

ブラックホールリングダウンからの重力波における高調波を含めた解析

東京工業大学 理工学研究科 基礎物理学専攻 宗宮研究室

学籍番号 15M01020

熱田 将

February 3

概要

時空の歪みが光速の波となって伝播する現象を重力波と呼ぶ。この現象は、約 100 年前にアインシュタインによって発表された一般相対論から予言されるものであり、2015 年 9 月にアメリカの研究機関 LIGO によって史上初観測がなされたものである。これまで重力波が観測されなかったのは、重力波が生み出す時空の歪みが非常に小さいことが原因である。その小ささゆえに、重力波の発生源としての候補は、超新星爆発やブラックホール等の大きな天体現象に限られる。その中でも、特に注目されていた現象がコンパクト連星及びその合体からの重力波である。その理由は、現象としてすでに電磁波による観測が行われていることや、コンパクト連星からやってくる重力波の波形が一般相対論から予言することができること等が挙げられる。特に、コンパクト連星が互いに公転しながら近づいていく段階から放出される重力波は、周波数が徐々に上昇していくという、雑音には見られない特徴を持っているため、有望な波源として期待されていた。LIGO グループが初検出した重力波もこれに該当する。

連星合体の最後には、多くの場合ブラックホールが形成されると考えられている。光での直接観測ができないブラックホールの情報を取得することは、重力波天文学の一つの重要な役割である。連星合体後やブラックホールに物体が落下した後などには、ブラックホールに振動が励起され、重力波を放出しながら減衰していく準固有振動という現象が発生する。この準固有振動からの重力波はリングダウンと呼ばれ、減衰正弦波のような波形をしている。これは一般相対論から解析的に導くことができ、波形の分かる重力波として、検出候補に挙げることができるが、この減衰正弦波は検出器の雑音などに多く見られる波形であり、そのためリングダウン単体を検出対象とすることは、現在の解析手法上難しいと考えられている。しかし、リングダウンと雑音との違いとして、リングダウンには特有の高調波が同時に発生することが知られている。高調波も同じようなリングダウンの波形であるが、複数の波形の組み合わせとして解析を行うことで、雑音との区別が可能になるのではないかと考えられる。

そこで本論文では、ブラックホールリングダウンからの重力波について、複数の振動モードを含めることによる、より効率のよい重力波の検出手法について研究した。

本論文における解析は、LIGO Scientific Collaboration により公開されたデータを用いて行っていることをここに示す。

This research has made use of data, software and/or web tools obtained from the LIGO Open Science Center (<https://losc.ligo.org>), a service of LIGO Laboratory and the LIGO Scientific Collaboration. LIGO is funded by the U.S. National Science Foundation.

Abstract

A Gravitational wave is a ripple of spacetime that propagates at the speed of light. The existence of the wave was predicted by Albert Einstein according to his theory of general relativity about 100 years ago. In February 2016, the LIGO Scientific Collaboration announced the first discovery of a gravitational wave. The main reason why no one was able to detect a gravitational wave until LIGO's discovery is the small displacement caused by the gravitational wave. Target sources of the gravitational wave have to be large scale astronomical phenomena like black hole, supernovae and so on. One of the most important sources is the compact binary coalescence (CBC) for several reasons. First, this phenomenon for binary neutron stars has already been detected by an observation of electromagnetic waves. Second, a wave form of this gravitational wave can be predicted by general relativity. Especially, in the first phase of CBC (called "inspiral phase"), the gravitational wave frequency and amplitude increase in time. This is an advantageous characteristics in its data analysis because such a gravitational-wave-like noise cannot be seen too frequently. For these reasons, many gravitational wave researchers focus on the gravitational waves from a compact binary especially in its "inspiral phase".

In most cases, at the final stage of CBC, a new black hole will be created. To obtain the information from this black hole is quite important for the gravitational wave astronomy because usual electromagnetic survey cannot observe a black hole directly. After coalescence of a compact binary, characteristic vibration will be excited on the black hole called "quasi-normal modes (QNMs)". After excitation, the vibration of black hole will decay gradually with emitting the gravitational waves (called "ringdown phase"). This ringdown signal's wave form is also predicted by calculating general relativity. One may think that this wave would also be a main target of the gravitational-wave detection. However, in the detector's noise, a lot of a ringdown-like noise, or a decay sine wave, can be seen. For this reason, it is not effective to make a detection only with a ringdown signal. Nevertheless, it has been known that a ringdown signal has multiple harmonics that will be emitted simultaneously from a black hole. It is possible that the number of the signal-like noise decreases with several harmonics taken into account in addition to the fundamental mode signal.

In this thesis, I analyze the ringdown signal using its harmonics to find a possible improvement in the detection of gravitational waves.

This research has made use of data, software and/or web tools obtained from the LIGO Open Science Center (<https://losc.ligo.org>), a service of LIGO Laboratory and the LIGO Scientific Collaboration. LIGO is funded by the U.S. National Science Foundation.

目次

1	重力波	6
1.1	重力波の導出	6
1.2	干渉計型重力波検出器	8
1.3	重力波源	10
1.4	重力波の観測	12
2	カー・ブラックホールからの重力波	15
2.1	曲率を持った時空における摂動	15
2.2	カー・ブラックホールからの重力波	16
3	マッチドフィルタ法	19
3.1	パワースペクトル密度	19
3.2	ガウスノイズ	20
3.3	検出方法	22
3.4	マッチドフィルタ	23
3.5	マッチドフィルタの性質	24
3.6	信号雑音比	25
3.7	振幅推定	26
3.8	到達時刻	27
4	ブラックホールリングダウンからの重力波の解析	28
4.1	テンプレートの準備	28
4.2	テンプレート作成	29
4.3	干渉計のノイズスペクトル	31
4.4	入力信号作成	34
4.5	マッチドフィルタ計算	35
5	解析結果と考察	39
5.1	解析に用いる高調波	39
5.2	基本モード及び高調波のみの解析	39
5.3	基本モードと高調波を含めた解析	46
5.4	結論と考察	51
5.5	追加解析	52
	付録	56
A	ノイズパワースペクトル密度と自己相関関数	56
B	Matlabによるパワースペクトル密度の計算	57
C	スピンウェイト-2の球面調和関数	60
D	GW150914イベントのリングダウンによる解析	62

参考文献	65
謝辞	66

1 重力波

1.1 重力波の導出

重力波は重力場を記述する方程式である Einstein 方程式を線形近似することによって導かれる。以下では実際に Einstein 方程式を追って、時空に伝わる光速の横波が存在することを導く。

一般相対論において時空を表しているのは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ である。4次元時空において2点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ 間の線素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

と表される。重力場のない平坦な時空である Minkowski 時空では

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

となるこの計量テンソルである $g_{\mu\nu}$ が重力場の中で従う方程式を Einstein 方程式と呼び、次式で表される。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

ここで左辺はアインシュタインテンソルと呼ばれ

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.5)$$

と表される。 $R_{\mu\nu}$ と R はそれぞれリッチテンソル、リッチスカラーと呼ばれ、

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} \quad (1.6)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

$$R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho{}_{\rho\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} \quad (1.8)$$

となる。 $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ はクリストッフェル記号と呼ばれ次式で表される。

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (1.9)$$

Einstein 方程式の右辺にある、 G, c はそれぞれ万有引力定数と光速である。また $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルと呼ばれ、物質の分布を示しており、それは重力場の源を意味する。

今、平坦な時空に微弱な重力場が加わったことを考えよう。これは、Minkowski 時空に摂動項を加えることに相当する。すなわち計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が摂動 $h_{\mu\nu}$ を用いて

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

となる。なお、 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ である。この $g_{\mu\nu}$ を上記の Einstein 方程式 (1.4) に代入して、 $h_{\mu\nu}$ の 1 次までで近似を行うことを考えよう。このときクリストッフエル記号は

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial h_{\rho\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial h_{\nu\rho}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (1.11)$$

となるので、リッチテンソル (1.7) に関して残るのは (1.8) の初めの二項のみである。よって

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 h_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\beta}} \right) \quad (1.12)$$

となる。リッチスカラーは

$$R \simeq \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\alpha}} \quad (1.13)$$

となる。ここで $h = h^{\beta}_{\beta}$ とした。これらを (1.4) 式へ代入するのだが、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (1.14)$$

とし、さらに以下のゲージ条件 (Lorentz gauge) を課す。

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (1.15)$$

すると、Einstein 方程式 (1.4) は線形な形で書くことができ、

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

となる。ここで $\square = -\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \Delta$ である。

真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ となるので (1.16) 式は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

となる。これは波動方程式の形を成しており、今その平面波解を考えることにする。すなわち、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \quad (1.18)$$

とする。これがゲージ条件 (1.15) と Einstein 方程式 (1.16) を満たすためには、

$$A^{\mu\alpha}k_{\alpha} = 0 \quad (1.19)$$

$$k_{\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (1.20)$$

を満たす必要がある。なお、(1.20) 式は重力波が光速で伝播していることを示している。ここにさらにゲージ条件 (Transverse Traceless gauge)

$$A^{\alpha}_{\alpha} = 0 \quad (1.21)$$

$$A_{\mu\nu}U^{\nu} = 0 \quad (1.22)$$

を課す。ただし、 U^ν は任意の時間的ベクトルである。ここで、 $U^\nu = \delta^\nu_0$ とし、重力波の進行方向を Z 軸にとると、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp ik(ct - z) \quad (1.23)$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_+ & \bar{h}_\times & 0 \\ 0 & \bar{h}_\times & -\bar{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

となる。ただし、 $k = \frac{\omega}{c}$ とした。また、 \bar{h}_+ , \bar{h}_\times は重力波が持つ自由度に対応しており、それぞれプラスモードとクロスモードと呼ばれる。

1.2 干渉計型重力波検出器

時空の歪みを伝える重力波であるが、その検出装置には大きく二種類存在する。一つは Michelson 干渉計を基にした干渉計型重力波検出器、もう一つは測定器の共振を利用する共振型重力波検出器である。本節では、現在主流となっている干渉計型重力波検出器について、Michelson 干渉計を用いて重力波の信号を取得する原理を記述する。

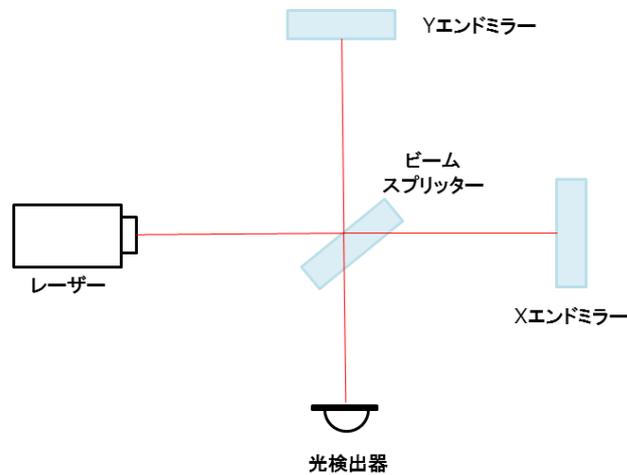


図 1.1: Michelson 干渉計

Michelson 干渉計を図 1.1 に示す。図の左側にあるレーザー光源から出射した光は、中央にあるビームスプリッターと呼ばれる半透過・半反射のミラーによって、二つの方向へ分けられる。分けられた二つの光は、それぞれの方向にあるミラーによって反射され、再びビームスプリッターへと向かい、ビームスプリッター上で干渉する。この時、二方向に生じている光路差によって、干渉縞を見ることができる。あらかじめ、二方向によって付く光の位相差を制御しておくこと、ビームスプリッター上で干渉した際に、二方向の光が打ち消し合うようにすることができる。この状

態で、重力波の到来を待つ。重力波がやってくると、式 (1.24) から分かるとおり、直交する二つの方向について差動の変化をもたらす。これは、Michelson 干渉計に垂直に入射した場合、片方の経路を伸ばし、もう片方の経路を縮めるような変化に相当する。従って、制御していた光の位相差にズレが生じ、干渉状態が変化する。この変化を光検出器によって検出することで、重力波を観測する。

これを式を使って表そう。今、座標の原点をビームスプリッター上に取り、そこから x 軸正方向と y 軸正方向に伸びる腕からなる Michelson 干渉計に、z 軸正方向から重力波が来たことを考えよう。ここでは簡単のため、到来する重力波はプラスモードのみとして考える。この時、x 軸上の光の測地線は、重力波 $h(t)$ を用いて次のように表せる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h(t)) dx^2 = 0 \quad (1.25)$$

ここで、 $h(t) \ll 1$ とすれば、

$$\left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) c dt = dx \quad (1.26)$$

が得られる。この式を、Michelson 干渉計の x 軸方向の腕の往復の経路について積分しよう。Michelson 干渉計の腕の長さを l_x とし、光が腕を往復するのにかかる時間を Δt_x とすれば、

$$\int_{t-\Delta t_x}^t \left(1 - \frac{1}{2}h(t')\right) c dt' = 2l_x \quad (1.27)$$

よって、次式が得られる。

$$\Delta t_x = \frac{2l_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t_x}^t h(t') dt' \quad (1.28)$$

これは、 Δt_x に関する積分方程式となっているが、 Δt_x は微小量であるため、右辺の積分の下限にある Δt_x を $2l_x/c$ で近似すると、

$$\Delta t_x = \frac{2l_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-2l_x/c}^t h(t') dt' \quad (1.29)$$

となる。今、レーザー光源として、角周波数 Ω の光源を用いているとすると、Michelson 干渉計の x 軸方向の腕を往復することによって引き起こされる位相変化は、

$$\phi_x = \Omega \Delta t_x \quad (1.30)$$

$$= \frac{2l_x \Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_x/c}^t h(t') dt' \quad (1.31)$$

となる。従って、重力波によって $\frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_x/c}^t h(t') dt'$ だけ位相が変化していることが分かる。

y 軸方向については、重力波が差動変化であるため、測地線が

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 - h(t)) dy^2 = 0 \quad (1.32)$$

となる。後の計算は x 軸方向と全く同様となり、往復によって引き起こされる位相変化は、

$$\phi_y = \Omega \Delta t_y \quad (1.33)$$

$$= \frac{2l_y \Omega}{c} - \frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_y/c}^t h(t') dt' \quad (1.34)$$

となる。なお、y 軸方向の腕の長さを l_y 、腕の往復にかかる時間を Δt_y とした。従って、二方向に分かれた光の位相差 $\phi_x - \phi_y$ は、

$$\phi_x - \phi_y = \frac{2(l_x - l_y)\Omega}{c} + \phi_{GW} \quad (1.35)$$

$$\phi_{GW} = \Omega \int_{t-2L/c}^t h(t') dt' \quad (1.36)$$

となる。なお、式 (1.36) において $l_x \simeq l_y \simeq L$ とした。

干渉計型重力波検出器は、この位相差を検出することによって重力波を検出している。

1.3 重力波源

前節で重力波による Michelson 干渉計の応答を見てきたが、現実には、重力波によって引き起こされる位相変化は非常に小さい。重力波の初観測が、その存在の予言から 100 年もかかったのはこのためである。従って、重力波を観測するためには、なるべく大きな重力イベントでなければならず、それらは天体現象に限られてくる。本節では、そのような重力波検出候補を見ていこう。

