的な時空で発展する全物質・場の状態である。このようにしてアインシュタイン方程式を扱う理論を半古典重力理論と呼ぶ。

2.3 シュレーディンガー・ニュートン方程式

前節からアインシュタイン方程式を (2.2) 式で扱うとしたが、これを直接扱うのは困難である。そのため、この式に対して非相対論的極限をとる。このとき波動関数に従う粒子の質量を m とすると、ポアソン方程式

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}, t) = 4\pi G m |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (2.3)$$

が導かれる [6]。ここで $U(\mathbf{x}, t)$ は自己重力ポテンシャルである。これを用いると、非相対論的単粒子波動関数 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ は、シュレーディンガー方程式から、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}, t) \right] \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

と書かれる。ここで $V(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x}$ での非重力ポテンシャルである。このようにシュレーディンガー方程式のハミルトニアンに半古典重力ポテンシャルを加えたものをシュレーディンガー・ニュートン方程式 (SN 方程式) と呼ぶ。

また、Huan[7] 内で解析されている一次元多体系質量中心ハミルトニアンを考える。ここで物体の質量中心の変位の揺らぎが、物体内部の構成原子による振動揺らぎよりも十分小さい場合、質量中心の状態 $|\psi\rangle$ は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \left[\hat{H}_{\text{NG}} + \frac{1}{2} M \omega_{\text{SN}}^2 (\hat{x} - \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle)^2 \right] |\psi\rangle \quad (2.5)$$

のように時間発展する。この式を多体系質量中心 SN 方程式という。しかし本論文では SN 方程式と呼ぶとき、基本的にこの多体系での質量中心 SN 方程式を指す。ここで M は物体の質量、 $\hat{H}_{\text{NG}}$ はハミルトニアンの非重力項、 $\hat{x}$ は質量中心の位置演算子、 ω_{SN} は物体の物質分布によって決定される重力による角振動数スケールの値である。物体が単原子で格子状に構成されている場合、

$$\omega_{\text{SN}} \equiv \sqrt{\frac{Gm}{6\sqrt{\pi}\Delta x_{\text{zp}}^3}} \quad (2.6)$$

で表される [6]。ここで m は構成原子の質量、 Δx_{zp} は量子揺らぎによる結晶構成原子の各空間方向に沿った平衡位置からの変位の標準偏差である。

今もし物体が外部の調和振動子型ポテンシャルに束縛されている場合、SN 方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \left[\frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_{\text{m}}^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} M \omega_{\text{SN}}^2 (\hat{x} - \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle)^2 \right] |\psi\rangle \quad (2.7)$$

と表される。ここで $\hat{p}$ は質量中心の運動量演算子、 ω_m は重力効果を無視した場合の物体の共振角振動数である。

また、新たに角振動数 ω_q を、

$$\omega_q \equiv \sqrt{\omega_m^2 + \omega_{SN}^2} \quad (2.8)$$

で定義すると、初期状態をガウシアン状態として考えた場合、機械振動子の量子力学的不確定性の楕円は図のように ω_m ではなく ω_q で回転するようになる。これが標準的な量子力学と半古典重力理論との大きな違いとなる。図 2.1、図 2.2 はその様子を表したものである。

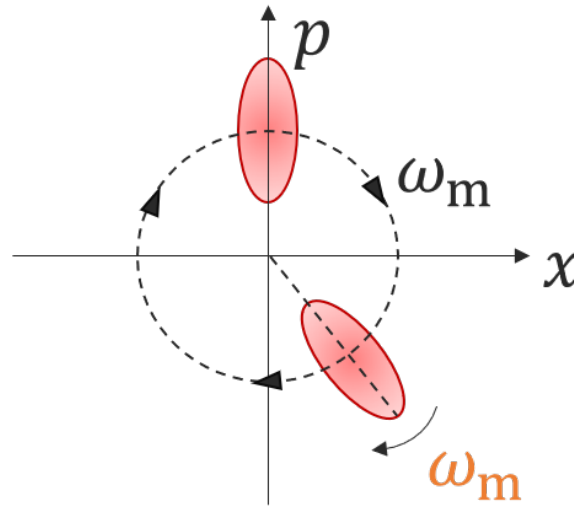


図 2.1 標準量子力学における位相空間内の不確定性楕円

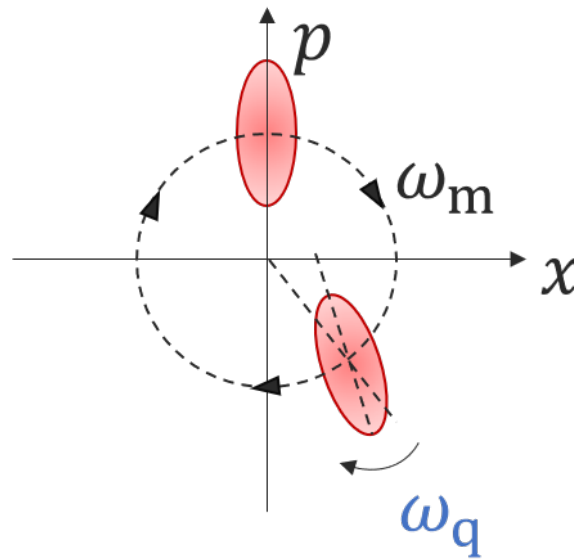


図 2.2 シュレーディンガー・ニュートン理論における位相空間内の不確定性楕円

結果として、半古典重力を考えない標準量子力学と SN 方程式との差は、 $\omega_q - \omega_m$ が可能な

限り大きい場合に顕著にみられる。そのためには、振動子の共振角周波数 ω_m を可能な限り小さくする、また ω_{SN} が可能な限り大きくなるような素材を用いることが必要となってくる。前者の解決策としては低周波数のねじれ振子を用いることが有効であるが、本研究では反磁性を利用した反磁性ねじれ振子を用いることで共振角周波数 ω_m をゼロにすることができる。このことについては後の節で述べる。後者については (2.6) 式からわかるように物体の構成原子のゼロ点振動 Δx_{zp} が小さく、質量 m が大きい素材が重力効果を測定するうえで適した素材であることがわかる。ここで Δx_{zp} はデバイワラー因子 (Debye-Waller factor)、

$$B = 8\pi^2 u^2 \quad (2.9)$$

で特徴づけられる [8]。ここで u は原子のつり合い位置からの変位であり、特にゼロ点振動 Δx_{zp} と熱振動による原子の内部運動の不確かさ Δx_{th} の寄与が大きく、

$$u \gtrsim \sqrt{\Delta x_{\text{zp}}^2 + \Delta x_{\text{th}}^2} \quad (2.10)$$

と表すことができる。ここで十分低温であると仮定すると、 Δx_{th} は無視できると考えられ、

$$u \approx \Delta x_{\text{zp}} \quad (2.11)$$

と考えられる。また原子のモル質量を M_m 、アボガドロ定数を N_A とすると、原子一個の質量は、

$$m = \frac{M_m}{N_A} \quad (2.12)$$

と求めることができる。これらを (2.6) 式、(2.9) 式に代入すると、

$$\Delta x_{\text{zp}} \approx \sqrt{\frac{B}{8\pi^2}} \quad (2.13)$$

$$\omega_{\text{SN}} \approx \sqrt{\frac{GM_m}{6\sqrt{\pi}N_A} \left(\frac{8\pi^2}{B}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.14)$$

と求められる。(2.14) 式を用いていくつかの素材について ω_{SN} を計算すると、表 2.1 のようになる。ただしデバイワラー因子は 1K での Peng[8] の値を用いた。この値は熱振動による不確定性を考慮していないが、おそらく熱振動による不確定性を考慮している Bassam[6] の値とよく一致していることが分かる。

元素	モル質量 M_m (g/mol)	B ($\text{\AA}^2$)	ω_{SN} (10^{-2} s^{-1})
ケイ素 (Si)	28	0.1915	4.94
鉄 (Fe)(BCC)	56	0.12	9.93
ゲルマニウム (Ge)	73	0.1341	10.4
ニオブ (Nb)	93	0.1082	13.8
白金 (Pt)	195	0.0677	28.5
タングステン (W)	184	0.0478	35.9
オスミウム (Os)	190	0.0323	48.9

表 2.1 元素ごとの ω_{SN} の値

2.4 量子的不確定性と古典的不確定性

この節では量子的な不確定性と古典的な不確定性について記述していく。

2.4.1 標準量子力学での減衰調和振動子

この項では、

$$M(\ddot{\hat{x}} + \gamma_m \dot{\hat{x}} - \omega_m) = \hat{F}_{\text{th}}(t) \quad (2.15)$$

を満たす標準量子力学における減衰調和振動子を考える。ここで γ_m は振動子の減衰率、 $\hat{F}_{\text{th}}(t)$ は熱による揺動力である。また、ここでは粘性抵抗について考えている。

温度 T_0 が $T_0 \gg \hbar\omega_m/k_B$ を満たすとき、揺動力は主に古典的な揺らぎからなり、揺動散逸定理から $\hat{F}_{\text{th}}(t)$ のスペクトルを求めると、

$$S_{\hat{F}_{\text{th}}, \hat{F}_{\text{th}}}(\omega) = 2\hbar \left[\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T_0}} - 1} + \frac{1}{2} \right] \frac{\text{Im}[G_c(\omega)]}{|G_c(\omega)|^2} \quad (2.16)$$

と計算できる [6]。ここで $G_c(\omega)$ は揺動力 $\hat{F}_{\text{th}}(t)$ に対する $\hat{x}$ の応答関数で、

$$G_c(\omega) = \frac{1}{M(\omega_m^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_m)} \quad (2.17)$$

と表される。また $S_{\hat{F}_{\text{th}}, \hat{F}_{\text{th}}}(\omega)$ は、

$$\langle \hat{F}_{\text{th}}(\omega) \hat{F}_{\text{th}}^\dagger(\omega') \rangle_{\text{sym}} \equiv S_{\hat{F}_{\text{th}}, \hat{F}_{\text{th}}}(\omega) 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (2.18)$$

として定義される。ここで任意の演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対して、

$$\langle \hat{A} \hat{B} \rangle_{\text{sym}} \equiv \frac{\langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle}{2} \quad (2.19)$$

である。また $\hat{F}_{\text{th}}(\omega)$ は $\hat{F}_{\text{th}}(t)$ をフーリエ変換した値である。

物体の運動が熱浴との相互作用によって減衰するという事実は、揺動力が量子成分を持つことを意味する：

$$[\hat{F}_{\text{th}}(t), \hat{F}_{\text{th}}(t')] \neq 0 \quad (2.20)$$

これは振動子の運動方程式に減衰を加えることで、振動子の正準交換関係の減衰を補正するものである。(詳しくは Barnett[9] の 5.5 節を参照)

2.4.2 量子的不確定性

熱浴が、量子状態 $|\phi_B\rangle$ にあるとする。このとき、系に働く揺動力は、

$$\hat{F}_{\text{th}}(t) = f_{\text{cl}}(t) + \hat{f}_{\text{zp}}(t) \quad (2.21)$$

のように分解することができる。ここで、

$$f_{\text{cl}}(t) = \langle \phi_B | \hat{F}_{\text{th}}(t) | \phi_B \rangle = \langle \hat{F}_{\text{th}}(t) \rangle, \quad (2.22)$$

$$\hat{f}_{\text{zp}}(t) = \hat{F}_{\text{th}}(t) - \langle \hat{F}_{\text{th}}(t) \rangle \quad (2.23)$$

と定義した。

任意の演算子 $\hat{A}$ において、 $\langle \hat{A} \rangle$ は期待値、

$$V[\hat{A}] \equiv \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \quad (2.24)$$

は量子不確定性 (分散) を表す。また量子共分散を任意の演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対して、

$$\text{Cov}[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \langle \hat{A} \hat{B} \rangle_{\text{sym}} - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \quad (2.25)$$

