

卒業論文

新しい姿勢制御法開発のための  
光共振器の制御実験

東京工業大学理学院物理学系 宗宮研究室

羽場大起

2月13日

# 概要

Einstein の提唱した一般相対性理論の帰結より、質量を持つ物体が加速度運動をすると、その際に生じた時空の歪みが波となって空間中を伝搬する。この波は重力波と呼ばれ、これを直接観測することは一般相対性理論の実験的な検証にとどまらず、例えば天体物理学においては、電磁波では観測できない天体内部などを重力波を用いて観測するなど、多くの分野において非常に大きな意味を持っている。しかしその直接観測は非常に難しく、実際に重力波の直接観測に初成功したのは、アメリカに建設された重力波望遠鏡である LIGO が 2015 年 9 月 14 日にとらえた GW150914 という重力波であり、Einstein が予言した時から約 100 年が経過していた。

重力波の直接観測が困難である要因として、重力波による振動の振幅が非常に小さいことが挙げられる。そこで LIGO や日本に建設された重力波望遠鏡である KAGRA では、Michelson 干渉計に光共振器を組み込んだ複合共振器が用いられており、光路長や鏡の姿勢に対して厳しい要求が課せられている。

KAGRA は、熱雑音を軽減するために鏡の温度を 20K まで冷却する低温望遠鏡である。そのため鏡の素材には、熱伝導率が高く、低温での熱散逸が少ないサファイア結晶が用いられる。しかしその一方で、サファイア結晶内における非一様な複屈折により制御信号の線形性が低下し、姿勢制御に支障をきたすという問題が生じている。この問題に対し、当研究室では多重分割フォトディテクタを用いて適切な制御信号に復調するという方法の開発、実験的検証を行っている。そこで本研究では、この姿勢制御法の実験的検証に向けた、Fabry-Perot 共振器の長さ制御、及び、DC の姿勢制御信号の取得を行った。

# 目次

第 1 章	重力波	1
1.1	本論文で用いる表記法	1
1.2	一般相対性理論	1
1.3	Einstein 方程式の線形化	2
1.4	重力波の伝搬	4
1.5	重力波による空間変化	6
第 2 章	重力波の検出	8
2.1	Michelson 干渉計	8
2.2	Michelson 干渉計の重力波に対する応答	9
2.3	Fabry-Perot 共振器	11
第 3 章	複屈折	15
3.1	複屈折とは	15
3.2	KAGRA における複屈折問題	15
3.3	本研究の目的	16
第 4 章	実験原理	18
4.1	フィードバック制御	18
4.2	制御系の安定性	20
4.3	Hermite-Gaussian モード	24
4.4	Pound-Drever-Hall 法	30
4.5	Wave Front Sensing 法	32
4.6	オープンループ伝達関数の測定	36
第 5 章	実験	38
5.1	実験機器	38
5.2	実験準備	44
5.3	フィネスの測定	46
5.4	Fabry-Perot 共振器の長さ制御	49
5.5	オープンループ伝達関数の測定	52
5.6	DC の WFS 信号の取得	53

---

第 6 章	まとめと今後の展望	57
6.1	本研究のまとめ . . . . .	57
6.2	今後の展望 . . . . .	57
付録 A	作成した図面	58
謝辞		59
参考文献		61

# 第 1 章

## 重力波

ここでは、一般相対性理論から導き出される重力波の一般論について議論する。

### 1.1 本論文で用いる表記法

本論文では、四次元時空の座標を  $x^\mu$  のように表現する。なお、添え字にギリシャ文字が使われている場合、その添え字は 0 から 3 の値をとる。 $x^\mu$  の具体的な表式は以下のようになっている:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (1.1)$$

また、上下の添え字で同じ文字が使われている場合、その文字についての 0 から 3 までの和を取るという意味になる。すなわち、

$$\sum_{n=0}^3 A_\mu A^\mu = A_\mu A^\mu \quad (1.2)$$

というように表記される。このような記法を Einstein の縮約記法と呼ぶ。

また、偏微分の操作を以下のように表記する:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\nu A_\mu = A_\mu{}^{;\nu} \quad (1.4)$$

### 1.2 一般相対性理論

一般相対性理論において、四次元時空における微小な距離離れた二点の、時間座標も含めた距離の二乗は四次元線素と呼ばれ、これを  $ds^2$  とすると、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.5)$$

という表式となる。ここで、 $g_{\mu\nu}$  は計量テンソルと呼ばれ、四次元時空の幾何学的な性質を決める物理量である。

特に、真空中での計量テンソルは Minkowski 計量と呼ばれ、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  と表記される。Minkowski 計量は以下で与えられる:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$g_{\mu\nu}$  は以下で与えられる Einstein 方程式に従う:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

$G_{\mu\nu}$  は Einstein テンソルであり、以下で与えられる:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.8)$$

ここで、 $R_{\mu\nu}$  は Ricci テンソルであり、 $R$  は Ricci スカラーである。Ricci テンソルおよび Ricci スカラーは、以下で定義される Riemann の曲率テンソルを縮約することにより得られる:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\epsilon} = \partial_{\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\epsilon} - \partial_{\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\epsilon} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\delta}\Gamma_{\delta\nu}^{\epsilon} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\delta}\Gamma_{\delta\mu}^{\epsilon} \quad (1.9)$$

すなわち、以下の等式が成立する:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad R = R^{\mu}_{\mu} \quad (1.10)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon}$  は Christoffel 記号であり、以下で定義される:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon} = \frac{1}{2} g^{\epsilon\sigma} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (1.11)$$

### 1.3 Einstein 方程式の線形化

ここで、重力が弱い場合を考える。この場合、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は Minkowski 計量とその摂動項を表すテンソル  $h_{\mu\nu}$  の線形和で近似される:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

ここで  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  である。

これより、Christoffel 記号は以下のように近似される:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon} = \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\delta} (h_{\delta\nu,\mu} + h_{\delta\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\delta}) \quad (1.13)$$

計算において、Minkowski 計量は微分により 0 となることと、微小変化の二乗は 0 と近似できることを用いている。

これにより、Riemann の曲率テンソルは以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} R_{\mu\sigma\nu}^{\epsilon} &\simeq \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\delta} (h_{\delta\nu,\mu\sigma} - h_{\mu\nu,\delta\sigma} - h_{\delta\sigma,\mu\nu} + h_{\mu\sigma,\delta\nu}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

ここで、Christoffel 記号の二乗の大きさは摂動項の二乗程度の大きさに当たるため、微小量として落としている。

これを用いて、Ricci テンソルおよび Ricci スカラーは以下のように計算される：

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R_{\mu\epsilon\nu}^{\epsilon} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\epsilon\delta}(h_{\delta\nu,\mu\epsilon} - h_{\mu\nu,\delta\epsilon} - h_{\delta\epsilon,\mu\nu} + h_{\mu\epsilon,\delta\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(h_{\epsilon\nu,\mu}^{\epsilon} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\delta,\nu}^{\delta})
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&\simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&\simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\epsilon\nu,\mu}^{\epsilon} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\delta,\nu}^{\delta}) \\
&= h_{\epsilon\nu}^{\epsilon\nu} - \square h
\end{aligned} \tag{1.16}$$

ここで、 $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$ 、 $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  である。

以上より、Einstein テンソルは以下で与えられる：

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( h_{\epsilon\nu,\mu}^{\epsilon} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\delta,\nu}^{\delta} - \eta^{\mu\nu} (h_{\epsilon\alpha}^{\epsilon\alpha} - \square h) \right) \tag{1.17}$$

ここでさらに、摂動項を以下の形に定義しなおす：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{1.18}$$

この時、以下の等式が成立する：

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = h - \frac{1}{2} \times 4 \times h = -h \tag{1.19}$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \tag{1.20}$$

これにより、Ricci テンソルは以下のように書き直される：

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \bar{h}_{\epsilon\nu,\mu}^{\epsilon} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{,\mu}^{\epsilon} - \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square \bar{h} + \bar{h}_{,\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\delta,\nu}^{\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{,\delta}^{\nu} \right) \tag{1.21}$$

これにより、Einstein テンソルは以下のように書き直される：

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \bar{h}_{\epsilon\nu,\mu}^{\epsilon} - \square \bar{h}_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\delta,\nu}^{\delta} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\epsilon\delta}^{\epsilon\delta} \right) \tag{1.22}$$

ここで、以下のようなゲージ変換を考える：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \tag{1.23}$$

この変換により、計量テンソルは以下のようになる：

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \\
&= (\delta_{\mu}^{\alpha} - \xi_{,\mu}^{\alpha})(\delta_{\nu}^{\beta} - \xi_{,\nu}^{\beta})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
&\simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}
\end{aligned}$$

したがって、摂動項は以下のように変形されることが分かる:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (1.24)$$

$$h' = h - 2\xi^\mu{}_{,\mu} \quad (1.25)$$

また、この摂動項に対し以下が成立する:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha} \quad (1.26)$$

ここで、

$$\bar{h}'_{\mu\nu,\beta} = \partial_\beta \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu,\beta} - \xi_{\mu,\nu\beta} - \xi_{\nu,\mu\beta} + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha\beta} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{h}'^\mu{}_{\nu,\mu} &= \eta^{\mu\beta} \bar{h}'_{\mu\nu,\beta} = \bar{h}^\mu{}_{\nu,\mu} - \xi^\mu{}_{,\nu\mu} - \square\xi_\nu + \delta^\nu_\beta \xi^\alpha{}_{,\alpha\beta} \\ &= \bar{h}^\mu{}_{\nu,\mu} - \square\xi_\nu \end{aligned} \quad (1.28)$$

となるから、式が0となるような  $\xi^\mu$  を選べば、常に調和条件を満たすようにすることが出来る。調和条件は以下で与えられる:

$$\bar{h}'^\mu{}_{\nu,\mu} = 0 \quad (1.29)$$

そのような  $\xi^\mu$  の下で、Einstein テンソルは以下のように表現できる:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

したがって、線形化された Einstein 方程式は以下ようになる:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.31)$$

特に真空中では、 $T_{\mu\nu} = 0$  となり、Einstein 方程式は以下の形になる:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.32)$$

## 1.4 重力波の伝搬

式 (1.32) を解くことにより、重力波の真空中での伝搬を議論する。

この方程式は波動方程式である。そこで、今回はこの方程式の解として平面波を考える:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) \quad (1.33)$$

なお、 $a_{\mu\nu}$  は対称テンソルであり、定数である。これを式 (1.32) に代入する:

$$\begin{aligned} \square a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) &= a_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -a_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \exp(ik_\lambda x^\lambda) \end{aligned}$$

この式が常に0となっているため、以下の式が導かれる:

$$a_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0 \quad (1.34)$$



$a_{\mu\nu}$  は定数であるから、

$$\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0 \quad (1.35)$$

であればよい。この式から、重力波は真空中を光速で伝わる事が分かる。

同様に、式 (1.29) に代入することにより以下の等式を得る:

$$\eta^{\nu\lambda} k_\nu a_{\mu\lambda} = 0 \quad (1.36)$$

ここで、式 (1.23) で与えられたゲージ変換に対し、 $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \chi^\mu$  と変換することを考える。この時、 $\chi^\mu$  を以下の方程式を満たすようにとる:

$$\square \chi_\mu = 0 \quad (1.37)$$

こうすることで、このような変換に対しても常に調和条件は満たされる。ここで、先程と同様に式 (1.37) の解を以下のような形に仮定する:

$$\chi_\mu = b_\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda) \quad (1.38)$$

この時、 $b_\mu$  は式 (1.25) について、 $h' = 0$  となるように選ぶ。このような条件をトレースレス条件と呼ぶ。すなわち、トレースレス条件下では以下が成立する:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (1.39)$$

また、 $h'_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda)$  と置き、式 (1.24) に代入することにより、以下の等式を得る:

$$a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} - i(b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \quad (1.40)$$

ここで、 $a'_{\mu\nu} = 0$  となるよう  $b_\mu$  を決定する。これは、重力波が空間成分のみを持つことを示している。

ここで、今まで出てきた条件を整理しよう。簡単のため、重力波が  $z$  方向に伝搬している場合を考える。すなわち、 $-k_0 = k_3 = k, k_1 = k_2 = 0$  である。この時、式 (1.36) を展開すると以下のようなになる:

$$k(a_{\mu 0} + a_{\mu 3}) = 0 \quad (1.41)$$

また、トレースレス条件を具体的に書き下すと以下のようなになる:

$$\begin{aligned} h &= \eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} \\ &= -a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、以下の条件式を得ることができる:

$$-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \quad (1.42)$$

まとめると、以下のようなになる:

$$-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \quad (1.43)$$

$$a_{\mu 0} + a_{\mu 3} = 0 \quad (1.44)$$

$$a_{\mu 0} = 0 \quad (1.45)$$

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (1.46)$$

これらの条件により、 $a_{\mu\nu}$  の独立な成分は二つのみとなる。その独立な二つの成分を  $h_+$ ,  $h_\times$  とすると、 $a_{\mu\nu}$  は以下のように表わせる:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

以上より、真空中の重力波を表す解は、以下で表わせる:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[i(-\omega t + kz)] \quad (1.48)$$

真空中を伝搬する重力波は、適切なゲージ変換により、横波でありかつトレースレス条件を満たすようにすることができる。このようなゲージ条件をトランスバース・トレースゲージ (TTゲージ) と呼ぶ。

## 1.5 重力波による空間変化

重力波は計量に対して摂動を与えることから、空間の距離変化を起こすことが分かる。重力波が存在するときの四次元線素  $ds^2$  は以下ようになる:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (1 + h_+ \cos(-\omega t + kz))dx^2 + (1 - h_+ \cos(-\omega t + kz))dy^2 + 2h_\times \cos(-\omega t + kz)dxdy + dz^2 \quad (1.49)$$

ここで、 $h_\times = 0$  とした時、式 (1.49) は以下ようになる:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (1 + h_+ \cos(-\omega t + kz))dx^2 + (1 - h_+ \cos(-\omega t + kz))dy^2 + dz^2 \quad (1.50)$$

この時の偏光を + 偏光と呼ぶ。すなわち、 $x$  軸方向に空間が伸びる際、 $y$  軸方向の空間は縮むというように差動変位を起こすことが分かる。また、 $h_+ = 0$  の時、

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + 2h_\times \cos(-\omega t + kz)dxdy + dz^2 \quad (1.51)$$

となる。この時の偏光を  $\times$  偏光と呼ぶ。これは、 $x$  軸及び、 $y$  軸に対し  $45^\circ$  傾いた二本の軸について、先程と同様に差動変位していることを示している。 $xy$  平面上に存在する円周の上に並ぶ質点に、 $z$  軸方向から重力波が入射した際の二つの偏光ごとの応答の時間変化を図 1.1 に示す。

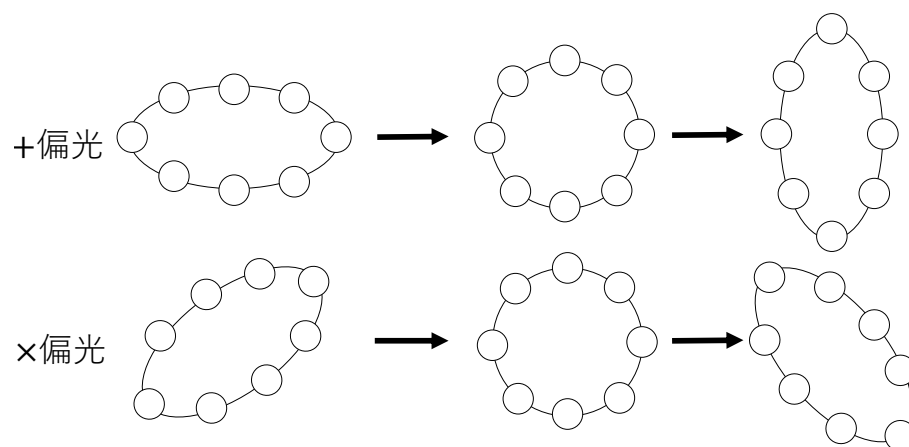


図 1.1 重力波による自由質点の変化

## 第2章

# 重力波の検出

重力波を検出するためには、空間の微小な距離変化を感知できればよい。しかし、重力波が与える距離変化は極めて微小であり、通常の測定では感知することができない。そこで用いられるのが、干渉計を用いた方法である。以下では、干渉計と共振器の説明、及び、それらの重力波への応答について議論する。

### 2.1 Michelson 干渉計

Michelson 干渉計とは、レーザーの光をビームスプリッターで分離し、分離した光を鏡で反射させた後にビームスプリッターで合流させ、干渉させる装置である。LIGO や KAGRA などの重力波検出器ではこの Michelson 干渉計が用いられている。Michelson 干渉計を図 2.1 に示す。

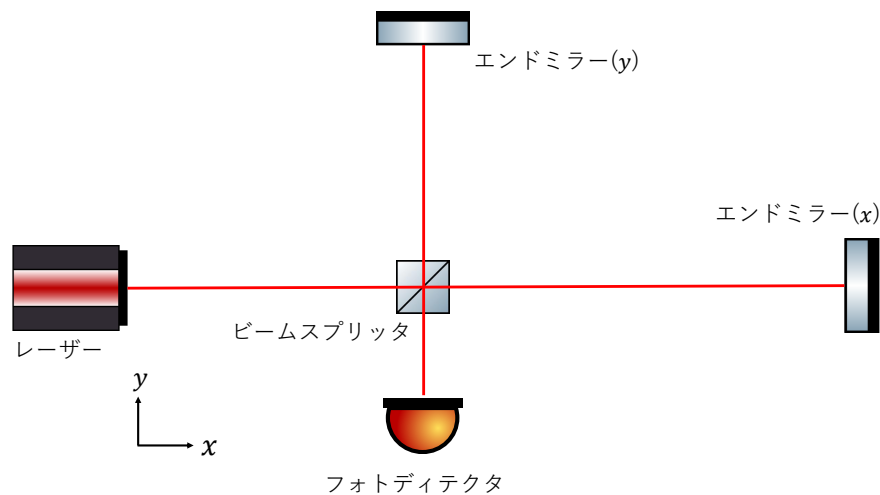


図 2.1 Michelson 干渉計

以下では、具体的な重力波の検出原理について見ていく。

初めに、以下のような電場がビームスプリッターに入射することを考える：

$$E_{\text{in}} = E_0 \exp(i\Omega t) \quad (2.1)$$

ここで、 $\Omega$  はレーザーの角周波数である。 $x, y$  方向にそれぞれ分離した光が、ビームスプリッターに戻ってくる際に生じる位相差をそれぞれ  $\phi_x, \phi_y$  と置く。ビームスプリッターで二つの光はちょうど半分の強度になっているとすると、Michelson 干渉計の出力電場は以下のようになる:

$$E_{\text{out}} = \frac{1}{2} E_0 (\exp[i(\Omega t - \phi_x)] + \exp[i(\Omega t - \phi_y)]) \quad (2.2)$$

したがって、出力強度を  $P_{\text{out}}$  とすると、 $P_{\text{out}} = |E_0|^2$  より、以下のようになる:

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= \left| \frac{E_0}{2} \right|^2 |\exp(i(\Omega t - \phi_x)) + \exp(i(\Omega t - \phi_y))|^2 \\ &= \frac{|E_0|^2}{2} (1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \\ &= \frac{1}{2} P_{\text{in}} (1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

したがって、出力強度は両腕を通過するときが発生する位相変化の差  $\phi_x - \phi_y$  に依存する。

## 2.2 Michelson 干渉計の重力波に対する応答

以下では、重力波が到達した際の Michelson 干渉計の応答を議論する。以降では、 $z$  軸方向から + 偏光の重力波が到達することを考える。すなわち、式 (1.48) において、 $h_+ = h(t)$ ,  $h_\times = 0$  である。

まず、 $x$  軸方向に進行する光を考える。重力波が到達した時、四次元線素  $ds^2$  は以下のようになる:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (1 + h(t))dx^2 \quad (2.4)$$

光においては、 $ds = 0$  であるから、

$$dx^2 = \frac{1}{1 + h(t)} (cdt)^2 \quad (2.5)$$

となる。すなわち、

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1 + h(t)}} cdt \quad (2.6)$$

である。ここで、 $|h(t)| \ll 1$  であるから、以下のように近似を行うことができる:

$$dx \simeq \left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) cdt \quad (2.7)$$