コンパクト連星合体

初めに紹介するのはコンパクト連星合体である。コンパクト星とは、中性子星やブラックホール、白色矮星などの総称であり、通常の惑星や恒星よりも高密度な天体である。これらが連星を成し、互いに回転しながら近づいていき、最後には衝突してブラックホールなどの天体になる過程を、コンパクト連星合体と呼ぶ。

コンパクト連星合体は、大きく三つのフェイズに分けられ、それぞれのフェイズについて重力波の波形などの研究が進められている。ここでは一つずつ、そのフェイズについて紹介していく。

1. インスパイラルフェイズ (Inspirational phase)

インスパイラルフェイズは、連星が互いに共通重心の周りを公転しながら近づいていく段階である。現在、最も有力な重力波の検出候補天体現象であり、後述するが、実際に取得された重力波である GW150914 や GW151226 は、どちらもこのインスパイラルフェイズからの重力波によって検出されている。

インスパイラルフェイズからの重力波が最有力候補となった理由として、放出される重力波の波形がポスト・ニュートン展開によって計算・予測されているということが挙げられる。波形が予測されていると、マッチドフィルタ法という解析手法 (本論文でも後述する。) を用いることが可能となり、効率よく解析を行うことが可能である。また、インスパイラルフェイズからの重力波の波形が、時間と共に周波数が上がっていく形をしており、これが自然発生的な雑音と区別がしやすいという点も挙げられる。

元々、干渉計型重力波検出器にとって、最も有望な重力波のターゲットとして考えられていたのは、中性子星連星からの重力波であった。中性子星連星のインスパイラルにおける波形は、その質量だけでなく、中性子の状態方程式にも依存するとも考えられており、この重力波の取得からはコンパクト天体の内部情報が得られるのではないかと期待されている。

2. マージャーフェイズ (Merger phase)

マージャーフェイズは、公転して近づいて行った連星が合体する段階である。

マージャーフェイズについては、数値相対論を用いた波形計算が行われているが、合体の瞬間にしか重力波が発せられないため、継続時間が短く、解析に適していないという問題点が挙げられる。そのため、マージャーフェイズ単体での解析ではなく、インスパイラルフェイズからの一続きの重力波として解析される。マージャーフェイズにおいても、インスパイラルフェイズ同様、合体する天体の内部情報の取得が期待されている。合体の直前には、天体が光速に近い速度で公転するため、潮汐力による変形など、内部の情報が大きくかかわってくるのではないかと考えられている。

3. リングダウンフェイズ (Ringdown phase)

リングダウンフェイズは、合体した連星系がブラックホールとなり、励起された振動が徐々に減衰していく段階である。

このリングダウンフェイズからの重力波は、波形が解析的に計算されており、波形が予測されている。しかし、継続時間が、マージャーフェイズほど短時間ではないが、インスパイラルフェイズよりも短いため、インスパイラルフェイズほど有力な重力波候補とはなっていない。また、リングダウンフェイズからの重力波波形は、減衰正弦波のような形をしており、この波形は観測機器に発生する雑音としてよく見られる形であるため、区別が難しいことも解析に対して逆風となっている。

しかし、後述する通り、観測された重力波イベントが二つともブラックホールによる重力波イベントであったため、リングダウンからの重力波はこれから見直されるのではないかと考えられる。その理由は、リングダウンフェイズからの重力波は、コンパクト連星合体だけではなく、ブラックホールに対して他の天体が落下するなどの合体によっても励起されるため、インスパイラルの存在しないリングダウン単独のイベントも考えられるからである。そこで、連続してブラックホールイベントを観測した現在、ブラックホールの数が、予想されているものよりも多い場合、リングダウンのみでの重力波観測はより一層期待が高まるのではないかとと思われる。

リングダウンによる重力波は、ブラックホールのパラメータによって決まるため、ブラックホールの内部情報が得られるとされ、ブラックホールを特徴づけるパラメータに関する理論 (no-hair theorem) など、ブラックホールに関する多くの理論についての進展が期待される。

超新星爆発

超新星爆発とは、大質量の恒星が燃え尽きた時に発生する天体現象であり、最終的にその質量の大部分を宇宙空間に解き放つ爆発現象である。爆発する星の内部から放出される重力波は、その透過性から、外部に邪魔されることなく外まで伝播していくと考えられている。そのため、超新星爆発の際に、星の内部で起こっている情報を持ったままやってくると考えられており、その観測が超新星爆発の詳細なメカニズム解明につながると期待されている。

しかし、爆発のメカニズムが解明されていないため、理論的な波形予想は難しく、マッチドフィルタによる解析は困難である。そのため、短時間に大きな振幅の波がやってくるものを解析対象とした、バーストサーチが行われている。

重力波背景放射

重力波背景放射 (Stochastic gravitational wave background) とは、宇宙のインフレーション理論から予想されている重力波であり、初期宇宙から発展していく過程で発生すると考えられている。従って、この重力波の観測によって初期宇宙の情報や宇宙発展の過程に関する情報が得られると期待されている。

しかし、重力波背景放射を取得することは非常に困難であることが予想される。この重力波に対しては、明確な波形や周波数といったものが存在せず、全天から一様に降り注ぐノイズのような性質を持っているためである。また、その振幅も非常に小さいと考えられており、現行の重力波検出器ではノイズに埋もれてしまって見えないと思われる。

このような波形も何も分かっていない重力波についても取得するには、複数台の重力波検出器による、相関を考える解析手法が用いられる。これはコヒーレント解析と呼ばれ、別々の場所にある検出器に入る雑音は、相関を持たないことを利用した解析方法である。理想的には、他の場所にある重力波検出器との間で相関がある信号は、重力波による信号のみである。そのため、予想される相関感度曲線よりも、感度が悪くなった場合、それが背景重力波によるものであると考えられる。

1.4 重力波の観測

2016年2月、アメリカの重力波検出器 Advanced LIGO(aLIGO) が重力波の史上初観測を成し遂げたと発表した。[2] また、その後二回目の重力波検出を発表し [3]、とうとう重力波が観測される時代の幕を開けた。aLIGO はワシントン州とルイジアナ州の計2台の検出器を持っており、2015年から2台同時に観測を開始した。2台の観測器を用いることによって、重力波の検出精度を高めている。現在建設中であるイタリアにある検出器 Advanced VIRGO や、同じく建設中の日本の岐阜県にある KAGRA が、近くこの重力波ネットワークに加わることで、一層精度の高い観測が可能であると期待されている。

以下、本節では観測された重力波について紹介する。

GW150914

史上初の観測を成し遂げた重力波イベントは GW150914 と名付けられた。本イベントは、名前の通り、2015年9月14日に観測されたイベントである。

図 1.2 は取得された GW150914 の波形である。取得された重力波は周波数にして 35[Hz] から 250[Hz] まで遷移していき様子が見られ、この重力波による変動は 1[m] あたり 1.0×10^{-21} [m] 程度であった。この重力波はブラックホール連星合体のインスパイラルフェイズとマージャーフェイズの波形サーチと、一つのブラックホールによるリングダウンフェイズの波形サーチに合致した。すなわち、ブラックホールが連星合体を起こした際の一連の重力波を検出したと考えられる。連星を成していたブラックホールの質量が、太陽質量を M_{sun} として、それぞれ $36^{+5}_{-4}M_{\text{sun}}$ と $29^{+4}_{-4}M_{\text{sun}}$ であり、合体してできたブラックホールの質量は $62^{+4}_{-4}M_{\text{sun}}$ であった。天体までの距離は、光度距離にして 410^{+160}_{-180} Mpc であり、赤方偏移にして $z = 0.09^{0.03}_{0.04}$ に相当する。観測されたデータについては、信号雑音比は 24 にもなり、これが雑音として検出される頻度を示す False alarm rate は 203000 年に 1 回以下と見積もられた。より詳細な情報については B. P. Abbott et al.[2] を参照。

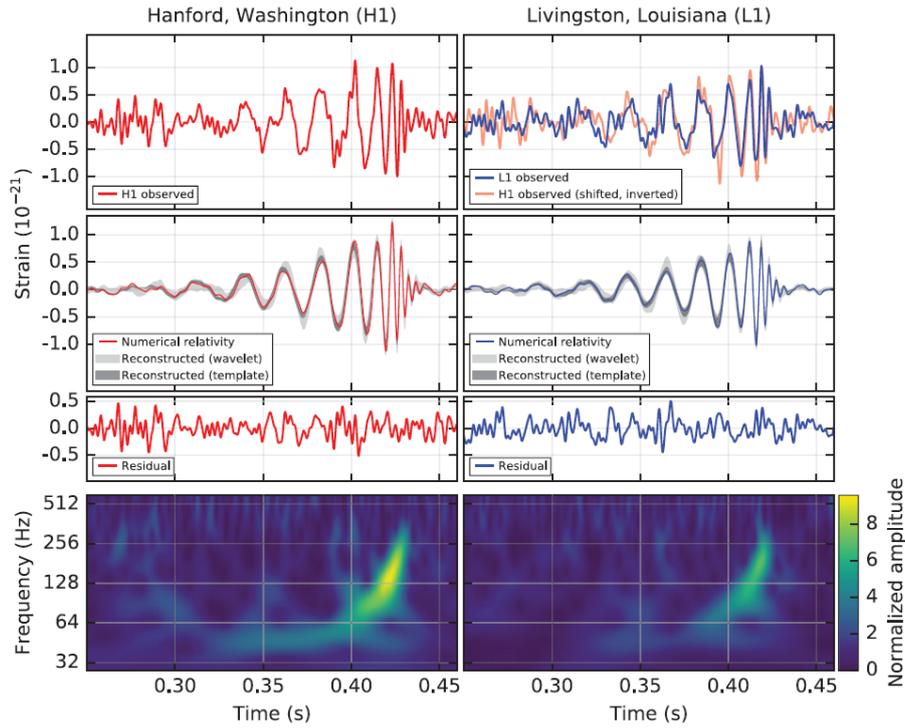


図 1.2: GW150914 で取得された信号。B. P. Abbott et al. [2] より引用。

GW151226

2度目の重力波イベントはGW151226と名付けられた。2015年12月26日に観測されたイベントである。

図 1.3 は取得された GW151226 の波形である。取得された重力波は 35[Hz] から 450[Hz] まで遷移していき、55 サイクルの波が観測された。この重力波も GW150914 と同様に、連星ブラックホールのインスパイラルフェイズの波形と合致して検出された。連星を成していたブラックホールの質量は、それぞれ $14.2^{+8.3}_{-3.7} M_{\text{sun}}$ と $29^{+2.3}_{-2.3} M_{\text{sun}}$ であり、合体後に出来たブラックホールの質量は $20.8^{+6.1}_{-1.7} M_{\text{sun}}$ と見積もられている。天体までの距離は、光度距離にして $440^{+180}_{-190} \text{Mpc}$ と見積もられている。観測されたデータの信頼性についてであるが、信号雑音比は 13 となり、この信号を誤検出する頻度は 1 年につき 6.0×10^{-7} 個以下と見積もられた。より詳細な情報については B. P. Abbott et al.[3] を参照。

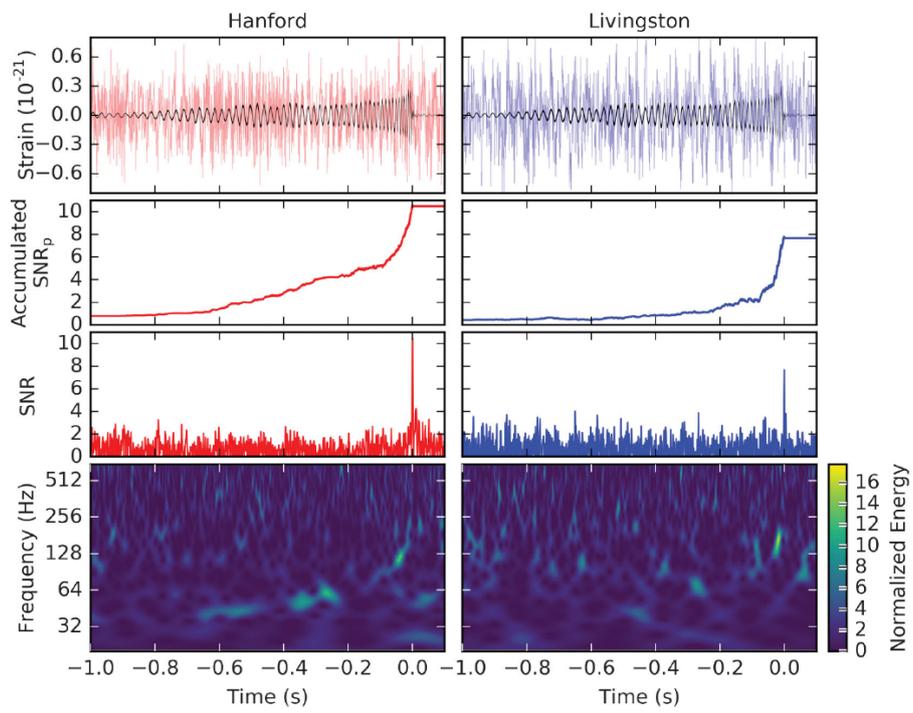


図 1.3: GW151226 で取得された信号。B. P. Abbott et al. [3] より引用。

2 カー・ブラックホールからの重力波

前章では、重力波が真空中を伝播する高速で伝わる波であることを示した。本章では、実際に観測された重力波源でもある、カー・ブラックホールからの重力波について議論する。

2.1 曲率を持った時空における摂動

カー・ブラックホールからの重力波について記述する前に、曲率を持った時空における重力波について議論をしておこう。前節で導出した重力波は、平坦な時空を伝わる波であった。しかし、カー・ブラックホール周辺は、ブラックホールによって時空が曲率を持っており、平坦な条件で考えることはできない。そこで、先に曲率をもった時空の性質について考えよう。

まずはじめにビアンキの恒等式から考える。ビアンキの恒等式はリーマンテンソルが従う恒等式で、次のようなものである。

$$\nabla_\nu R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\alpha R_{\beta\nu\gamma\delta} + \nabla_\beta R_{\nu\alpha\gamma\delta} = 0 \quad (2.1)$$

共変微分を行うと、

$$\nabla_\mu \nabla_\nu R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\mu \nabla_\alpha R_{\beta\nu\gamma\delta} + \nabla_\mu \nabla_\beta R_{\nu\alpha\gamma\delta} = 0 \quad (2.2)$$