で定義する。状態 $|\phi_B\rangle$ がガウス量子状態であり、一般的な条件下で調和熱浴が満たす仮定が成り立つとする [10]。このとき、

$$\langle f_{\text{cl}}(t) \rangle = f_{\text{cl}}(t), \quad (2.26)$$

$$\langle \hat{f}_{\text{zp}}(t) \rangle = 0 \quad (2.27)$$

を満たし、 $f_{\text{cl}}(t)$ を含んだ共分散は、

$$\text{Cov}[f_{\text{cl}}(t), f_{\text{cl}}(t')] = \text{Cov}[f_{\text{cl}}(t), \hat{f}_{\text{zp}}(t')] = 0 \quad (2.28)$$

となる。以上のことから $\hat{F}_{\text{th}}(t)$ の共分散は、

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\hat{F}_{\text{th}}(t), \hat{F}_{\text{th}}(t')] &= \text{Cov}[\hat{f}_{\text{zp}}(t), \hat{f}_{\text{zp}}(t')] \\ &= \langle \hat{f}_{\text{zp}}(t) \hat{f}_{\text{zp}}(t') \rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

と計算できる。

2.4.3 古典的不確定性

量子測定 of 章である第1章でもみたように、今考えている熱浴の状態 $|\phi_B\rangle$ は純粋状態ではなく、多くの場合は熱浴のいくつかの情報が抜け落ちた混合状態となっている。そのため混合状態を構成する状態 $\{|\phi_B^i\rangle\}$ それぞれに対して、異なる量子期待値 $\{f_{\text{cl}}(t)^i\}$ 、および異なる $\{\hat{f}_{\text{zp}}(t)^i\}$ に対する2時間量子共分散を持つ。これらの値の変動は系の波動関数による知識の欠如に起因するため、古典的不確定性と呼ぶことにする。このとき、揺動力の共分散に対してアンサンブル平均を考えると、

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cov}[\hat{F}_{\text{th}}(t), \hat{F}_{\text{th}}(t')]} &= \overline{\left\langle \frac{\hat{F}_{\text{th}}(t)\hat{F}_{\text{th}}(t') + \hat{F}_{\text{th}}(t')\hat{F}_{\text{th}}(t)}{2} \right\rangle} \\ &= \overline{\langle \hat{f}_{\text{zp}}(t) \hat{f}_{\text{zp}}(t') \rangle_{\text{sym}}} + \overline{f_{\text{cl}}(t)f_{\text{cl}}(t')} \end{aligned} \quad (2.30)$$

と計算できる。ここで $\overline{\langle \rangle}$ は熱浴の様々な実測値のアンサンブル平均をとることを表す。(2.30) 式は我々が得る全熱雑音であり、標準量子力学では量子的不確定性と古典的不確定性を分けて考える方法はない。

2.4.4 提案モデル

$\hat{f}_{zp}$ の 2 時間量子共分散 $\langle \hat{f}_{zp}(t)\hat{f}_{zp}(t') \rangle_{\text{sym}}$ がテスト質量の位置のゼロ点揺らぎを与え、そのアンサンブル平均がゼロ ($\langle \hat{f}_{zp}(t)\hat{f}_{zp}(t') \rangle_{\text{sym}} = 0$) であると仮定する。(すなわち $\hat{f}_{zp}(t)$ の不確定性が量子的なものだけに起因するとする。) この時 $\hat{f}_{zp}(t)$ の全スペクトルは、

$$S_{f_{zp}, f_{zp}}^{\text{qu}}(\omega) = \hbar \frac{\text{Im}[G_c(\omega)]}{|G_c(\omega)|^2} = \hbar \omega M \gamma_m \quad (2.31)$$

で表される。これは $\hat{F}_{\text{th}}(t)$ のスペクトル (2.16) 式の第二項に等しい。

さらに f_{cl} の 2 時間共分散のアンサンブル平均 $\overline{f_{\text{cl}}(t)f_{\text{cl}}(t')}$ が古典統計力学で予言される揺らぎを与えると仮定すると、 $f_{\text{cl}}(t)$ のスペクトルは、

$$S_{f_{\text{cl}}, f_{\text{cl}}}(\omega) = \frac{2\hbar}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T_0}} - 1} \frac{\text{Im}[G_c(\omega)]}{|G_c(\omega)|^2} \approx 2k_B T_0 M \gamma_m \quad (2.32)$$

で表される。これは $\hat{F}_{\text{th}}(t)$ のスペクトル (2.16) 式の第一項に等しい。すなわち (2.16) 式は、

$$S_{\hat{F}_{\text{th}}, \hat{F}_{\text{th}}}(\omega) = S_{f_{\text{cl}}, f_{\text{cl}}}(\omega) + S_{f_{zp}, f_{zp}}^{\text{qu}}(\omega) \quad (2.33)$$

と書き直せることが分かる。

2.5 熱雑音を含んだハイゼンベルグ方程式

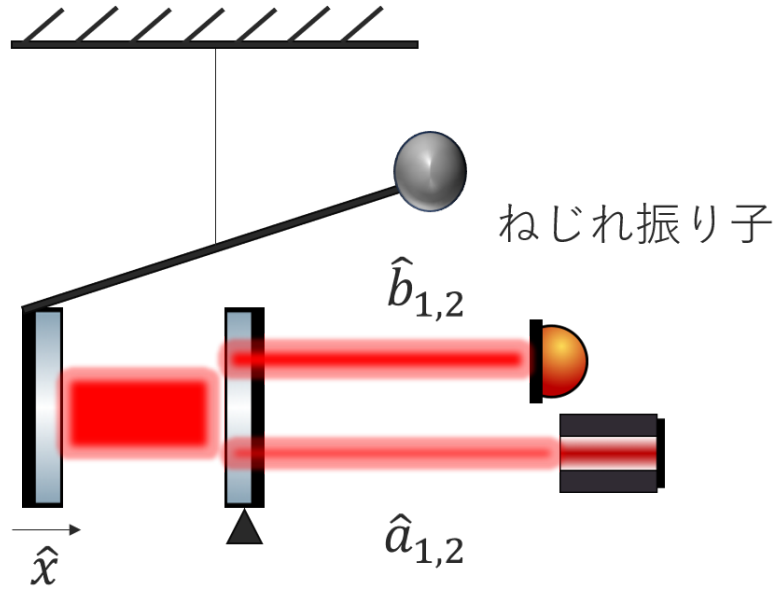


図 2.3 ねじれ振り子を用いた光学実験系の模式図

前節で考えた熱浴の提案モデルに、図 2.3 のような光学系を考えた時の状態依存ハイゼンベルグ方程式は、

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}}{M}, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}}{dt} = & -M\omega_m^2\hat{x} - \gamma_m\hat{p} - M\omega_{\text{SN}}^2(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle) \\ & + \alpha\hat{a}_1 + f_{\text{cl}} + \hat{f}_{\text{zp}}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\hat{b}_1 = \hat{a}_1, \quad (2.36)$$

$$\hat{b}_2 = \hat{a}_2 + \frac{\alpha}{\hbar}\hat{x} \quad (2.37)$$

のように表される。ただし $\hat{f}_{\text{zp}}$ と f_{cl} のスペクトルはそれぞれ (2.31), (2.32) 式で与えられる。また、

$$\alpha^2 \equiv \frac{8P_{\text{cav}}}{T} \frac{\hbar\omega_m}{c^2} \frac{1}{T} \quad (2.38)$$

で定義される α は光学結合の強さを特徴づけている。ここで T はインプットミラーの透過率、 c は光速である。

これらの式を用いて $\hat{b}_2$ について解を求めると、

$$\hat{b}_2(\omega) = \hat{A}(\omega) + \frac{\alpha G_c(\omega)}{\hbar} f_{\text{cl}}(\omega) + \langle\hat{B}(\omega)\rangle \quad (2.39)$$

となり、3 項に分けて考えることができる。第一項の演算子 $\hat{A}(\omega)$ は $\hat{b}_2$ に対する線形量子寄与で、

$$\hat{A} \equiv \hat{a}_2(\omega) + \frac{\alpha G_q(\omega)}{\hbar} [\alpha\hat{a}_1 + \hat{f}_{\text{zp}}] \quad (2.40)$$

と定義される。ここで $\hat{a}_2(\omega)$ はショットノイズを表し、

$$G_q(\omega) = \frac{1}{M(\omega_q^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_m)} \quad (2.41)$$

は揺動力に対する減衰ねじれ振りの振動中心位置 $\hat{x}(\omega)$ に対する量子応答関数であり、 $\alpha\hat{a}_1$ と $\hat{f}_{\text{zp}}$ はそれぞれテスト質量に作用する量子放射圧力とゼロ点揺らぎである。

第二項は古典的熱雑音を表しており、 $G_c(\omega)$ は (2.17) 式で定義された応答関数である。ここで $G_q(\omega)$ と $G_c(\omega)$ はそれぞれ共進周波数が違うことに注意する。

第三項の $\langle\hat{B}(\omega)\rangle$ は $\hat{b}_2$ に対する非線形寄与で、

$$\hat{B}(\omega) \equiv \frac{\alpha\Delta G(\omega)}{\hbar} [\alpha\hat{a}_1(\omega) + \hat{f}_{\text{zp}}(\omega)] \quad (2.42)$$

と定義される。ここで、

$$\Delta G(\omega) \equiv G_c(\omega) - G_q(\omega) \quad (2.43)$$

と定義した。

2.6 非線形量子光学の測定

第1章では線形な測定について議論を詳しく行ってきた。それに対して、(2.5)式を見ればわかる通り、SN方程式は状態 $|\psi\rangle$ に対して非線形な方程式である。このような場合では線形の場合で成り立つ関係が成り立たなくなるため、修正を加える必要が出てくる。この章ではまず初めに線形の場合の測定を考え、そのうえで非線形の場合との違いを比較する。その後古典重力の枠組みの中で実験の統計量を決定するために、前選択と後選択と呼ぶ二つの現象論的処方を提案する。

2.6.1 線形測定と非線形測定

第1章で考えた線形な測定について軽くおさらいする。ここでは間接測定（一般化測定）として議論する。

まず初期状態 $\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p$ にあるシステム系とプローブ系の合成系に対して、ある相互作用を考えると、ユニタリ演算子を $\hat{U}$ として相互作用後の状態は、

$$\hat{\rho}_f = U \hat{\rho}_i U^\dagger = \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger \quad (2.44)$$

となる。ここで推定値が f になるときの確率 $P(f)$ は、プローブ系の初期状態を $\hat{\rho}_p = |i\rangle_p \langle i|$ として選んだ場合の演算子振幅を $\hat{M}_f = {}_p \langle f | \hat{U} | i \rangle_p$ とした場合、

$$P(f) = \text{Tr}_s(\hat{M}_f^\dagger \hat{M}_f \otimes \hat{\rho}_s) \quad (2.45)$$

と書かれ、 f が測定された後の状態 $\hat{\rho}(f)$ は、

$$\hat{\rho}(f) = \frac{1}{P(f)} \hat{M}_f \hat{\rho}_s \hat{M}_f^\dagger \quad (2.46)$$

で書かれるのであった。ここで簡単のためシステムの初期状態を純粋状態とし、 p の添え字を省略すると、プローブ系の状態が $|i\rangle$ から状態 $|f\rangle$ に測定されるとき、その確率 $p_{i \rightarrow f}$ は、

$$p_{i \rightarrow f} \equiv P(f) = |\langle f | \hat{U} | i \rangle|^2 \quad (2.47)$$

と表せることが分かる。この確率の考え方を前選択 (**pre-selection**) と呼ぶ。

また、観測された状態 $|f\rangle$ から初期状態 $|i\rangle$ に巻き戻す場合を考えた場合、その相互作用を表すユニタリ演算子は $\hat{U}^\dagger$ となる。この観測された状態が $|f\rangle$ であるときに初期状態が $|i\rangle$ となる確率 $p_{i \leftarrow f}$ は同様に、

$$p_{i \leftarrow f} = |\langle i | \hat{U}^\dagger | f \rangle|^2 \quad (2.48)$$

で表される。この確率の考え方を後選択 (**post-selection**) と呼ぶ。

絶対値の中身はエルミート共役をとっても構わないため、

$$p_{i \rightarrow f} \equiv P(f) = |(\langle f | \hat{U} | i \rangle)^\dagger|^2 = |\langle i | \hat{U}^\dagger | f \rangle|^2 = p_{i \leftarrow f} \quad (2.49)$$