ここで、この式を積分することにより、往復にかかる時間を求める。

まず、端の鏡に到達するのにかかる時間を求める。基線長を  $l_x$  とすると、

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) dt = \frac{l_x}{c} \quad (2.8)$$

$$\therefore (t_1 - t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} h(t) dt = \frac{l_x}{c} \quad (2.9)$$

となる。同様に、鏡からビームスプリッターへ移動する際にかかる時間は以下ようになる:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) dt = \frac{l_x}{c} \quad (2.10)$$

$$\therefore (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt = \frac{l_x}{c} \quad (2.11)$$

式 (2.9) と式 (2.11) を足し合わせる:

$$(t_2 - t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} h(t) dt = \frac{2l_x}{c} \quad (2.12)$$

ここで、 $t_2 - t_0 = \Delta t_x$  と置くと、式 (2.12) は以下のように書き換わる:

$$\Delta t_x = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_x} h(t) dt + \frac{2l_x}{c} \quad (2.13)$$

ここで、 $|h(t)| \ll 1$  であるから、 $\Delta t_x \simeq \frac{2l_x}{c}$  と近似できる。したがって、式 (2.13) は以下のように書き換わる:

$$\Delta t_x = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l_x}{c}} h(t) dt + \frac{2l_x}{c} \quad (2.14)$$

同様の議論により、 $y$  軸方向に進む光について、往復にかかる時間が計算できる:

$$\Delta t_y = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l_y}{c}} h(t) dt + \frac{2l_y}{c} \quad (2.15)$$

したがって、二つの光の位相差を  $\delta\phi$  とすると、

$$\delta\phi = \Omega(\Delta t_x - \Delta t_y) = \frac{2\Omega}{c}(l_x - l_y) + \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l}{c}} h(t) dt \quad (2.16)$$

となる。ここで、第二項では  $l_x \simeq l_y \simeq l$  と近似している。第一項は Michelson 干渉計の基線長に依存する項なので、重力波による位相差を表しているのは第二項である。これを、 $\delta\phi_{\text{GW}}$  とすると、 $\delta\phi_{\text{GW}}$  は以下で表される:

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l}{c}} h(t) dt \quad (2.17)$$

ここで、 $h(t)$  をフーリエ変換することにより、Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答関数が求まる。ここで、

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.18)$$

とすれば、 $\delta\phi_{\text{GW}}$  は以下で与えられる:

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2l}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt \quad (2.19)$$

なお、 $h(\omega)$  は  $h(t)$  をフーリエ変換である。積分を進めていくと以下ようになる:

$$\begin{aligned}\delta\phi_{\text{GW}} &= \Omega \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) \left(\frac{1}{i\omega}\right) (e^{i\omega(t+\frac{2l}{c})} - e^{i\omega t}) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) e^{i\frac{\omega l}{c}} h(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega\end{aligned}\quad (2.20)$$

実際には、重力波を検出した時刻を原点とするので、 $t_0 \rightarrow t_0 - \frac{2l}{c}$  とすると、以下のようになる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) e^{-i\frac{\omega l}{c}} h(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega\quad (2.21)$$

したがって、Michelson 干渉計の周波数応答関数を  $H_{\text{MI}}$  とすると、 $H_{\text{MI}}$  は以下で表される:

$$H_{\text{MI}} = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) e^{-i\frac{\omega l}{c}}\quad (2.22)$$

式 (2.22) から、角周波数  $\omega$  の重力波が Michelson 干渉計を用いて検出したい時に、最も感度の良くなる基線長が分かる。すなわち、

$$\frac{\omega l}{c} = \frac{\pi}{2}\quad (2.23)$$

を満たす  $l$  において、感度は最大となる。しかし、例として 150Hz の重力波を検出したい場合、 $l = 500\text{km}$  となり現実的な設計とならない。したがって、実際の重力波検出器では Fabry-Perot 共振器を組み込むことで実効的な基線長を稼いでいる。

## 2.3 Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot 共振器とは、向い合う二枚の鏡を用いて内部に光をため込む装置である。鏡の距離が特定の長さになると、干渉を起こして入射光よりも大きな光をため込むことができるようになる。図 2.2 に Fabry-Perot 共振器を示す。

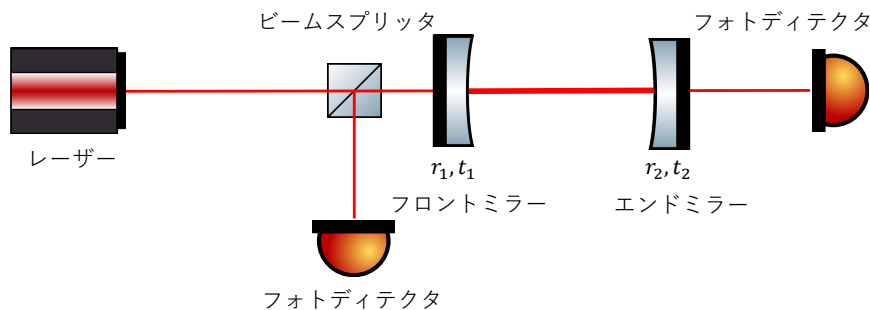


図 2.2 Fabry-Perot 共振器

以降では、具体的に Fabry-Perot 共振器に入射する光に対する反射光や透過光、及び共振器内の光の強度について議論し、最後に共振器の性質を示す言葉を定義する。

レーザーを入射させる側の鏡 (フロントミラーと呼ぶ) の振幅反射率及び透過率を  $r_1, t_1$  とし、レーザーが透過する側の鏡 (エンドミラーと呼ぶ) の振幅反射率及び透過率を  $r_2, t_2$  とする。本論文で単に反射率・透過率という文言を用いる際には、強度反射率・透過率のことを指す。これは振幅反射率・透過率の二乗で与えられる。またエネルギー保存則より、理想的な鏡では強度反射率・透過率の和は 1 となる。すなわち、以下の等式が成立する:

$$r_1^2 + t_1^2 = 1 \quad (2.24)$$

$$r_2^2 + t_2^2 = 1 \quad (2.25)$$

フロントミラーとエンドミラーの距離を共振器長と呼ぶ。これを  $L$  とすると、共振器内を往復する際には  $\phi = 2\Omega L/c$  だけ位相変化する。 $\Omega$  はレーザーの角周波数である。これを用いて、フロントミラーに  $E_0$  の光が入射した際の反射光  $E_r$ 、透過光  $E_t$ 、および共振器内の光  $E_{\text{cav}}$  は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} E_r &= -r_1 E_0 + t_1 r_2 t_1 e^{-i\phi} E_0 + t_1 r_2 r_1 r_2 t_1 e^{-2i\phi} E_0 + \dots \\ &= -r_1 E_0 + t_1^2 r_2 e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-i\phi})^n E_0 \\ &= -r_1 E_0 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} E_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} E_t &= t_1 t_2 e^{-i\phi/2} E_0 + t_1 r_2 r_1 t_1 e^{-3i\phi/2} E_0 + \dots \\ &= t_1 t_2 e^{-i\phi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-i\phi})^n E_0 \\ &= \frac{t_1 t_2 e^{-i\phi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} E_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{cav}} &= t_1 E_0 + t_1 r_2 r_1 e^{-i\phi} E_0 + t_1 r_2 r_1 r_2 r_1 e^{-2i\phi} E_0 + \dots \\ &= t_1 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-i\phi})^n E_0 \\ &= \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} E_0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

これらの式から反射光、透過光及び共振器の光を計算することができる:

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 \\ &= \frac{(r_2 - r_1)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} P_t &= |E_t|^2 \\ &= \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{cav}} &= |E_{\text{cav}}|^2 \\ &= \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \\ &= \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2(\frac{\phi}{2})} |E_0|^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$



$P_r, P_t$  及び  $P_r + P_t$  をグラフにプロットすると図 2.3 のようになる。ここでは、 $|E_0| = 1, r_1 = \sqrt{0.95}, r_2 = \sqrt{0.99}$  としている。エネルギー保存則より、 $P_r + P_t = 1$  となり一定となっていることが分かる。

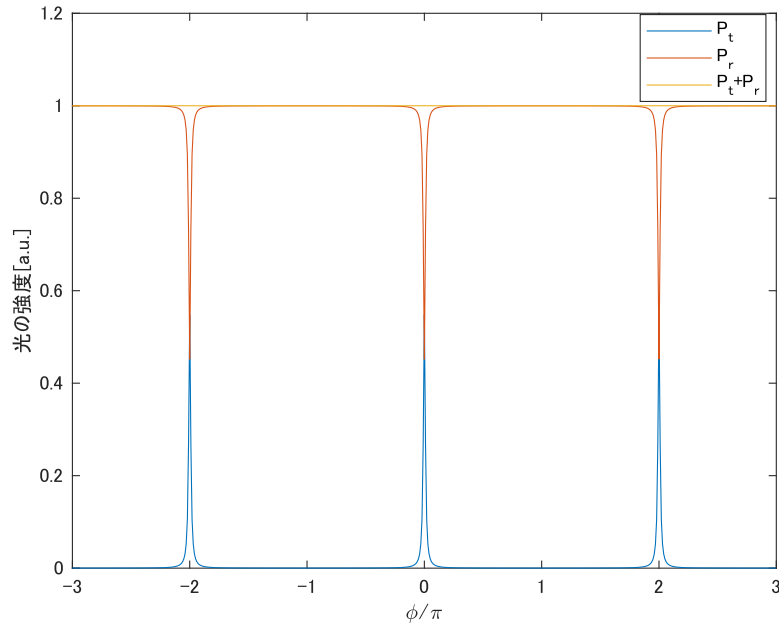


図 2.3 Fabry-Perot 共振器の透過光強度及び反射光強度

また、式 (2.31) を見ると、

$$\phi = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (2.32)$$

の時に  $P_{\text{cav}}$  は最大値をとることが分かる。実際に、例として  $r_1 = \sqrt{0.95}, r_2 = 1$  とすると、式 (2.32) を満足する時、入射光からおよそ 77 倍に増幅される。

最後に、共振器の性質を示す言葉を定義する。

共振器長  $L$  の共振器が共振条件を満たしているとする。この時、次の共振条件を満たすまでの周波数の幅をフリースペクトラルレンジと呼ぶ。以降では FSR と書く。FSR に対応する角周波数を  $\Delta\Omega$  とすると、

$$\frac{2L(\Omega + \Delta\Omega)}{c} - \frac{2L\Omega}{c} = 2\pi \quad (2.33)$$

$$\Delta\Omega = \frac{\pi c}{L} \quad (2.34)$$

であるから、FSR を  $f_{\text{FSR}}$  とすると、

$$f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L} \quad (2.35)$$

となる。逆に、共振器が共振条件を満たしているとき、次の共振条件を満たす共振器長までの幅を 1 フリンジと呼ぶ。1 フリンジを  $\Delta L$  と置けば、FSR の場合と同様に考えて、

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2} \quad (2.36)$$

となる。ここで、 $\lambda$  はレーザーの波長である。

また、共振器内の光の半値半幅 (HWHM) に対応する周波数を  $f_{\text{HWHM}}$  とすると、

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi L f_{\text{HWHM}}}{c}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi f_{\text{HWHM}}}{f_{\text{FSR}}}\right)} = \frac{1}{2}$$

となる。ここで  $f_{\text{HWHM}} \ll f_{\text{FSR}}$  とすると、

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \left(\frac{\pi f_{\text{HWHM}}}{f_{\text{FSR}}}\right)^2} \simeq \frac{1}{2}$$

となる。これを、 $f_{\text{HWHM}}$  について解くと以下ようになる:

$$f_{\text{HWHM}} = \frac{1 - r_1 r_2}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} f_{\text{FSR}} \quad (2.37)$$

また、 $f_{\text{FSR}}$  と  $f_{\text{HWHM}}$  の比はフィネスと呼ばれ、これを  $\mathcal{F}$  とすると以下のように表される:

$$\mathcal{F} = \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{HWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (2.38)$$

これは共振ピークの鋭さを表し、共振器の性能の指標となっている。

## 第3章

# 複屈折

### 3.1 複屈折とは

複屈折とは、入射する光の偏光により屈折率の異なる物質に光が入射した際に、光が分裂を起こす現象である。図 3.1 に複屈折のイメージ図を示す。複屈折を示す物質に光が入射すると、その光は入射光と同じ方向に進む常光線と、異なる方向に進む異常光線に分裂する。

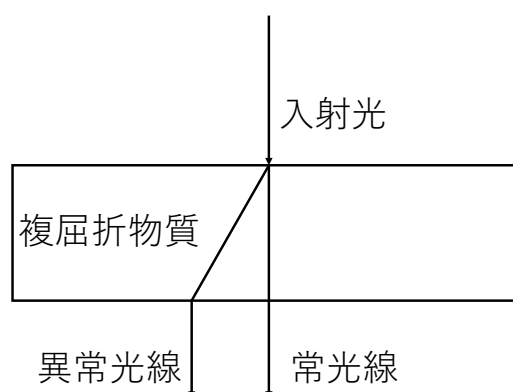


図 3.1 複屈折のイメージ

### 3.2 KAGRA における複屈折問題

2.1,2.2 節でも述べたように、現在 KAGRA では、図 3.2 のような、Michelson 干渉計に Fabry-Perot 共振器を組み込んだ Fabry-Perot-Michelson 干渉計が用いられている。

これらの鏡には、鏡を冷却するために熱伝導率の高いサファイアが用いられている。サファイアは一軸性結晶と呼ばれ、ある特定の方向以外から光が入射した場合、複屈折が起こる。この方向を  $c$  軸と呼ぶ。KAGRA の鏡に用いられているサファイアはレーザー光が  $c$  軸を通るように作られたが、完全な  $c$  軸結晶ではなく、入射した光 (KAGRA では S 偏光を用いている) に対して複屈折が起こり、別の偏光 (P 偏光) が混ざっている事が確認されている [1]。この P 偏光は測定の際の損失となってしまう。

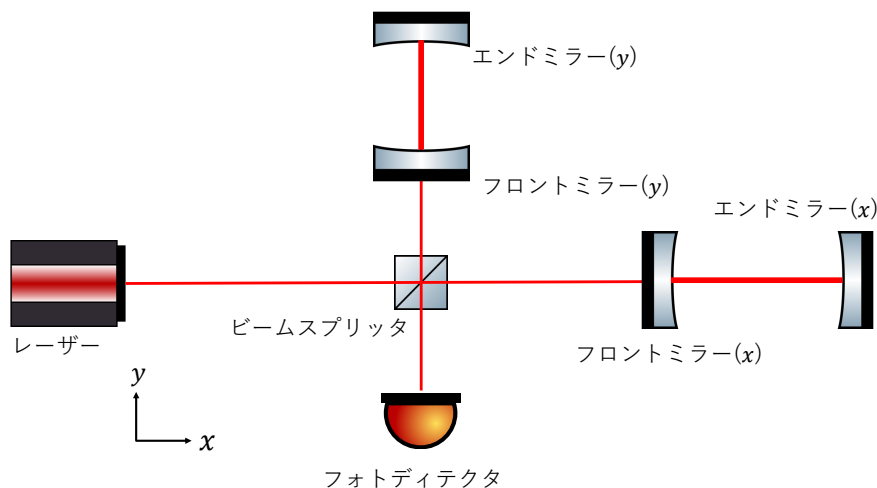


図 3.2 Fabry-Perot-Michelson 干渉計

また、この複屈折により発生する P 偏光の割合は、鏡の場所に関して非一様である事も分かっている [1]。図 3.3 に二つのフロントミラーの透過率分布を示す

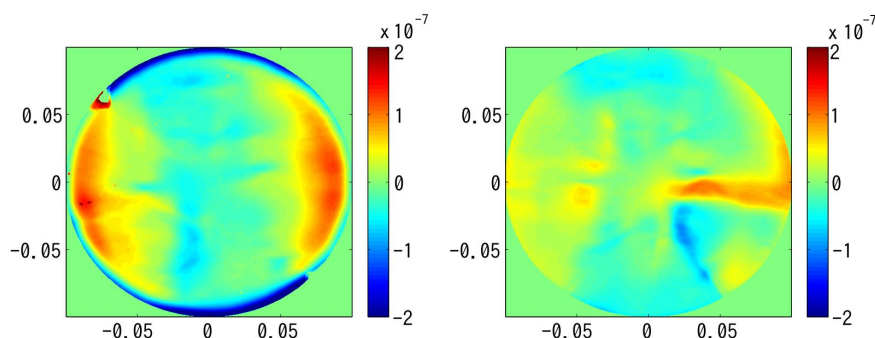


図 3.3 フロントミラーの透過率分布 (左: フロントミラー (x), 右: フロントミラー (y)) [2]

後の 4.4,4.5 節でも述べるように、共振器の長さ制御や姿勢制御は、共振器からの反射光を検出し、フィルターを通して鏡の位置や角度に関する線形信号に変形することで行っている。すなわち、この非一様性によって光が当たる位置に応じて光の強度が変わり、波面が汚れてしまう。これにより適切な線形信号が得られず、制御に影響を与えてしまうという問題が生じている。

### 3.3 本研究の目的

このような問題に対して、本研究室では多重分割フォトディテクタを用いた解決案が提案されている。これは分割されたフォトディテクタを用いることによって、反射光から得られる信

号を多重分割し、その信号をある比率で足し合わせることで適切な線形信号を得ようとする方法である。しかし、この解決案に対する実験的な検証はまだ行われていない。そこで本研究は、この解決案の実験的な検証を行い、有用な手法の開発を行うことを最終的な目的としている。

## 第 4 章

# 実験原理

### 4.1 フィードバック制御

#### 4.1.1 フィードバック制御の原理

光干渉計を重力波望遠鏡として用いるためには、共振器長を光の波長以下に抑える必要がある。しかし地面振動などの外乱により、何もしなければ共振器長は容易に変化し得る。そこで、その外乱を抑え込むために用いられる手法がフィードバック制御である。以下ではその原理を述べる。

フィードバック制御を考えるにあたって、伝達関数を用いたブロック線図を用いると便利である。ブロック線図は図 4.1 ような図である。

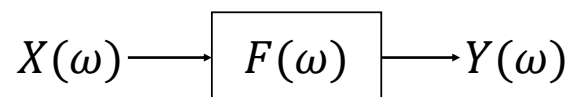


図 4.1 ブロック線図

伝達関数は図の  $H(\omega)$  のような周波数空間の関数として与えられ、一般的には複素数関数である。伝達関数は入力と出力の比で与えられる。したがって、 $H(\omega)$  は以下で与えられる：

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.1)$$

なお、複数の要素が連結されている場合、全体の伝達関数は各要素の伝達関数の積で表現される。

フィードバック制御を議論するため、図 4.2 のようなブロック線図を考える。図における  $+$  は信号を加え  $-$  は信号を引くことを示す。この時の出力  $Y(\omega)$  は以下の方程式で与えられ

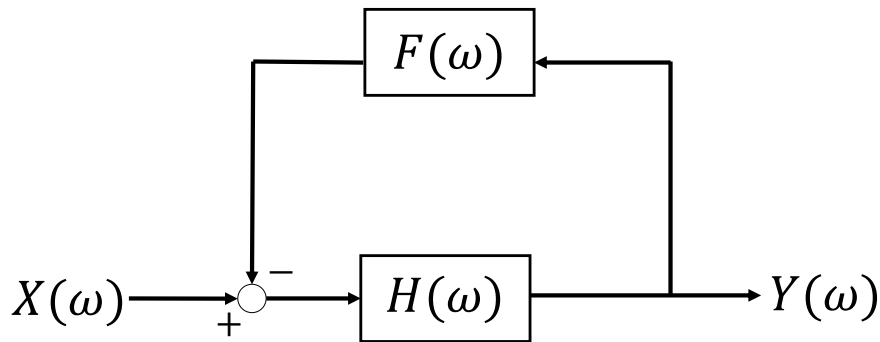


図 4.2 フィードバック制御におけるブロック線図

ることが、ブロック線図から分かる:

$$Y = XH - YFH$$

これを解くと以下のようなになる:

$$Y = \frac{H}{1 + FH}X \quad (4.2)$$

また、非制御下での実効的な入力  $X_{ac}$  は以下の方程式で与えられることも分かる:

$$X_{ac} = X - HF X_{ac}$$

これを解くと以下のようなになる:

$$X_{ac} = \frac{1}{1 + HF}X \quad (4.3)$$

$G(\omega) = H(\omega)F(\omega)$  とした時に、 $G(\omega)$  をオープンループ伝達関数と呼び、 $|G(\omega)|$  をオープンループゲインと呼ぶ。被制御下 ( $1 \ll |G(\omega)|$ ) では実効的な入力は、

$$X_{ac} \simeq \frac{1}{G}X \quad (4.4)$$

と近似でき、入力に対する雑音をオープンループゲイン分の 1 まで小さくすることができる。

#### 4.1.2 フィードバック制御の安定性

オープンループ伝達関数  $G(\omega)$  は複素関数であるから、オープンループゲイン  $|G(\omega)|$  と位相  $\theta(\omega)$  を用いて以下のように表すことができる:

$$G(\omega) = |G(\omega)|e^{i\theta(\omega)} \quad (4.5)$$

ここで、 $|G(\omega)| = 1$  であり、かつ  $\theta(\omega) = 180^\circ$  となる時、式 (4.3) の分母が 0 となり、実効的な入力信号が発散することが分かる。 $|G(\omega)| = 1$  となる周波数をユニティゲイン周波数 (UGF)