ここで、上式において添え字 α, μ を交換したものを上式から引き算を行い、添え字 β, μ を交換したものをさらに引くと、

$$0 = \nabla_\mu \nabla_\nu R_{\alpha\beta\gamma\delta} + (\nabla_\mu \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\mu) R_{\beta\nu\mu\delta} - \nabla_\alpha \nabla_\nu R_{\mu\beta\gamma\delta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\delta} - (\alpha \leftrightarrow \beta) \quad (2.3)$$

となる。なお、最後の $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ は、前の四つの項の添え字 α と β を交換したものを表す。さらに、右辺第二項について、共変微分の計算をリーマンテンソルを用いて表現すると、次のようになる。

$$(\nabla_\mu \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\mu) R_{\beta\nu\mu\delta} = R_{\mu\alpha\beta}{}^\rho R_{\rho\nu\gamma\delta} + R_{\mu\alpha\nu}{}^\rho R_{\beta\rho\gamma\delta} + R_{\mu\alpha\gamma}{}^\rho R_{\beta\nu\rho\delta} + R_{\mu\alpha\delta}{}^\rho R_{\beta\nu\gamma\rho} \quad (2.4)$$

また、(2.3) 式の第三項について、ビアンキの恒等式から、

$$\begin{aligned} -\nabla_\alpha \nabla_\nu R_{\mu\beta\gamma\delta} &= -\nabla_\mu \nabla_\nu R_{\gamma\delta\mu\beta} \\ &= \nabla_\alpha \nabla_\gamma R_{\delta\nu\mu\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\delta R_{\nu\gamma\mu\beta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

と表すことができる。これらを用いて、式 (2.3) を書き直すと、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu \nabla_\nu R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\mu\alpha\beta}{}^\rho R_{\rho\nu\gamma\delta} + R_{\mu\alpha\nu}{}^\rho R_{\beta\rho\gamma\delta} + R_{\mu\alpha\gamma}{}^\rho R_{\beta\nu\rho\delta} \\ &\quad + R_{\mu\alpha\delta}{}^\rho R_{\beta\nu\gamma\rho} + \nabla_\alpha \nabla_\gamma R_{\delta\nu\mu\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\delta R_{\nu\gamma\mu\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\delta} \\ &\quad - (\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。さらに、メトリックテンソル $g^{\mu\nu}$ とリッチテンソルの定義を用いれば、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R^\mu{}_{\alpha\beta}{}^\rho R_{\rho\mu\gamma\delta} + R_\alpha{}^\rho R_{\beta\rho\gamma\delta} + R^\mu{}_{\alpha\gamma}{}^\rho R_{\beta\mu\rho\delta} + R^\mu{}_{\alpha\delta}{}^\rho R_{\beta\mu\gamma\rho} \\ &\quad - \nabla_\alpha \nabla_\gamma R_{\delta\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\delta R_{\gamma\beta} \\ &\quad - (\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

最後に、添え字 ρ を ν で置き換えて、リーマンテンソルの性質を用いると、

$$\begin{aligned} & \nabla^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\gamma\delta} - 2R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\delta}{}^{\nu} R_{\beta\mu\gamma\nu} + 2R_{\beta}{}^{\mu}{}_{\delta}{}^{\nu} R_{\alpha\mu\gamma\nu} \\ & = -\nabla_{\alpha}\nabla_{\gamma}R_{\delta\beta} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\delta}R_{\gamma\beta} + \nabla_{\beta}\nabla_{\gamma}R_{\delta\alpha} + \nabla_{\beta}\nabla_{\delta}R_{\gamma\alpha} \\ & \quad + R_{\alpha}{}^{\nu} R_{\beta\nu\gamma\delta} - R_{\beta}{}^{\nu} R_{\alpha\nu\gamma\delta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

を得る。真空中では、右辺は消えてしまう。物質が存在する場合、右辺はエネルギー運動量テンソルに関する式となる。

ここでは、前章同様、真空中を考えよう。背景時空の曲率を ${}^0R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ とし、重力波による摂動を ${}^1R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ とする。背景時空の曲率のスケールが、重力波による摂動のスケールより十分大きいとして、

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^0R_{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^1R_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.9)$$

と表す。これを式 (2.8) に代入すると、重力波の摂動の方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \nabla^2({}^1R_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ & = -({}^0R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu})({}^1R_{\mu\nu\gamma\delta}) + 2({}^0R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\delta}{}^{\nu})({}^1R_{\beta\mu\gamma\nu}) - 2({}^0R_{\beta}{}^{\mu}{}_{\delta}{}^{\nu})({}^1R_{\alpha\mu\gamma\nu}) \\ & \quad - ({}^1R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu})({}^0R_{\mu\nu\gamma\delta}) + 2({}^1R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\delta}{}^{\nu})({}^0R_{\beta\mu\gamma\nu}) - 2({}^1R_{\beta}{}^{\mu}{}_{\delta}{}^{\nu})({}^0R_{\alpha\mu\gamma\nu}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2 カー・ブラックホールからの重力波

ブラックホールは、その性質を示すパラメータの種類によっていくつか呼び方が存在する。本節で議論するカー・ブラックホールと呼ばれるブラックホールは、質量、スピンの二つのパラメータでのみ、特徴づけられるブラックホールである。

カー・時空における線素は次のように記述される。

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)(cdt)^2 - \frac{4GMar\sin^2\theta}{c^2\Sigma}(cdt)d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 \\ & + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2r}{c^2\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで、 $\Delta = r^2 - 2GM/c^2 + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ と置いた。また、 a はブラックホールの角運動量 S に関する量であり、 $a = S/(Mc)$ である。

このメトリックをもとに背景の曲率テンソル ${}^0R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を計算する。この時空での摂動を次のように表す。

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^0R_{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^1R_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.12)$$

ここで、 ${}^1R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ が重力波による摂動を示している。

次の計算に移る前に、次の四つの基底ベクトルを定義しておこう。

$$l^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{r^2 + a^2}{c\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right] \quad (2.13)$$

$$k^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{r^2 + a^2}{c\Sigma}, -\frac{\Delta}{\Sigma}, 0, \frac{a}{\Sigma} \right] \quad (2.14)$$

$$m^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{ia\sin\theta}{c(r^2 + ia\cos\theta)}, 0, \frac{1}{r + ia\sin\theta}, \frac{i}{(r + ia\cos\theta)\sin\theta} \right] \quad (2.15)$$

これらの基底ベクトルは次の性質を満たす。 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{k} = -1, \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* = 1, \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$
 さらに、この基底ベクトルとリーマンテンソルの成分を使って次のような量を定義する。

$$\Psi_4 = -k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.16)$$

$$= -k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} ({}^1R_{\mu\nu\rho\sigma}) \quad (2.17)$$

いよいよ、曲率テンソルについての波動方程式を求めよう。計算には前節で求めた、式 (2.10) を利用するが、この式を次のように変形して用いる。

$$k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} g^{\kappa\tau} g^{\lambda\phi} \\ \times \{(-{}^0R_{\mu\nu\kappa\lambda})({}^1R_{\tau\phi\rho\sigma}) + 2({}^0R_{\mu\kappa\sigma\lambda})({}^1R_{\nu\tau\rho\phi}) - 2({}^0R_{\nu\kappa\rho\lambda})({}^1R_{\mu\tau\rho\phi})\} \quad (2.18)$$

この式の左辺には $-\nabla^2 \Psi_4$ という項が含まれることが予想されるが、他にも多くの項に演算子が作用し、多くの項が残ると予想される。また、右辺においても Ψ_4 だけでなく、多数の項に依存する形になると予想される。しかし、Ryan[9] によれば、上で議論している曲率テンソルに関する方程式は、最終的に Ψ_4 に関する波動方程式に帰着する。この Ψ_4 についての波動方程式は、Teukolsky 方程式と呼ばれ、カー・ブラックホールについての Teukolsky 方程式は次のようになる。なお、詳細な議論は Teukolsky[8] と Ryan[9] を参照。

$$\left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} + \frac{4GMa r}{c^3 \Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ + 4 \left[\frac{a(r - GM/c^2)}{\Delta} + i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ + 4 \left[\frac{GM(r^2 - a^2)/c^2}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{c \partial t} + 2(2 \cot^2 \theta + 1) \psi = 0 \quad (2.19)$$

なお、 $\psi = (r - ia \cos \theta)^4 \Psi_4$ である。このカー・時空における Teukolsky 方程式は、角度方向と動径方向に分離することができる。そこで、

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{im\phi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{lm}(\cos \theta, \omega) R_{lm}(r, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.20)$$

と、角度方向の関数 $S_{lm}(\cos \theta, \omega)$ と動径方向の関数 $R_{lm}(r, \omega)$ に分離しよう。すると、それぞれの満たすべき方程式は、

$$\frac{d}{d \cos \theta} \left[(a - \cos^2 \theta) \frac{dS_{lm}}{d \cos \theta} \right] \\ + \left[a^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \cos^2 \theta + 4a \left(\frac{\omega}{c} \right) \cos \theta - 2 - \frac{(m - 2 \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} + A_{lm} \right] S_{lm} \\ = 0 \quad (2.21)$$

$$\Delta^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dR_{lm}}{dr} \right) \\ + \left[\frac{\{(r^2 + a^2)(\omega/c) - am\}^2 - 4i(r - GM/c^2)\{(r^2 + a^2)(\omega/c) - am\}}{\Delta} \right. \\ \left. - 8ir \left(\frac{\omega}{c} \right) + 2am \left(\frac{\omega}{c} \right) - a^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - A_{lm} \right] R_{lm} = 0 \quad (2.22)$$

となる。 A_{lm} は分離定数である。 $S_{lm}(\cos\theta, \omega)$ に境界条件を課して解いたものが、カー・ブラックホールの周囲に発生する重力波を表し、それはスピンウェイト楕円面調和関数 (spin-weighted spheroidal harmonics) のスピンウェイト $s = -2$ に相当する関数となる。また、上記の Teukolsky 方程式の解はカー・ブラックホールの振動を表し、それは準固有振動 (quasi-normal mode) と呼ばれる。ブラックホールの準固有振動からの重力波は、減衰正弦波の波形でよく近似することができ、波形を基に解析する際にも用いられている。

連星が合体し、合体後のカー・ブラックホールからの重力波は、準固有振動のモードの重ね合わせとして、次のように表される。

$$h_+(t) = \frac{M}{r} \sum_{l,m>0} A_{l|m|} e^{-t/\tau_{lm}} Y_+^{lm}(\iota) \cos(\omega_{lm}t - m\phi) \quad (2.23)$$

$$h_\times(t) = -\frac{M}{r} \sum_{l,m>0} A_{l|m|} e^{-t/\tau_{lm}} Y_\times^{lm}(\iota) \cos(\omega_{lm}t - m\phi) \quad (2.24)$$

なお、 $t \leq 0$ の時には $h_+ = h_\times = 0$ である。ここで、 M はブラックホールの質量を表し、 r は光度距離 (luminosity distance) を表す。 $A_{l|m|}$ は各モードの振幅を示しており、これは合体前連星の質量比に依存する値となる。 τ_{lm} と ω_{lm} は各モードにおける減衰時間と周波数を示す。 ι はブラックホールのスピン軸と観測者との角度を表し、 ϕ は方位角を表す。 $Y_{+,\times}^{lm}(\iota)$ はスピンウェイト-2の球面調和関数の和であり、次のように定義される。

$$Y_+^{lm}(\iota) \equiv -{}_2Y^{lm}(\iota, 0) + (-1)^l {}_2Y^{l-m}(\iota, 0) \quad (2.25)$$

$$Y_\times^{lm}(\iota) \equiv -{}_2Y^{lm}(\iota, 0) - (-1)^l {}_2Y^{l-m}(\iota, 0) \quad (2.26)$$

この関数によって、観測者とブラックホールとの角度による振幅への寄与が計算される。この関数に関する詳細は付録 C を参照。

3 マッチドフィルタ法

重力波検出器から得られる観測データは、雑音にまみれており、そのままではデータの中に真の重力波信号が入っているのか判別できない。このセクションでは、そのような雑音の中に信号が存在しているのかどうかを、どのように解析しているのかを追っていく。

3.1 パワースペクトル密度

重力波検出器に限らず、様々な機器から得られるデータは、常に同じ値を示すわけではない。このように、時間と共に出力値が変化するような過程を確率過程と呼ぶ。今、時間 t の経過と共に出力値が変化する確率過程を考える。重力波検出器における、各機器からの雑音がまさにこれに相当する。これらの機器から得られる時系列データを $x(t)$ と表現する。この時系列データ $x(t)$ が、時間経過と共にどのような値を取るのかが、確率密度関数 p_x で定められているとしよう。すると、ある時間での期待値を次のように書き下すことができる。

$$\langle x \rangle = \int x p_x(x) dx \quad (3.1)$$

特に、時間の経過と共に確率分布が変化することなく、一定であるような確率過程を定常過程と呼ぶ。ホワイトノイズなどがこれに相当し、広く雑音と呼ぶ場合の多くはこれに該当する。この場合、上記の期待値と呼ぶものは、無限時間での時間平均と等価である。

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (3.2)$$

この出力値の時間平均で与えられる量は、主に振幅と呼ぶ。このような定常過程はその期待値や、パワースペクトル密度によって議論される。期待値は上記の通りであるので、次にパワースペクトル密度について考えよう。

定常過程に従う信号 $x(t)$ を今、簡単のため期待値 0 の信号とする。すなわち、 $\langle x \rangle = 0$ である。 $x(t)$ の平均値を振幅と呼ぶのに対し、 $x^2(t)$ の平均値をパワーと呼ぶ。これを式で表せば次のようになる。

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (3.3)$$

ここで $x_T(t)$ を次のように定義しておこう。

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (-T/2 < t < T/2), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.4)$$

すると無限時間での積分によってパワーは次のように書き換えることができる。

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2 dt \quad (3.5)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}_T(f)|^2 df \quad (3.6)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\infty} |\tilde{x}_T(f)|^2 df \quad (3.7)$$

$$= \int_0^{\infty} S_x(f) df \quad (3.8)$$

ここで、 $\tilde{x}(f)$ 、 $S_x(f)$ はそれぞれ、 $x(t)$ のフーリエ変換及び、パワースペクトル密度である。1行目から2行目の値を得るために、パーセバルの等式を用いた。また、 x_T は実数であるため、フーリエ変換後の負の周波数に対応する値には、正の周波数の複素共役に相当する成分が含まれている。従って、 $\tilde{x}_T(-f) = \tilde{x}_T^*(f)$ が成り立つ。パワースペクトル密度の定義をここに改めて記しておく。

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \quad (3.9)$$

また、パワースペクトル密度は自己相関関数 $R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ を用いても表記することができ、

$$S_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (3.10)$$

と表される。

3.2 ガウスノイズ

正規分布に従って分布するような雑音をガウスノイズと呼ぶ。現実世界におけるノイズと呼ばれているものは、このガウスノイズがよい近似になっており、しばしば暗黙のうちにガウスノイズであると仮定されることがある。ここでも、検出器からの出力に入ってくる雑音をガウスノイズとして考えよう。この節ではガウスノイズの性質について考える。