とすることができる。このことから、線形測定の場合では前選択と後選択の確率は等しい。これはシュレーディンガー方程式の時間反転対称性が成り立つことから理解される。

しかし非線形な方程式を考える場合、ユニタリ演算子は、状態を含む相互作用ハミルトニアン $V(|\Psi\rangle)$ を用いて、

$$\hat{U}_{|\Psi\rangle} = \exp\left(-i\frac{\hat{V}(|\Psi\rangle)}{\hbar}t\right) \quad (2.50)$$

で表される。したがって非線形な場合のユニタリ演算子は初期状態に依存するため、

$$p_{i \rightarrow f} \equiv P(f) = |\langle f | \hat{U}_{|i\rangle} | i \rangle|^2 \neq |\langle i | \hat{U}_{|f\rangle}^\dagger | f \rangle|^2 = p_{i \leftarrow f} \quad (2.51)$$

のように前選択と後選択処方の場合で違いが生じてくる。そのため、今後はこの二つの処方を分けて考える必要がある。本研究ではこのうち前選択処方にのみ着目して議論を進める。

2.6.2 非線形量子光学での前選択処方

ここでの光学セットアップでは、状態 $|i\rangle$ はテスト質量の初期状態と、変換 $\hat{a}_{1,2} \rightarrow \delta\hat{a}_{1,2} + \langle\hat{a}_{1,2}\rangle$ によって真空状態 $|0\rangle_{\text{in}}$ から変位している入射光場のコヒーレント状態からなる分離可能な状態である。前選択処方の測定では、定常状態になると、テスト質量の初期状態は無関係になり、系の状態は入射光状態によって完全に決定される。

可能な状態の集合 $|f\rangle$ は、出射光の位相揺らぎ $b_2(t)$ の固有状態であり、

$$|\xi\rangle_{\text{out}} \equiv \{|\xi(t) : -\infty < t < +\infty\rangle\}_{\text{out}} \quad (2.52)$$

によってラベル付けされる。ここで、

$$\xi(t) \equiv \langle i | \hat{x}(t) | i \rangle \quad (2.53)$$

と定義した。 $|\xi\rangle_{\text{out}}$ はガウス量子状態の集合を示すため、測定結果 $\xi(t)$ は期待値と相関関数によって特徴づけられるガウスランダム過程の分布となる。標準量子力学では、期待値は $\langle\hat{b}_2(t)\rangle$ 、相関関数は、

$$\langle\hat{b}_2(t)\hat{b}_2(t')\rangle_{\text{sym}} - \langle\hat{b}_2(t)\rangle\langle\hat{b}_2(t')\rangle \quad (2.54)$$

として表される。しかし非線形量子力学では $\langle\hat{b}_2(t)\rangle$ が測定結果 $\xi(t)$ によるため、修正する必要があるが出てくる。

二次モーメントの式を決定するために、 $p_{i \rightarrow f}$ を明示的に計算する。考えているセットアップは最終的に定常状態に達するため、フーリエ解析によって単純化する。

前選択処方における ξ の測定確率、

$$p_{i \rightarrow f} = p_{0 \rightarrow \xi} = |\text{out} \langle \xi | \hat{U}_{|0\rangle_{\text{in}}} | 0 \rangle_{\text{in}}|^2 \quad (2.55)$$

は $\hat{b}_2$ のハイゼンベルグ演算子のスペクトルによって特徴づけられ、

$$p_{0 \rightarrow \xi} \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|\xi(\omega) - \langle\hat{b}_2(\omega)\rangle_0|^2}{S_{A,A}}\right] \quad (2.56)$$

と表される。ここで $\langle \hat{b}_2(\omega) \rangle_0$ はハイゼンベルグ演算子 $\hat{b}_2(\omega)$ の量子期待値であり、初期状態 $|0\rangle_{\text{in}}$ を用いて計算される。また $S_{A,A}$ は $\hat{b}_2(\omega)$ の線形項 $\hat{A}(\omega)$ のスペクトル密度であり、

$$2\pi S_{A,A}(\omega)\delta(\omega - \omega') \equiv \langle 0 | \hat{A}(\omega) \hat{A}^\dagger(\omega') | 0 \rangle_{\text{sym}} \quad (2.57)$$

と真空状態を用いて評価される。((2.56) 式の詳しい導出は Bassam[6] の Appendix B を参照)

第 3 章

半古典重力の予測

第 2 章で考えた熱浴のモデルと前選択、後選択処方から、SN 方程式で得られる出射光の位相揺らぎのスペクトルの予測が、標準量子力学による予測とどのように異なるのかを調べる。第 2 章で議論したように、SN 方程式特有の角周波数 ω_q 付近でその兆候が表れると予測される。

3.1 標準量子力学の場合

この節ではまず標準量子力学の場合の位相揺らぎのスペクトル $S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega)$ を計算する。この時 $\omega_{\text{SN}} = 0$ であり、 $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ は真空揺らぎ、

$$S_{a_1, a_1} = S_{a_2, a_2} = \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

$$S_{a_1, a_2} = 0 \quad (3.2)$$

であるとする。よって (2.39) 式から、

$$\hat{b}_2^{(\text{QM})}(\omega) = \hat{a}_2(\omega) + \frac{\alpha G_c(\omega)}{\hbar} \alpha \hat{a}_1(\omega) + \frac{\alpha G_c(\omega)}{\hbar} f_{\text{cl}}(\omega) \quad (3.3)$$

が得られ、また 2.4 節での議論から、引数を適宜省略すると、

$$\langle \hat{b}_2^{(\text{QM})}(\omega) (\hat{b}_2^{(\text{QM})}(\omega'))^\dagger \rangle_{\text{sym}} = \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \rangle_{\text{sym}} + \frac{\alpha^4 G_c G_c^\dagger}{\hbar^2} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle_{\text{sym}} + \frac{\alpha^2 G_c G_c^\dagger}{\hbar^2} \langle f_{\text{cl}} f_{\text{cl}}^\dagger \rangle_{\text{sym}}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega) &= S_{a_2, a_2} + \frac{\alpha^4}{\hbar^2} |G_c(\omega)|^2 S_{a_1, a_1} + \frac{\alpha^2}{\hbar^2} |G_c(\omega)|^2 S_{f_{\text{cl}}, f_{\text{cl}}}(\omega) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha^4}{2\hbar^2} |G_c(\omega)|^2 + \frac{\alpha^2}{\hbar^2} S_{x, x}^{\text{cl}}(\omega) \end{aligned} \quad (3.5)$$

と計算できる。ここで (2.32) 式から、質量中心位置のスペクトルを、

$$S_{x, x}^{\text{cl}}(\omega) \equiv |G_c(\omega)|^2 S_{f_{\text{cl}}, f_{\text{cl}}}(\omega) \approx 2k_B T_0 \frac{\text{Im}(G_c(\omega))}{\omega} \quad (3.6)$$

と定義した。(3.5) 式の第一項と第二項はそれぞれショットノイズと量子輻射圧雑音を示しており、第三項は古典的な熱力 f_{cl} による質量中心位置の揺らぎを示している。

ここで興味があるのは標準量子力学と SN 理論の比較であるため、 ω_q 付近での $S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega)$ を評価する必要がある。(3.5) 式の第一項と第二項は $\omega = \omega_q$ を代入することで簡単に評価でき

る。第三項は、 $\omega_q^2 = \omega_m^2 + \omega_{\text{SN}}^2$ の関係式を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\hbar^2} S_{x,x}^{\text{cl}}(\omega) &= \frac{\alpha^2}{\hbar^2 \omega} \cdot 2k_B T_0 \text{Im} \left(\frac{\omega_m^2 - \omega^2 + i\gamma_m \omega}{M[(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \gamma_m^2 \omega^2]} \right) \\ &= \frac{2k_B T_0 \alpha^2}{M \hbar^2} \frac{\gamma_m}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \gamma_m^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{(\omega \approx \omega_q)} \frac{2k_B T_0 \alpha^2}{M \hbar^2} \frac{\gamma_m}{(\omega_m^2 - \omega_q^2)^2 + \gamma_m^2 \omega_q^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{M \hbar \gamma_m \omega_q} \cdot \frac{2k_B T_0}{\hbar \omega_q} \frac{\gamma_m^2 \omega_q^2}{\gamma_m^2 \omega_q^2 + \omega_{\text{SN}}^4} \\ &= \beta \Gamma^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

と計算することができる。ここで、

$$\beta \equiv \frac{\alpha^2}{M \hbar \gamma_m \omega_q} \quad (3.9)$$

$$\Gamma^2 \equiv \frac{2k_B T_0}{\hbar \omega_q} \frac{\gamma_m^2 \omega_q^2}{\gamma_m^2 \omega_q^2 + \omega_{\text{SN}}^4} \quad (3.10)$$

で定義される β は測定の高さ (α^2 は入力光のパワーに比例) を特徴づけ、 Γ は熱揺らぎの高さを特徴づけている。ここで $\omega_m \ll \omega_{\text{SN}}$ であり、

$$Q \equiv \frac{\omega_m}{2\gamma_m} \quad (3.11)$$

で定義される Q 値が十分大きい ($Q \gg 1$) とき、 Γ^2 は、

$$\Gamma^2 \approx \frac{2k_B T_0}{\hbar \omega_{\text{SN}}} \frac{\gamma_m^2 \omega_{\text{SN}}^2}{\omega_{\text{SN}}^4} = \frac{2k_B T_0}{\hbar \omega_{\text{SN}}^3} \gamma_m^2 \quad (3.12)$$

と簡単に表すことができる。

3.2 前選択処方の予測

前選択処方では、入射する場を真空状態 $|0\rangle_{\text{in}}$ として考えると、(3.5) 式の非線形項 $\langle \hat{B}(\omega) \rangle$ は、

$${}_{\text{in}} \langle 0 | \hat{B}(\omega) | 0 \rangle_{\text{in}} = 0 \quad (3.13)$$

と計算することができる。よって前選択での出射光の位相揺らぎ $\hat{b}_2^{(\text{pre})}(\omega)$ は、

$$\hat{b}_2^{(\text{pre})}(\omega) = \hat{a}_2(\omega) + \frac{\alpha G_q(\omega)}{\hbar} [\alpha \hat{a}_1(\omega) + \hat{f}_{\text{zp}}(\omega)] + \frac{\alpha G_c(\omega)}{\hbar} f_{\text{cl}}(\omega) \quad (3.14)$$

と表される。この式から標準量子力学の場合と同様にスペクトルを計算すると、

$$\begin{aligned} S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega) &= S_{a_2, a_2} + \frac{\alpha^2}{\hbar^2} |G_q(\omega)|^2 [\alpha^2 S_{a_1, a_1} + S_{f_{\text{zp}}, f_{\text{zp}}}^{\text{qu}}(\omega)] + \frac{\alpha^2}{\hbar^2} |G_c(\omega)|^2 S_{f_{\text{cl}}, f_{\text{cl}}}(\omega) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha^4}{2\hbar^2} |G_q(\omega)|^2 + \frac{\alpha^2}{\hbar^2} |G_q(\omega)|^2 S_{f_{\text{zp}}, f_{\text{zp}}}^{\text{qu}}(\omega) + \frac{\alpha^2}{\hbar^2} S_{x,x}^{\text{cl}}(\omega) \end{aligned} \quad (3.15)$$

と表される。ここで第一項はショットノイズ、第二項は量子輻射圧雑音、第三項は量子熱雑音、第四項は古典的な熱力 f_{cl} による質量中心位置の揺らぎを表している。また $S_{f_{\text{zp}}, f_{\text{zp}}}^{\text{qu}}(\omega)$ は量子熱力 $\hat{f}_{\text{zp}}(\omega)$ の真空揺らぎからの雑音スペクトルであり、(2.31) 式で与えられている。

狭帯域限界 $\gamma_m \ll \omega_q$ を考えると、 ω_q 周りでの $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega)$ は、

$$S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega) \approx \left(\frac{1}{2} + \beta \Gamma^2 \right) \left[1 + \frac{\beta(\beta + 2)}{2(1/2 + \beta \Gamma^2)} \frac{1}{1 + 4 \frac{(\omega - \omega_q)^2}{\gamma_m^2}} \right] \quad (3.16)$$