と呼ばれ、制御下にあるか、非制御下にあるかを定める指標として用いられている。フィードバック制御においては、UGF において、位相が  $180^\circ$  遅れないようにする必要がある。

最後に制御の安定性を示す上で必要な用語について紹介する。

伝達関数をゲインと位相に分けて、周波数の関数として描いたものをボード線図と呼ぶ。図 4.3 にボード線図の例を示す。

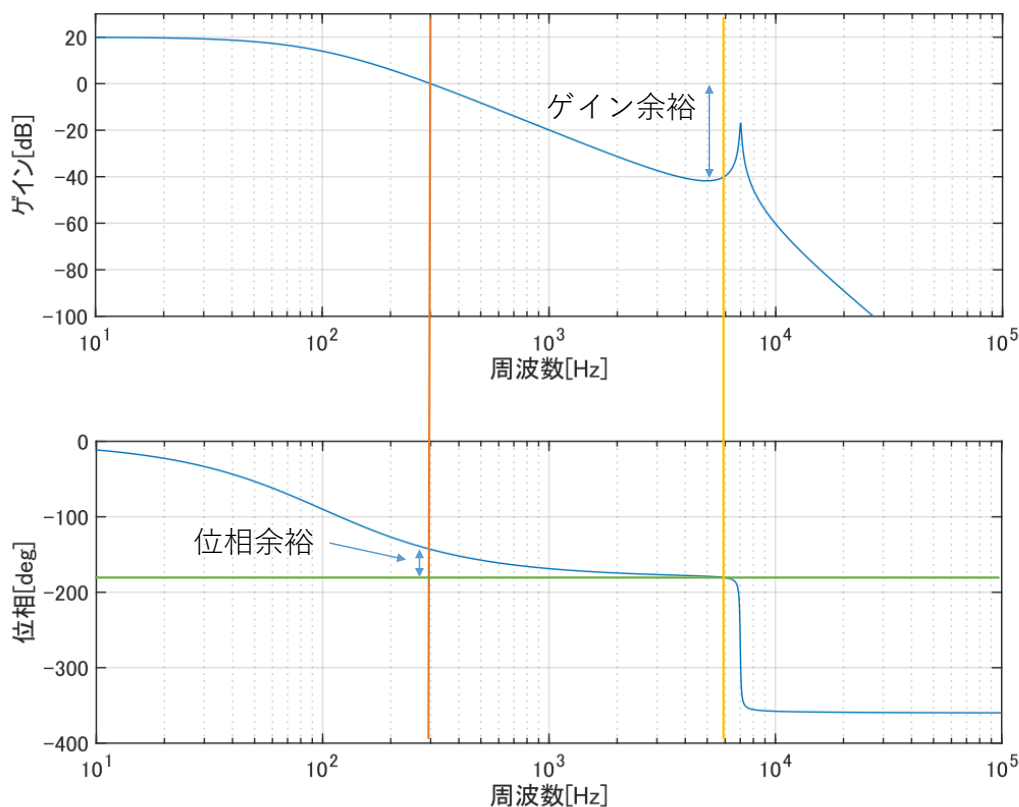


図 4.3 ボード線図

図において、橙色、緑色、黄色の線はそれぞれ UGF、 $-180^\circ$ 、位相が  $-180^\circ$  となる時の周波数を示している。また、ゲインの縦軸の単位はデシベル (dB) であり、これは伝達関数を  $F(\omega)$  としたときに  $20 \log |F(\omega)|$  で与えられる。伝達関数において、UGF 際の位相の、 $-180^\circ$  との差を位相余裕と呼び、位相が  $-180^\circ$  の時の、ゲインの 0dB との差をゲイン余裕と呼ぶ。ボード線図を見ると、これらが可視化されていることが分かる。

## 4.2 制御系の安定性

### 4.2.1 ピエゾアクチュエータ

長さ制御をするにあたり、電気信号鏡の変位に変換するための装置であるアクチュエータが必要となる。今回の実験では、アクチュエータとして piezo 素子を用いている。piezo 素子は、圧電効果を利用した素子であり、電圧をかけることによりその長さが変わる。実験ではマウントに piezo 素子を張り付け、そこに鏡を張り付けることにより、鏡の位置を動かし共振器



長を変化させている。 piezoアクチュエータにおける、入力電圧から信号への伝達関数のボード線図の概形は図 4.4 のようになる。ここでは、ゲインは十分低周波な領域で 20dB となるよ

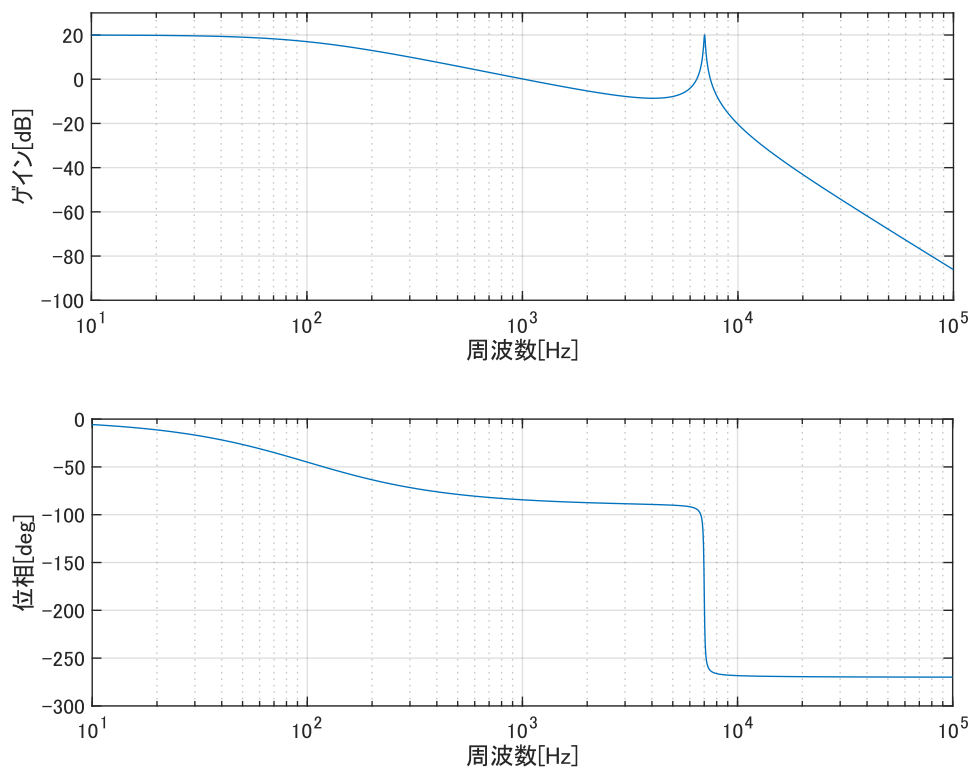


図 4.4 piezoアクチュエータボード線図

う調整している。なお、図 4.4 のゲインにおける 7kHz 付近でのピークは、機械共振によるものである。これを見ると、機械共振の共振周波数付近で位相が大幅に遅れ、UGF 付近での位相余裕がなくなっていることが分かる。すなわち、このままでは制御系は不安定になってしまう。そのため今回の実験では、フィードバックをかける前にローパスフィルタを入れることで、不安定性を解消し、かつ制御信号の復調を行っている。復調については 4.4 節で述べる。

#### 4.2.2 ローパスフィルタ

ローパスフィルタとは、高周波の信号を取り除き、低周波の信号を通過させるフィルタである。本実験で用いるローパスフィルタは、オペアンプを用いたアナログ回路で作成している。その例として図 4.5 のような設計の回路を考える。

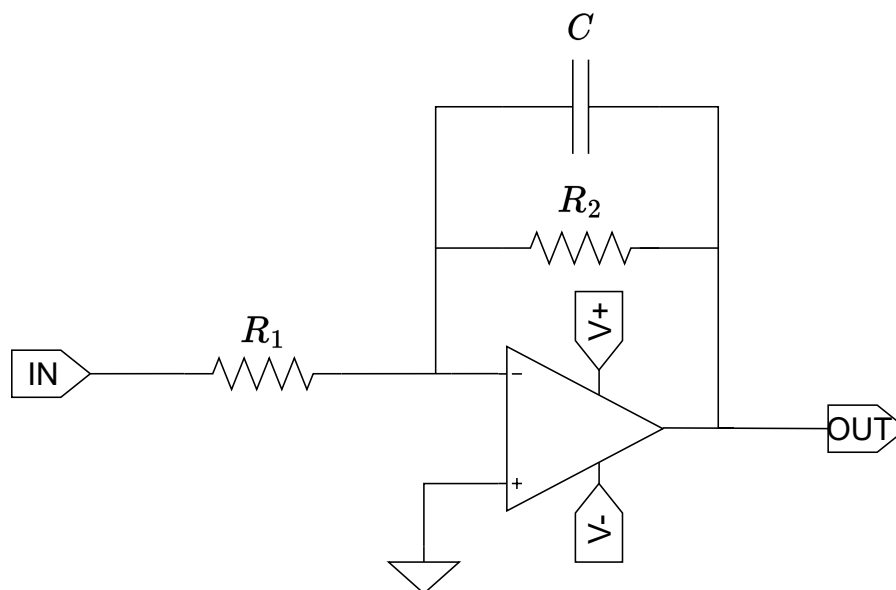


図 4.5 ローパスフィルタの回路図

この時のローパスフィルタの伝達関数  $F_{LP}$  は以下ようになる:

$$F_{LP}(\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + i\omega R_2 C} \quad (4.6)$$

なお、 $R_2/R_1$  はカットオフ周波数に対し十分低周波な領域のゲインである。また、 $f_{cut} = 1/2\pi R_2 C_1$  をカットオフ周波数と呼ぶ。この伝達関数をボード線図にすると図 4.6 のようになる。

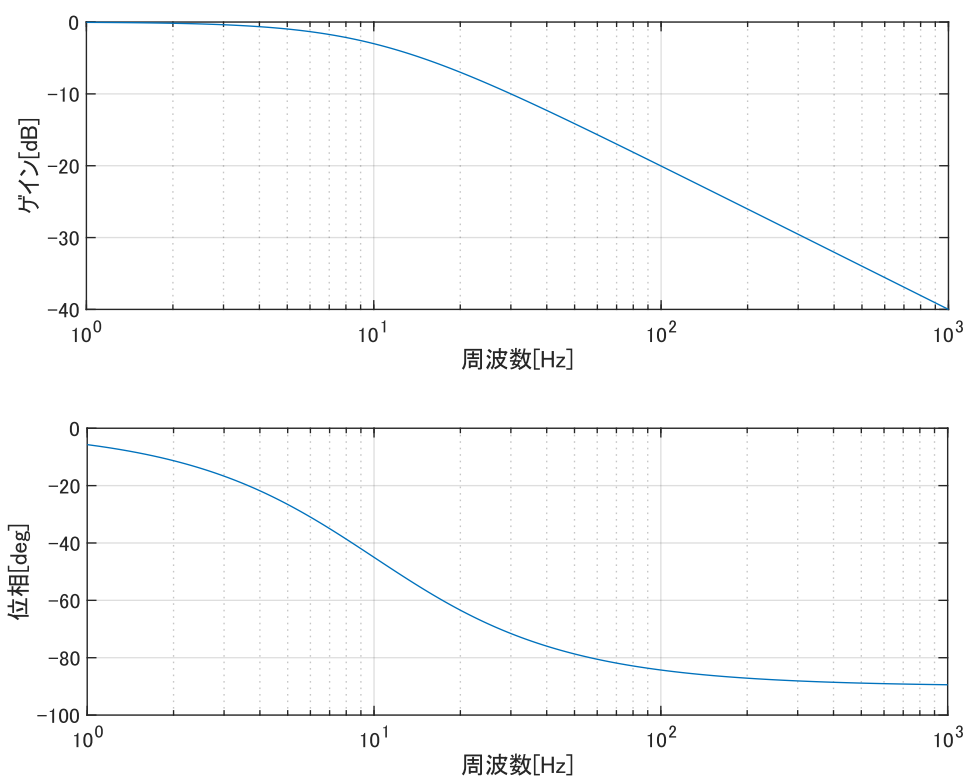


図 4.6 ローパスフィルタのボード線図

ここでは、 $R_1/R_2 = 1$ ,  $f_{\text{cut}} = 1/2\pi R_2 C_1 = 10\text{Hz}$  としている。図 4.6 を見ると、10Hz 付近の周波数から位相が遅れ出していることが分かる。以上の議論から、 piezoアクチュエータとローパスフィルタを合わせた伝達関数のボード線図は図 4.7 のようになる。

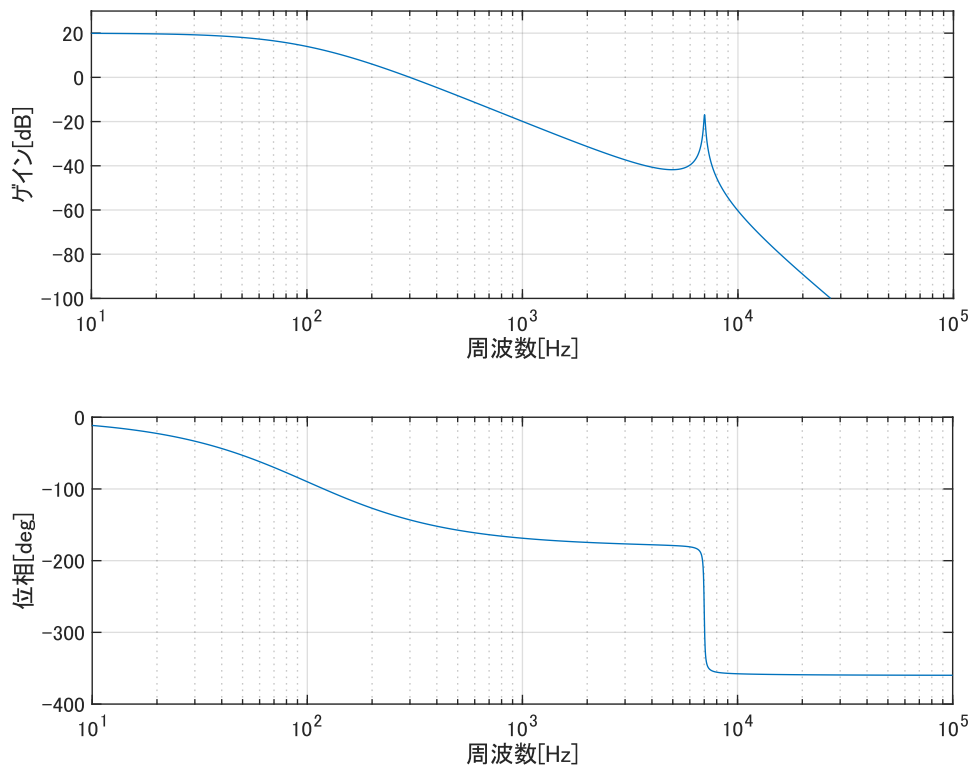


図 4.7 ピエゾアクチュエータとローパスフィルタを合わせた際のボード線図

ローパスフィルタが無い場合に比べ、位相余裕が生まれ制御系の不安定性が解消されたことが分かる。今回の設定においては、制御系は安定であるが、実験においては、例えば制御を安定に行うためにゲインを上げる等の操作を行うと位相余裕がなくなり、ローパスフィルタを入れていても制御系が発振する恐れがあるため注意する必要がある。

### 4.3 Hermite-Gaussian モード

ここでは、制御信号所得のために必要なレーザー光学の知識をまとめる。

#### 4.3.1 Hermite-Gaussian モードの表式

レーザービームの電場は、空間モードを  $U(x, y, z)$  とすると、以下のような形で表される：

$$E(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{i\Omega t} \quad (4.7)$$

$U(x, y, z)$  を、Hermite 多項式と Gaussian の積で表現できる時、この空間モードを Hermite-Gaussian モードと呼ぶ。レーザーの様子はこの Hermite-Gaussian モードで記述できる。

Hermite-Gaussian モードは図 4.8 のようなビームである。図において黒い実線がビームに当たる。

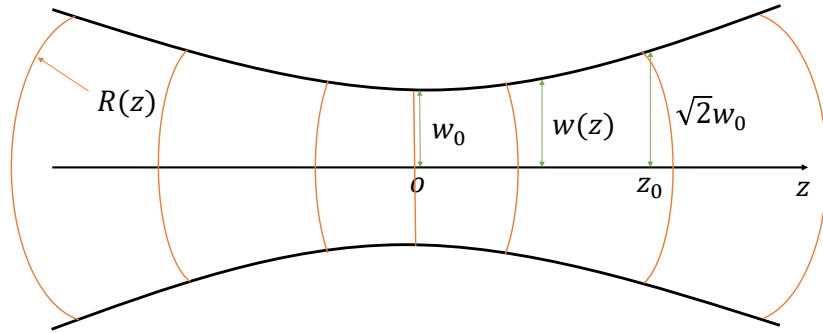


図 4.8 Hermite-Gaussian モード

ここで、レーザーは  $z$  軸方向に進んでいるとする。図において、 $w(z)$  はビーム半径であり、以下で与えられる:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (4.8)$$

ここで  $w_0$  はビーム半径が最も小さくなる時の値であり、ビームウエストと呼ばれる。なお、 $z$  軸はビームウエストの位置を原点としている。また、 $z_0$  は Rayleigh レンジと呼ばれ、以下で与えられる:

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{2} \quad (4.9)$$

$k$  はレーザーの波数である。式 (4.8) を見ればわかるように、Rayleigh レンジは  $w_0$  が  $\sqrt{2}$  倍となる時の  $z$  に当たる。 $R(z)$  は波面の曲率半径であり、以下で与えられる:

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] \quad (4.10)$$

図の場合と同様に、ビームウエストが  $z = 0$  にあり、レーザーが  $z$  軸方向に進んでいるとする時、規格化された Hermite-Gaussian モードの表式は以下で与えられる:

$$U_{lm} = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp[-ikz + i(l + m + 1)\eta(z)] \quad (4.11)$$

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R(z)}\right] \quad (4.12)$$

$\eta(z)$  は Gouy 位相と呼ばれ、次数が 1 つ異なる高次モード間の位相差を表している。Gouy 位相は以下で与えられる:

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4.13)$$

ここで、 $H_l(x)$  は Hermite 多項式である。Hermite 多項式は以下で与えられる:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (4.14)$$

例として、 $H_0, H_1, H_2$  は以下ようになる:

$$H_0 = 1 \quad (4.15)$$

$$H_1 = 2x \quad (4.16)$$

$$H_2 = 4x^2 - 2 \quad (4.17)$$

また、Hermite 多項式には以下で表される直交性がある:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_l(x)H_m(x) = \sqrt{\pi}2^l l! \delta_{lm} \quad (4.18)$$

この式から、 $U_l(x, z)$  について、以下のような直交性が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_l(x, z)U_m(x, z)dx = \delta_{lm} \quad (4.19)$$

### 4.3.2 表式の簡略化

簡単のため、00 モードを用いて書き直すことを考える。式 (4.15) より、

$$U_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w(z)^2}} \exp\left[-i(kz - \eta(z)) - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w(z)^2} + \frac{ik}{2R}\right)\right] \quad (4.20)$$

となるので、

$$U_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp[i(l+m)\eta(z)] U_{00}(x, y, 0) \quad (4.21)$$

と表せる。以降では、ウエストの位置、すなわち  $z = 0$  でビームを考える。この時、 $w = w_0, R = \infty, \eta = 0$  であるから、式 (4.20) および式 (4.21) は以下のように書き換わる:

$$U_{00}(x, y, 0) = \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2}\right] \quad (4.22)$$

$$U_{lm}(x, y, 0) = U_l(x, 0)U_m(y, 0) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right) U_{00} \quad (4.23)$$