ある時間 T の間にデータ $x(t)$ を取得し、それを Δt の間隔おきに区切り、 N 個のサンプルを生成する。個々のデータは $x_j = x(j\Delta t)$ とする。ここで、 $j = 0, \dots, N-1$ であり、 $N = T/\Delta t$ である。これらのデータをガウスノイズであると仮定し、お互いに関係性がないものと考えれば、この x_j の集合を得るための確率密度関数は、それぞれの確率密度関数の積となるため、次のように書くことができる。

$$p_x(\{x_j\}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \right\} \quad (3.11)$$

ここで、雑音の平均値を 0 であると仮定し、その分散を σ^2 とした。 x_j がそれぞれ独立である時、これらを白色雑音 (ホワイトノイズ) と呼び、次の二つの性質を持っている。

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \propto \delta(\tau) \quad (3.12)$$

$$R_{jk} = \langle x_j x_k \rangle = \sigma^2 \delta_{jk} \quad (3.13)$$

この時パワースペクトル密度は

$$S_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2\sigma^2 \Delta t \quad (3.14)$$

と表せることが分かる。

次にデータを分割している時間 Δt を小さくしていくことを考える。すると、観測時間 T が十分大きいとき、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \Delta t = \int_0^T x^2(t) dt \quad (3.15)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(f)|^2 df \quad (3.16)$$

このように近似することができる。従って、ガウスノイズにおける確率密度関数の自然対数のべき乗の部分については次のように近似的に表現することができる。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \Delta t \right\} \quad (3.17)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{S_x} \int_0^T x^2(t) dt \right\} \quad (3.18)$$

$$\approx \exp \left\{ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{S_x} df \right\} \quad (3.19)$$

$$= \exp \left\{ -2 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{S_x} df \right\} \quad (3.20)$$

一行目から二行目の変形には (3.14) 式を用いた。以上から、時系列ガウスノイズ $x(t)$ を連続的に考えた場合の確率密度関数は

$$p_x[x(t)] \propto \exp \left\{ -2 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{S_x(f)} df \right\} \quad (3.21)$$

となることが分かる。

次に、時系列データがホワイトノイズでない場合を考えよう。ホワイトノイズ $x(t)$ の畳み込み積分によって生成される非ホワイトな雑音 (カラーノイズまたは有色雑音) $y(t)$ を次のように定義する。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-t') x(t') dt' \quad (3.22)$$

畳み込み定理により、フーリエ変換後の表記は次のようになる。

$$\tilde{y}(f) = \tilde{K}(f) \tilde{x}(f) \quad (3.23)$$

従って、パワースペクトル密度は次のように表せる。

$$S_y(f) = |\tilde{K}(f)|^2 S_x \quad (3.24)$$

また、確率密度関数は

$$p_y[y(t)] \propto \exp \left\{ -2 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{y}(f)|^2}{S_y(f)} df \right\} \quad (3.25)$$

ここで、時系列データ $a(t), b(t)$ について、パワースペクトル密度によって重み付けされた内積を次のように定義しよう。

$$(a, b) = 4\text{Re} \int_0^\infty \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S(f)} df \quad (3.26)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S(|f|)} df \quad (3.27)$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f) + \tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)}{S(|f|)} df \quad (3.28)$$

$S(f)$ はノイズの片側パワースペクトル密度である。この内積を用いれば、ガウスノイズ $x(t)$ (ホワイトノイズでもカラーノイズでも) の確率密度関数は次のように書ける。

$$p_x[x(t)] \propto e^{-(x,x)/2} \quad (3.29)$$

3.3 検出方法

重力波検出器からの出力には、重力波信号のほかに前節のようなガウスノイズに溢れている。そのため、これらのガウスノイズ中に埋もれた信号の中に、重力波信号が入っているのかどうかを検定する必要がある。重力波検出器からの信号を $s(t)$ とすると、次の二つの仮説が立てられる。

$$\text{帰無仮説 } H_0 : s(t) = n(t) \quad (3.30)$$

$$\text{対立仮説 } H_1 : s(t) = n(t) + h(t) \quad (3.31)$$

ノイズを $n(t)$ 、重力波信号を $h(t)$ とした。この二つの仮説の内、どちらがよりデータに適しているかを区別する必要がある、そのために次のオッズ比を計算して判断する。オッズ比はある事象の起こる確率に対して、それと相反する確率との比のことを言う。従って、重力波検出器のデータ解析におけるオッズ比は次のように定義できる。

$$O(H_1|s) = \frac{P(H_1|s)}{P(H_0|s)} \quad (3.32)$$

右辺はそれぞれ、データ $s(t)$ が与えられた場合に仮説 H_1 が成り立つ確率及び、 H_0 が成り立つ確率を表している。つまり、このオッズ比の値が 1 より大きい場合は、仮説 H_1 の方がデータに適しているということになるが、1 より大きい場合を全て重力波を検出したと言えるわけではなく、これもまた議論が必要である。オッズ比を計算するために、ベイズの定理を用いるため、以下でベイズの定理について記述する。

ベイズの定理とオッズ比

検定を行うにあたって、ベイズの定理を用いるが、その前にいくつかの確率について記しておく。事象 A が起こる確率を $P(A)$ 、同様に事象 B が起こる確率を $P(B)$ とする。この時、事象 A, B がどちらも起こる確率を $P(A, B)$ と表す。また、事象 B が起こるとい条件が与えられたときに、事象 A が起こる確率を条件付き確率と呼び、 $P(A|B)$ と表し、次の式で定義される。

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} \quad (3.33)$$

同様に、事象 A が起こるという条件下での事象 B が起こる確率は

$$P(B|A) = \frac{P(A, B)}{P(A)} \quad (3.34)$$

この二つの式を組み合わせれば、ベイズの定理を導くことができる。

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \quad (3.35)$$

このベイズの定理を用いると、オッズ比を次のように表せる。

$$O(B|A) = O(B)\Lambda(B|A) \quad (3.36)$$

これらを確率で書き表すと

$$O(B|A) = \frac{P(B|A)}{P(-B|A)} \quad (3.37)$$

$$O(B) = \frac{P(B)}{P(-B)} \quad (3.38)$$

$$\Lambda(B|A) = \frac{P(A|B)}{P(A|-B)} \quad (3.39)$$

ここで事象 A が起こらない確率を $P(-A)$ として表現した。オッズ比の右辺の最後の値 $\Lambda(B|A)$ を尤度比と呼ぶ。

3.4 マッチドフィルタ

上述の通り、得られたデータの中に重力波信号があるかどうかという二つの仮説について、どちらがどれだけ有利であるかは、オッズ比によって求められる。そこで、前節にのっとして、オッズ比を計算しよう。求めたいオッズ比は、データ $s(t)$ の中に重力波があるかどうかであるため、 $O(H_1|s)$ を求めればよい。(3.39)式によれば、 $O(H_1|s) = O(H_1)\Lambda(H_1|s)$ となり、右辺の初めの値は取得したデータによらない値であることが分かる。従って、取得したデータについての尤度比 $\Lambda(H_1|s)$ を計算すればよい。 H_1 と相反する事象は H_0 であるので、

$$\Lambda(H_1|s) = \frac{p(s|H_1)}{p(s|H_0)} \quad (3.40)$$

となる。

もし、データに含まれる雑音が高スノイズに限られれば、仮説 H_0 の下では $n(t) = s(t)$ となるため、式 (3.29) を用いて確率密度関数が計算でき、

$$p(s|H_0) = p_n[s(t)] \propto e^{-(s,s)/2} \quad (3.41)$$

となる。同様にして、仮説 H_1 の場合には、 $n(t) = s(t) - h(t)$ と書けるため、

$$p(s|H_1) = p_n[s(t) - h(t)] \propto e^{-(s-h, s-h)/2} \quad (3.42)$$

となる。よって、尤度比は次のようになる。

$$\Lambda(H_1|s) = \frac{e^{-(s-h, s-h)/2}}{e^{-(s,s)/2}} = e^{(s,h)} e^{-(h,h)/2} \quad (3.43)$$

従って、尤度比 $\Lambda(H_1|s)$ は、観測データ $s(t)$ の影響を (s, h) の部分でしか受けないことが分かる。この (s, h) をマッチドフィルタと呼び、 h の部分にテンプレートと呼ばれる、予想される重力波信号を入れることによって、得られた観測データの中に (波形が予想されている) 重力波信号が入っているかどうかの信頼度合いを計算することができる。

実際のテンプレートは重力波を完全に再現できるわけではない。そのため、テンプレートを構成しているパラメータ以外にも未知のパラメータが存在しており、それらは尤度比を計算するうえでは無視しなければならない。今、テンプレートを構成する N 個のパラメータのセットを $\{\lambda_i\}, (i = 1, \dots, N)$ としよう。例えば、ブラックホールリングダウンでは、振幅、合体後の質量、kerr パラメータなどがこれに相当する。この時、特定のパラメータ λ で表される重力波における尤度比は次のようになる。

$$\Lambda(H_\lambda|s) = \frac{p(s|H_\lambda)}{p(s|H_0)} \quad (3.44)$$

H_λ はパラメータ λ を用いた重力波が存在するという仮説である。パラメータ空間での積分を実行すれば、既知パラメータすべての場合 (未知のパラメータを無視した場合) での尤度比が計算できる。すなわち、仮説 H_1 についての尤度比を求めることができ、重力波が存在するか否かの議論ができるというわけである。

実際には、より簡単な方法で仮説 H_1 を検定することができる場合がある。重力波がパラメータ λ_{true} で表された場合を考える。通常、 $\Lambda(H_\lambda|s)$ は、パラメータ空間上で鋭いピークを持ち、この時の最大値を与えるパラメータ λ_{max} は、真のパラメータ λ_{true} に非常に近い値となっている。そのため、それぞれのパラメータ λ について $\Lambda(H_\lambda|s)$ を計算し、その最大値をそのまま仮説 H_1 検定に用いることができる。ガウスノイズの場合、あるパラメータ λ における尤度比の対数を取ったものは、式 (3.43) より、次のようになる。

$$\ln\Lambda(H_\lambda|s) = (s, h(\lambda)) - \frac{1}{2}(h(\lambda), h(\lambda)) \quad (3.45)$$

$$(3.46)$$

ここで、 λ を変数として、右辺が最大になる場合を考えると、 $s - h(\lambda) \neq 0$ に注意して、

$$\left(s - h(\lambda), \frac{\partial}{\partial \lambda_i} h(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \quad (3.47)$$

となる。従って、式 (3.47) を満たすようなパラメータ λ_{max} が尤度比の最大値を与えることが分かる。

3.5 マッチドフィルタの性質

一度ここまでをまとめよう。ガウスノイズの中に重力波信号があるかどうかを検定するには、マッチドフィルタと呼ばれる内積を計算する。この内積はデータとテンプレートを取得時のノイズで重み付けしたものであり、この値の大きさを重力波の有無を検定することができる。そこで、以下ではマッチドフィルタの統計的な性質について掘り下げていこう。

検出器のデータを $s(t)$ 、重力波の振幅を A とすると、テンプレート $h(t; A)$ は $h = Ag(t)$ とかける。この時、マッチドフィルタ (s, h) と (s, g) は定数倍 A しか変わらない。そこで簡単のために、 $g(t)$ を使って、マッチドフィルタ $m = (s, g)$ について議論する。

まず検出器からのデータに重力波信号が入っていない場合を考えよう。データ $s(t)$ はノイズ $n(t)$ のみであるから、 $s(t) = n(t)$ となっており、この場合のマッチドフィルタ m_{noise} は $\langle m_{noise} \rangle = 0$ を満たす。この時、

$$\langle m_{noise}^2 \rangle = \left\langle \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{n}(f)\tilde{g}^*(f)}{S_n(|f|)} df \right) \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{n}^*(f')\tilde{g}(f')}{S_n(|f'|)} df' \right) \right\rangle \quad (3.48)$$

$$= 4 \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \frac{\langle \tilde{n}^*(f')\tilde{n}(f) \rangle \tilde{g}^*(f)\tilde{g}(f')}{S_n(|f|)S_n(|f'|)} \quad (3.49)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \frac{S_n(|f|)\delta(f-f')\tilde{g}^*(f)\tilde{g}(f')}{S_n(|f|)S_n(|f'|)} \quad (3.50)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{g}(f)|^2}{S_n(|f|)} df \quad (3.51)$$

$$= (g, g) \quad (3.52)$$

二行目から三行目への式変更は $\langle \tilde{n}^*(f')\tilde{n}(f) \rangle = \frac{1}{2}S_n(f)\delta(f-f')$ を用いた。この式から分かるように、マッチドフィルタ m_{noise} の分散 σ_{noise}^2 は $\sigma_{noise}^2 = \langle m_{noise}^2 \rangle - \langle m_{noise} \rangle^2 = (g, g)$ と表される。すなわち、検出器からの出力に重力波信号が含まれていない場合でも、そのデータをガウスノイズと仮定すれば、データに対してマッチドフィルタを計算するとその分散は (g, g) となるということである。

次にデータに信号が入っている場合を考えよう。検出器のデータが $s(t) = n(t) + h(t)$ と記述されるとし、その重力波信号 $h(t)$ がテンプレート $g(t)$ を用いて、 $h(t) = Ag(t)$ と表されるとしよう。この場合のマッチドフィルタの値を m_{gw} と表記する。この時、データの平均値は

$$\langle m_{gw} \rangle = \langle (s, g) \rangle \quad (3.53)$$

$$= \langle (n, g) \rangle + \langle (s, g) \rangle \quad (3.54)$$

$$= 0 + A(g, g) \quad (3.55)$$

$$= A\sigma_{noise}^2 \quad (3.56)$$

$\langle x^2 \rangle$ は次のようになる。

$$\langle m_{gw}^2 \rangle = \langle (s, g)^2 \rangle \quad (3.57)$$

$$= \langle (n, g) \rangle + 2\langle (h, g)(n, g) \rangle + \langle (h, g)^2 \rangle \quad (3.58)$$

$$= \sigma_{noise}^2 + A^2\sigma_{noise}^4 \quad (3.59)$$

従って、これらより分散は

$$\text{Var}(m_{gw}) = \langle m_{gw}^2 \rangle - \langle m_{gw} \rangle^2 = \sigma_{noise}^2 \quad (3.60)$$

となることが分かる。結果を整理すると、テンプレート通りの波形をした振幅 A の信号が入ったデータについて、そのマッチドフィルタは平均値 $A\sigma_{noise}^2$ をもった分散 σ_{noise}^2 のガウス分布を示すことが分かった。