と評価できる。結果として、前選択処方での古典重力の予測はローレンチアン、

$$S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega) \propto 1 + \frac{h_{\text{pre}}}{1 + 4 \frac{(\omega - \omega_q)^2}{\Delta_{\text{pre}}^2}} \quad (3.17)$$

として表される。ここで、

$$h_{\text{pre}} = \frac{\beta(\beta + 2)}{2(1/2 + \beta \Gamma^2)}, \quad (3.18)$$

$$\Delta_{\text{pre}} = \gamma_m \quad (3.19)$$

はそれぞれローレンチアンのピークの高さと半値全幅 (FWHM) を表している。

3.2.1 測定の強さの限界

この結果は、SN ポテンシャルが2次ポテンシャルとして近似できる場合にのみ有効である。この近似が成り立つためには、質量中心位置の揺らぎ Δx_m が構成原子のゼロ点揺らぎ Δx_{zp} よりも十分小さい ($\Delta x_m \ll \Delta x_{\text{zp}}$) ことを保証する必要がある。 Δx_{zp} はほとんどの物質で $10^{-11} \sim 10^{-12} \text{m}$ のオーダーである (このことは2.3節での議論と Peng[8] から判断できる)。また (2.37) 式から、

$$\hat{x} = \frac{\hbar}{\alpha} (\hat{b}_2 - \hat{a}_2) = G_q(\omega) [\alpha \hat{a}_1 + \hat{f}_{\text{zp}}(\omega)] + G_c(\omega) f_{\text{cl}}, \quad (3.20)$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = |G_c(\omega)|^2 f_{\text{cl}}^2, \quad (3.21)$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = |G_q(\omega)|^2 [\alpha^2 \langle \hat{a}_1^2 \rangle + \langle \hat{f}_{\text{zp}}^2 \rangle] + |G_c(\omega)|^2 f_{\text{cl}}^2 \quad (3.22)$$

と計算できることより、スペクトル密度の定義を用いると定常状態での Δx_m は、

$$\begin{aligned} \Delta x_m &= \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |G_q(\omega)|^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{S_{f_{\text{zp}}, f_{\text{zp}}}^{\text{qu}}(\omega)}{\alpha^2} \right] \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\approx \frac{\beta + 2}{2} \frac{\hbar}{2M\omega_q} \end{aligned} \quad (3.23)$$

と計算される [6]。ここで期待値は入射真空場 $|0\rangle_{\text{in}}$ を用いている。

よってこの条件を満たす β 、

$$\beta \ll \frac{4M\omega_q}{\hbar} \Delta x_{\text{zp}} - 2 \quad (3.24)$$

を用いて観測を行う必要がある。

3.3 理想的環境での半古典重力の予測

3.2節で扱ったモデルで理想的に近い環境で実際に実験を行ったときに得られると予測されるグラフを考える。ここでは Yubao[11] で自己重力を計測する際に用いているパラメータを扱った (表 3.1)。それに加えて鏡の透過率を $T = 10^{-5}$ として計算した。

パラメータ	シンボル	値
鏡の質量	M	0.2 kg
鏡の共振角周波数	ω_m	$8\pi \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
SN 角周波数	ω_{SN}	0.49 s^{-1}
Q 値	Q_m	10^7
散逸	γ_m	$8\pi \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$
光の波長	λ	1064 nm
共振器内パワー	P_{cav}	480 nW

表 3.1 理想的な光学系のパラメータ

ピークの特徴が見えやすい温度として $T_0 = 10^{-15} \text{ K}$ を選んだ。この場合の出射光位相揺らぎ b_2 のパワースペクトル密度 $S_{b_2, b_2}(\omega)$ を縦軸、 ω を横軸にとったグラフが図 3.1 である。このグラフから、表 3.1 にある鏡の共振角周波数 $\omega_m = 8\pi \times 10^{-3} \approx 0.025 \text{ s}^{-1}$ と、半古典重力の特徴的な角周波数 $\omega_q = \sqrt{\omega_m^2 + \omega_{\text{SN}}^2} \approx 0.49 \text{ s}^{-1}$ でピークが見られることが読み取れる。ここで ω_m, ω_q のピークの周りでそれぞれ拡大したグラフが図 3.2、図 3.3 である。これらのグラフから、鏡の共振周波数 ω_m 周りのピークでは標準量子力学で得られる量子重力のスペクトル密度 $S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega)$ とシュレーディンガー・ニュートン理論における半古典重力の前選択処方でのスペクトル密度 $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega)$ では差が生じないが、 ω_q 周りのピークでは、標準量子力学における量子重力ではピークが存在せず、前選択処方のみピークが存在していることが分かる。しかしその比は $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 4.3 \times 10^{-5}$ とかなり小さな値をとっている。

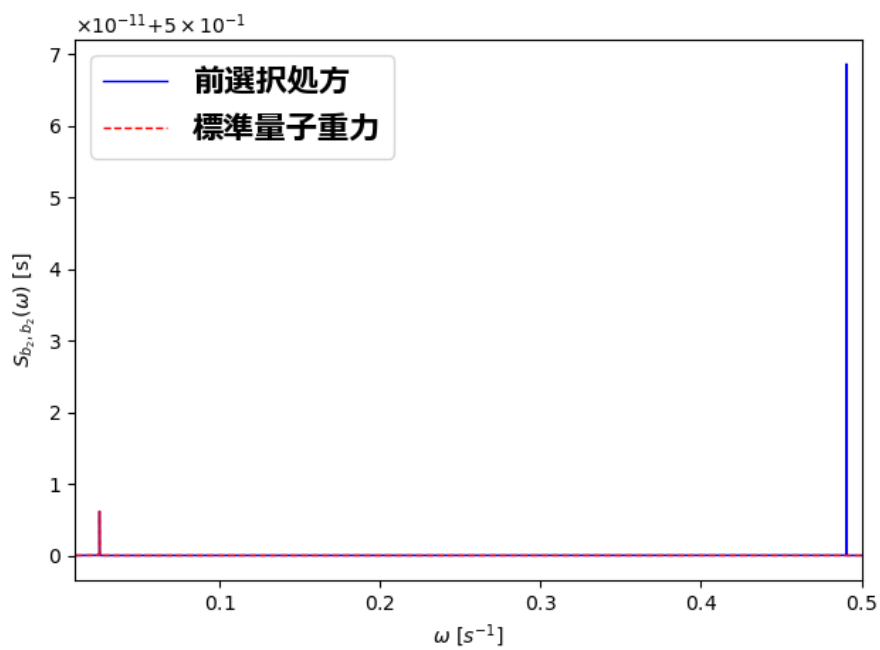


図 3.1 表 3.1 のパラメータにおける出射光位相スペクトル密度 (温度 $T_0 = 10^{-15}$ K の場合)

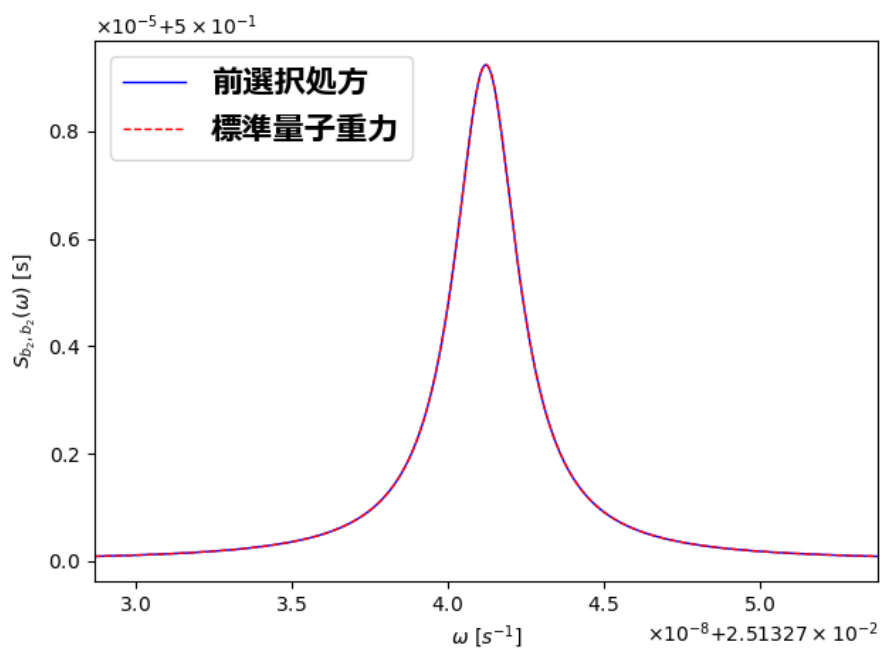
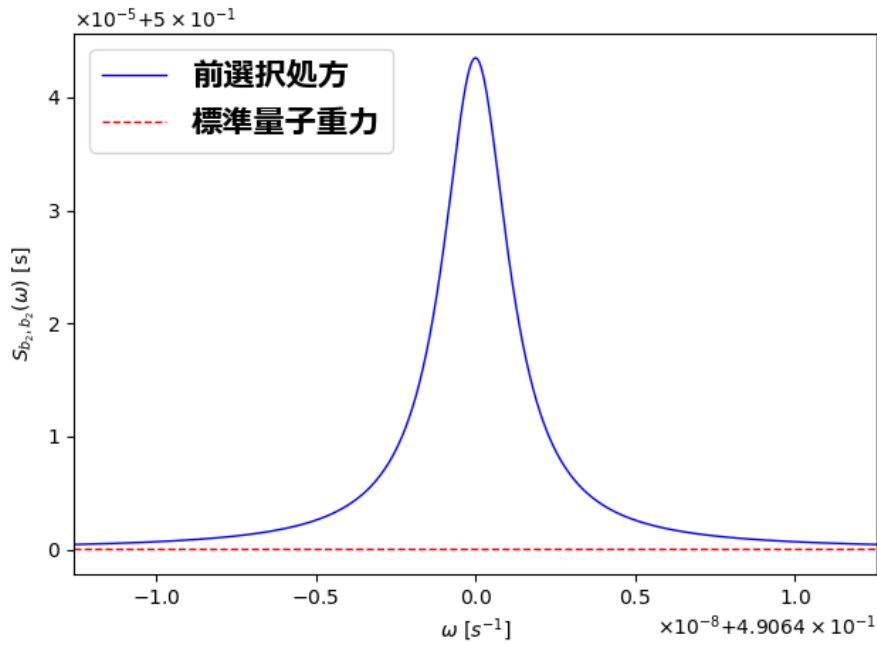


図 3.2 図 3.1 での $\omega = \omega_m$ まわりでのピーク

図 3.3 図 3.1 での $\omega = \omega_q$ まわりでのピーク

次に温度変化によるピークの変化を考察する。図 3.4、図 3.5、図 3.6 はそれぞれ温度が $T_0 = 10^{-13}$ K の時の全体のピークと $\omega = \omega_q$ まわりのピーク、 $T_0 = 1$ K の時の $\omega = \omega_q$ まわりの出射光位相揺らぎ b_2 のパワースペクトル密度 $S_{b_2, b_2}(\omega)$ を縦軸、 ω を横軸にとったグラフである。図 3.4 と $T_0 = 10^{-15}$ K のときの図 3.1 と比べるとピークの位置が変わらないが、ピークの変化が見えて取れる。特に共振角周波数 ω_m 周りでのピークが温度上昇につれ大きくなっている。しかしここで測定したい値は $\omega = \omega_q$ まわりのピークであるので、その部分に着目してみると、図 3.5、図 3.6 から見てわかる通り ω_q におけるピークの大きさの温度依存性はほとんど見られなかった。