### 4.3.3 ビームの平行移動

元の座標系  $(x, y, z)$  に対し、 $x$  方向に  $\delta x$  だけ平行移動した座標系を  $(x', y', z')$  とする。この時、00 モードについて以下の等式が成立する。

$$U_{00}(x, y, z) = U_{00}(x' - \delta x, y, z) \quad (4.24)$$

今、 $x$  方向にのみ平行移動しているため、 $y = y', z = z'$  である。ここで、 $z' = 0$  として  $U_{00}(x' - \delta x, y, z)$  について  $\delta x$  の一次の項まで展開することを考えると、以下のように計算で

きる:

$$\begin{aligned}
 U_{00}(x, y, z) |_{z'=0} &= \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ -\frac{((x' - \delta x)^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \\
 &\simeq \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ -\frac{(x'^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{2x'\delta x}{w_0^2} \right] \\
 &\simeq \frac{1}{w_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ -\frac{(x'^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \left( 1 + \frac{2x'\delta x}{w_0^2} \right) \\
 &= U_{00}(x', y', 0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', 0)
 \end{aligned}$$

ここで、式 (4.16)、式 (4.22) および式 (4.23) より

$$\begin{aligned}
 U_{10}(x, y, z) |_{z'=0} &= \sqrt{\frac{1}{2}} H_1 \left( \frac{\sqrt{2}y}{w_0} \right) U_{00}(x, y, 0) \\
 &= \frac{2x'}{w_0^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ -\frac{(x'^2 + y^2)}{w_0^2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

であることを用いている。同様にして、10モードについても、平行移動に対する応答を計算すると以下ようになる:

$$\begin{aligned}
 U_{10}(x, y, z) |_{z'=0} &= U_{10}(x' - \delta x, y, 0) \\
 &= 2 \left( \frac{x' - \delta x}{w_0^3} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ -\frac{((x' - \delta x)^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \\
 &\simeq 2 \left( \frac{x' - \delta x}{w_0} \right) \left( 1 + \frac{2x'\delta x}{w_0^2} \right) U_{00}(x', y', 0) \\
 &= U_{10}(x', y') - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y') + \sqrt{2} \frac{\delta x}{w_0} U_{20}(x', y', 0) \\
 &\simeq U_{10}(x', y') - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y', 0)
 \end{aligned}$$

ここで、途中の計算では式 (4.17) 式 (4.22) および式 (4.23) より

$$\begin{aligned}
 U_{20}(x, y, 0) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} H_2 \left( \frac{\sqrt{2}x}{w_0} \right) U_{00}(x, y, 0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{4x^2}{w_0^2} - 1 \right) U_{00}(x', y', 0)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

となることを用いている。なお  $U_{20}(x', y', 0)$  に比例する項について、入射光が 00モードのみであるとすると、10モードは  $\delta x$  や、後述する  $\delta\theta$  程度の大きさなため、20モードの大きさはその二乗程度の大きさであるから、無視してもよい。

以上をまとめると以下ようになる:

$$U_{00}(x, y, z) |_{z'=0} = U_{00}(x', y', 0) + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}(x', y', 0) \tag{4.27}$$

$$U_{10}(x, y, z) |_{z'=0} = U_{10}(x', y', 0) - \frac{\delta x}{w_0} U_{00}(x', y', 0) \tag{4.28}$$

## 4.3.4 ビームの回転移動

元の座標系  $(x, y, z)$  に対し、 $(x, z) = (0, 0)$  を通り、 $y$  軸に平行な直線周りに  $\delta\theta$  だけ回転させた座標系  $(x', y', z')$  を考える。この時座標系間では以下の関係が成立する:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\delta\theta) & -\sin(-\delta\theta) \\ \sin(-\delta\theta) & \cos(-\delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\delta\theta) & \sin(\delta\theta) \\ -\sin(\delta\theta) & \cos(\delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

したがって、以下の関係式が成立する:

$$x = \cos(\delta\theta)x' + \sin(\delta\theta)z' \quad (4.30)$$

$$z = -\sin(\delta\theta)x' + \cos(\delta\theta)z' \quad (4.31)$$

ここで、先程と同様にビームウエストの位置 ( $z' = 0$ ) で考えることにする。はじめに  $U_0(x, z)$  について考えると、式 (4.12) より

$$\begin{aligned} U_0(x, z) |_{z'=0} &\simeq \left( \frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[ - \left( \frac{\cos(\delta\theta)x'}{w_0} \right)^2 \right] \\ &\simeq \left( \frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[ - \left( \frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \\ &= U_0(x', 0) \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる。ここで、 $1 + z^2/z_0^2 = 1 + \sin^2(\delta\theta)x'^2/z_0^2 \simeq 1$  であることと、 $\cos^2(\delta\theta) \simeq 1$  であることを用いている。また、位相項について考えると、

$$\begin{aligned} \exp[-ikz + i\eta(z)] |_{z'=0} &= \exp[ik \sin(\delta\theta)x' + i\eta(-\sin(\delta\theta)x')] \\ &\simeq \exp[ik\delta\theta x'] \exp \left[ -i \frac{\delta\theta x'}{z_0} \right] \\ &\simeq 1 + \left( k - \frac{1}{z_0} \right) \delta\theta x' \\ &\simeq 1 + ik\delta\theta x' \end{aligned} \quad (4.33)$$

ここで、最後の近似では  $\lambda \ll z_0$  であることを用いている。以上より、00 モードのビームの回転移動について以下が成立する:

$$\begin{aligned} U_{00}(x, y, z) |_{z'=0} &= U_0(x', 0)U_0(y', 0)(1 + ik\delta\theta x') \\ &= U_{00}(x', y', 0) + \frac{ik\delta\theta}{2} w_0 U_{10}(x', y', 0) \end{aligned}$$

ここで二行目の式変形には、式 (4.12) および式 (4.25) を用いている。

次に 10 モードについて考える。まず、 $U_{00}$  の場合と同様に考えると、 $z' = 0$  での  $U_1(x, z)$



は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned}
 U_1(x, z) |_{z'=0} &\simeq \left( \frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2}} H_1 \left( \frac{\sqrt{2}(\cos(\delta\theta)x')}{w_0} \right) \exp \left[ - \left( \frac{\cos(\delta\theta)x'}{w_0} \right)^2 \right] \\
 &\simeq \left( \frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2}} H_1 \left( \frac{\sqrt{2}x'}{w_0} \right) \exp \left[ - \left( \frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] \\
 &= U_1(x', 0)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

また、位相項において 00 モードとの違いは式 (4.21) より Gouy 位相の部分のみであり、その部分については計算結果に影響を与えない。したがって、位相項は式 (4.33) と同一である。以上より、10 モードのビームの回転移動について以下が成立する:

$$\begin{aligned}
 U_{10}(x, y, z) |_{z'=0} &= U_1(x', 0)U_0(y', 0)(1 + ik\delta\theta x') \\
 &= U_{10}(x', y', 0) + ikw_0\delta\theta \left( \frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \frac{2x'}{w_0} \exp \left[ - \left( \frac{x'}{w_0} \right)^2 \right] U_0(y', 0) \\
 &= U_{10}(x', y', 0) + \frac{ikw_0}{2} \delta\theta U_{00}(x', y', 0) + \sqrt{2} \frac{ikw_0}{2} \delta\theta U_{20}(x', y', 0) \\
 &\simeq U_{10}(x', y', 0) + \frac{ikw_0}{2} \delta\theta U_{00}(x', y', 0)
 \end{aligned}$$

ここで、途中の式変形には式 (4.26) を用いている。また、最後の行における近似では、平行移動の時と同様の考察により  $U_{20}$  の項を無視している。

以上をまとめると、以下のようになる:

$$U_{00}(x, y, z) |_{z'=0} = U_{00}(x', y', 0) + i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} U_{10}(x', y', 0) \tag{4.35}$$

$$U_{10}(x, y, z) |_{z'=0} = U_{10}(x', y', 0) + i \frac{\delta\theta}{\alpha_0} U_{00}(x', y', 0) \tag{4.36}$$

ここで、

$$\alpha_0 = \frac{2}{kw_0} \tag{4.37}$$

である。

### 4.3.5 行列表現

Gaussian ビームを 00 モードと 10 モードの線形和で近似する。この時の 00 モードと 10 モードの係数をそれぞれ  $a_0, a_1$  とすると、ビームは以下のようになる:

$$E = (U_{00} \ U_{10}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \tag{4.38}$$

ここで、 $a_0, a_1$  に対し、ビームを移動した際の係数をそれぞれ  $a'_0, a'_1$  とする。初めに平行移動の場合、式 (4.27) および式 (4.28) より、

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

となる。同様にして回転移動を考えると、式 (4.35) および、式 (4.36) より、

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

となる。両方の移動がかかる時、二つの行列をかけ合わせればよく、以下のようになる:

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \\ -\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

ここでは  $\delta\theta\delta x$  に比例する項は無視している。ここで、

$$\gamma = \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \quad (4.42)$$

を導入することにより、式 (4.41) は、

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

となる。ここで、

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

と置くことで、これが、ビームの移動の行列表現となる。なお、逆行するビームについては、 $z$  軸を逆行するビームを  $U'_{lm}(x, y, z)$  とした時に、

$$\begin{aligned} U'_{lm}(x, y, z) &= U_{lm}(x, y, -z) \\ &= U_l^*(x, z)U_m^*(y, z) \exp[ikz - i(l+n+1)\eta(z)] \\ &= U_{lm}^*(x, y, z) \end{aligned}$$

となることから、複素共役を取ることにより表現できることが分かる。ここで、途中の計算では式 (4.10) および式 (4.11) を用いている。

## 4.4 Pound-Drever-Hall 法

共振器の制御を行うためには、共振器を共振状態となる共振器長に制御しなければならないため、鏡の変位に対する情報が必要となる。しかし、単に共振器からの反射光を取るだけでは、鏡がどちらの方向に変位したかがわからない。その変位方向を求める方法の一つとして、Pound-Drever-Hall 法 (PDH 法) というものがある。以下ではその原理を説明する。

PDH 法では、レーザー光に位相変調を加えることで変位の情報を取り出す。今回の実験では位相変調器として EOM (Electro Optical Modulator) 結晶を用いた。EOM 結晶は印加電圧により屈折率が変化する。これにより EOM 結晶を通過した光は、光路長が変わり位相変調が起こる。今、EOM の光路長が  $x = X_0 \sin \omega_m t$  だけ変化したとすると、位相変調後の電場は、

$$E(t) = E_0 e^{i(\Omega t + \frac{\Omega X_0}{c} \sin \omega_m t)} = E_0 e^{i(\Omega t + m \sin \omega_m t)} \quad (4.45)$$

となる。ここで、 $m$  は変調指数と呼ばれ、EOM の性能を示す指標の一つである。この式を変形していくと以下ようになる：

$$\begin{aligned} E(t) &= e^{i\Omega t} e^{im \sin \omega_m t} \\ &= e^{i\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{in\omega_m t} \end{aligned} \quad (4.46)$$

ここで、 $J_n(x)$  はベッセル関数である。ベッセル関数は以下で与えられる：

$$\exp \left[ \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) x^n \quad (4.47)$$

今、 $x = e^{i\omega_m t}$  とすれば式 (4.46) と一致する。ベッセル関数について以下の式が成立する：

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m) \quad (4.48)$$

$$J_n(m) \simeq \frac{1}{n!} \left( \frac{m}{2} \right)^n \quad (m \ll 1) \quad (4.49)$$

この式を用いて、ベッセル関数の  $m$  の二次以降の係数を無視すると、式 (4.46) は以下のように書き直せる：

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 e^{i\Omega t} \{ J_0(m) + J_1(m) (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) \} \\ &= E_0 J_0(m) + E_0 J_1(m) e^{i(\Omega+\omega_m t)} - E_0 J_1(m) e^{i(\Omega-\omega_m t)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

ここで、共振器の反射率  $r$  を  $E_r/E_0$  で定義する。すなわち式 (2.26) より、

$$r(\Omega) = \frac{E_r}{E_0} = -r_1 E_0 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \quad (4.51)$$

である。したがって、共振器からの反射光は以下ようになる：

$$E_r(t) = E_0 r(\Omega) J_0(m) + E_0 r(\Omega + \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m t)} - E_0 r(\Omega - \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m t)} \quad (4.52)$$

ここから反射光強度を計算すると、以下ようになる：

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 \quad (4.53) \\ &= |E_0|^2 \left( r(\Omega) J_0(m) + r(\Omega + \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m t)} - r(\Omega - \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m t)} \right) \\ &\quad \times \left( r^*(\Omega) J_0(m) + r^*(\Omega + \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m t)} - r^*(\Omega - \omega_m) J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m t)} \right) \\ &= |E_0|^2 \left( J_0^2 |r(\Omega)|^2 + J_1^2 |r(\Omega + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r(\Omega - \omega_m)|^2 \right) \\ &\quad + |E_0|^2 \{ 2J_0 J_1 [\operatorname{Re} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r(\Omega)^* r(\Omega - \omega_m)]] \cos \omega_m t \\ &\quad + \operatorname{Im} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r(\Omega)^* r(\Omega - \omega_m)] \sin \omega_m t \} + f(e^{2i\omega t}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

ここで第一項は DC 成分であり、 $f(e^{2i\omega t})$  は  $e^{2i\omega t}$  に比例する項をまとめたものである。

得られた反射光に対し、 $\sin \omega_m t$  を掛け、高周波で振動している項を落とすことにより、復調を行う。今回の実験ではローパスフィルタを用いている。結果として得られる PDH 信号  $V_{\text{PDH}}$  は以下ようになる：

$$V_{\text{PDH}} = J_0 J_1 \operatorname{Im} [r(\Omega) r^*(\Omega + \omega_m) - r(\Omega)^* r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2 \quad (4.55)$$

ここで、キャリア光が共振点付近にあるとき、すなわち、 $\phi = 2\pi n + \delta\phi$  ( $\delta\phi \ll 1$ ) であるとき、

$$\exp\left[-i\left(\frac{2L\Omega}{c} + \frac{2L\omega_m}{c}\right)\right] \simeq \exp\left[i\left(\frac{2L\Omega}{c} - \frac{2L\omega_m}{c}\right)\right] \quad (4.56)$$

であることを用いると、各反射率は実数になるため、

$$r(\Omega + \omega_m) \simeq r^*(\Omega - \omega_m) \quad (4.57)$$

であることが分かる。この反射率を  $r_s$  と置くと、 $V_{\text{PDH}}$  は、

$$V_{\text{PDH}} \simeq 2J_0J_1|E_0|^2r_s\text{Im}[r(\Omega)] \quad (4.58)$$

となる。ここで、 $\text{Im}[r(\Omega)]$  について、式 (2.26) より、

$$\begin{aligned} \text{Im}[r(\Omega)] &= \text{Im}\left[-r_1 + \frac{t_1^2r_2e^{-i\phi}}{1 - r_1r_2e^{-i\phi}}\right] \\ &= \text{Im}\left[\frac{t_1^2r_2e^{-i\phi}}{1 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2\cos\phi}\right] \\ &= -\frac{t_1^2r_2\sin\left(\frac{2L\Omega}{c}\right)}{1 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left(\frac{2L\Omega}{c}\right)} \end{aligned}$$

となる。ここで、共振点付近で  $L \rightarrow L + \delta L$  のように長さが変化すると、 $\text{Im}[r(\Omega)]$  は以下のように近似できる：

$$\begin{aligned} \text{Im}[r(\Omega)] &\simeq -\frac{t_1^2r_2\sin\left(\frac{2\delta L\Omega}{c}\right)}{1 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left(\frac{2\delta L\Omega}{c}\right)} \\ &\simeq -\frac{t_1^2r_2}{(1 - r_1r_2)^2} \frac{2\delta L\Omega}{c} \end{aligned} \quad (4.59)$$

となるので、最終的な PDH 信号は以下のようになる：

$$V_{\text{PDH}} = -\frac{8\pi J_0J_1|E_0|^2r_s t_1^2r_2}{\lambda(1 - r_1r_2)^2} \delta L \quad (4.60)$$

ここで、 $\lambda$  はレーザーの波長である。このように、復調後の信号は、共振点付近では共振器長変化に対して線形応答することが分かる。

## 4.5 Wave Front Sensing 法

ミスアライメントされた共振器の姿勢制御信号を得るための方法として、Wave Front Sensing 法 (WFS 法) というものがある。以下では WFS 法の原理について議論する。

### 4.5.1 反射行列

00 モードの共振器の反射率は式 (4.51) で与えられた。この反射率を  $r_{00}(\Omega)$  と書き換える。すなわち

$$r_{00}(\Omega) = -r_1E_0 + \frac{t_1^2r_2e^{-i\phi}}{1 - r_1r_2e^{-i\phi}} \quad (4.61)$$

である。これに対し、10モード反射率を  $r_{10}(\Omega)$  とすると、前述したように Gouy 位相の分だけ位相がずれることを考慮する必要がある。共振器の片道での位相の差を  $\eta_{\text{FP}}$  とすると、

$$r_{10}(\Omega) = -r_1 E_0 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})}}{1 - r_1 r_2 e^{-i(\phi - 2\eta_{\text{FP}})}} \quad (4.62)$$

となる。これにより、反射行列なるものを考えることができ、これを  $R_{\text{FP}}^{\text{align}}$  とすると、

$$R_{\text{FP}}^{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{00} & 0 \\ 0 & r_{10} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

となる。これをビームにかけることにより、反射光を考えることができる。

ここで、入射光の座標系のずれを  $\gamma$  で表現し、一次反射光のずれを  $\gamma_r$  で表現すれば、一次反射光の反射行列は以下で表現できる:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \gamma_r^* \\ -\gamma_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{00} & 0 \\ 0 & r_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma_r^* \\ -\gamma_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{00} & r_{00}\gamma \\ -r_{10}\gamma^* & r_{10} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{00} - r_{10}\gamma^*\gamma_r^* & r_{00}\gamma + r_{10}\gamma_r^* \\ -\gamma_r r_{00} - r_{10}\gamma^* & r_{10} - r_{10}\gamma\gamma_r \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} r_{00} & r_{00}\gamma + r_{10}\gamma_r^* \\ -\gamma_r r_{00} - r_{10}\gamma^* & r_{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。なお、 $\gamma, \gamma_r$  は  $\delta x, \delta\theta$  程度の大きさであるため、二つの積は十分小さいとして無視している。ここで、入射光に 00モードしか存在しない、すなわち  $a_0 = 1, a_1 = 0$  であるとする、ミスアライメントされた際の反射光は  $E_r^{\text{miss}}$  として、

$$E_r^{\text{miss}} = [U_{00}r_{00} - U_{10}(r_{00}\gamma + r_{10}\gamma_r^*)] E_0 e^{i\Omega t} \quad (4.64)$$

となる。したがって、ミスアライメントされた際の共振器の反射率を  $r^{\text{miss}}(\Omega)$  とすると、

$$r^{\text{miss}}(\Omega) = U_{00}r_{00}(\Omega) - U_{10}(r_{00}(\Omega)\gamma + r_{10}(\Omega)\gamma_r^*) \quad (4.65)$$

となる。

## 4.5.2 WFS 信号

PDH 信号は式 (4.55) で与えられていた。この式に、 $r^{\text{miss}}(\Omega)$  の表式である式 (4.65) を代入することにより、ミスアライメントされた際のエラー信号が得られる。すなわち、その時のエラー信号を  $V_{\text{RF}}^{\text{miss}}$  とすると、

$$V_{\text{RF}}^{\text{miss}} = J_0 J_1 \text{Im} [r^{\text{miss}}(\Omega) r^{\text{miss}*}(\Omega + \omega_m) - r(\Omega)^{\text{miss}*} r(\Omega - \omega_m)] |E_0|^2 \quad (4.66)$$

となる。ここで、以降の計算のために、以下で定義される  $c, s_{\pm}$  を用いる:

$$c = r_{00}(\Omega)\gamma_r + r_{10}(\Omega)\gamma_r^* \quad (4.67)$$

$$s_{\pm} = r_{00}(\Omega \pm \omega_m)\gamma_r + r_{10}(\Omega \pm \omega_m)\gamma_r^* \quad (4.68)$$

ここから、 $r^{\text{miss}}$  は以下のように表される:

$$r^{\text{miss}}(\Omega) = r_{00}(\Omega)U_{00} - cU_{10} \quad (4.69)$$

$$r^{\text{miss}}(\Omega \pm \omega_m) = r_{00}(\Omega \pm \omega_m)U_{00} - s_{\pm}U_{10} \quad (4.70)$$