3.6 信号雑音比

ここで、マッチドフィルタにおける信号雑音比を定義しよう。信号雑音比は通常、信号自体とノイズの標準偏差の比として定義される。ここでの信号とはマッチドフィルタの値のことであり、

m_{gw} そのものが当てはまる。ノイズの標準偏差については、重力波信号が入っていない場合の分散である、 σ_{noise}^2 の平方根が当てはまる。従って、マッチドフィルタにおける信号雑音比 ρ は次の式で定義する。

$$\rho = \frac{m_{gw}}{\sigma_{noise}} \quad (3.61)$$

これまでの議論同様、検出器データがただのガウスノイズだけであった場合、この信号雑音比もランダムなガウス分布をする。その時の平均値は $\langle \rho \rangle = 0$ である。もし、重力波信号 $h(t) = Ag(t)$ が入っていた場合、信号雑音比の平均値は

$$\langle \rho \rangle = \left\langle \frac{m_{gw}}{\sigma_{noise}} \right\rangle \quad (3.62)$$

$$= \frac{A\sigma_{noise}^2}{\sigma_{noise}} \quad (3.63)$$

$$= (h, h)^{1/2} \quad (3.64)$$

この $\langle \rho \rangle$ 自体を信号雑音比と定義する場合もあり、これは到来信号の強度によって特徴づけられた信号雑音比である。

3.7 振幅推定

マッチドフィルタの節で述べたように、尤度比、すなわちマッチドフィルタの値、が最大になるようなテンプレートのパラメータが、実際の重力波信号のパラメータに近い可能性が高いということが分かっている。しかし、ここまでの議論は、到達重力波信号の振幅以外の部分である、予想される波形 $g(t)$ を用いて構成されてきた。そこでここでは、どのようにして振幅を推定するのかについて議論する。

これまで同様に、波形がテンプレート $g(t)$ と同じ重力波 $h(t) = Ag(t)$ が入射してきたことを考える。この時、尤度比の対数をとった値は、式 (3.46) を用いて次のように書ける。

$$\ln\Lambda(H_A|s) = (s, h(A)) - \frac{1}{2}(h(A), h(A)) \quad (3.65)$$

$$= A(s, g) - \frac{1}{2}A^2(g, g) \quad (3.66)$$

$$(3.67)$$

これは振幅についての二次関数になっているため、この値が最大となるような A は導関数がゼロとなる点である。従って、

$$A_{\max} = \frac{(s, g)}{(g, g)} \quad (3.68)$$

が、尤度比を最大にする振幅である。この時、尤度比は次のようになる。

$$\ln\Lambda(H_{A_{\max}}|s) = \frac{1}{2} \frac{(s, g)^2}{(g, g)} \quad (3.69)$$

3.8 到達時刻

テンプレートを構成するパラメータは、波形のみに影響する。そのため、到達時刻はテンプレートのパラメータに含まれていない。そこで、テンプレートとして波形が分かっている重力波について、到達時刻 (および振幅) が分からない場合のマッチドフィルタを考えよう。これまでと同様に、重力波の振幅を A とし、到達時刻を t_0 としよう。この時、データに含まれる重力波信号は

$$h(t) = Ag(t - t_0) \quad (3.70)$$

という形で表される。これをフーリエ変換すれば、

$$\tilde{h}(f) = A\tilde{g}(f)e^{-2\pi if t_0} \quad (3.71)$$

となる。従って、これまでのマッチドフィルタの式において、 \tilde{h} を上記の式で変えれば、

$$(s, h) = 2A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(f)\tilde{g}^*(f)}{Sn(|f|)} e^{2\pi if t_0} df \quad (3.72)$$

右辺の振幅以外の部分を $x(t_0)$ とすれば、時間に依存するマッチドフィルタの標識が出来上がる。

$$x(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(f)\tilde{g}^*(f)}{Sn(|f|)} e^{2\pi if t} df \quad (3.73)$$

これを用いることで、信号雑音比も時間に依存した形で表記でき、 $\rho(t) = x(t)/\sigma_{noise}$ となる。なお、標準偏差及び分散は $\sigma_{noise} = \sqrt{(g, g)}$ であるため、時間の部分はキャンセルされる。

4 ブラックホールリングダウンからの重力波の解析

この章では、私が Mathworks 社が提供している数値計算言語 MATLAB を用いて、実際に行ったブラックホールリングダウンの解析について記述する。以下の解析で考えているブラックホールリングダウンは、全て連星合体によって発生したブラックホールからのリングダウン重力波である。私の解析の最終目的は、ブラックホールリングダウンから放出される重力波の内、一番大きな基本モードのみを解析に用いた場合と、高調波と呼ばれる他のモードの重力波を含めて解析した場合での比較である。

4.1 テンプレートの準備

2.2 節では、連星合体後のカー・ブラックホールからの重力波についての式を導いた。しかし、以降では簡単のため、この式を簡略化した近似式を用いて解析を行うことにする。

ブラックホールリングダウンから放出される重力波は、球面調和関数のインデックス (l, m) 及び、モードを示すインデックス n をパラメータに持つ、減衰正弦波の形をしている。これは、Echenverria[4] によれば、

$$h(t) = Ae^{-t/\tau_{lmn}} \sin(\omega_{lmn}t + \phi_{lmn}) \quad (4.1)$$

と表すことができる。ここで、 A は振幅、 τ_{lmn} は減衰時間を表し、 $\omega_{lmn} = 2\pi f_{lmn}$ は各モードの(角)周波数を表している。これは、2.2 節で求めた重力波において、観測者とブラックホールとの角度による影響を省略した形になっている。つまり、角度の影響が、基本モードと(3,3)モードにおいてほぼ同じ程度となるような角度にブラックホールが傾いているという仮定が入っている。なお、角度に関する詳細な議論は付録を参照。

各モードにおける周波数、および減衰時間は Emanuele[5] らによって近似式を与えられている。それは、

$$F_{lmn} = M\omega_{lmn} = f_1 + f_2(1-j)^{f_3} \quad (4.2)$$

$$Q_{lmn} = \pi f_{lmn} \tau_{lmn} = q_1 + q_2(1-j)^{q_3} \quad (4.3)$$

として、 $f_i, q_i (i = 1, 2, 3)$ をフィッティングによって求めたものである。 j はブラックホールの角運動量を無次元化したものであり、 F_{lmn}, Q_{lmn} はそれぞれ無次元化された周波数及び振動の安定度合いを示す Q 値であり、 M は万有引力定数 G 及び光速 c で規格化されたブラックホールの質量である。定数それぞれについてもう少し言及しておく。ブラックホールの質量を $M_{BH}[\text{kg}]$ 、角運動量を $J[\text{m}^2\text{kg}/\text{s}]$ 万有引力定数を $G[\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}]$ 、光速を $c[\text{m}/\text{s}]$ とすると、規格化角運動量は $j = cJ/GM_{BH}^2$ 、規格化質量は $M = M_{BH}G/c^3$ である。また、 j の取りうる値は $0 \leq j \leq 1$ である。各モードにおける係数 f_i, q_i は表 4.1 に示すとおりである。

これらを用いると、求めるべき波形の式は

$$h(t) = A \exp\left\{-\frac{\pi f_{lmn}}{Q_{lmn}} t\right\} \sin(2\pi f_{lmn}t + \phi_{lmn}) \quad (4.4)$$

$$f_{lmn} = \frac{F_{lmn}}{2\pi M} \quad (4.5)$$

(l, m)	f_1	f_2	f_3	q_1	q_2	q_3
(2, 1)	0.6000	-0.2339	0.4175	-0.3000	2.3561	-0.2277
(2, 2)	1.5251	-1.1568	0.1292	0.7000	1.4187	-0.4990
(3, 3)	1.8956	-1.3043	0.1818	0.9000	2.3430	-0.4810
(4, 4)	2.3000	-1.5056	0.2244	1.1929	3.1191	-0.4825

表 4.1: モードごとのフィッティング定数表 ($n=0$ の場合のみ)。Emanuele et al(2006)[5] より引用

と書くことができる。なお、角周波数 ω_{lmn} を $\omega_{lmn} = 2\pi f_{lmn}$ で書き換えた。計算のために、重力波の周波数 f_{lmn} を無次元化周波数 F_{lmn} を使って具体的に書き下しておこう。

$$f_{lmn} = \frac{F_{lmn}}{2\pi M} \quad (4.6)$$

$$= \frac{c^3}{2\pi G} \frac{1}{M_{BH}} F_{lmn} \quad (4.7)$$

$$= \frac{c^3}{2\pi G M_{sun}} \frac{M_{sun}}{M_{BH}} F_{lmn} \quad (4.8)$$

$$\approx 32 \times \left(\frac{M_{BH}}{M_{sun}} \right)^{-1} F_{lmn} \times 10^3 [\text{Hz}] \quad (4.9)$$

ここで、 M_{sun} は太陽質量である。この式と (4.3) 式を合わせてテンプレートの重力波の周波数及び Q 値を求める。なお、球面調和関数のパラメータ $(l, m) = (2, 2)$ かつ $n = 0$ の重力波が最も減衰が遅いため、最も観測に適した重力波であることが分かっている。以下の解析では、 $n = 0$ のモードのみを考え、 $(l, m) = (2, 2)$ を基本モードと称し、このモードと他の (l, m) の組み合わせを持った重力波とを同時に解析に盛り込むことを高調波解析と呼んでいる。

4.2 テンプレート作成

ここでは実際にテンプレートを作成する過程を、私が作成したコードとともに記述する。ブラックホールリングダウンの波形は、前節の通り、周波数と Q 値によって決定される。また、それらのパラメータは、ブラックホールの質量、スピンによって決定される。さらに、実際に信号探査をする時には信号の到達時間も重要なパラメータである。通常の基本モードのみでの信号探査に必要なテンプレートのパラメータは以上の三つである。

しかし、高調波を含んだ解析を行う上では、上記のパラメータのみでは不十分である。それは、高調波によって放出される重力波の振幅が異なるためである。連星合体によるブラックホールのリングダウン重力波では、連星の質量比によって、放出される高調波の振幅が変化することが知られている。連星合体による振幅変化は、S. Gossan[6] らによって計算されており、次の式で表される。

$$A_{22} = 0.864\nu \quad (4.10)$$

$$A_{21} = 0.52(1 - 4\nu)^{0.71} A_{22} \quad (4.11)$$

$$A_{33} = 0.44(1 - 4\nu)^{0.45} A_{22} \quad (4.12)$$

$$A_{44} = [5.4(\nu - 0.22)^2 + 0.04] A_{22} \quad (4.13)$$

ここで、各振幅の添え字は球面調和関数の (l, m) に対応する。例えば基本モード $(l, m) = (2, 2)$ に対応する振幅が A_{22} である。この式に含まれる ν が合体前の天体の質量比を表しており、二つの天

体の質量をそれぞれ m_1, m_2 とすると、 $\nu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$ と表される。この ν を変数としてグラフとしたものが図 4.1 である。なお、 m_1, m_2 はどちらも正の実数であるため、 $0 \leq \nu \leq 0.25$ であり、 ν が最大となるのは $m_1 = m_2$ となる場合である。

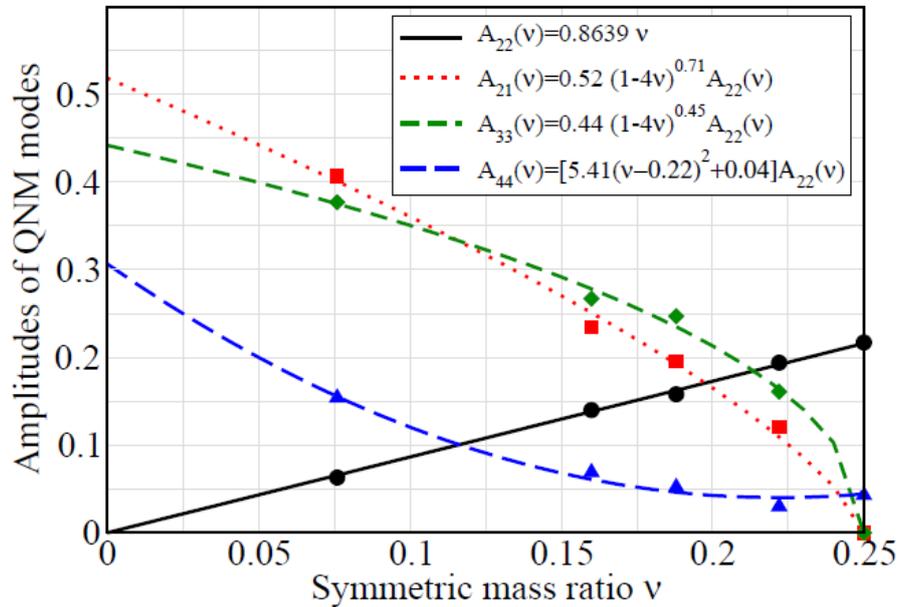


図 4.1: 質量比 ν を変数として描いた、各モードの振幅比。縦軸が各モードの振幅を表し、横軸が合体前連星の質量比 ν を表す。S. Gossan et al.[6] より引用

これらの式から分かる通り、高調波の振幅は、基本モードの振幅を基準にして、質量比による係数をかけて決定することができる。従って、高調波を含む解析において増やすべきパラメータは、合体前天体の質量比である。

以上を踏まえて、実際にテンプレートを作成する。PC の都合上、細かいテンプレート空間を形成することは不可能であるため、適当なパラメータ分布でテンプレートを作成する。以下に私が作成したテンプレート作成コードを示す。

```
%----- Parameters -----
kerrvector = (kerr_low:0.1:kerr_up);
kerrvector = round(kerrvector,3);

massvector = (mass_low:10:mass_up);
massvector = round(massvector,3);

timevector = (time_low:0.1:time_up);
timevector = round(timevector,3);

q = m2/m1;
nu = q./((1+q).^2);
a = (0.5-nu)*20;
b = round(a,0);
nu1 = linspace(nu,0.5,b+1).';
nu2 = linspace(0,nu,10-length(nu1)+1).';
nuvector = vertcat(nu2(1:end),nu1(2:end));
```

```

%----- Freq Q-factor Amp -----
[Fc,Qc] = QNM_parameter(kerrvector,massvector);

fc_21 = Fc.fc(1).fc;
fc_22 = Fc.fc(2).fc;
fc_33 = Fc.fc(3).fc;
fc_44 = Fc.fc(4).fc;

qc_21 = Qc.qc(1).qc;
qc_22 = Qc.qc(2).qc;
qc_33 = Qc.qc(3).qc;
qc_44 = Qc.qc(4).qc;

A22 = 1;
A21 = A22 * 0.52*(1-4*nuvector).^0.71;
A33 = A22 * 0.44*(1-4*nuvector).^0.45;
A44 = A22 * (5.41*(nuvector-0.22).^2 + 0.04);

%-----Templates-----
templates = zeros(length(t),length(massvector),
length(kerrvector),length(nuvector));

for i=1:length(massvector)
    for j=1:length(kerrvector)
        for k=1:length(nuvector)

            templates(:,i,j,k) = exp((-pi*fc_22(j,i)/qc_22(j))*t).*
            sin(2*pi*fc_22(j,i)*t)...
            + A21(k) * exp((-pi*fc_21(j,i)/qc_21(j))*t) .*
            sin(2*pi*fc_21(j,i)*t)...
            + A33(k) * exp((-pi*fc_33(j,i)/qc_33(j))*t) .*
            sin(2*pi*fc_33(j,i)*t)...
            + A44(k) * exp((-pi*fc_44(j,i)/qc_44(j))*t) .*
            sin(2*pi*fc_44(j,i)*t);

        end
    end
end
end