ここで最小測定時間 $\tau_{\min}$ に関して考察を行う。このグラフは第 2 章 2.6.2 節で考えたようにシステム系が定常状態となった時、すなわち測定時間が $+\infty$ の場合であるが、実際の測定では有限の時間で測定を行う必要がある。そこである有限時間測定を行った場合 (相互作用時間が有限)、前選択処方と標準量子力学における量子重力との区別が間違っている可能性、また両者が区別できない可能性がともに 10 % 以下になる最小の測定時間を最小測定時間 $\tau_{\min}$ と定義する。この時、考えている熱雑音、量子雑音以外にノイズのない理想的な実験環境においては、Bassam[6] により、

$$\begin{aligned}
 \tau_{\min} \approx & 1.6 \text{ 時間} \times \left(\frac{T_0}{300 \text{ K}} \right)^{0.73} \times \left(\frac{\omega_m}{2\pi \times 10 \text{ mHz}} \right)^{0.47} \\
 & \times \left(\frac{184 \text{ amu}}{m} \right)^{0.49} \times \left(\frac{200 \text{ g}}{M} \right)^{0.73} \\
 & \times \left(\frac{10^4}{Q} \right)^{0.47} \times \left(\frac{0.359 \text{ s}^{-1}}{\omega_{\text{SN}}} \right)^{1.96}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

と与えられている。この式からそれぞれの測定時間を求めると、 $T_0 = 10^{-15}$ K の時の最小測定

時間は 3.8×10^{-14} 時間、 $T_0 = 1\text{K}$ の時の最小測定時間は 3.4×10^{-3} 時間となっており、測定時間の制限に関しては十分測定可能であることが分かる。

これらのことから理想的な実験系の場合は 1K スケール程度であれば測定できる可能性がある。次章では現在標準量子限界に到達できているとされる実験系のパラメータを参照し、理想的な実験系の場合と比較していく。

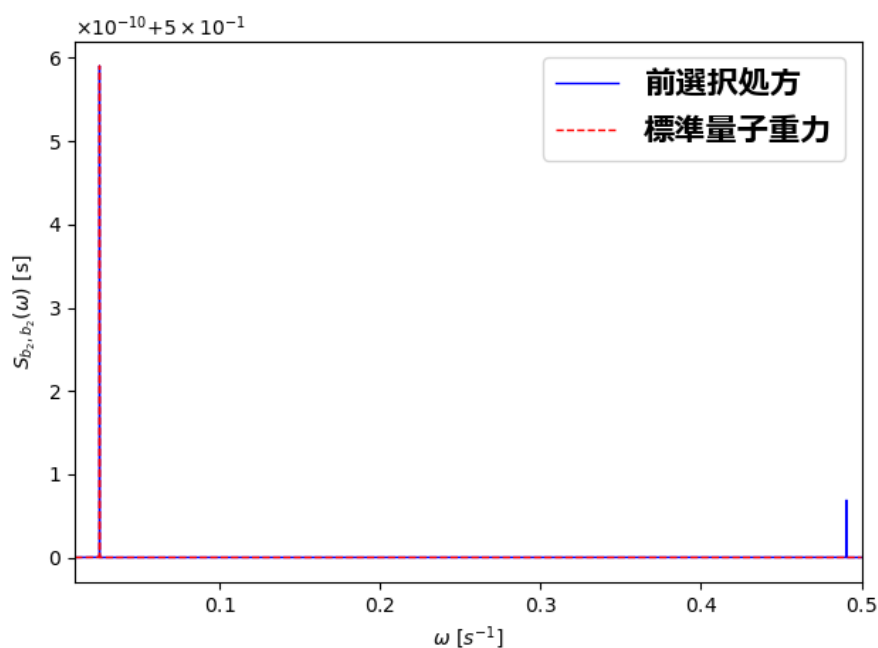


図 3.4 温度 $T_0 = 10^{-13}$ K での図 3.1

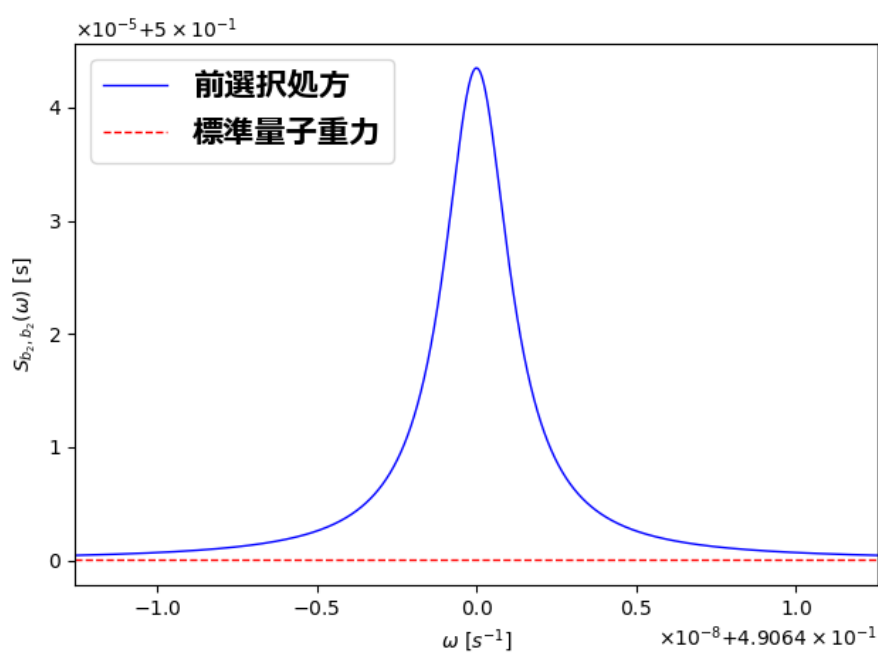


図 3.5 温度 $T_0 = 10^{-13}$ K での $\omega = \omega_q$ まわりでのピーク

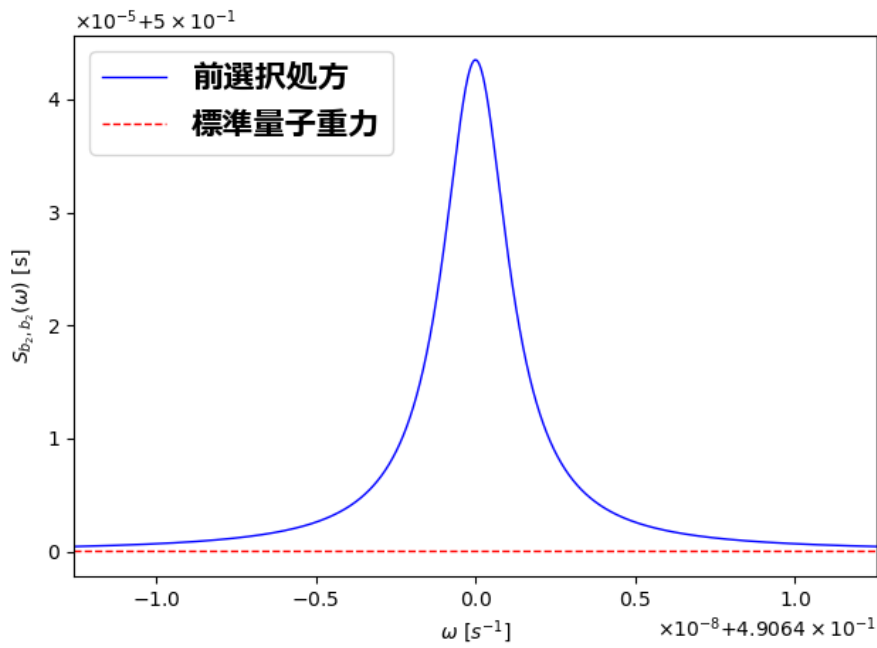


図 3.6 温度 $T_0 = 1$ K での $\omega = \omega_q$ まわりでのピーク

第 4 章

研究結果

第 3 章で考えたモデルについて、現在 SQL に到達可能とされている実験装置の論文の中からいくつかのパラメータを用いて、半古典重力の測定が可能かどうかを検証していく。

ただし、ミラーの素材は表 2.1 で最も大きい値をとるオスミウム $\omega_{\text{SN}}/2\pi = 7.8 \times 10^{-2}$ Hz で考えた。またミラーの透過率は参考にした文献の中で唯一記載のあった Miao[3] の透過率 $T = 10^{-4}$ を全ての場合で用いた。

4.1 Teufel[1] での光学系の場合

パラメータ	シンボル	値
鏡の質量	M	(11 ± 2) pg
鏡の共振角周波数	ω_m	$2\pi \times 1.04 \times 10^6$ s $^{-1}$
SN 角周波数	ω_{SN}	0.49 s $^{-1}$
Q 値	Q_m	6.2×10^5
散逸	γ_m	$2\pi \times 0.67$ s $^{-1}$
温度	T_0	77 mK
共振器内パワー	P_{cav}	1 pW

表 4.1 Teufel[1] の光学系のパラメータ

表 4.1 は Teufel[1] の光学系を基にしたパラメータである。これらのパラメータにより出射光位相揺らぎのスペクトル密度を計算した結果が図 4.1 である。ここでは $\omega = \omega_q$ の周りでのピークを考えているが、 $\omega_q - \omega_m = 1.9 \times 10^{-8}$ s $^{-1}$ であるため、 ω_q と ω_m にほとんど差がなく、散逸の値から熱雑音のピークとシュレーディンガー・ニュートン理論特有のピークの分離ができていないことが分かる。スペクトル密度の比が $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 2.4 \times 10^{-9}$ と理想的な場合と比較してさらに小さな値をとっているが、これがピークの分離ができていないことが一つの要因であると考えられる。また最小測定時間も (3.25) 式から求められるとすると、 1.3×10^9 時間 = 15 万年 とほぼ測定不可能であることが分かる。

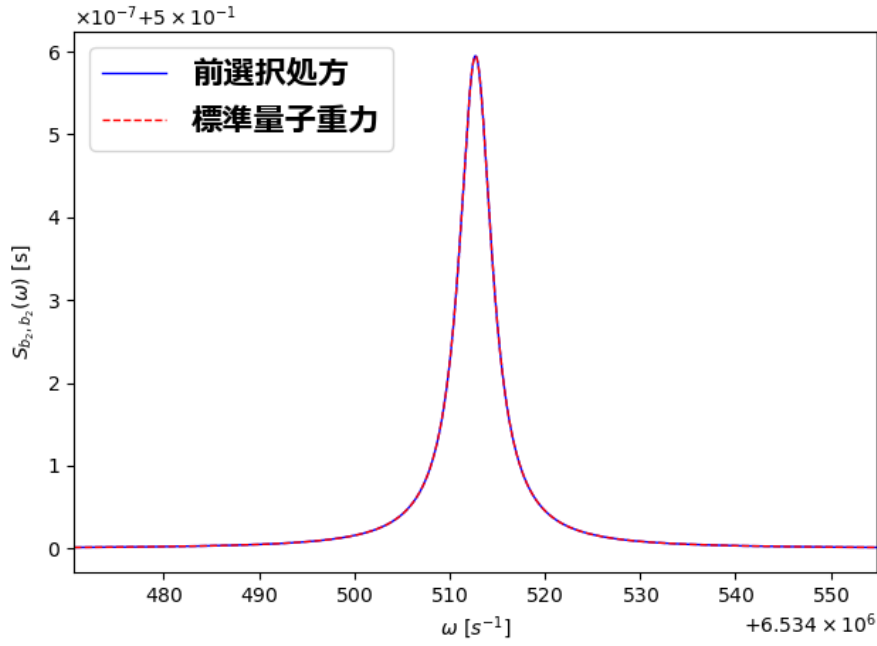


図 4.1 表 4.1 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度

ここで温度依存性について調べる。図 4.2、図 4.3 はそれぞれ $T_0 = 10^{-5}$ K、 $T_0 = 10^{-12}$ K での表 4.1 でのスペクトル密度のグラフであり、温度の減少に伴い熱雑音が減少することによってグラフ上ではその差が目視できるようになった。しかしスペクトル密度比はほとんど変わらずどちらの温度の場合でも $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 3.8 \times 10^{-10}$ である。測定時間も $T_0 = 10^{-5}$ K 程度では依然大きな値をとるが、現在特定の条件で到達可能とされているピコケルビン領域 $T_0 = 10^{-12}$ K では、最小測定時間は 15 時間と現実的な値をとることが示された。しかし温度、スペクトル密度比ともに非常に小さな値をとっているため、その実現は大変困難なことが予想される。