この式から、 $V_{\text{RF}}^{\text{miss}}$  は以下のように記述できる:

$$\begin{aligned}
V_{\text{RF}}^{\text{miss}} &= J_0 J_1 \text{Im}[\{r_{00}(\Omega)U_{00} - cU_{10}\} \{r_{00}^*(\Omega + \omega_m)U_{00}^* - s_+^*U_{10}^*\} \\
&\quad - \{r_{00}^*(\Omega)U_{00}^* - c^*U_{10}^*\} \{r_{00}(\Omega - \omega_m)U_{00} - s_-U_{10}\}] |E_0|^2 \\
&= J_0 J_1 \text{Im}[r_{00}(\Omega)r_{00}^*(\Omega + \omega_m) - r_{00}^*(\Omega)r_{00}(\Omega - \omega_m)] |U_{00}|^2 |E_0|^2 \\
&\quad - J_0 J_1 \text{Im}[\{s_+^*r_{00}(\Omega) - c^*r_{00}(\Omega - \omega_m)\} U_{00}U_{10}^*] |E_0|^2 \\
&\quad + J_0 J_1 \text{Im}[\{s_-r_{00}^*(\Omega) - cr_{00}^*(\Omega - \omega_m)\} U_{00}^*U_{10}] |E_0|^2 \\
&\quad + J_0 J_1 \text{Im}[cs_+^* - c^*s_-] |U_{10}|^2 |E_0|^2
\end{aligned} \tag{4.71}$$

式 (4.71) の一行目は式 (4.55) より PDH 信号を表していることが分かる。また四行目は、 $\gamma, \gamma_r$  の二乗、すなわち  $\delta x, \delta \theta$  の二乗の大きさであるため、無視してよい。二行目と三行目が WFS 信号に当たる。したがって、WFS 信号を  $V_{\text{WFS}}$  とすると、

$$\begin{aligned}
V_{\text{WFS}} &= J_0 J_1 \text{Im}[\{s_-r_{00}^*(\Omega) - cr_{00}^*(\Omega + \omega_m)\} U_{00}^*U_{10} \\
&\quad - \{s_+^*r_{00}(\Omega) - c^*r_{00}(\Omega - \omega_m)\} U_{00}U_{10}^*] |E_0|^2
\end{aligned} \tag{4.72}$$

となることが分かる。また、ミスアライメントされた際の DC 信号を  $V_{\text{DC}}^{\text{miss}}$  とすると、式 (4.54) より、RF の場合と同様に考えて、

$$\begin{aligned}
V_{\text{DC}}^{\text{miss}} &= |E_0|^2 (J_0^2 |r_{00}^{\text{miss}}(\Omega)|^2 + J_1^2 |r_{00}^{\text{miss}}(\Omega + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{00}^{\text{miss}}(\Omega - \omega_m)|^2) \\
&= (J_0^2 |r_{00}(\Omega)|^2 + J_1^2 |r_{00}(\Omega + \omega_m)|^2 + J_1^2 |r_{00}(\Omega - \omega_m)|^2) |U_{00}|^2 |E_0|^2 \\
&\quad + (J_0^2 |c_0|^2 + J_1^2 |s_+|^2 + J_1^2 |s_-|^2) |U_{10}|^2 |E_0|^2 \\
&\quad - 2\text{Re} [(J_0^2 r_{00}(\Omega)c_0^* + J_1^2 r_{00}(\Omega + \omega_m)s_+^* \\
&\quad \quad + J_1^2 r_{00}(\Omega - \omega_m)s_-^*) U_{00}U_{10}^*] |E_0|^2
\end{aligned} \tag{4.73}$$

となる。

次に式 (4.72) に、式 (4.67)、及び式 (4.68) を代入し計算していく。この時、式 (4.57) から、以下のようなになる:

$$\begin{aligned}
V_{\text{WFS}} &= J_0 J_1 \text{Im}[\{r_{00}(\Omega) \{r_{00}(\Omega - \omega_m)\gamma_r + r_{10}(\Omega - \omega_m)\gamma^*}\} \\
&\quad - r_{00}(\Omega - \omega_m) \{r_{00}(\Omega)\gamma_r + r_{10}(\Omega)\gamma^*\}] U_{00}^*U_{10} \\
&\quad - \{r_{00}(\Omega) \{r_{00}(\Omega - \omega_m)\gamma_r^* + r_{10}(\Omega - \omega_m)\gamma}\} \\
&\quad - \{r_{00}(\Omega)\gamma_r^* + r_{10}(\Omega)\gamma\} r_{00}(\Omega - \omega_m) U_{00}U_{10}^*] |E_0|^2
\end{aligned}$$

この式を計算していくと、以下のようなになる:

$$\begin{aligned}
V_{\text{WFS}} &= J_0 J_1 \text{Im}[\{r_{10}(\Omega - \omega_m)\gamma^*r_{00}(\Omega) - r_{10}(\Omega)\gamma^*r_{00}(\Omega - \omega_m)\} U_{00}^*U_{10} \\
&\quad \{r_{10}(\Omega - \omega_m)\gamma r_{00}(\Omega) - r_{10}(\Omega)\gamma r_{00}(\Omega - \omega_m)\} U_{00}U_{10}^*] |E_0|^2 \\
&= 2J_0 J_1 \text{Re}[r_{10}(\Omega - \omega_m)r_{00}(\Omega) - r_{10}(\Omega)r_{00}(\Omega - \omega_m)] \text{Im}[\gamma^*U_{10}U_{00}^*] |E_0|^2
\end{aligned}$$

ここで、(4.42) 式より、

$$\text{Im}[\gamma^*U_{10}U_{00}^*] = \text{Im}[U_{10}U_{00}^*] \frac{\delta x}{w_0} - \text{Re}[U_{10}U_{00}^*] \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \tag{4.74}$$

となる。ここで、 $U_{10}U_{00}^*$  について考えると、式 (4.11) より、

$$U_{10}U_{00}^* = U_0^*(x, z)U_0^*(y, z)U_0(x, z)U_0(y, z) \exp[i\eta(z)] \tag{4.75}$$

となる。したがって、

$$\text{Im}[U_{10}U_{00}^*] = U_0^*(x, z)U_0^*(y, z)U_1(x, z)U_0(y, z) \sin \eta(z) \quad (4.76)$$

$$\text{Re}[U_{10}U_{00}^*] = U_0^*(x, z)U_0^*(y, z)U_1(x, z)U_0(y, z) \cos \eta(z) \quad (4.77)$$

となる。以上より、最終的な WFS 信号は以下ようになる:

$$V_{\text{WFS}} = J_0 J_1 R_0 U_0^*(x, z)U_0^*(y, z)U_1(x, z)U_0(y, z) \left( \sin \eta(z) \frac{\delta x}{w_0} - \cos \eta(z) \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \quad (4.78)$$

ここで、 $R_0$  は以下で表される:

$$R_0 = 2\text{Re}[r_{10}(\Omega - \omega_m)r_{00}(\Omega) - r_{10}(\Omega)r_{00}(\Omega - \omega_m)]|E_0|^2 \quad (4.79)$$

また、式 (4.73) より、DC の WFS 信号を  $V_{\text{WFS}}^{\text{DC}}$  とすると、RF の場合と同様に考えて、

$$\begin{aligned} V_{\text{WFS}}^{\text{DC}} &= -2\text{Re} [J_0^2 r_{00}(\Omega) c_0^* U_{00} U_{01}^*] |E_0|^2 \\ &= -2J_0^2 |E_0|^2 U_0(x, z)U_0(y, z)U_1^*(x, z)U_0^*(y, z) \\ &\quad \times \left\{ |r_{00}(\Omega)|^2 \left( \cos \eta(z) \frac{\delta x_r}{w_0} + \sin \eta(z) \frac{\delta \theta_r}{\alpha_0} \right) \right. \\ &\quad + \text{Re} [r_{00}(\Omega)r_{10}^*(\Omega)] \left( \cos \eta(z) \frac{\delta x}{w_0} + \sin \eta(z) \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \\ &\quad \left. + \text{Im} [r_{00}(\Omega)r_{10}^*(\Omega)] \left( \sin \eta(z) \frac{\delta x}{w_0} - \cos \eta(z) \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \right\} \quad (4.80) \end{aligned}$$

となる。

### 4.5.3 WFS 信号の強度

式 (4.71) を見ると、エラー信号は PDH 信号と WFS 信号が混ざっていることが分かる。長さ制御および姿勢制御を行うためには、これらの信号を個別に取り出す必要があるが、これでは一見制御が不可能なように思える。しかし、フォトディテクタを用いればこれを解決することができる。フォトディテクタは受光した光を積分して足し合わせるが、式 (4.78) における  $U_1(x, z)$  は、式 (4.12) より  $x$  についての奇関数であるから、WFS 信号は、エラー信号をフォトディテクタで検出した際には消されてしまう。すなわち、PDH 信号のみを得ることが出来る。逆に通常のフォトディテクタでは WFS 信号を得ることはできないが、共振器の長さ制御を行い PDH 信号を 0 にした上で、分割フォトディテクタを用いて  $x > 0, x < 0$  の二つの領域でそれぞれ信号を取り、それらの差を取ることで WFS 信号を得ることができる。すなわち、求める信号強度を  $P_{\text{WFS}}$  とすると、以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} P_{\text{WFS}} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}} - \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^\infty dy V_{\text{WFS}} \\ &= 2J_0 J_1 R_0 \int_0^\infty dx U_0^*(x, z)U_1(x, z) \int_{-\infty}^\infty U_0^*(y, z)U_0(y, z) dy \\ &= 2J_0 J_1 R_0 \int_0^\infty dx U_0^*(x, z)U_1(x, z) \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の計算には式 (4.19) を用いている。最後の行における積分の計算を行うと、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx U_0^*(x, z) U_1(x, z) &= \int_0^{\infty} U_0^*(x, z) U_1(x, z) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} 2 \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \exp \left[ - \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right)^2 \right] dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。以上より、最終的な  $P_{\text{WFS}}$  は以下のようになる:

$$P_{\text{WFS}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} J_0 J_1 R_0 \left( \sin \eta(z) \frac{\delta x}{w_0} - \cos \eta(z) \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \quad (4.81)$$

この式から、分割 PD の置く位置によって取れる  $\delta x$  及び  $\delta \theta$  に対するエラー信号の大きさが異なることが分かる。

また、同様にして DC の WFS 信号における信号強度を  $P_{\text{WFS}}^{\text{DC}}$  とすると、式 (4.80) より、

$$\begin{aligned} P_{\text{WFS}}^{\text{DC}} &= -2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} J_0^2 |E_0|^2 \\ &\quad \times \left\{ |r_{00}(\Omega)|^2 \left( \cos \eta(z) \frac{\delta x_r}{w_0} + \sin \eta(z) \frac{\delta \theta_r}{\alpha_0} \right) \right. \\ &\quad + \text{Re} [r_{00}(\Omega) r_{10}^*(\Omega)] \left( \cos \eta(z) \frac{\delta x}{w_0} + \sin \eta(z) \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \\ &\quad \left. + \text{Im} [r_{00}(\Omega) r_{10}^*(\Omega)] \left( \sin \eta(z) \frac{\delta x}{w_0} - \cos \eta(z) \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right) \right\} \quad (4.82) \end{aligned}$$

となる。

## 4.6 オープンループ伝達関数の測定

4.1.1 節でも見たように、オープンループ伝達関数の測定は、その系での制御の可否を見る上で非常に重要な物理量である。

実際にオープンループ伝達関数を測定する際には、図 4.9 のように行う:

$S(\omega)$  は入力信号であり、 $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  の二地点で信号を測定する。ここで、外乱による雑音が無視できる程小さいとした時、 $A(\omega)$  での信号について以下の方程式が成立する:

$$A = -AHF + S$$

これを解くことにより、以下の式を得る:

$$A = \frac{1}{1 + HF} S \quad (4.83)$$

同様の議論を行うことにより、 $B(\omega)$  での信号について以下の方程式が成立する:

$$B = -(B + S)HF$$



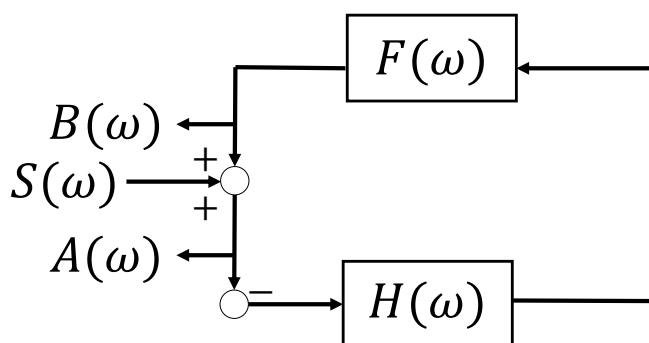


図 4.9 オープンループ伝達関数の測定方法

これを解くことにより、以下の式を得る:

$$B = -\frac{HF}{1+HF}S \quad (4.84)$$

したがって、 $B(\omega)$  を  $A(\omega)$  で割ることにより、オープンループ伝達関数が得られる:

$$\frac{B}{A} = -\frac{\frac{HF}{1+HF}S}{\frac{1}{1+HF}S} = -HF \quad (4.85)$$

このようにして得られた信号を、FFT アナライザにより解析すれば、オープンループ伝達関数が得られる。

# 第5章

## 実験

この章では、本研究で行った Fabry-Perot 共振器の長さ制御実験、DC の WFS 信号取得実験、及び、それに伴った予備実験についてまとめる。

### 5.1 実験機器

本実験で用いた実験機器を以下に挙げる：

#### 1. 光学素子

- レーザー光源

今回使用したレーザーは Nd:YAG レーザーである。波長 1064nm、出力 21.2mW である。専用のソフトを用いて光の強度を調節することができ、今回の実験においてはファラデーアイソレータを通した上で 16mW 程度の出力にして使用した。メーカー/型番は RIO/RIO0085-3-08-1。

- ファラデーアイソレータ

光を一方向にのみ伝える性質をもった素子であり、これを用いてレーザーへの反射光を取り除いている。メーカー/型番は THORLABS/IO-G-1064-APC。

- ミラー

今回 Fabry-Perot 共振器を組むにあたり、図 2.2 のように二枚のハーフインチミラーを使用した。

フロントミラーには曲率半径が 100mm であり、反射率 95% の凹面鏡を用いている。メーカー/型番は LAYERTEC/103505。また、エンドミラーには、曲率半径が 100mm であり、反射率 > 99.9% の凹面鏡を用いている。メーカー/型番は LAYERTEC/103167。また、折り返し鏡には 6.35mm 径の反射率 99.8% のミラーを用いている。

これに加えて、共振器のアライメント調節のための、1064nm の光に対する反射率の非常に大きい平面鏡を用いている。メーカー/型番は、Altechna/AYD-10 など。また、DC の WFS 信号取得の実験において、反射光を分離するために反射率 92% の平面鏡を用いている。

- レンズ

レーザーのビーム径を調節するために使用した。モードマッチングにあたり、焦点距離 200mm の平凸レンズを一枚と、焦点距離 500mm の平凸レンズを一枚使用している。また、フォトディテクタに入る光を調節するために、焦点距離 500mm の平凸レンズを一枚と、焦点距離 50mm の平凸レンズを一枚用いている。メーカー/型番は、50mm,200mm,500mm のレンズについて、それぞれ THORLABS/LA1131-YAG, THORLABS/LA1708-YAG, THORLABS/LA1908-YAG

- 偏光ビームスプリッタ (PBS)

P 偏光のみを透過させ、S 偏光を反射させる素子である。共振器に直線偏光を入射させるために用いる。

- 1/2 波長板

結晶軸と光の偏光軸とのなす角の大きさに応じて、偏光軸を回転させる性質を持つ。今回の実験では、PBS の前後に一枚ずつ入れた。PBS 前の波長板によって、PBS を通過する光を最大化する事ができ、その後の波長板によって、共振器に入る直線偏光の偏光軸を変えることができる。

## 2. ピエゾ

共振器内の折り返し鏡の両端に二つと、エンドミラーの両端に二つの計四つ張り付けている。折り返し鏡に張り付けているものは長さ制御用であり、エンドミラーに張り付けているものは DC の WFS 信号取得用である。メーカー/型番は THORLABS/PA1CEW。

## 3. ミラーマウント

折り返し鏡とピエゾを支える真鍮製のマウントである。図 5.1 に実際のマウントの画像を載せる。Q 値を下げるため、材質は真鍮を用いている。また、干渉計の伝達関数における UGF をなるべく高くするために、マウントの共振周波数の最低次が数 kHz 以上になるよう設計を行った。付録 A にて実際に設計した図面を載せている。

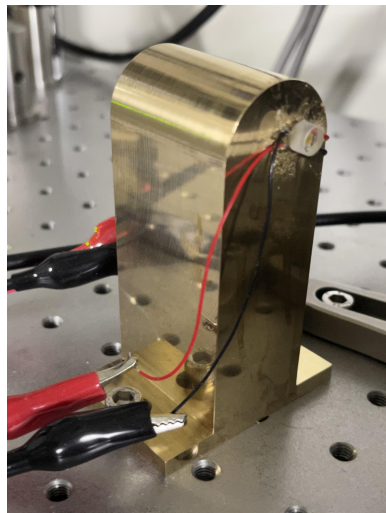


図 5.1 ミラーマウント

## 4. EOM

PDH 信号、及び WFS 信号を得るための位相変調器である。詳細は 4.4 節参照。変調

周波数は 20MHz である。メーカー/型番は THORLABS/EO-PM-NR-C2

#### 5. フォトディテクタ

共振器からの透過光や反射光を電気信号に変換する。メーカー/型番は THORLABS/PDA10C2 及び EOT/ET-3040。長さ制御のための反射光を取得する際には PDA10C2 を用いており、それ以外のフォトディテクタは ET-3040 を用いている。

#### 6. スペクトラムアナライザ

伝達関数の測定に用いた。測定用のシグナルを入れ、ゲインや位相の解析を行うことができる。メーカー/型番は小野測器/DS-3200。

#### 7. 電気回路

- ローパスフィルタ

PDH 信号取得用のローパスフィルタを設計した。今回設計したローパスフィルタは図 5.2 のようになっている。カットオフ周波数は 106Hz であり、ゲインは 15 倍以上で調節可能である。なお、今回の実験では制御信号にオフセットを加えてピエゾに印加するため、ローパスフィルタの後に加算器を入れている。