```

Parameters ブロックでは、合体後のブラックホールのスピン、質量、信号の到達時刻、合体前天体の質量比などのサーチする範囲を決めている。スピン、質量、到達時刻はいずれも整数刻みでサーチしていたが、計算方法によっては小数点以下に誤差が生じたため、丸め込みを行っている。サーチを行う際に、入力する重力波信号と同じパラメータを持ったテンプレートが存在するようにするため、いずれも外部入力変数によってパラメータ空間を生成できるようにしている。続くブロックでは、前述した重力波の周波数と Q 値および高調波の振幅比を、前ブロックで決めたパラメータによってそれぞれ計算している。最後の Template ブロックでは、実際に式 (4.4) で定義された波形を各パラメータの組み合わせによって計算し、テンプレート関数として格納している。

4.3 干渉計のノイズスペクトル

2016 年 2 月にアメリカ合衆国にある重力波検出器 LIGO が、史上初の重力波観測を成功させたと発表した。これを受けて、LIGO グループは重力波信号が入った部分の干渉計データを一般に公開している。[1]

そこで、このデータを用いて、実データ解析を行うことにする。しかし、本データはリングダウン部分に関しては、そのみで検出が可能なるほどではなかったため、この公開されたデータの

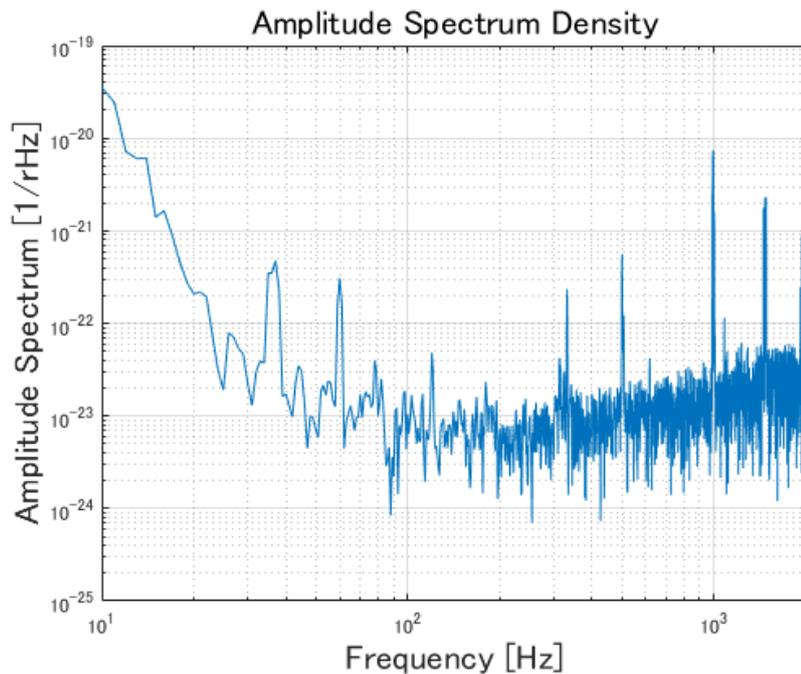


図 4.2: aLIGO の感度曲線

内、重力波信号の入っていない部分を用いて、疑似的な干渉計データを作成し、実データ解析に限りなく近い解析を行うことにする。

LIGO が公開したデータは 4096Hz サンプリングのデータと 16384Hz サンプリングのデータが存在しているが、私の解析において必要な周波数は 1000Hz 以下であるので、4096Hz サンプリングのデータを使用する。干渉計からのデータは、理想的にはガウス雑音のみであるが、実際の干渉計ではそうではない場合がある。そこで、なるべく理想的なガウス雑音のみのデータにするため、感度曲線はそのままに、データを並び替えることでガウス雑音のようなランダム性を再現することにする、パーミュテーションテストと呼ばれる手法を用いる。

通常、干渉計から出力されるデータは、ホワイトノイズにはなっていない。これは干渉計に用いられている機器のノイズが、ホワイトノイズではなく、周波数に依存した雑音になっているからである。従って、LIGO から取得したデータをそのまま並び替えてしまうと、低周波や高周波の感度が悪い部分によって、全体的に感度が悪く、ホワイトノイズに近い感度曲線が得られることになる。そこで、干渉計の感度曲線によって一度データを周波数依存性のない雑音にする、ホワイトニングを行い、そこでデータを並び替え、再び干渉計の周波数依存性を持たせる色付けを行うことで、疑似的な感度曲線を生成する。

以下に実際に私が行った感度曲線生成のプログラムコードを示す。

```
load('GW150914_4096s_H1.mat')

%-----setup-----
Fs = H1.fs;           % Sampling frequency (Hz)
dt = 1/Fs;
NFFT = Fs;
T = 1/Fs;             % Sample time (s) Δt
d = 256*16;
L = length(H1.data)/d; % Length of signal
```

```

t = (T:T:L*T); % Time vector

%-----PSD-----
[Sn,f] = medianmeanaveragespectrum(data,Fs,NFFT);

%-----whitening-----
Nt = L; %1sec data length
data2 = data(1:Nt);

freqs = 0:1:Nt/2;
freqs = freqs/(Nt*dt);

interp_psd = interp1(f,Sn,freqs).';

hf = fft(data2,Nt);
hf = hf(1:Nt/2+1);
white_hf = hf./sqrt(interp_psd/dt/2);
white_hf = ifft(white_hf,Nt);

%-----rand-sample-----
rand_hf = randsample(white_hf,Nt); %re-sampling
rand_hf = fft(rand_hf);
rand_hf = rand_hf(1:Nt/2+1);
rand_hf = rand_hf.*sqrt(interp_psd/dt/2); %Re-color
rand_hf = ifft(rand_hf,Nt);

%-----normalization-----
normalization_factor = median(abs(rand_hf))/median(abs(data));
rand_hf = rand_hf/normalization_factor;

```

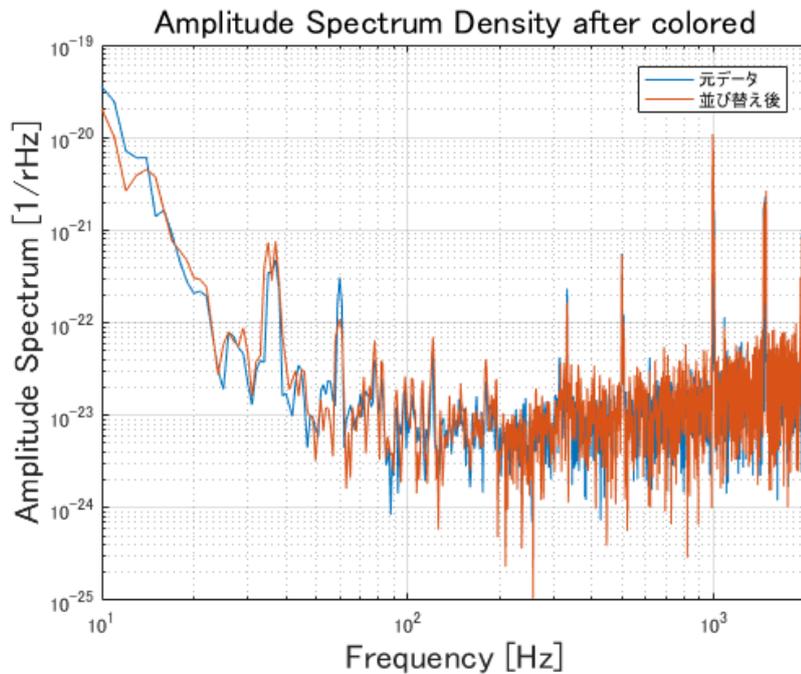


図 4.3: 実データと並び替えた後のデータの比較

setup の部分ではデータの基本情報を入力している。データはすべてで 4096 秒分あるが、私が作業を行う PC にとっては大きすぎるので 1 秒分のみを切り取って作業を行う。初めに元のデータについてパワースペクトル密度推定を行う。

次に whitening のブロックで、今計算したパワースペクトル密度を用いてデータの周波数依存性を無くす、ホワイトニングを行う。ホワイトニングは周波数空間で行うため、データにフーリエ変換を施し、レファレンスとなるパワースペクトル密度とフーリエ変換後のデータが同じ長さになるように、パワースペクトル密度の方をフーリエ変換後のデータ長に合わせて内挿を行っている。(コードの例の場合では同じデータを使っているため、長さは変わらない。)

rand-sample ブロックにおいてホワイトニングした後のデータをランダムに並び替え、再び元のパワースペクトル密度をかけることで、元の干渉計と同等の感度を持った、ガウスノイズに近い疑似干渉計データを作成している。最後に並び替え時に発生するズレを補正して完成である。なお、後に作成した重力波信号を混入させるため、時系列データとして出力している。

このコードを用いて実際に得られた感度曲線の比較を図 4.3 に示す。この図からも見て分かるように、元の干渉計の感度曲線とほぼ同等の感度曲線を再現することができた。

4.4 入力信号作成

次に、実際に解析を行うための重力波信号を作成する。基本的には入力信号のパラメータを決め、式(4.4)にそって計算したものを、前節で作成した疑似干渉計データに混ぜ込めば完成である。

```
%----- Parameters -----%

q = m2/m1;
if q<1
    q = 1/q;
end

nu = q./((1+q).^2);

m = round(m1 + m2 -1 , -1) ;
a = round(a,3);
tau = 0.5;
t = bsxfun(@minus,t,tau);
t(t<0)=0;

[Fc,Qc] = QNM_parameter(a,m);

fc_21 = Fc.fc(1).fc;
fc_22 = Fc.fc(2).fc;
fc_33 = Fc.fc(3).fc;
fc_44 = Fc.fc(4).fc;

qc_21 = Qc.qc(1).qc;
qc_22 = Qc.qc(2).qc;
qc_33 = Qc.qc(3).qc;
qc_44 = Qc.qc(4).qc;

A21 = A22 * 0.52*(1-4*nu).^(0.71);
A33 = A22 * 0.44*(1-4*nu).^(0.45);
A44 = A22 * (5.41*(nu-0.22).^2 + 0.04);

%----- Signal -----%
```

```

signal = A22 .* (exp((-pi*fc_22/qc_22)*(t)) .* sin(2*pi*fc_22*(t)))...
+ A21 .* (exp((-pi*fc_21/qc_21)*(t)) .* sin(2*pi*fc_21*(t)))...
+ A33 .* (exp((-pi*fc_33/qc_33)*(t)) .* sin(2*pi*fc_33*(t)))...
+ A44 .* (exp((-pi*fc_44/qc_44)*(t)) .* sin(2*pi*fc_44*(t)));

```

上部の Parameter ブロックで、疑似信号に必要な質量、スピン、到達時刻、周波数、Q 値を計算・定義し、最後の Signal ブロックにおいて疑似重力波信号を作成している。なお、信号到達時刻前には何もデータがない状態にするため、到達時刻前のデータに 0 を代入している。また、Matlab で計算する以上、桁落ちの問題があるため、質量やスピンを代入した後に不要な桁以下を丸め込んでいる。

4.5 マッチドフィルタ計算

次に、入力された信号とノイズスペクトルを基に、マッチドフィルタを計算する。

```

%----- setup -----%
data = column_vector(data);           % 列ベクトルにする
signal = column_vector(signal);

T = 1/Fs;
L = length(data);
t = (T:T:L*T);
NFFT = 2^nextpow2(L);                 % Next power of 2 from length of y

[Sn,f] = medianmeanaveragespectrum(data,Fs,NFFT);   %PowerSpectrum
Sn = Sn(1:L/2+1);

f = Fs/2 * linspace(0,1,L/2+1).';     % Frequency
Lf = length(f);                       % Length of frequency
df = (max(f) - min(f) + 1)/Lf;        % 積分するときの周波数bin

s = data;

%----- Signal -----%
s = data + signal;
w = hann(L);
w = w/mean(w);
s_fft = fft(s.*w)/L;

%----- Parameter setup for templates -----%
kerrvector = (kerr_low:0.1:kerr_up);   %Spin
kerrvector = round(kerrvector,3);

massvector = (mass_low:10:mass_up);    %Mass
massvector = round(massvector,3);

timevector = (time_low:0.1:time_up);   %Arrival time
timevector = round(timevector,3);

anglevector = (0:pi/3:5*pi/3);         %Initial phase

q = m2/m1;
nu = q./((1+q).^2);
a = (0.5-nu)*20;
b = round(a,0);

```

```

nu1 = linspace(nu,0.5,b+1).';
nu2 = linspace(0,nu,10-length(nu1)+1).';
nuvector = vertcat(nu2(1:end),nu1(2:end));           %Mass ratio

kl = length(kerrvector);
ml = length(massvector);
tl = length(timevector);
nl = length(nuvector);
al = length(anglevector);

[Fc,Qc] = QNM_parameter(kerrvector,massvector);

%fc_21 = Fc.fc(1).fc;
fc_22 = Fc.fc(2).fc;
fc_33 = Fc.fc(3).fc;
%fc_44 = Fc.fc(4).fc;

%qc_21 = Qc.qc(1).qc;
qc_22 = Qc.qc(2).qc;
qc_33 = Qc.qc(3).qc;
%qc_44 = Qc.qc(4).qc;

A22 = 1;
%A21 = zeros(nl,1);%A22 * 0.52*(1-4*nuvector).^0.71);
A33 = A22 * 0.44*(1-4*nuvector).^0.45);
%A44 = zeros(nl,1);%A22 * (5.41*(nuvector-0.22).^2 + 0.04);

%----- Templates -----%
templates = zeros(length(t),ml,kl,nl,al);

for i=1:ml
    for j=1:kl
        for k=1:nl
            for l = 1:al

                templates(:,i,j,k) = exp((-pi*fc_22(j,i)/qc_22(j))*t)
                    .* sin(2*pi*fc_22(j,i)*t)...
                    + A33(k) * exp((-pi*fc_33(j,i)/qc_33(j))*t)
                    .* sin(2*pi*fc_33(j,i)*t + anglevector(l) );
            end
        end
    end
end

%----- Normalization -----%

temp_fft = zeros(NFFT,ml,kl,nl,al);
sigma_sqr = zeros(ml,kl,nl,al);
temp_fft_cal = zeros(NFFT,ml,kl,nl,al);
sigma_sqr_cal = zeros(ml,kl,nl,al);
templates_cal = zeros(length(t),ml,kl,nl,al);

w = hann(length(NFFT));
w = w/mean(w);

for i=1:ml