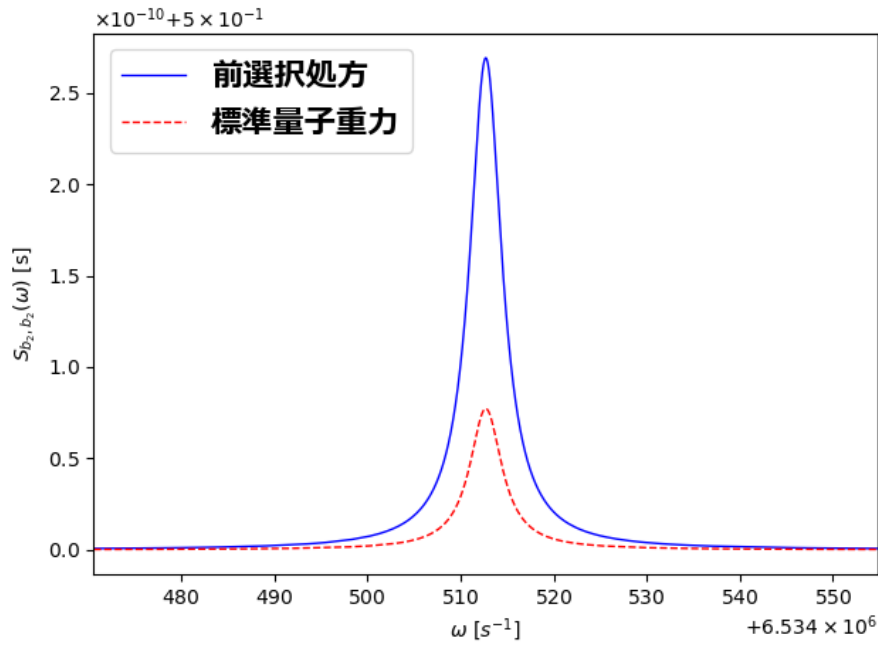


図 4.2 温度が 10^{-5} K の場合の表 4.1 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度

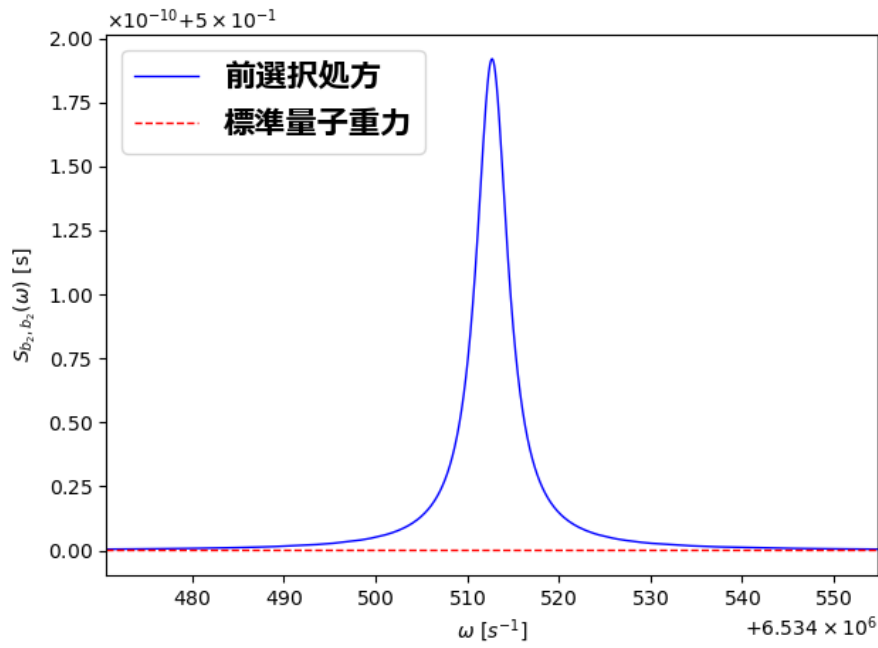


図 4.3 温度が 10^{-12} K の場合の表 4.1 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度

4.2 Regal[2] での光学系の場合

同様の検証を別の二つの文献に対しても行った。表 4.2 は Regal[2] での光学系を基にしたパラメータである。この光学系では Teufel[1] の光学系のパラメータと比較して質量と Q 値が

少し低く、共振器内パワーが大きな値をとっている。また、温度も比較的高い。これらのパラメータから出射光位相揺らぎのスペクトル密度を計算した結果が図 4.4 である。

図 4.1 と同じく熱雑音とシュレーディンガー・ニュートン理論のピークが合わさってしまっている。またスペクトル密度比は $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 3.7 \times 10^{-8}$ であり、最小測定時間も 3600 万年と性能が最も悪くなってしまった。

また $T_0 = 10^{-12}$ K ではスペクトル密度比は同じく $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 3.7 \times 10^{-8}$ であり、最小測定時間は 7.1 日であった。このことから温度によらず結果が悪くなっているのが分かるため、後の Miao[3] の結果も考慮すると Q 値の影響が大きいことが考察できる。試しに $Q = 10^7$ と変更したところ、 $T_0 = 10^{-12}$ K で $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 3.7 \times 10^{-6}$ 、最小測定時間は 20 時間と大幅に改善が見られた。

パラメータ	シンボル	値
鏡の質量	M	2 pg
鏡の共振角周波数	ω_m	$4\pi \times 10^6 \text{ s}^{-1}$
SN 角周波数	ω_{SN}	0.49 s^{-1}
Q 値	Q_m	10^5
温度	T_0	5 K
共振器内パワー	P_{cav}	0.6 nW

表 4.2 Regal[2] の光学系のパラメータ

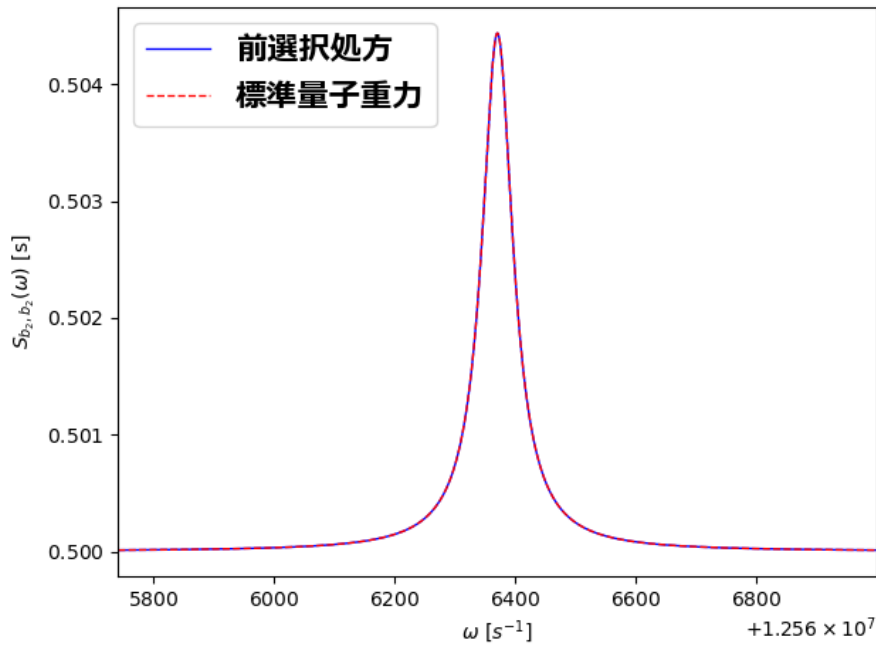


図 4.4 表 4.2 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度

4.3 Miao[3] での光学系の場合

表 4.3 は Miao[3] での光学系を元にしたパラメータである。特に着目すべき値は、鏡の共振角周波数が三つの文献の中で比較的低いこと、また Q 値と共振器内パワーが比較的高いことである。これらのパラメータから出射光位相揺らぎのスペクトル密度を計算した結果が図 4.5 である。以前二つの結果と同じく熱雑音とシュレーディンガー・ニュートン理論のピークが合わさってしまっているが、スペクトル密度比は $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 9.2 \times 10^{-6}$ と比較的大きい値をとっている。ただし最小測定時間は 3250 年と 3 つの文献の中でかなり低くなっているが、その場合でも測定は困難といえる。

また、 $T_0 = 10^{-12}$ K ではスペクトル密度比は $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 7.9 \times 10^{-5}$ とこれまでの結果とは異なりスペクトル密度比が改善する傾向が見られた。また、最小測定時間も 0.27 時間とかなり良い結果が得られた。なぜスペクトル密度比の改善が見られたかは分からなかったが、パラメータの変更により Q 値の高さと共振器内パワーが主に関係していると思われる。

パラメータ	シンボル	値
鏡の質量	M	50 pg
鏡の共振角周波数	ω_m	$2\pi \times 10^5 \text{ s}^{-1}$
SN 角周波数	ω_{SN}	0.49 s^{-1}
Q 値	Q_m	3.2×10^7
温度	T_0	0.1 K
共振器内パワー	P_{cav}	5 nW
透過率	T	10^{-4}

表 4.3 Miao[3] の光学系のパラメータ

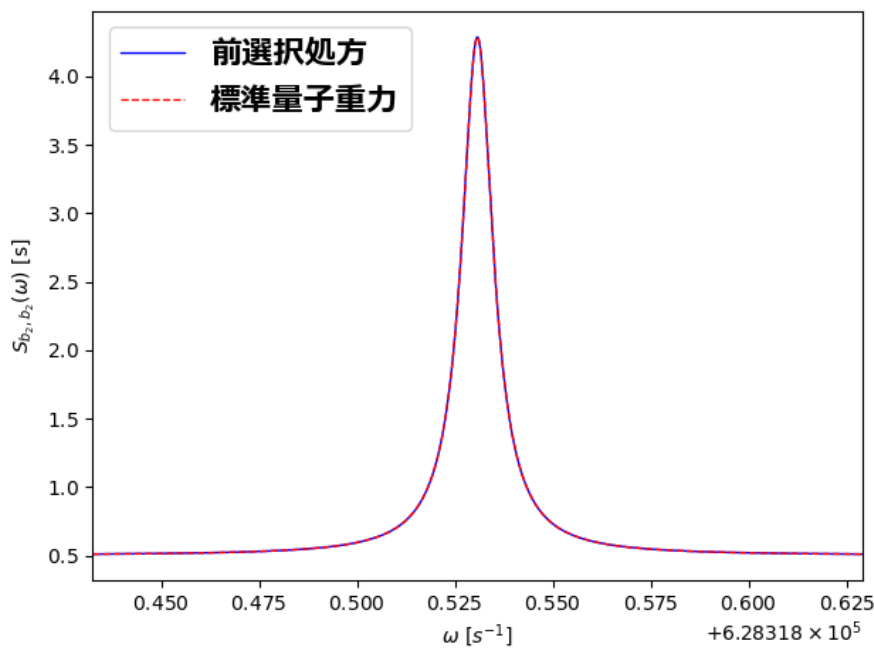


図 4.5 表 4.3 の光学系を用いた出射光位相スペクトル密度

第 5 章

展望: 磁気浮上を用いた実験系による 検証

第 4 章で検証したように、現在の SQL に到達している実験系では $T_0 = 10^{-12}$ K 程度の極低温環境、またスペクトル密度比 $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 10^{-6}$ 程度の精度を測定できる計測器が必要であり、かなり観測が困難なことが窺える。そこで本章では当研究室で実施されている磁気浮上を用いた実験系を提案し、考察する。

5.1 磁気浮上を用いた実験系

図 5.1 は第 3 章で考えた実験系のねじれ振り子の代わりに磁気浮上を用いて懸架を行った実験モデルである。当研究室では磁気浮上させる物体は石英とグラファイトの二つが考えられているが、本研究ではグラファイトを浮上させ、その上にミラーを置くことにより装置を実現させると想定した。

磁気浮上では浮上力と重力により磁石の幅方向と鉛直方向にはトラップされるものの、奥行き方向には理論上復元力が存在しない。そのため、静電アクチュエータを用いて浮上ミラーに復元力を与える必要がある (詳細については宗宮研究室の竹口修論 [12] を参照)。ここでは静電アクチュエータにより散逸の値を一定に保ったまま任意の共振角周波数を得られるとする理想的な状況を想定して解析を行った。