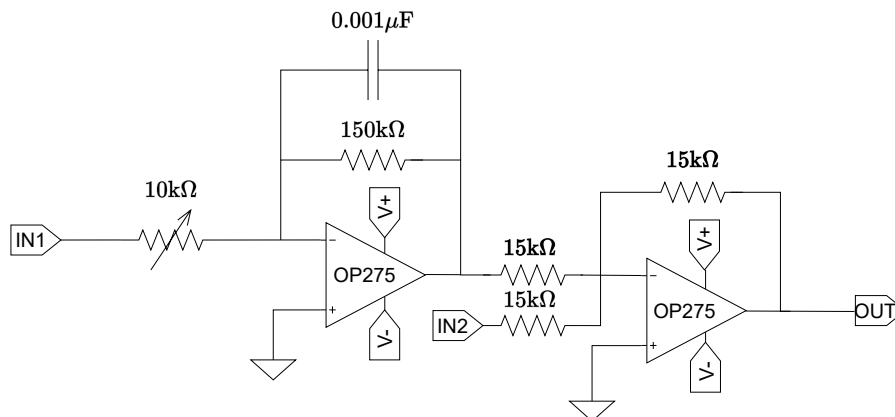


図 5.2 ローパスフィルタの回路図

今回は、基盤を用いてアナログ回路を作成した。実際に作成したローパスフィルタを図 5.3 に示す。奥に見える可変抵抗でゲインの調整を行うことができる。

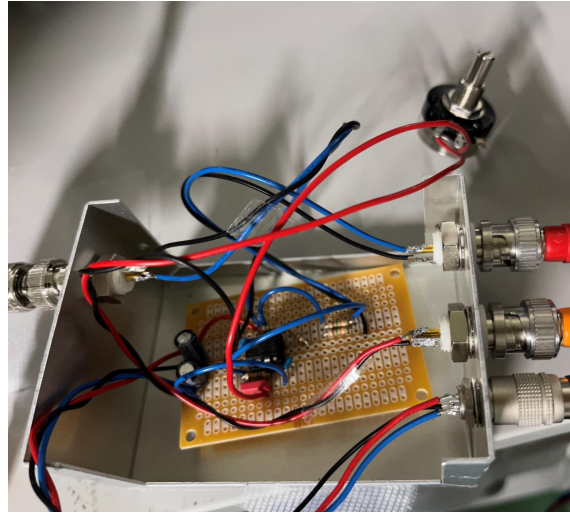


図 5.3 作成したローパスフィルタ

今回オープンループ伝達関数の測定を行った際のローパスフィルタのボード線図を理論値と比較したものは図 5.4 のようになった。

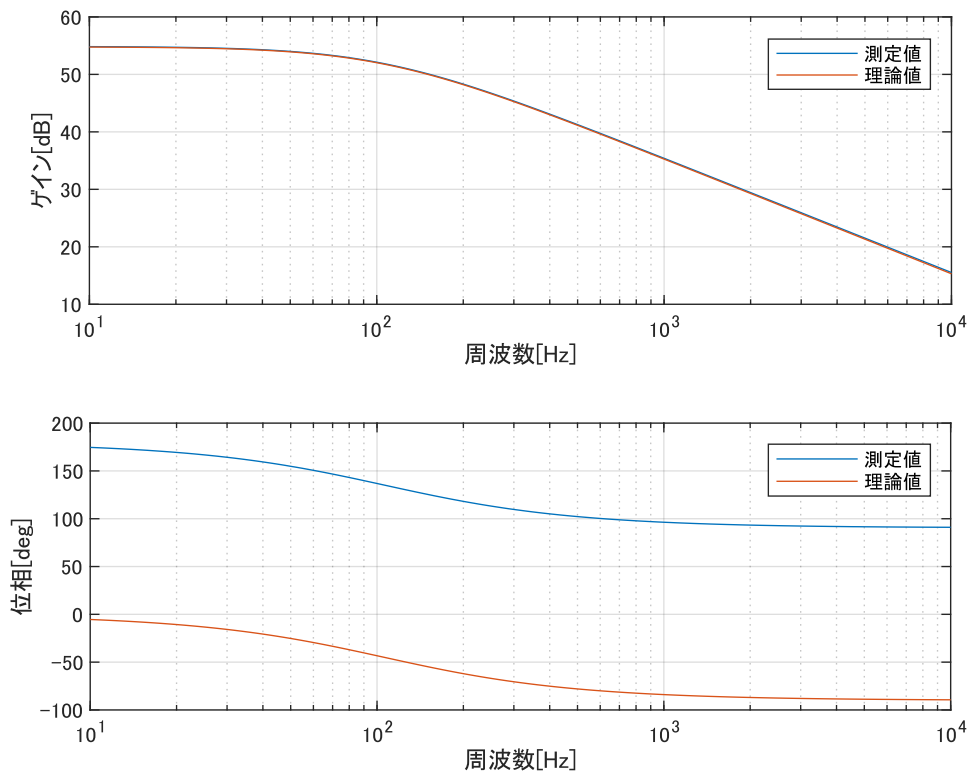


図 5.4 ローパスフィルタの伝達関数の理論値との比較

なお、理論値のゲインは実験値と合うように値を設定している。ゲインのグラフから、このローパスフィルタのゲインはおよそ 554 倍であることが分かる。ゲインの

グラフの振舞いは理論値とほぼ同じであるが、位相に関しては  $180^\circ$  ずれていることが分かる。これは、スペクトルアナライザに入力と出力の信号がデフォルトで反転するように設定されているからであると考えられる。すなわち、得られた信号には  $-1$  がかけられることになり、 $180^\circ$  の位相差を生んでしまう。理論値の位相を  $180^\circ$  上に移動させた図は図 5.5 のようになった。ゲイン、位相ともにほぼ一致して

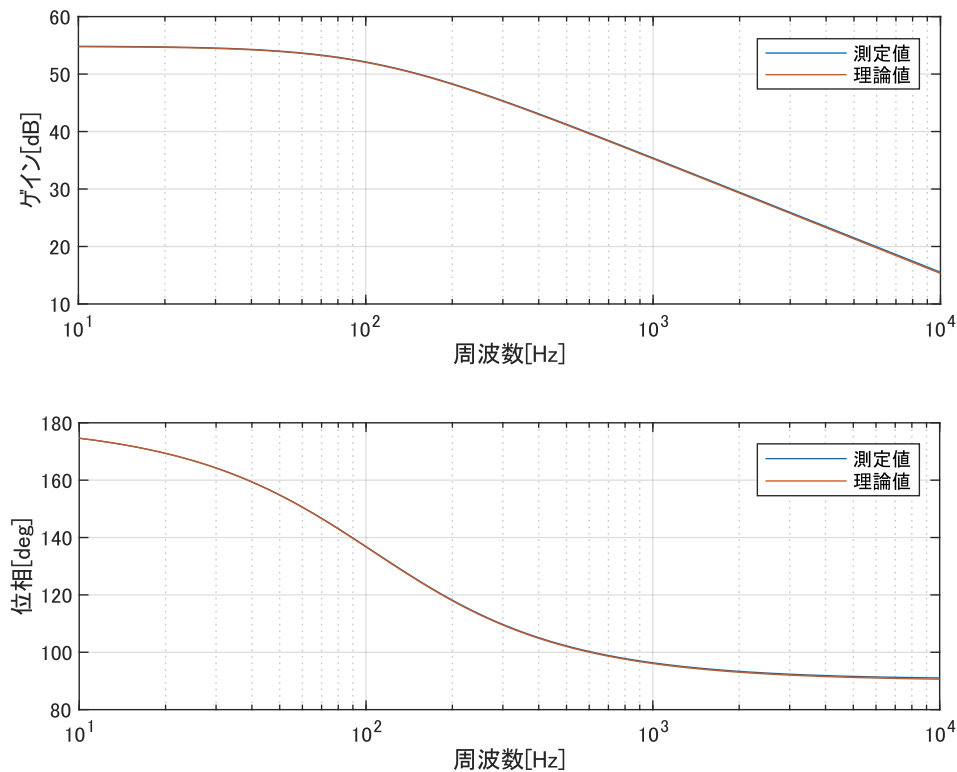


図 5.5 ローパスフィルタの伝達関数の理論値との比較 (修正後)

おり、設計通りに作動していると考えられる。

- 加算器

伝達関数の測定用の他、様々な用途で用いている。今回の実験では、入力の前後で信号が反転する加算器と、反転しない加算器の2つを作成した。以下の図 5.6 及び図 5.7 回路図である。

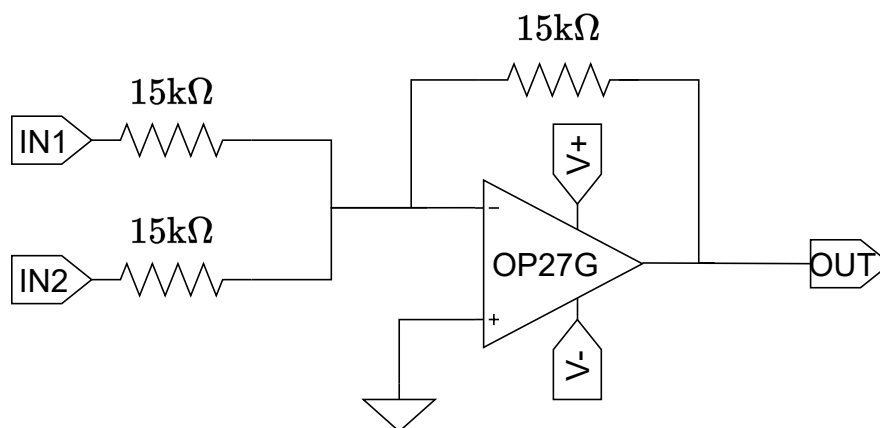


図 5.6 反転加算器の回路図

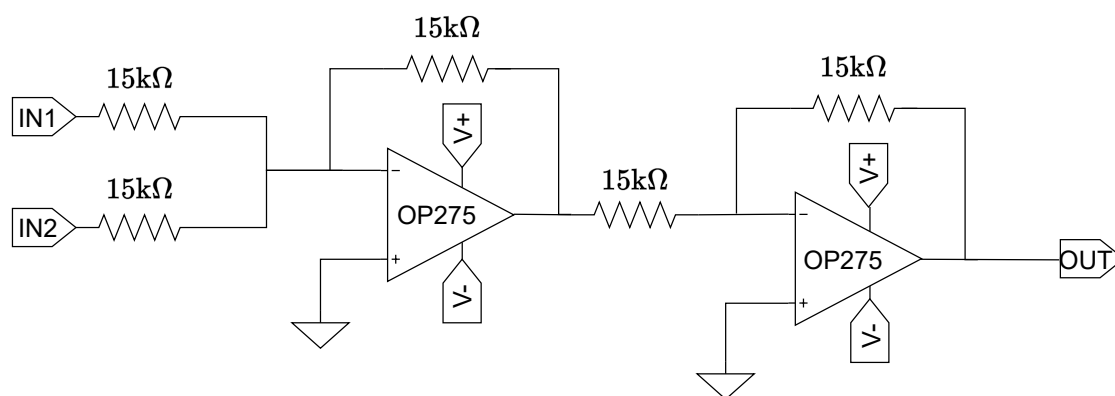


図 5.7 非反転加算器の回路図

なお、非反転の加算器については、時間の都合でブレッドボードに作成したものを  
用いている。図 5.8 に実際に作成した加算器の画像を載せる。

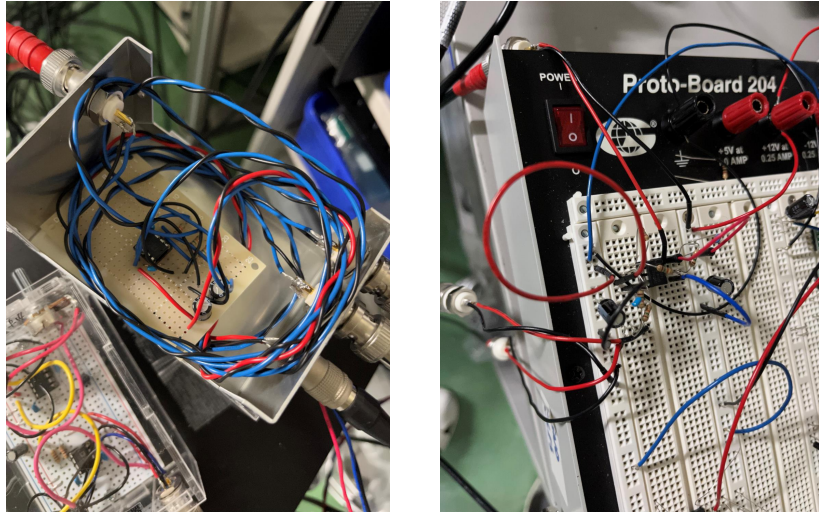


図 5.8 作成した反転加算器 (左) 及び非反転加算器 (右)

## 5.2 実験準備

実験に関する準備として、レーザーのビームプロファイル、及び、それを用いた Fabry-Perot 共振器の配置決定を行った。

### 5.2.1 ビームプロファイル

式 (4.20) より、00 モードのビームの強度  $P_{00}$  は以下で与えられる:

$$P_{00} = |U_{00}|^2 = \frac{2}{\pi w(z)^2} \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w(z)^2}\right] \quad (5.1)$$

この式から、 $z$  を固定した際に、 $xy$  平面に対し、ビームの強度は Gaussian で分布していることがわかる。したがって、レーザービームに対し、垂直になるようにビームプロファイラを挿入し、その強度分布を式 (5.1) で近似することにより、その位置での  $w(z)$  を決めることができる。また、それを異なる  $z$  について行うことで、 $w(z)$  の形状についてのデータを得ることができ、そのデータ式 (4.8) 式でフィッティングすることにより、ビームウエストの位置と大きさを決定することができる。このような作業をビームプロファイルと呼ぶ。

### 5.2.2 共振器長の決定

ビームウエストの位置、及び、大きさが決定した後には、光学素子の配置を決めていく。そのためには、まず Fabry-Perot 共振器の共振器長を決める必要がある。共振器の安定性は  $g$ -factor により議論することができる。共振器長を  $L_f$ 、二枚の鏡の曲率をそれぞれ  $R_1, R_2$  とすると、それぞれの鏡に対する  $g$ -factor  $g_1, g_2$  は以下で与えられる:

$$g_1 = 1 - \frac{L_f}{R_1}, g_2 = 1 - \frac{L_f}{R_2} \quad (5.2)$$



今回の場合、フロントミラーとエンドミラーの曲率が等しいため、 $g_1 = g_2$  となる。ここで、共振器は、g-factor を用いた以下のような関係式を満たす際に安定する：

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \tag{5.3}$$

今回の実験では、この g-factor が KAGRA の共振器と一致するように共振器長を決定した。

### 5.2.3 モードマッチング

共振器長を決めることにより、共振器内でのビームウエストの位置と大きさを決めることができる。今回の実験における共振器内のビームは、ビームウエストがフロントミラーとエンドミラーの中央に来るようにする。さらに、光が共振器内を往復してもビーム径が変化しないようにするために、式 (4.10) で与えられるビームの曲率半径が鏡の曲率半径と一致させる必要がある。これらの条件を満たすように、レーザー光の適切な位置にレンズを挿入し、ビームウエストの位置と大きさを变化させる。この作業をモードマッチングと呼ぶ。今回はモードマッチングの計算にあたり、JamMt と呼ばれるシミュレーションソフトを用いた。モードマッチングを踏まえた上での、最終的な実験装置の配置は図 5.9 のようになった。ここでは、フォトディテクタを PD と表記している。各実験において用いる装置は異なるため、その都度説明していく。また、実際の装置の様子を図 5.10 及び図 5.11 に示す。図の赤線はレーザーの光路を示している。図 5.9 は WFS 信号取得実験の際に撮影したため、図 5.9 とは異なり PD1 の位置に CCD カメラが設置されている。

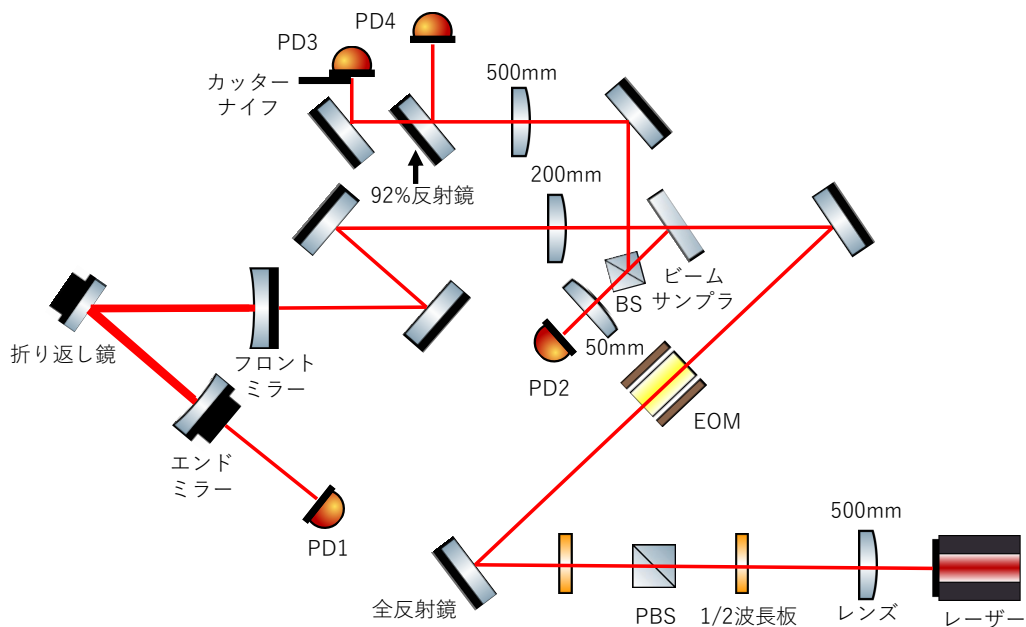


図 5.9 実験全体のセットアップ

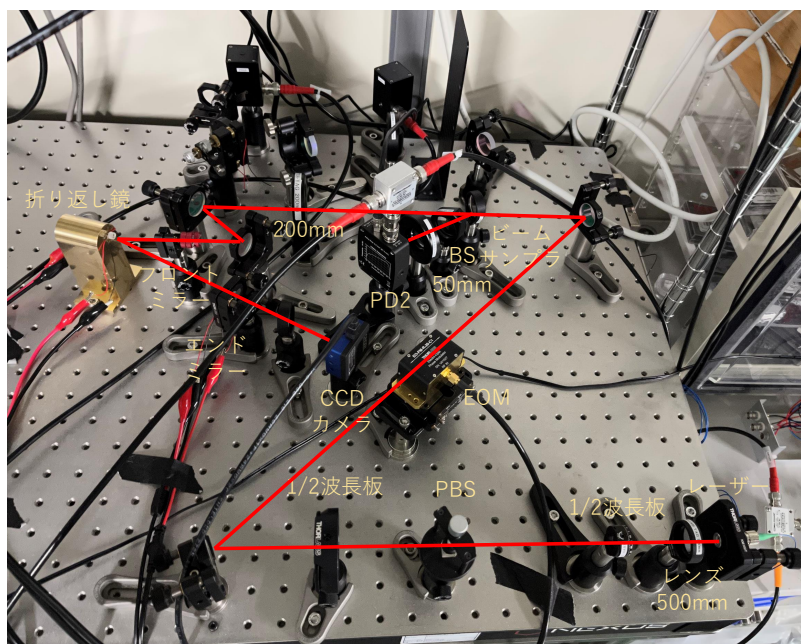


図 5.10 実際の光学系のセットアップ

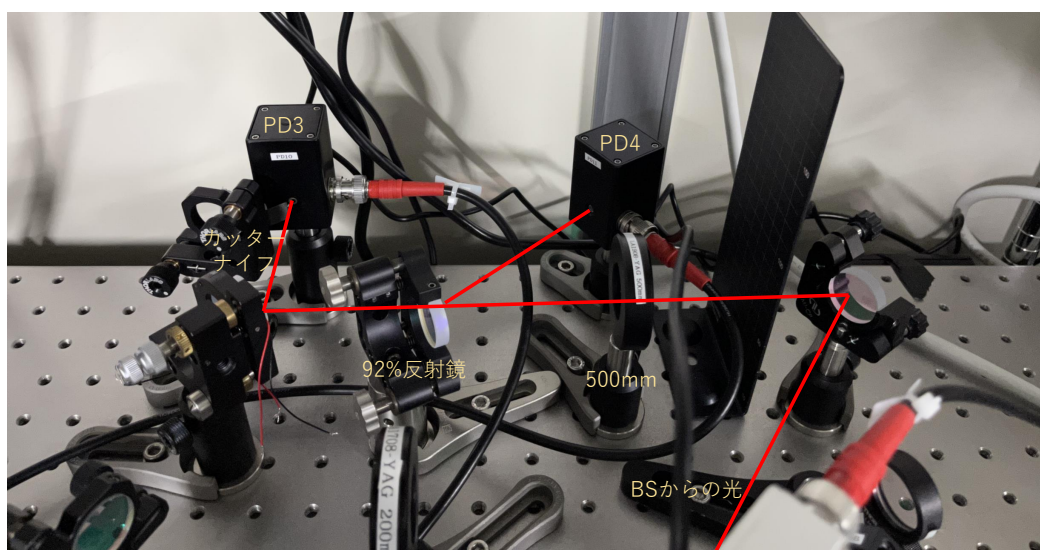


図 5.11 実際の光学系のセットアップ (WFS 信号取得部分拡大図)

### 5.3 フィネスの測定

本研究の予備実験として、ピエゾ及び、作成した Fabri-Perot 共振器の性能評価を行うためフィネスの測定を行った。実験のセットアップは図 5.13 のようになる。