```

```

for j=1:kl
  for k=1:nl
    for l=1:al

      temp_fft(:,i,j,k,l) = fft(templates(:,i,j,k,l).*w,NFFT)/NFFT;

      sigma_sqr(i,j,k,l) = 4*real(sum((temp_fft(1:Lf,i,j,k,l)
        .* conj(temp_fft(1:Lf,i,j,k,l)) ./ Sn(1:Lf)) * df));

      templates_cal(:,i,j,k,l) = templates(:,i,j,k,l)
        / sqrt(sigma_sqr(i,j,k,l));

      temp_fft_cal(:,i,j,k,l) = fft(templates_cal(:,i,j,k,l).*w,NFFT)
        /NFFT;

      sigma_sqr_cal(i,j,k,l) = 4*real(sum((temp_fft_cal(1:Lf,i,j,k,l)
        .* conj(temp_fft_cal(1:Lf,i,j,k,l)) ./ Sn(1:Lf)) * df));

    end
  end
end
end

%----- Matched Filtering -----%

matchedfilter_cal = zeros(ml,kl,nl,tl,al);
matched_filter = zeros(ml,kl,nl,tl,al);
Amplitude = zeros(ml,kl,nl,tl,al);

for i=1:ml
  for j=1:kl
    for k=1:nl
      for l=1:tl
        for o=1:al

          matchedfilter_cal(i,j,k,l,o) = 4*real(sum((s_fft(1:Lf)
            .* conj(temp_fft_cal(1:Lf,i,j,k,o))
            .* exp(2*sqrt(-1)*pi*f*timevector(l))
            ./ Sn(1:Lf)) * df));
          matched_filter(i,j,k,l,o) = 4*real(sum((s_fft(1:Lf)
            .* conj(temp_fft(1:Lf,i,j,k,o))
            .* exp(2*sqrt(-1)*pi*f*timevector(l))
            ./ Sn(1:Lf)) * df));
          Amplitude(i,j,k,l,o) = matched_filter(i,j,k,l,o)
            ./abs(sigma_sqr(i,j,k,o));

        end
      end
    end
  end
end

%----- Signal to Noise ratio -----%
SNR_hh_nu = sqrt(abs(matchedfilter_cal).^2);

```

前半は、重力波信号作成時と同様に、重力波信号テンプレートを作成する。あらかじめ前述のプログラムで作成した疑似干渉計ノイズと重力波信号を受け取り、まずは疑似干渉計ノイズのみ

をフーリエ変換を行って干渉計のノイズパワースペクトルを作成する。その後、干渉計ノイズと重力波信号を合体させて、疑似的な重力波信号を含んだ干渉計ノイズを作成する。次に、サーチする範囲に基づいて、テンプレートのスピン、質量、到達時刻、初期位相、合体前連星の質量比を決定する。ここで、合体前連星の質量比のサーチする範囲を示す、nuvector については、本物のパラメータを含むサーチ範囲とするために、正解のパラメータの前後に値を持つように作成している。その後は、信号作成時と同様に周波数や Q 値、振幅比を計算しテンプレート作成の準備を行う。

Template ブロックでは、前述の重力波信号のモデルを使用したテンプレートを作成しており、その後 Normalization ブロックにおいて、各テンプレートの規格化を行っている。ここでのテンプレートの規格化は、マッチドフィルタ計算をした際に、同じテンプレート同士を掛け合わせた場合に 1 となるようにしている。すなわち、

$$1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}_{\lambda}(f)\tilde{h}_{\lambda}^{*}(f)}{S_n(|f|)} df \quad (4.14)$$

となるように規格化を行う。なお、 λ はテンプレートの番号を示している。そして、Matched Filtering ブロックでは、実際に干渉計出力とテンプレートを掛け合わせて、マッチドフィルタの値を計算し、変数に保存している。また、それぞれのマッチドフィルタの値について、推定される振幅も計算し、同様に変数として保存している。最後に、信号雑音比を計算し、マッチドフィルタの計算を終わる。

5 解析結果と考察

5.1 解析に用いる高調波

Matlab をはじめとした各種言語でのデータ解析において、for コマンドを用いた計算ループは非常に時間がかかることが知られている。前章で示したコードにも、パラメータサーチをするために多数の for コマンドが用いられており、計算に多大なメモリと時間が必要となることが分かった。そこで、前章で紹介した4つの波、(2,1),(2,2),(3,3),(4,4) のすべてを用いるのではなく、基本モードである (2,2) と、高調波一つを用いて解析を行うことにしたい。

では、どの高調波を解析対象とするかについて議論しよう。前章では触れていなかったが、振幅はブラックホールのスピンによっても変化することが Kamaretsos らによって示された。図 5.1 が高調波の振幅比を示したものである。この図を見ると、最も大きい振幅を持つ高調波は (2,1) モー

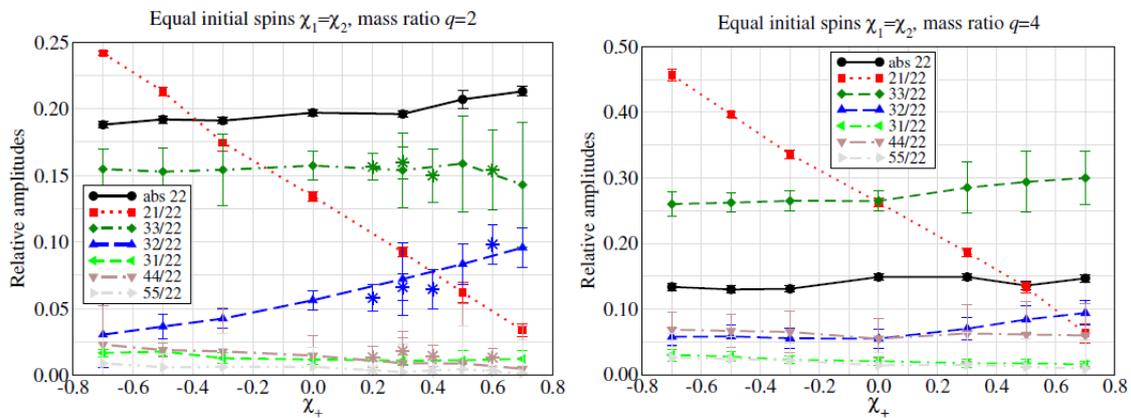


図 5.1: スピンと高調波の振幅比。どちらも横軸が合体後のブラックホールのスピンを表し、縦軸が振幅比を示す。左側は合体前連星の質量比が 2:1 の場合であり、合体前連星のスピンが同じ場合の結果である。右側は合体前連星のスピンは同じだが、質量比が 4:1 の場合を示している。Kamaretsos et al.[7] より引用。

ドか (3,3) モードに絞られることが分かる。また、どのようなスピンに対しても安定して振幅が大きい高調波を考えると (3,3) モードに限られることになる。また、図 4.1 を改めて見てみると、(3,3) モードの振幅は他のモードの振幅に比べても決して小さくないことが見て取ることができる。よって、スピンにおいても質量比においても安定して大きな振幅が期待できる (3,3) モードを高調波として解析を行う。

5.2 基本モード及び高調波のみの解析

ここでは、まず基本モードのみでの検出と高調波のみでの検出を試みた場合の解析結果を示す。基本モードにおいて、先に信号雑音比が 3 程度となるような振幅を定義し、この信号を混入させた疑似干渉計データにマッチドフィルタによるサーチを基本モードについても高調波についても行う。これを一セットとして、一万回繰り返した。適当な閾値を設定し、マッチドフィルタによる信号雑音比の最大値が閾値以上になった場合を「検出」、最大値が閾値以下の場合には「未検出」とし、閾値をスイープしながら検出率を見る。

また、誤検出の測定を行うため、同じ疑似干渉計データに、重力波信号を入れないデータについてもマッチドフィルタサーチを行う。後は同様に、最大信号雑音比が閾値を越えた場合は「誤検出」、越えなかった場合は「未検出」として、誤検出率を見る。

検出率・誤検出率の求め方であるが、一万回解析シミュレーションを繰り返し、一万のデータが集まったところで、ある閾値に対し、信号の入っているデータにおいて閾値を超えた数÷10000、信号の入っていないデータにおいて閾値を超えた数÷10000、をそれぞれ検出率、誤検出率として求めている。この二つの値を基にROCカーブを作成をする。ROCカーブにおいては閾値ごとの検出率・誤検出率を見ることはできないが、ある検出率を出している時の誤検出率として各解析の比較をすることができる。

以下の解析で用いたテンプレートについて紹介しておこう。今回サーチ対象としたパラメータは

- 合体後のブラックホールの質量：40~80 M_{sun} の5通り
- 合体後ブラックホールのスピン：0.58~0.98 の5通り
- 重力波の到達時刻：(実際の到達時刻を0として)-0.02~+0.02 の5通り

の全125通りである。従って以下の解析では125個のテンプレートを作成して、リングダウン信号の検出シミュレーションを行っている。

29 M_{sun} と 36 M_{sun} からの重力波

まずは、実際に取得された重力波である GW150914 を参考にしたパラメータについて、解析を行った。

重力波生成時のパラメータは、合体前連星の質量が29 M_{sun} と 36 M_{sun} 、合体後質量は60 M_{sun} 、スピンを0.68とした。

まずはROCカーブを図5.2に示す。青線が基本モードのみの解析を示し、赤線が(3,3)モードのみでの解析結果となっている。これを見ると、ある検出率で判定する場合に、誤検出率は基本モードのみの方が小さい値を取っていることが分かる。同様に、ある誤検出率で見た場合は、基本モードのみの方が高い検出率を誇っている。従って、ROCカーブからは重力波の検出方法として、基本モードのみの解析の方が優れていると言える。

次に、二つの解析方法について検出率と誤検出率を比較した。図5.3と図5.4がそれぞれ、検出率と誤検出率を比較したものになっており、縦軸に(3,3)モードの値を、横軸に基本モードの値を取っている。図中の青線が得られた値を示しており、赤線は二つの解析方法の値が1:1になるような直線を示している。

まずは検出率の結果について議論しよう。データは、1:1の直線よりも基本モード側に寄っていることが分かる。これは、(3,3)モードのみの解析方法がある検出率の値を持った時に、基本モードのみの解析の方がそれよりも高い検出率を出していることに相当する。従って、検出率においては基本モードの方が優れていることが分かる。次に誤検出率について議論しよう。この図では、検出率の図とは逆に、(3,3)モードの方にグラフが寄っている。これは、(3,3)モードの誤検出率に対し、基本モードの誤検出率の方が低い値を持っていることを示している。従って、誤検出率の点においては基本モード解析が優れていることが分かる。

最後に、二つの解析方法で得られた、信号雑音比を比較した。その結果を図5.5に示す。これは、基本モード解析で得られた信号雑音比を、(3,3)モードのみで解析した時の信号雑音比で割ったものになっている。縦軸が信号雑音比同士を割った値を示しており、横軸はデータの番号であ

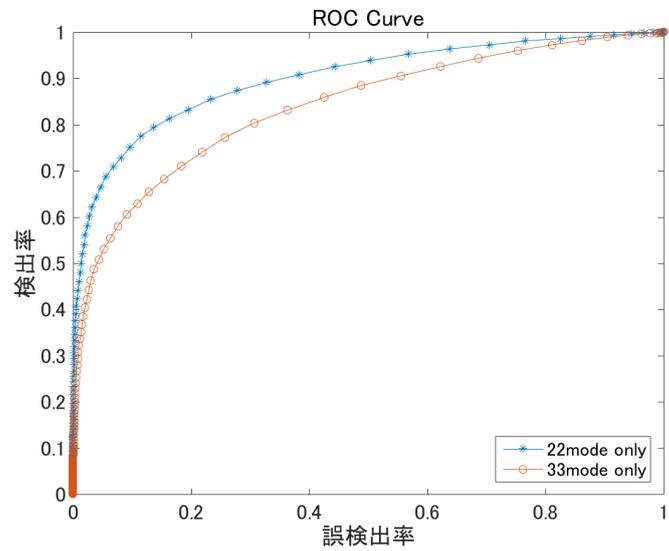


図 5.2: ROC カーブ。青線が基本モード、赤線が (3,3) モードのデータを示す。左上に近いほど、優れた判定方法と言える。

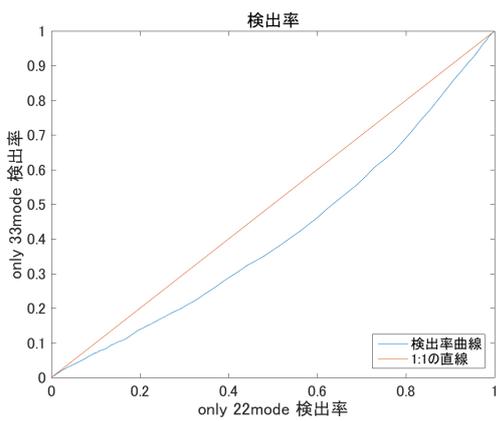


図 5.3: 検出率比較

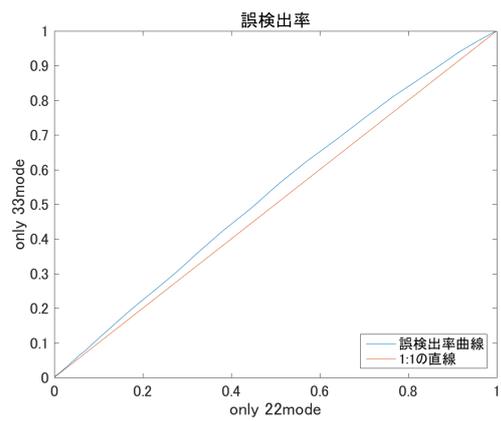


図 5.4: 誤検出率比較

る。この解析では、同じ重力波について、疑似干渉計雑音を何度も再構成して検出シミュレーションを行っているが、その回数が1万回であるため、横軸の最大値は1万になっている。青線が実際のデータを表し、赤線で示しているのはデータを10点ずつ移動平均を取ったものである。このグラフを見る限り、信号雑音比は基本モードの方が平均的に見て、1.1~1.2倍ほど高い値を取っていることが分かる。よって、同じ重力波信号を解析した場合でも基本モード解析の方が信号雑音比を高く取得することができる。