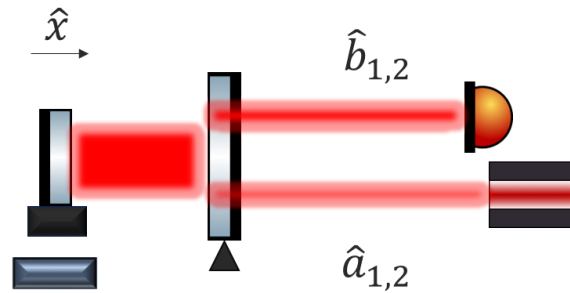


図 5.1 磁気浮上を用いた実験系 磁気浮上部分には静電アクチュエータにより制御がなされている

5.2 結果

表 5.1 は宗宮研究室の小川修論 [13] で測定された散逸の実測値を元にしたパラメータである。ここで質量はグラファイトが 10mg スケールであることを考慮した質量、SN 周波数はオスミウムのもの、共振周波数は $\omega_m \ll \omega_{SN}$ を満たす適当な値を選んだ。また温度は比較的实现しやすいと思われる 1K スケール、共振器内パワーは理想的なパラメータを元を選んだ。

パラメータ	シンボル	値
鏡の質量	M	1 mg
鏡の共振周波数	ω_m	$5.0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$
SN 周波数	ω_{SN}	0.49 s^{-1}
Q 値	Q_m	4.0×10^3
散逸	γ_m	$6.3 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
温度	T_0	1 K
共振器内パワー	P_{cav}	480 nW

表 5.1 磁気浮上を用いた光学系のパラメータ

表 5.1 で与えられたパラメータによりスペクトル密度を計算したグラフが図 5.2 である。このグラフでは Q 値が低いことから熱雑音の影響を少し受けており、これは標準量子重力によるスペクトル密度が少し傾いていることから分かる。ただスペクトル密度比 $S_{b_2, b_2}^{(pre)}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(QM)}(\omega_q) - 1 \approx 1.4 \times 10^{-5}$ 、最小測定時間は 9.0 時間と良い結果が得られており、特にスペクトル密度比はねじれ振子を用いた理想的実験系のスペクトル密度比 $S_{b_2, b_2}^{(pre)}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(QM)}(\omega_q) - 1 \approx 4.3 \times 10^{-5}$ を上回る結果となった。それに対して最小測定時間は、理想的な場合の 3.4×10^{-3} 時間よりは長くなっている。しかし十分実現可能な値を示しており、温度をさらに下げることができればより改善していくため、理論上は有望な実験系であるといえる。

ただこのシミュレーションでは鏡の散逸や静電アクチュエータの制御によるノイズ、グラファイトに鏡を乗せた場合の磁気浮上への影響など様々な影響を無視できる理想的な環境で考えているため、本格的な検証にはこれらの効果を一つ一つ考慮していく必要がある。

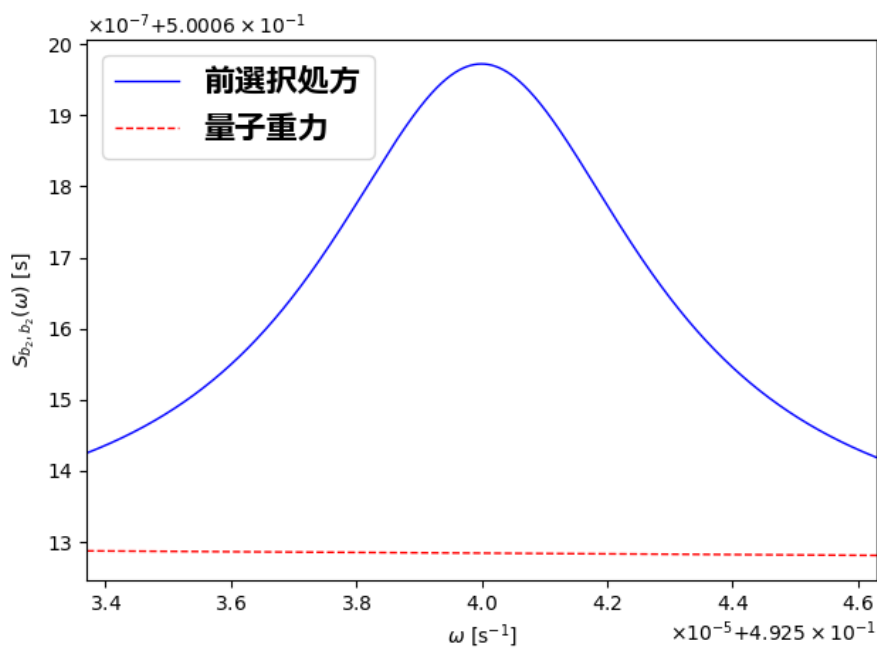


図 5.2 表 5.1 での $\omega = \omega_q$ まわりでのピーク

第 6 章

まとめ

本研究では半古典重力理論の非相対論的極限を考えたシュレーディンガー・ニュートン理論の正否を検証するために適した実験系を模索した。その結果 Yubao[11] にあるような理想的な実験系のパラメータを用いたとしてもそのスペクトル密度比は $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 4.3 \times 10^{-5}$ と非常に小さいが、最小測定時間は 1K スケールでも十分現実的な範囲であった。そこで現在 SQL に到達しているとされる 3 つの文献 Teufel[1], Regal[2], Miao[3] の実験系のパラメータを用いて同様の検証を行ったところ、現実的な最小測定時間に達するためにはその温度スケールは特定の条件下で達成可能とされる $T_0 = 10^{-12}\text{K}$ のピコスケールにまで低温にする必要があり、またそのスペクトル密度比も最も高い場合で $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 7.9 \times 10^{-5}$ と低く、測定の大変さが窺える。

そこで本研究では当研究室で実施されている磁気浮上の技術を用いた実験系を提案した。その結果理想的な仮定を置いた場合であるが、1K スケールでそのスペクトル密度比は $S_{b_2, b_2}^{(\text{pre})}(\omega_q)/S_{b_2, b_2}^{(\text{QM})}(\omega_q) - 1 \approx 1.4 \times 10^{-5}$ 、最小測定時間は 9.0 時間と良い結果が得られており、シュレーディンガー・ニュートン理論の測定に関して有効な手段となる可能性が示された。

しかし今回の結果は鏡の散逸や静電アクチュエータの制御によるノイズ、グラファイトに鏡を乗せた場合の磁気浮上への影響など様々な影響を無視できる仮定で導かれたものであり、本格的な実験ではこれらの影響も考慮しその妥当性を判断する必要があると考えられる。

付録 A

サンプルコード

本論文のグラフを作成するにあたり使用したプログラミングコードを掲載する。

A.1 第3章で用いたコード

第3章でのグラフを作成するために用いたコードをリスト A.1 に示す。このリストでは $T_0 = 1$ K のグラフを作成するためのコードであるが、適宜パラメータを変更することでそれぞれの図を作成した。

Listing A.1 $T_0 = 1$ K でのスペクトル密度のグラフ作成コード

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
3 import numpy as np
4 from scipy.special import hermite  ###*
5 from math import factorial
6 from numba import njit
7 from matplotlib.font_manager import FontProperties
8 import matplotlib.ticker as ptick
9 fp=FontProperties(fname=r'C:\WINDOWS\Fonts\meiryob.ttc',size
    =16)
10 #物理量の定義*
11 hbar =1.05*10**-34  #? する*10**-34
12 kb = 1.38*10**-23  #? する*10**-23
13 c = 3.0 * 10**8
14 M= 0.2
15 omega_m = 4 * 10**-3*(2*np.pi)
16 omega_SN = 0.49
17 omega_q = np.sqrt(omega_m**2 + omega_SN**2)
18 omega_q = round(omega_q,5)
19 Q = 10**7

```

```

20 gam = 4* 10**-10*(2*np.pi)
21
22 P_cav =480*10**-9
23 Trans = 10**-5 #透過率
24 T = 10**0#温度!
25
26 alpha2 = 8*P_cav * hbar * omega_m/(Trans**2*c**2 )
27 beta =alpha2/(M * hbar * gam * omega_q)
28 Gamma2 = 2*kb*T *gam**2/(hbar*omega_SN**3) #高近似Q
29 print('omega_m=',omega_m)
30 print('omega_q=',omega_q)
31 print(beta)
32 print(Gamma2)
33 #それぞれのスペクトル密度の計算*
34 # 関数の定義S_QM
35 def S_QM(omega):
36     numerator = beta**2 / 2 * gam**2 * omega_q**2 + 2 * kb *
37         T * beta / hbar * omega_q * gam**2
38     denominator = (omega_m**2 - omega**2)**2 + gam**2 * omega
39         **2
40     return 1/2 + numerator / denominator
41 def S_pre(omega):
42     S = S_QM(omega)+ 1/2*beta * (beta+2)/(1 + 4*(((omega-
43         omega_q)/gam)**2)) #!(omega_q-omega_m)/gam 周りのグラフを
44         調べたいとき omega_m
45     return S
46
47 #TODO: スペクトル密度を実際にグラフにしてみる
48 %matplotlib inline
49 omega_0,omega_1 = -5*gam+omega_q,5*gam+omega_q #ω!周りの場合q
50 # omega_0,omega_1 =-5*gam+omega_m,5*gam+omega_m #? ω周りの場合m
51 # omega_0,omega_1 =0.01,0.5#* ω全体の場合
52 N = 100000
53 domega = (omega_1 - omega_0)/N
54 S_prei = np.zeros([N],dtype = float )
55 S_QMi = np.zeros([N],dtype=float)
56 for i in range(N):
57     omega = omega_0 + domega * i
58     S_prei[i] = S_pre(omega)

```

```

55     S_QMi[i] = S_QM(omega)
56
57 o0,o1 = omega_0-omega_q,omega_1-omega_q
58 #* グラフの生成
59 omega = np.arange(omega_0,omega_1,domega)
60 plt.plot(omega,S_prei, '-', color='blue',markersize=10,
        linewidth =1, aa=True)
61 plt.plot(omega,S_QMi, '--', color='red',markersize=10,
        linewidth =1, aa=True)
62
63 ax = plt.gca()
64
65
66
67 plt.xlabel('$\\omega$ [s-1])')
68 plt.ylabel('$S_{b_2,b_2}(\\omega)$ [s]')
69
70 ax.xaxis.set_major_formatter(ptick.ScalarFormatter(
        useMathText=True))
71 ax.yaxis.set_major_formatter(ptick.ScalarFormatter(
        useMathText=True))
72
73 plt.xlim(omega_0, omega_1)
74 # plt.ylim(-10,1.5 )
75 #####
76 plt.legend(('前選択処方', '標準量子重
        力'), loc='upper left',prop=fp)
77 plt.tight_layout()
78 plt.savefig('omegaqT=1.png')
79 plt.show()
80 print('S_SN/S_QM=',S_pre(omega_q)/S_QM(omega_q)-1)
81 print('S_SN/S_QM=',S_pre(omega_m)/S_QM(omega_m)-1)
82
83 tau = 1.6*(T/300)**0.73 * (omega_m/10**-2)**0.47 * (184/184)
        **0.49 * (200/M)**0.73 *(10**4/Q)**0.47 * (0.359/(2*np.pi*
        omega_SN))**1.96
84 print(f"tau: {tau}")

```

A.2 第 4 章で用いたコード

以下は Teufel[1] の光学系のパラメータから図 4.1 を作成するために用いたコードである。Regal [2]、Miao [3]、および温度などのパラメータの変更したグラフはこのコードを基に作成した。

Listing A.2 SQL のスペクトル密度のグラフコード

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
3 import numpy as np
4 from scipy.special import hermite   ***
5 from math import factorial
6 from numba import njit
7 from matplotlib.font_manager import FontProperties
8 fp=FontProperties(fname=r'C:\WINDOWS\Fonts\meiryob.ttc',size
   =16)
9 #物理量の定義*
10 hbar =1.05*10**-34 #? する*10**-34
11 kb = 1.38*10**-23 #? する*10**-23
12 c = 3.0 * 10**8
13
14 M= 11 * 10**-12
15 omega_m = (2*np.pi)*1.04 *10**6
16 omega_SN =0.49
17 omega_q = np.sqrt(omega_m**2 + omega_SN**2)
18 Q = 6.2*10**5
19 gam = (2*np.pi)*0.67
20
21 P_cav =1*10**-12
22 Trans = 10**-4 #透過率
23 T = 0.077#温度!
24
25 alpha2 = 8*P_cav * hbar * omega_m/(Trans**2*c**2 )
26 beta =alpha2/(M * hbar * gam * omega_q)
27 Gamma2 = 2*kb*T *gam**2/(hbar*omega_SN**3) #高近似Q
28 print('omega_q-omega_m=',omega_q-omega_m)
29 print('omega_q=',omega_q)
30 print(beta)
31 print(Gamma2)