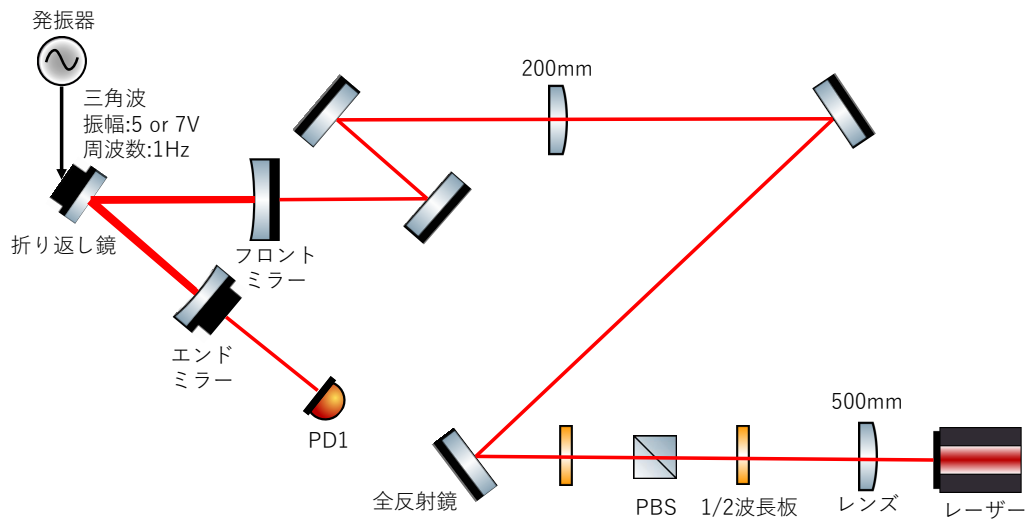


図 5.12 フィネス測定実験のセットアップ

実験手順としては、始めに共振器のアライメントを調節し、共振状態が見えるようにする。その上で、 piezo を発振器と接続し、発振器から周波数 1Hz、振幅 5V の三角波を印加し、その時の透過光の様子をオシロスコープで測定した。実際の測定結果は図 5.13 のようになった。

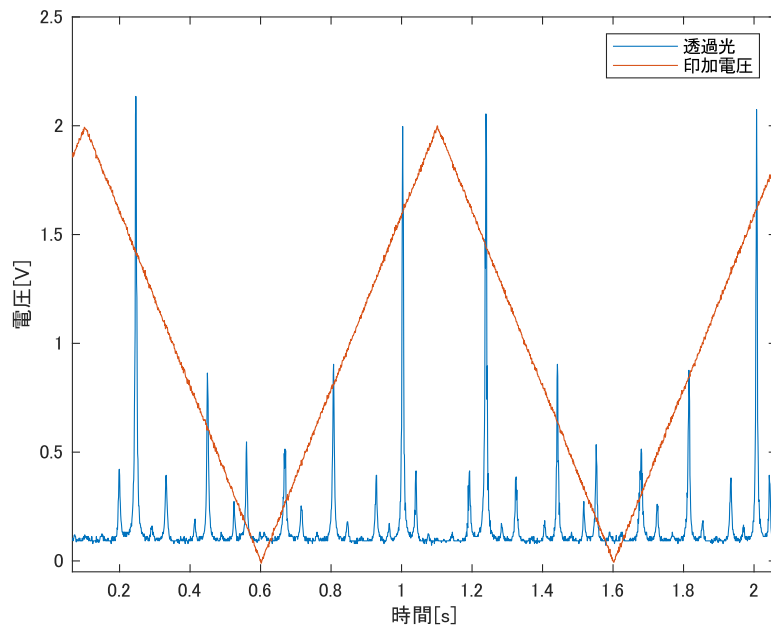


図 5.13 三角波 (振幅 5V) 印加時の透過光の様子

なお、見やすさのために、印加電圧は測定値から 1/5 倍している。また、piezo には正の電

押し加えできないため、三角波に 5V のオフセットを加えている。1 秒付近にあるような、透過光のピークのうち最も高いピークが 00 モードのピークであると考えられる。グラフを見ると、印加電圧が 0V から 10V まで増加する間に 00 モードのピークは 1 つしかないため、この状態では鏡を 1 フリンジ振れていない事が分かる。

フィネスの測定には、少なくとも共振器長を 1 フリンジ以上変化させる必要があるが、今回用いた発振器では最大で振幅 5V の電圧までしか印加できない。そこで、加算器を通すことで三角波の振幅を 7V 程度まで増幅させた上で Piezo に印加し、Finess の測定を行った。測定結果は図 5.14 及び図 5.15 のようになった。

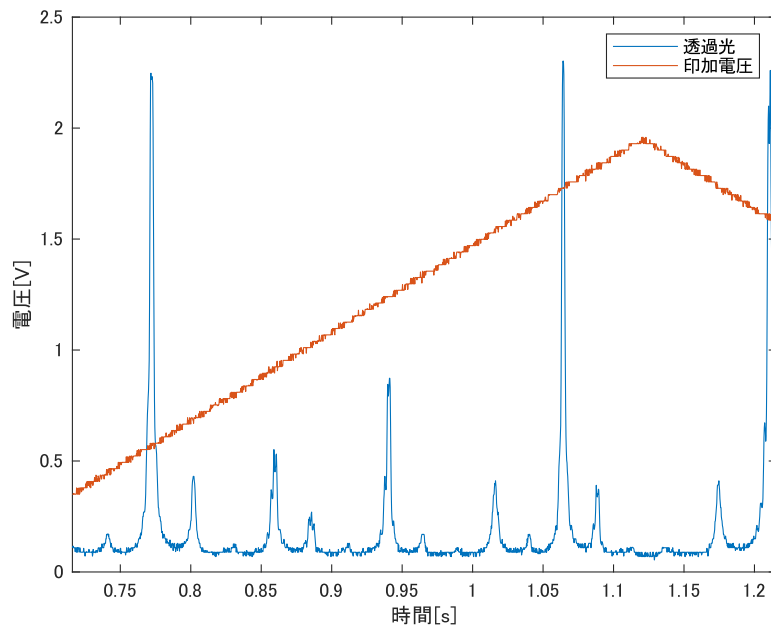


図 5.14 三角波 (振幅 7V) 印加時の透過光の様子

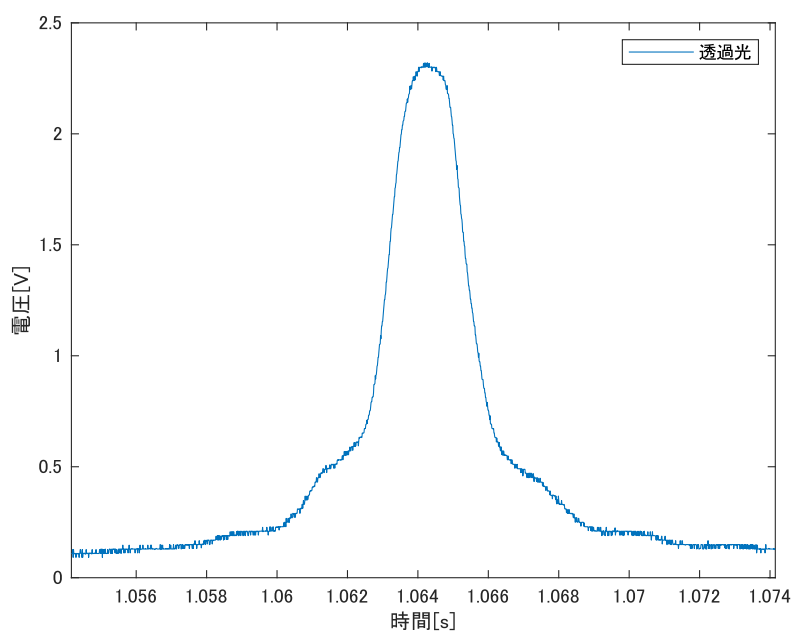


図 5.15 共振点付近での透過光の様子

こちらについても、先ほどと同様に見やすさのために、印加電圧は測定値から 1/7 倍している。また、7V のオフセットを加えているため、印加電圧の最大値は 14V 程になる。これらのグラフから、フィネスを見積もっていく。共振ピーク間の時間幅は、誤差も含めると  $292 \pm 1\text{ms}$  程度であり、1 つのピークの半値幅は  $2570 \pm 10\mu\text{s}$  程度であると見積もられる。このことから、今回の共振器のフィネスは、

$$\frac{292 \pm 1[\text{ms}]}{2570 \pm 10[\mu\text{s}]} = 113 \pm 2 \quad (5.4)$$

程度であると見積もられる。なお、今回用いた鏡の反射率は 95% と  $>99.9\%$  である。ここから、エンドミラーの鏡の反射率を 100% とすると、式 (2.38) よりフィネスの理論値は、

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{\sqrt{0.95}}}{1 - \sqrt{0.95}} \simeq 123 \quad (5.5)$$

である。理論値よりもフィネスが低くなった要因としては、共振器を往復する際に外部にエネルギーが漏れてしまっている事などが挙げられる。

また図 5.14 より、ピーク間の印加電圧の差は 8V 程度である。このため、ピエゾが電圧に対しおおよそ線形に応答することを考慮すると、加算器を用いずに発振器からの電圧のみで共振状態を作ることが可能であると考えられる。そのため、以降では加算器による印加電圧の増幅等は行わずに実験を行っている。

## 5.4 Fabry-Perot 共振器の長さ制御

本研究の主実験として、Fabry-Perot 共振器の長さ制御を行った。実験のセットアップは図 5.16 のようになる。

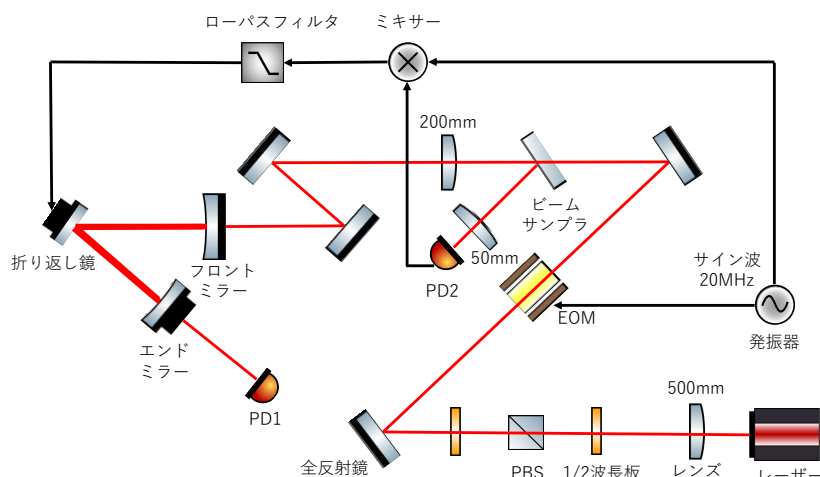


図 5.16 共振点付近での PDH 信号

図 5.12 の装置に加え、反射光を取る PD、及び掛算器とローパスフィルタを用いて PDH 信号を得ている。原理については 4.4 節で説明した通りであるが、実験的には以下のような手順で制御信号を得る：

1. EOM に発振器から 20MHz のサイン波を印加し、位相変調をかける。
2. 共振器からの反射光を PD を用いて取得する。
3. PD から得られた信号を、発振器のサイン波の信号と掛算器を用いて掛け合わせる
4. 掛け合わせた信号を、ローパスフィルタに通す。

これらの操作を行った結果、得られた制御信号を図 5.17 に示す。

グラフを見ると、確かに共振点付近で線形な信号が得られている事が分かる。なお、制御したい共振点は 0 秒付近や-0.32 秒付近にあるような 00 モード共振ピークであり、他のピークに比べて大きな線形信号が得られている。しかし、このピーク以外の共振ピークにも線形信号が見えているため、制御の際には図 5.17 の制御信号に適切なオフセット電圧を加える必要がある。

また、図 5.17 において PDH 信号にオフセットは加えていないが、500mV 程度オフセットが乗ってしまっている事が分かる。これは、作成したアナログ回路の接触の問題でローパスフィルタに電圧が乗ってしまっているためだと考えられるが、明確な原因の特定、及び、解決には至っていない。しかし、オフセット用の加算器は正常に作動していたため、今回の実験では意図せず乗ってしまった電圧も含めてオフセットを調節することで解決している。

図 5.17 の信号を用いて長さ制御を行った際の透過光の様子が図 5.18 である。グラフを見ると 2.1V 付近でほぼ一定の値を取っており、長さ制御が行えている事が分かる。また、長さ制御時とピエゾに三角波を印加した際の透過光の様子の比較が図 5.19 である。図における 0.7 秒付近でロックを落とし、1.1 秒付近で三角波を印加している。これを見ると、三角波によって作られた共振器ピークの最高点付近で長さ制御が行えており、この制御が透過光の最も強い点 (00 モード) で制御できている事が分かる。

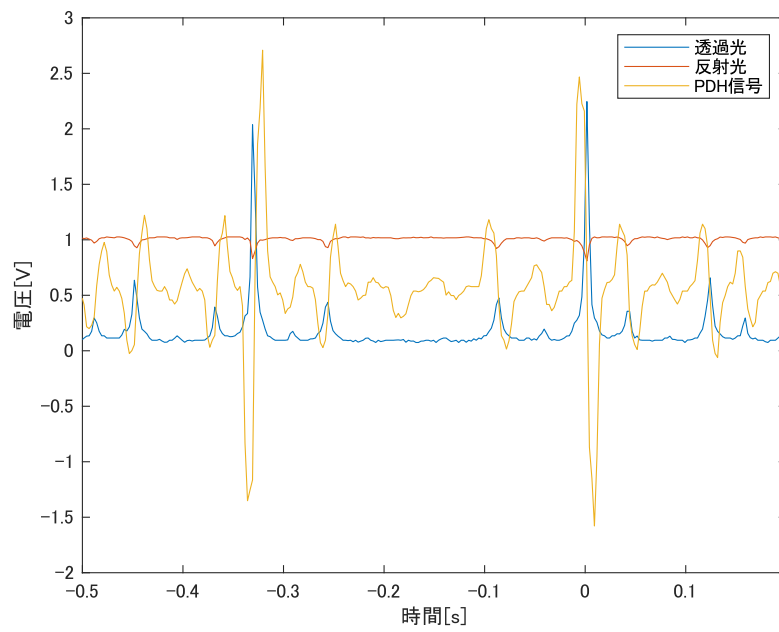


図 5.17 共振点付近での PDH 信号

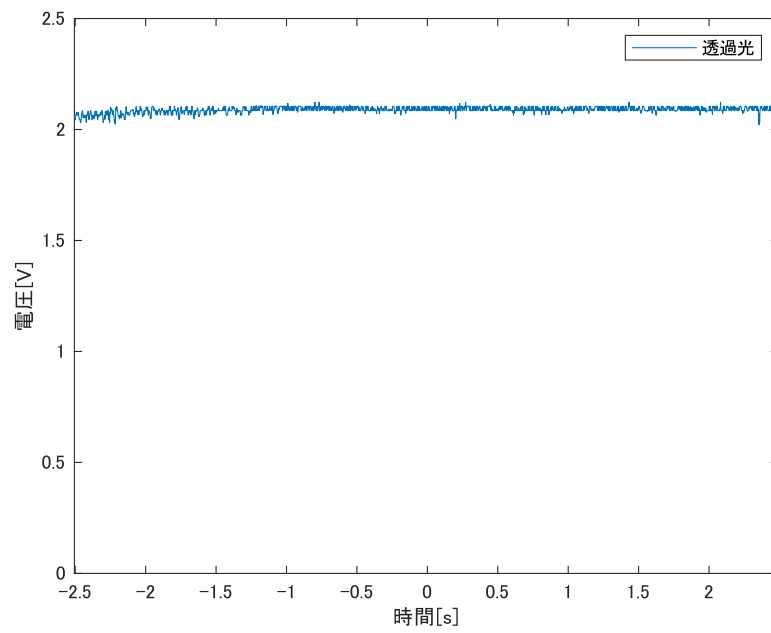


図 5.18 長さ制御中の透過光の様子



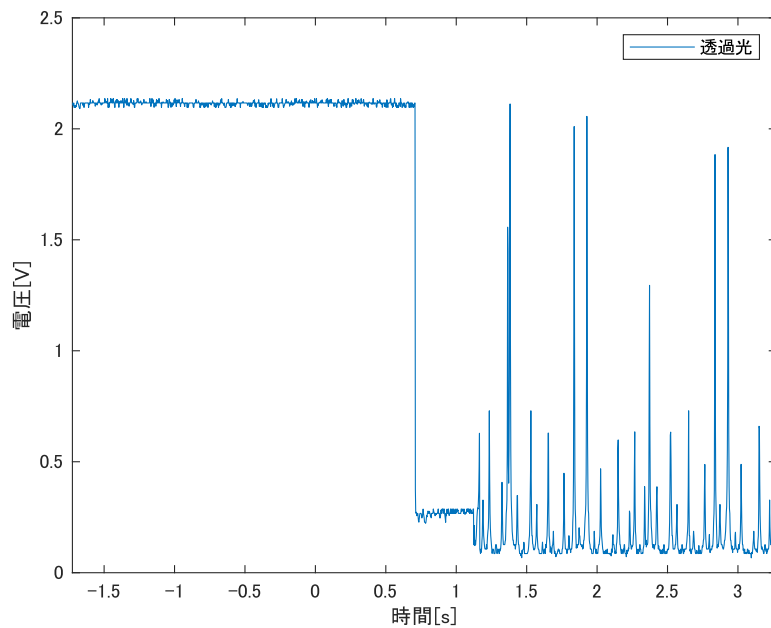


図 5.19 制御から掃引への移行の様子

## 5.5 オープンループ伝達関数の測定

次に、この長さ制御の安定性を議論するため、オープンループ伝達関数の測定を行う。方法としては、図 5.16 のローパスフィルタからピエゾに向かう間に加算器を挿入し、そこから 1kHz 以下の周波数帯には振幅 0.1V の信号を、それ以上の周波数帯には振幅 8mV の信号を加え、前後の信号を取ることで 100kHz までのオープンループ伝達関数の周波数依存性を測定した。結果は図 5.20 のようになった。

グラフを見ると、UGF は 4.5kHz 程度である事が分かる。したがって、位相余裕は  $70^\circ$  程度あり、この制御は安定であると判断できる。また、ゲインのグラフにおいて、十分低周波数な領域におけるゲインは 30dB 程度であると見積もられる。

なお、(4.85) 式より測定により得られる伝達関数はオープンループ伝達関数に  $-1$  を掛けたものであるから、位相は  $180^\circ$  付近から始まるはずであるが、今回の測定では  $0^\circ$  付近から始まっている。これは、ローパスフィルタの伝達関数を測定した場合と同様に、入力と出力の信号がデフォルトで反転するように設定されているからであると考えられる。すなわち、今回の測定で得られた伝達関数は、制御系におけるオープンループ伝達関数そのものであると考えてよい。



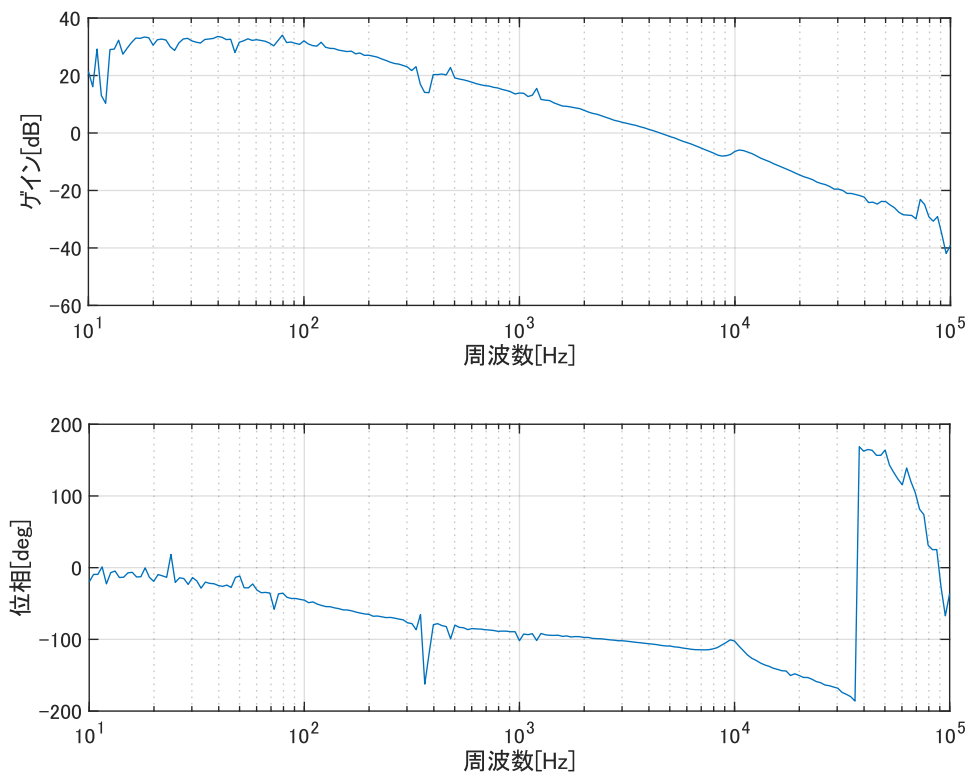


図 5.20 制御系のオープンループ伝達関数

## 5.6 DC の WFS 信号の取得

共振器の長さ制御を行うことができたため、この状態で共振器のアライメントを僅かに崩す事で、WFS 信号を得ることができる。今回は、反射光をフォトディテクタで観察し DC の WFS 信号が得られるかを確認した。実験のセットアップは図 5.21 のようになる。WFS 信号取得部分では Gouy 位相調節とフォトディテクタに入る光のサイズ調節のため、フォトディテクタの前にレンズを挿入している。本来 WFS 信号を得るためには QPD が必要であるが、現在当研究室にある QPD の周波数帯域は 150kHz と EOM の位相変調の周波数である 20MHz よりも非常に小さいため、このままでは復調を行えない。そこで、今回の実験では通常のフォトディテクタの半分をカッターナイフにより塞ぐことで姿勢制御信号を取り出している。式 (4.82) より、レーザー光全体で積分を行うと WFS 信号は消えてしまうが、フォトディテクタに入射する光を一部に制限すれば、WFS 信号を残すことができる。PD3 は制御信号取得用であり、PD4 は PD3 と信号を比較するために用いている。

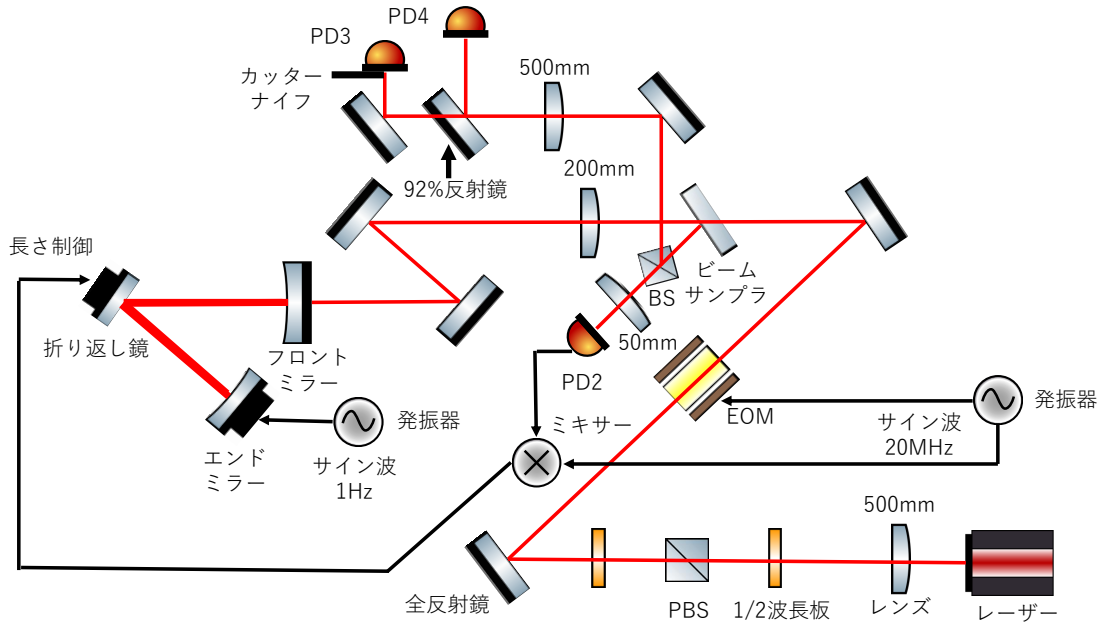


図 5.21 DC の WFS 信号取得実験のセットアップ

この状態で、折り返し鏡に振幅 5V の三角波を印加し、反射光の様子を観察すると図 5.22 のようになった。

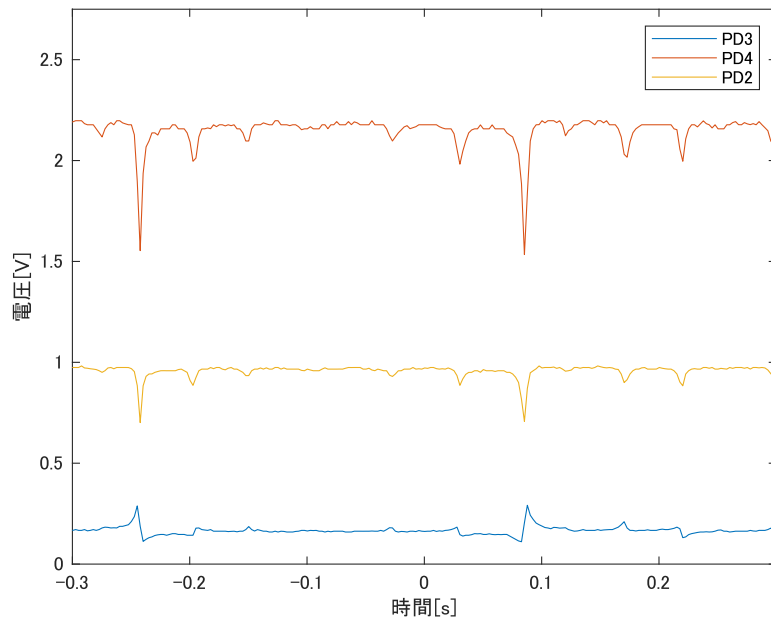


図 5.22 長さ掃引時の反射光の様子

グラフを見ると、PD4 からの信号は PD2 の信号とほぼ同じように取れている事が分かる。PD4 の信号において、-0.25 秒付近や 0.08 秒付近のディップが、00 モードの共振状態にあたりと考えられる。PD2 からの信号については、PD4 や PD2 と異なり、共振点付近で線形性が

見られる。これは、長さの変異によって生じたビームの角度や平行位置のずれが表れているためであると考えられる。また、PD4での出力はPD3よりも高くなるように設定している。こうする事により、もし共振器が長さに変異しているのであれば、PD4からの信号がPD3よりも大きく振動する事になり、共振器長が変化すると判断する事ができる。逆に、もしPD4で信号が一定値を保っている上で、PD3の信号に変化が見られた場合は、DCのWFS信号が取れていると判断できる。

このセットアップに対し、共振器の長さ制御を行った上で、エンドミラーについているピエゾを動かすことにより共振器内のビームのミスアライメントを引き起こす。今回の実験では、周波数1Hz、振幅350mV、オフセット600mVのサイン波をエンドミラーのピエゾの片側に印加した。その様子をPDで測定した結果は図5.23のようになった。なお、発振器からの信号は、PD3からの信号が適切に取れているかを確認するために用いているため、出力電圧に対し1/100倍し、0.225Vのオフセットを加えている。図を見ると、発振器の信号と同じ周波数で振動していることが分かる。

また、PD3とPD4の信号を比較したものが図5.24である。ここでは、比較のためにPD3の信号に対し1.32Vのオフセットを加えている。また、発振器からの信号についても先ほどと同様に、出力電圧に対し1/100倍し、1.54Vのオフセットを加えている。図5.22との比較によりPD4での信号は00モードの共振状態付近でおおよそ一定値を取っていることが分かる。それに対し、PD3での信号発振器と同じ周期で振動している事から、DCのWFS信号が適切に得られていると考えられる。

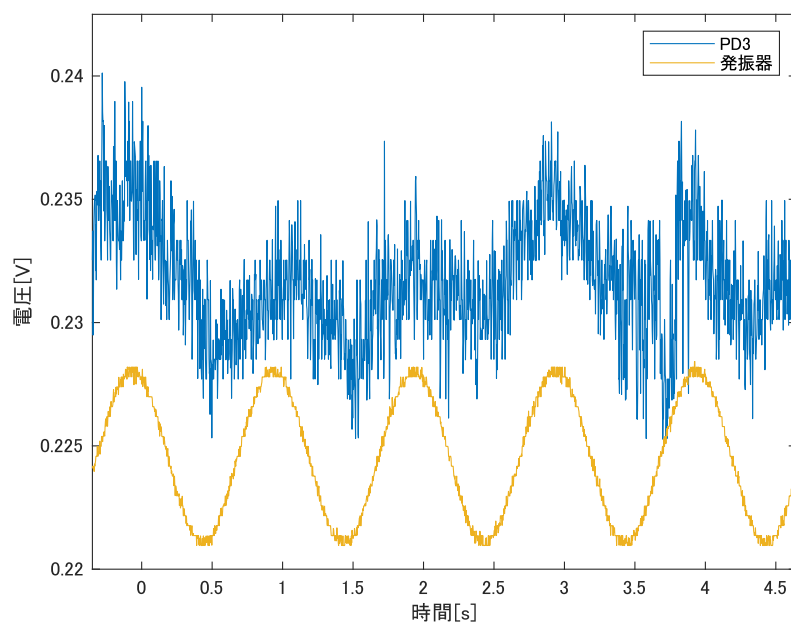


図 5.23 角度掃引時の反射光の様子

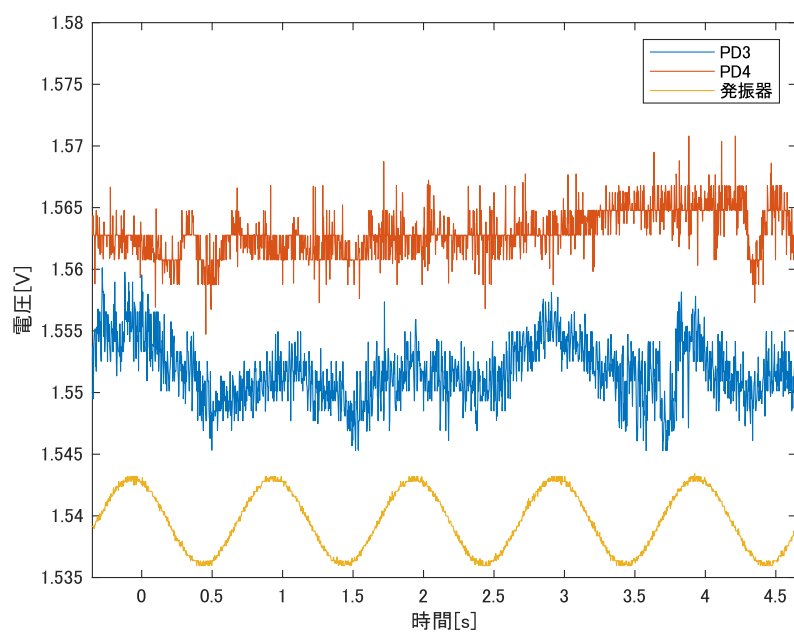


図 5.24 PD3 と PD4 の比較

## 第6章

# まとめと今後の展望

### 6.1 本研究のまとめ

本研究では、KAGRAにおける複屈折問題に対する、多重分割フォトディテクタを用いた姿勢制御法の開発に向けた、Fabry-Perot 共振器の長さ制御及び、姿勢制御信号である WFS 信号の取得を行った。結果としては、ファブリペロー共振器の共振器長を 00 モード付近で制御することに成功した。この長さ制御の制御系について、オープンループ伝達関数の測定を行ったところ、位相余裕が十分にあり、制御が安定であることが確かめられた。また、共振点付近で長さ制御した状態でエンドミラーを動かすことにより、DC の WFS 信号を得ることに成功した。

### 6.2 今後の展望

今後はまず、DC の WFS 信号に対し、PDH 信号を得た時と同じ方法で復調する事により、WFS 信号を取得する。復調を行うにあたって、現在のような PD に入る光の一部を遮るといった方法では無く、QPD を用いて信号を取得する予定である。しかし、前述したように現在当研究室にある QPD の周波数帯域が、位相変調の周波数よりも非常に小さいため、位相変調の周波数帯域にも対応した QPD を作成する必要がある。

QPD を用いて WFS 信号を取得する事ができた際には、本研究の最終的な目標である多重分割フォトディテクタを用いた姿勢制御法開発の検証実験を行う。具体的には、複屈折を模したフィルターを共振器内に入れることで、模式的に反射光を汚し、それを多重分割フォトディテクタで検出することで検証実験を行う。多重分割フォトディテクタについても、当研究室で作成する予定である。

## 付録 A

### 作成した図面

本実験で用いた、長さ制御の鏡用のミラーマウントの図面を図 A.1 に載せる。

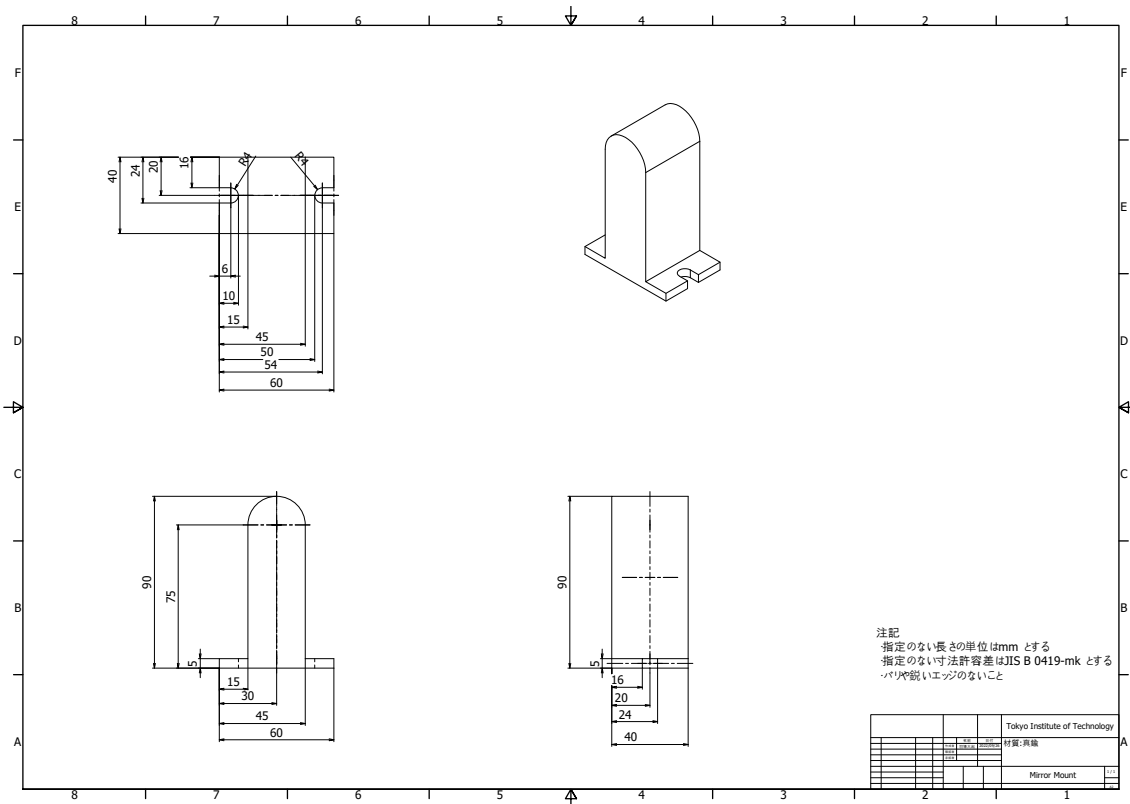


図 A.1 ミラーマウントの図面

なお、構造解析の結果、このミラーマウントの縦揺れの振動 (共振器の長さ方向の振動) に対する共振周波数の最低次は 2.8kHz 程度あった。

# 謝辞

本論文は多くの方の支えによって完成しました。この場で簡単にではありますが、お礼を述べさせていただきます。

指導教員である宗宮健太郎准教授には、研究を進めるにあたり、何度も指導やアドバイスをいただきました。光学実験の知識や経験があまりない私に対し、宗宮先生が丁寧に指導して下さったおかげで、ここまで研究を進めることができました。また、私の KAGRA に行みたいという願いを聞き入れ、実際に伺う機会をくださりました。

原田健一講師には、実験を行うにあたって非常にお世話になりました。分からないことや見分からないものがあつた際に、快く教えてくださりとても助かりました。

宇宙線研究所の牛場崇文助教と東京大学の小森健太郎助教には、KAGRA にてお世話になりました。牛場さんには、KAGRA の坑内での作業を手伝わせさいただき、短い期間でしたが多く特別な経験をさせていただきました。小森さんには、浅学な私に対し KAGRA について基礎から丁寧に教えてくださり、また、食事などプライベートの時間においても、物理の話だけにとどまらずたくさん話しかけてくださりました。小森さんの手厚いフォローのおかげで KAGRA での活動を充実したものにする事ができました。KAGRA での活動は短い時間でしたが、多くのことを学ばせていただきました。KAGRA での経験は、現在の私の研究のモチベーションにもなっています。

宗宮研究室の方々にも大変お世話になりました。

D3 の小田部さんには、理論や実験、ひいては研究生生活のことについてまで、沢山のアドバイスをいただきました。私が研究で行き詰まっている際に、何度も的確なアドバイスや励ましの言葉を下さり、とても助けられました。小田部さんの研究に対する姿勢を見習い、私自身も精進していきたいと思えます。

D1 の阿部さんとは、直接お会いする機会は少なかったですが、研究テーマが近いこともあり、研究の理論に対する手助けをいただきました。

M2 の鈴木海堂さんとは、実験室でよくお会いしました。私が実験で困っている際には声をかけて下さり、海堂さんの豊富な経験に基づく助言を下さりました。

同じく M2 の鈴木孝典さんには、研究室で行われた BBQ に参加した際に、就活や研究室での生活に関してのアドバイスをいただきました。

M1 の笹岡さんとは、席が近いこともあり、よくお話させていただきました。研究室に配属された当初から積極的に話しかけて下さったおかげで、今までとは全く違う研究室という環境でも、比較的早く慣れることができました。

同じく M1 の竹口さんには、院試のことについて色々と質問させていただきました。竹口さ

んのおかげで、院試前の様々な不安を解消することができました。

M1 の Diego さんとは、家が近いこともあり、時々帰り道にご一緒させていただきました。私の拙い英語に対し真摯に対応してくださり、楽しい会話をさせていただくことができました。

M1 の白倉さんには、アナログ回路作成の際にお世話になりました。はんだ付けのやり方など初歩の部分から丁寧に教えて下さったおかげで、その後の回路作成もスムーズに行うことが出来ました。

また、M1 の Elon さん、武田さんには、輪講の際にお世話になりました。私の発表に対し、的確な質問や意見を下さり、非常に勉強になりました。

同期の田中君には、院試から卒業研究において、一年間お世話になりました。院試の際には共に勉強し教えあうことで、問題に対する理解を深めることができました。また卒業研究においても、田中君と研究テーマが近いこともあり、シミュレーションの観点から実験に対するアドバイスをいただき非常に助かりました。田中君のおかげで、私自身この一年で成長できたと感じています。

最後に、ここまで私を支えて下さり、院試勉強や卒業研究にのみ集中させてくれた両親に感謝いたします。

皆様誠にありがとうございました。



## 参考文献

- [1] Y. Enomoto, Polarization Issue in the Central IFO, JGW-G1910388-v1 (2019).
- [2] K. Somiya, E. Hirose, and Y. Michimura, Influence of nonuniformity in sapphire substrates for a gravitational wave telescope, [Physical Review D](#) **100**, 082005 (2019).
- [3] 須藤靖, もう一つの一般相対論入門, 1st ed. (日本評論社, 2010).
- [4] 片岡優, 非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発 (修士論文), (2017).
- [5] 粕谷順子, 重力波検出器 KAGRA の出力モードクリーナの姿勢制御 (卒業論文), (2016).
- [6] 粕谷順子, 重力波検出器 KAGRA の出力モードクリーナの開発 (修士論文), (2018).
- [7] 小田部荘達, 偏光解析法を用いたリング共振器の制御 (卒業論文), (2018).
- [8] 笹岡聖也, ニューラルネットワークを用いた重力波の到来方向推定 (卒業論文), (2022).
- [9] 阿部誉, 透過位相誤差分布を使用したサファイア鏡の複屈折推定の検証 (修士論文), (2022).
- [10] 鈴木海堂, 信号リサイクル干渉計の安定化に向けたデジタル制御システムの構築 (卒業論文), (2021).
- [11] 道村唯太, Wavefront Sensor 法の原理, (2011).
- [12] 道村唯太, Notes on the Pound-Drever-Hall technique, (2010).
- [13] 立原浩輝, 深層学習を用いた鏡の姿勢制御について (修士論文), (2022).