```

```

32 #それぞれのスペクトル密度の計算*
33 def S_QM(omega):
34     numerator = beta**2 / 2 * gam**2 * omega_q**2 + 2 * kb *
        T * beta / hbar * omega_q * gam**2
35     denominator = (omega_m**2 - omega**2)**2 + gam**2 * omega
        **2
36     return 1/2 + numerator / denominator
37
38 #TODO: スペクトル密度を実際にグラフにしてみる
39 %matplotlib inline
40 omega_0, omega_1 = -10*gam+omega_q, 10*gam+omega_q #ω!周りの場合q
41 # omega_0, omega_1 = -10*gam+omega_m, 10*gam+omega_m #? ω周りの場
    合m
42 # omega_0, omega_1 = 0, 10**7 #* ω全体の場合
43 N = 100000
44 domega = (omega_1 - omega_0)/N
45 S_prei = np.zeros([N], dtype = float )
46 S_QMi = np.zeros([N], dtype=float)
47 for i in range(N):
48     omega = omega_0 + domega * i
49     S_prei[i] = S_pre(omega)
50     S_QMi[i] = S_QM(omega)
51 #* グラフの生成
52 omega = np.arange(omega_0, omega_1, domega)
53 plt.plot(omega, S_prei, '-', color='blue', markersize=10,
        linewidth =1, aa=True)
54 plt.plot(omega, S_QMi, '--', color='red', markersize=10,
        linewidth =1, aa=True)
55
56 ax = plt.gca()
57
58 plt.xlabel('$\\omega$ [s-1])')
59 plt.ylabel('$S_{b_2}(\\omega)$ [s]')
60
61 ax.xaxis.set_major_formatter(ptick.ScalarFormatter(
        useMathText=True))
62 ax.yaxis.set_major_formatter(ptick.ScalarFormatter(
        useMathText=True))
63 plt.xlim(omega_0, omega_1)

```

```

64 #####
65 plt.legend(('前選択処方', '標準量子重
    力'), loc='upper left',prop=fp)
66 plt.tight_layout()
67 plt.savefig('nano.png')
68 plt.show()
69 print('S_SN/S_QM=',S_pre(omega_q)/S_QM(omega_q)-1)
70 tau = 1.6*(T/300)**0.73 * (omega_m/10**-2)**0.47 * (184/28)
    **0.49 * (200/M)**0.73 *(10**4/Q)**0.47 * (0.359/(2*np.pi*
    omega_SN))**1.96
71 print(f"時間tau: {tau}")
72 print(f"日tau: {tau/(24)}")
73 print(f"年tau: {tau/(24*365)}")

```

A.3 第5章で用いたコード

以下は第5章での図5.2を作成するにあたり使用したコードである。

Listing A.3 図5.2のグラフコード

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
3 import numpy as np
4 from scipy.special import hermite ###
5 from math import factorial
6 from numba import njit
7 from matplotlib.font_manager import FontProperties
8 import matplotlib.ticker as ptick
9 fp=FontProperties(fname=r'C:\WINDOWS\Fonts\meiryob.ttc',size
    =16)
10 #物理量の定義*
11 hbar =1.05*10**-34 #? する*10**-34
12 kb = 1.38*10**-23 #? する*10**-23
13 c = 3.0 * 10**8
14 M= 10**-3
15 omega_m = 5*10**-2
16 omega_SN = 0.49
17 gam = 6.3 * 10**-6
18 Q = omega_m/(2*gam)
19 # omega_m = 2*gam*Q
20 omega_q = np.sqrt(omega_m**2 + omega_SN**2)

```

```

21 omega_q = round(omega_q,5)
22 P_cav =480*10**-9
23 Trans = 10**-5 #透過率
24 T = 10**0#温度!
25
26 alpha2 = 8*P_cav * hbar * omega_m/(Trans**2*c**2 )
27 beta =alpha2/(M * hbar * gam * omega_q)
28 Gamma2 = 2*kb*T *gam**2/(hbar*omega_SN**3) #高近似Q
29 print(f"Q: {Q}")
30 print(f"omega_m: {omega_m}")
31 print('omega_q=',omega_q)
32 print(beta)
33 print(Gamma2)
34 #それぞれのスペクトル密度の計算*
35 # 関数の定義S_QM
36 def S_QM(omega):
37     numerator = beta**2 / 2 * gam**2 * omega_q**2 + 2 * kb *
38         T * beta / hbar * omega_q * gam**2
39     denominator = (omega_m**2 - omega**2)**2 + gam**2 * omega
40         **2
41     return 1/2 + numerator / denominator
42 def S_pre(omega):
43     S = S_QM(omega)+ 1/2*beta * (beta+2)/(1 + 4*(((omega-
44         omega_q)/gam)**2)) #!(omega_q-omega_m)/gam 周りのグラフを
45         調べたいとき omega_m
46     return S
47
48 #TODO: スペクトル密度を実際にグラフにしてみる
49 %matplotlib inline
50 omega_0,omega_1 = -gam+omega_q,gam+omega_q #ω!周りの場合q
51 # omega_0,omega_1 =-5*gam+omega_m,5*gam+omega_m #? ω周りの場合m
52 # omega_0,omega_1 = 0.004,0.7 ## ω全体の場合
53 N = 1000000
54 domega = (omega_1 - omega_0)/N
55 S_prei = np.zeros([N],dtype = float )
56 S_QMi = np.zeros([N],dtype=float)
57 for i in range(N):
58     omega = omega_0 + domega * i
59     S_prei[i] = S_pre(omega)

```

```

56     S_QMi[i] = S_QM(omega)
57
58 o0,o1 = omega_0-omega_q,omega_1-omega_q
59 #* グラフの生成
60 omega = np.arange(omega_0,omega_1,domega)
61 plt.plot(omega,S_prei, '-', color='blue',markersize=10,
        linewidth =1, aa=True)
62 plt.plot(omega,S_QMi, '--', color='red',markersize=10,
        linewidth =1, aa=True)
63
64 ax = plt.gca()
65
66
67
68 plt.xlabel('$\\omega \\ $[$\\mathrm{s}^{-1}$]')
69 plt.ylabel('$S_{b_2,b_2}(\\omega)\\ $[s]')
70
71 ax.xaxis.set_major_formatter(ptick.ScalarFormatter(
        useMathText=True))
72 ax.yaxis.set_major_formatter(ptick.ScalarFormatter(
        useMathText=True))
73
74 plt.xlim(omega_0, omega_1)
75 # plt.ylim(-10,1.5 )
76 #####
77 plt.legend(('前選択処方', '量子重力'), loc='upper left',prop=fp)
78 plt.tight_layout()
79 plt.savefig('magT=1.png')
80 plt.show()
81 print('S_SN/S_QM=',S_pre(omega_q)/S_QM(omega_q)-1)
82 print('S_SN/S_QM=',S_pre(omega_m)/S_QM(omega_m)-1)
83
84 tau = 1.6*(T/300)**0.73 * (omega_m/10**-2)**0.47 * (184/184)
        **0.49 * (200/M)**0.73 *(10**4/Q)**0.47 * (0.359/(2*np.pi*
        omega_SN))**1.96
85 print(f"時間tau: {tau}")
86 print(f"日tau: {tau/(24)}")
87 print(f"年tau: {tau/(24*365)}")

```

謝辞

多くの方々のご支援をいただき、本卒業論文を完成させることができました。この場を借りて感謝を述べさせていただきます。

指導教員である宗宮健太郎教授 には、本研究を進めるにあたり指針となる助言を何度もいただきました。またスモールミーティングでは浅学な私に対し、レーザーを用いた実験装置の理論、量子重力に関する資料の提供、量子測定に関する理論やイメージなど、大変多くのことを教えていただきました。

特任助教である Haoyu Wang 先生には、研究テーマの決定に関して多くのアドバイスをいただきました。また、私の不自由な英語に対しても真摯に対応してくださり、苦手な英語に対して少し自信が持てるようになりました。

ゼミで講演してくだった Shilu 先生には、拙い英語の説明でも真摯に対応してくださり、量子重力理論について詳しく教えていただきました。

D3 の阿部さんには、熱雑音や研究室での様々な内容を優しく教えていただきました。

D2 の鈴木さんには、率先して研究室のイベントを開いて頂き、私も楽しく参加させていただきました。

D1 の Diego さんには、プログラミングやパソコンの使い方について詳しく教えていただきました。また同じく日常的に英語に触れる機会をいただきました。

M2 の羽場さんには、姿勢制御や普段の生活から大変お世話になりました。

M1 の井殿さんには、実験装置の使い方を教えていただき、学校生活でのアドバイスもいただきました。

M1 の竹下さんには、コロキウム発表のアドバイスや大学院での授業内容について詳しく教えていただきました。

M1 の正木さんには、同じ時期にこの研究室に入ったこともあり多くのことを共有させていただきました。また磁気浮上についても詳しく教えていただきました。

同期の吉留君、山口さんとは、授業や研究など様々な場面で助けあいながら楽しく過ごさせていただきました。

そしてここまで育て支援してくれた家族に感謝しています。遠く離れた地に送り出す不安を堪え、何も言わず大学生生活に集中させていただいたおかげで、多くのことを学ぶことができました。

最後に、この場で書ききれなかった多くの皆様に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] J. D. Teufel, T. Donner, M. A. Castellanos-Beltran, J. W. Harlow, K. W. Lehnert , Nanomechanical motion measured with an imprecision below that at the standard quantum limit, [Nature Nanotechnology](#) , 820,823 (2009).
- [2] C. A. Regal, J. D. Teufel , K. W. Lehnert , Measuring nanomechanical motion with a microwave cavity interferometer, [Nature Physics](#) , 555,560 (2008).
- [3] Haixing Miao, Stefan Danilishin, Thomas Corbitt, Yanbei Chen , Standard Quantum Limit for Probing Mechanical Energy Quantization, [Phys. Rev. Lett.](#) , 100402 (2009).
- [4] 清水明, 量子論の基礎 (サイエンス社, 2004).
- [5] K. Koshino and A. Shimizu, Quantum Zeno Effect by General Measurements, [Physics Reports](#) , 0411145 (2005).
- [6] Bassam Helou, Jun Luo, Hsien-Chi Yeh, Cheng-gang Shao, B. J. J. Slagmolen, David E. McClelland, and Yanbei Chen, Measurable signatures of quantum mechanics in a classical spacetime, [Phys. Rev. D](#) , 044008 (2017).
- [7] Huam Yang, Haixing Miao, Da-Shin Lee, Bassam Helou, and Yanbei Chen , Macroscopic Quantum Mechanics in a Classical Spacetime, [Phys. Rev. Lett.](#) , 170401 (2013).
- [8] L. -M. Peng, G. Ren, S. L. Dudarev and M. J. Whelan , Debye-Waller Factors and Absorptive Scattering Factors of Elemental Crystals, [Acta Cryst.](#) , 456,470 (1996).
- [9] S. M. Barnett, *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford University, 2002).
- [10] Max Tegmark, Harold S. Shapiro , Decoherence produces coherent states: an explicit proof for harmonic chains, [PRE](#) 50 , 2538,2547 (1994).
- [11] Yubao Liu, Gaixing Miao, Yanbei Chen, and Yiqiu Ma , Semiclassical gravity phenomenology under the causal-conditional quantum measurement prescription, [Phys. Rev. D](#) , 024004 (2013).
- [12] 竹口浩太郎, 巨視的量子現象の観測に向けた反磁性浮上による鏡懸架システムの開発, 修士論文, 東京工業大学 (2024).
- [13] 小川潤, 巨視的な系における量子力学の検証に向けた磁気浮上による鏡の支持方法の開発, 修士論文, 東京工業大学 (2021).