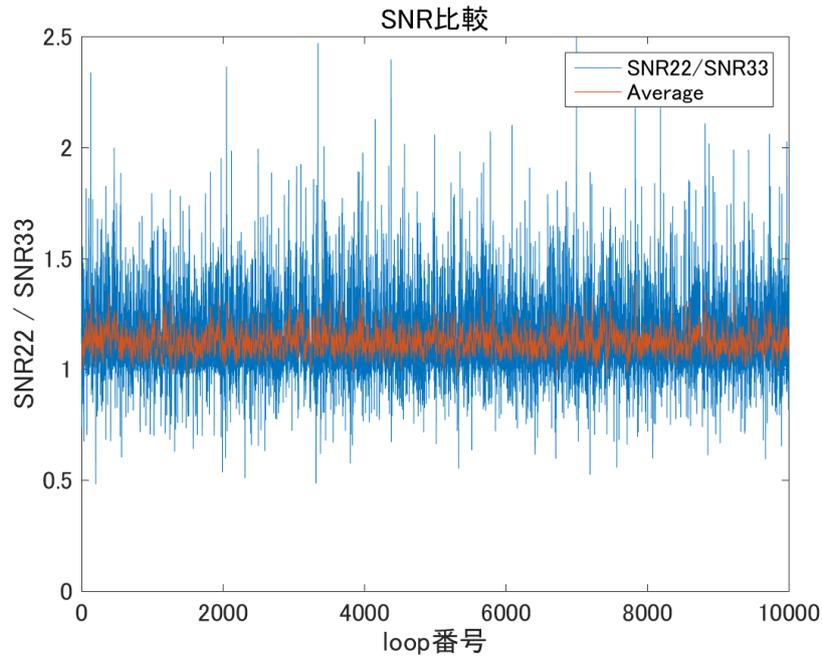


図 5.5: 信号雑音比の比較。(3,3)モードの値を基本モードの値で割ったもの。

以上の結果をまとめると、ROCカーブ、検出率・誤検出率、信号雑音比のすべてにおいて基本モードのみでの解析の方が優位にあることが分かった。従って、本解析においては、基本モード解析の方が優れていると結論付けられる。

1.4Msun+60Msun からの重力波

4.2 節で言及した高調波の式によれば、合体前連星の二つの質量比が大きいほど、高調波の振幅が増加する。そこで、前の解析よりも高調波にとって有利になるような場合について考えることにする。ゆえに、次の解析は質量比が大きくなるような連星系を想定して重力波を作成した。

今回用いたパラメータは、合体前連星の二つの質量がそれぞれ $1.4M_{\text{sun}}$ と $60M_{\text{sun}}$ 、合体後の質量 $60M_{\text{sun}}$ 、スピン 0.68 となっている。天体として考えると、 $1.4M_{\text{sun}}$ は丁度、中性子星程度の星にあたり、 $60M_{\text{sun}}$ は GW150914 にて出来上がったブラックホール程度の星となる。つまり、どちらも実際に観測されている星程度の質量であるので、決して非現実的な場合を想定した解析ではない。

この質量比の変化がどの程度高調波の振幅に影響を及ぼすのかを見積もっておこう。4.12 を用いて計算する。GW150914 の場合は

$$\nu = \frac{29 \times 36}{(29 + 36)^2} \simeq 0.2471 \quad (5.1)$$

$$\therefore \text{Amp}_{33\text{mode}} \simeq 0.059 \times \text{Amp}_{22\text{mode}} \quad (5.2)$$

一方で今回のパラメータでは、

$$\nu = \frac{1.4 \times 60}{(1.4 + 60)^2} \simeq 0.0223 \quad (5.3)$$

$$\therefore \text{Amp}_{33\text{mode}} \simeq 0.422 \times \text{Amp}_{22\text{mode}} \quad (5.4)$$

従って、質量比を増大させたことによる (3,3) モードの振幅変化は、 $0.422/0.059 \simeq 7$ となり、およそ 7 倍となる。

では実際に、これらのパラメータを用いて作成した ROC カーブを図 5.6 に示す。前と同様、青線が基本モードのみの解析結果であり、赤線が (3,3) モードのみでの解析結果になっている。前の結果と同様に、基本モードの方が (3,3) モードの解析よりも優れていることが分かる。基本モードとの差は、前の解析とほとんど変わらず、質量比が大きくなったことへの影響があまり見ることができない状態である。

次に、同様に検出率と誤検出率を比較した。図 5.7 及び 5.8 が、二つの検出方法の検出率及び誤検出率のみをそれぞれ比較したものである。依然として、検出率についても誤検出率についても、基本モードでの解析の方が有利であることが見て取ることができる。質量比を大きくしたことによる高調波の振幅増大の効果については、検出率・誤検出率共に前の結果とほとんど同じであることから、あまり見ることはできない。

最後の図 5.9 は、解析の際に得られた信号雑音比の値の比較を表しており、(3,3) モードの信号雑音比の値を基本モードの信号雑音比で割ったものになっている。青線が割った結果を示しており、赤線が 10 点で平均を取った移動平均を示している。前の結果と同様に、(3,3) モードより基本モードで解析した方が、平均的に 10% ほど信号雑音比が大きくなっていることが分かる。質量比を大きくした効果について考えたいが、この結果からも前の図との明確な改善は見られない。

以上の結果を踏まえると、GW150914 のパラメータについての解析同様に、基本モード解析のみの方が (3,3) モード解析のみの場合より優れていることが分かった。質量比を変更したことによって、基本モードと (3,3) モードとの間の振幅差が縮まり、その効果が期待されたが、ROC カーブや検出率などの結果として見ることはできなかった。従って、連星合体時のブラックホールリングダウンの解析においては、高調波の (3,3) モードのみを用いた解析よりも、基本モードのみを用いた解析の方が優れていることが分かった。

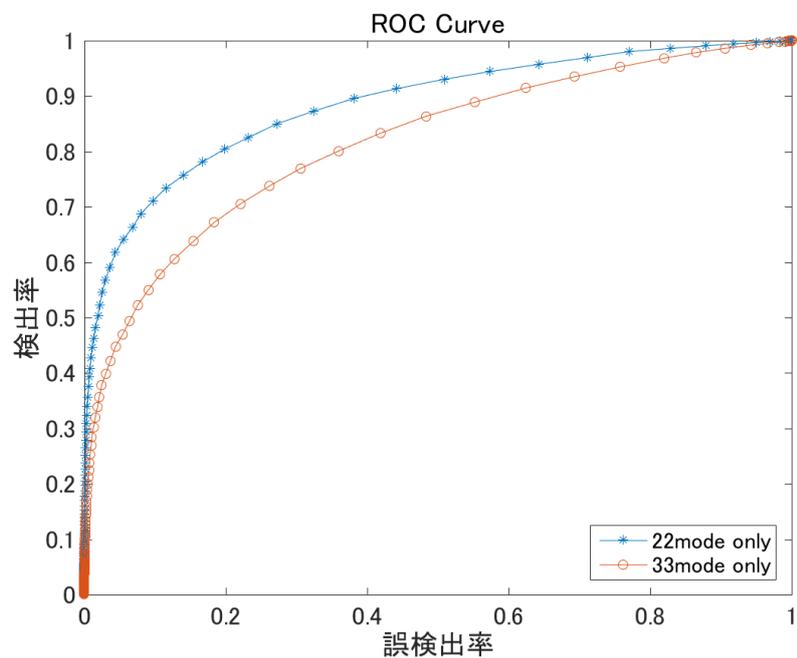


図 5.6: 基本モードと高調波の ROC カーブ。縦軸が検出率、横軸が誤検出率である。

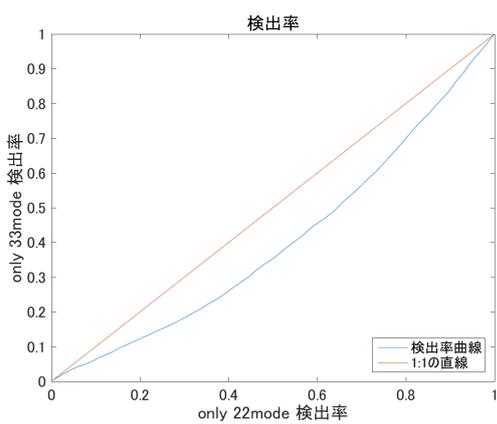


図 5.7: 検出率比較

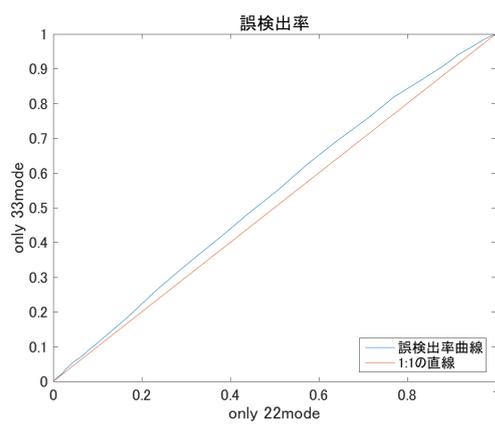


図 5.8: 誤検出率比較

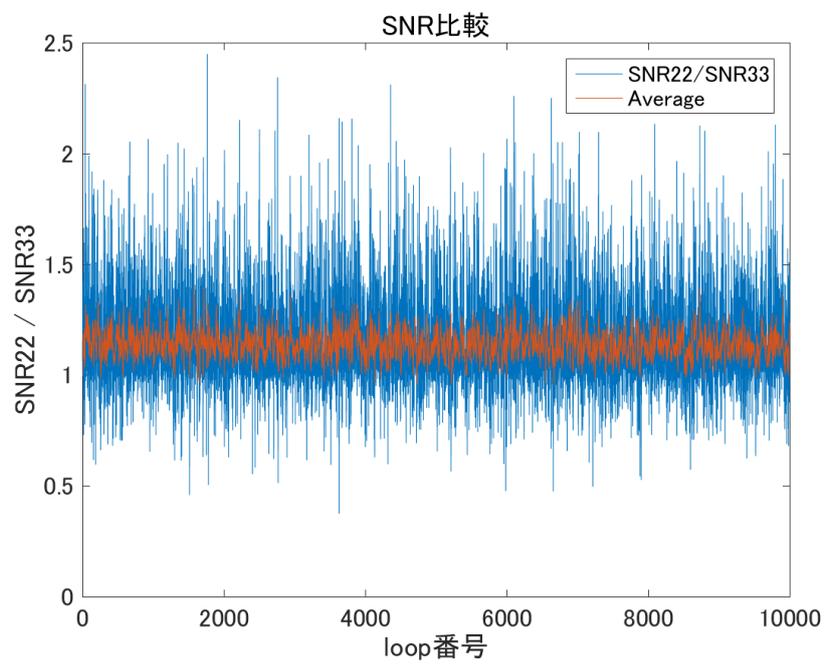


図 5.9: 信号雑音比の比較。(3,3) モードの値を基本モードの値で割ったもの。

5.3 基本モードと高調波を含めた解析

前節では、基本モードよりも高調波のみを用いての解析が劣っていることが分かった。ここでは、基本モードのみの解析と、基本モードに (3,3) の高調波を含めた解析との比較を見ていく。

以下の解析で用いたテンプレートのパラメータ数は次のようになる。

- 合体後のブラックホールの質量：40~80 M_{sun} までの5通り
- 合体後ブラックホールのスピン：0.58~0.98 までの5通り
- 重力波の到達時刻：(実際の到達時刻を0として)-0.02~+0.02 までの5通り
- 連星系の質量比：0~0.5 までの10通り
- 高調波の初期位相：0~ $\frac{5\pi}{3}$ までの6通り

これらすべてで7500通りのテンプレートが出来上がる。

29 M_{sun} と 36 M_{sun} からの重力波

初めに、高調波のみでの解析の際と同様に、GW150914のモデルにおいての検出シミュレーションを行った。詳細なパラメータは5.2節のものと同じである。

ではまずROCカーブを見ていこう。図5.10がこの解析のROCカーブである。

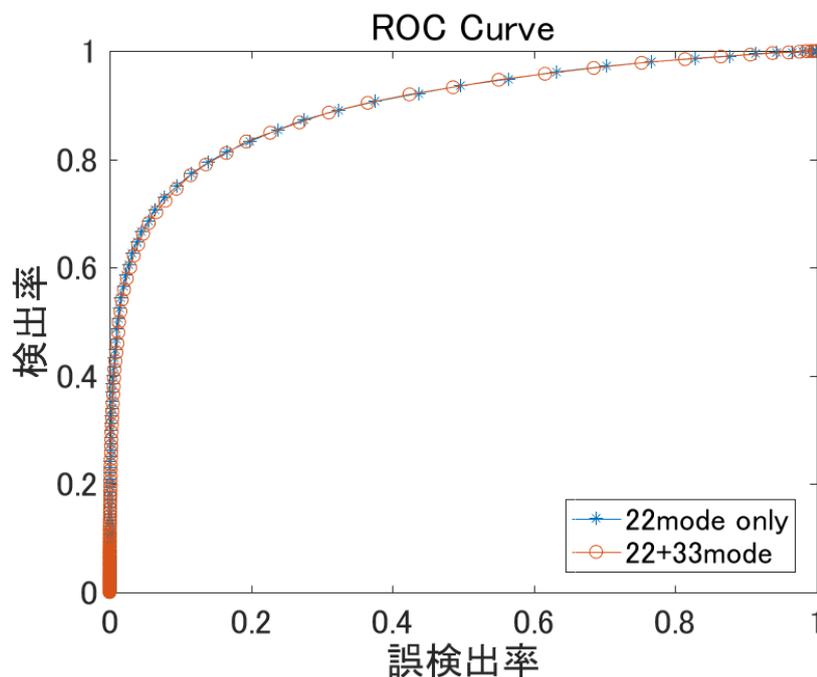


図 5.10: ROC カーブ。青線が基本モード解析、赤線が高調波を含めた解析のデータを示す。

高調波のみでの解析結果の際とは大きく変わり、基本モード解析と高調波込みでの解析において差はほとんど見られなくなった。これは一見、基本モードの寄与が高調波よりも大きいため、高調波の効果がほとんどなくなり、基本モード解析同士での比較とほぼ同じものになったのではないかとと思われるが、次の検出率・誤検出率の結果を見ると、この解釈は正しくないと考えられる。

それでは、検出率と誤検出率の比較についての結果を見ていこう。図 5.11 と 5.12 が、それぞれ二つの解析手法についての検出率と誤検出率を比較したものになっている。この図から、検出率においては、ほぼ同じであるが、高調波を含めた解析の方が少しながら高い値を出しており、基本モード解析よりも少しだけ優れていると言える。一方で、誤検出率においては、こちらも高調波を含めた解析の方が高くなっており、誤検出率においては基本モード解析の方が優れていると言える。従って、高調波を含めた解析方法が、基本モードによる解析によってのみ決定しているわけではないことが分かる。高調波を含めることによって、検出率・誤検出率が共に高くなり、その結果として基本モードのみでの解析とほぼ変わらない ROC カーブとなっていると考えられる。

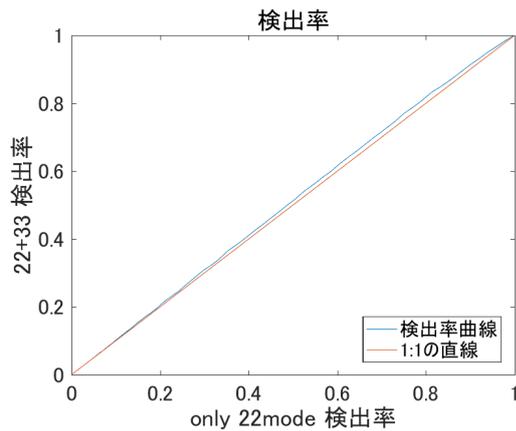


図 5.11: 検出率比較

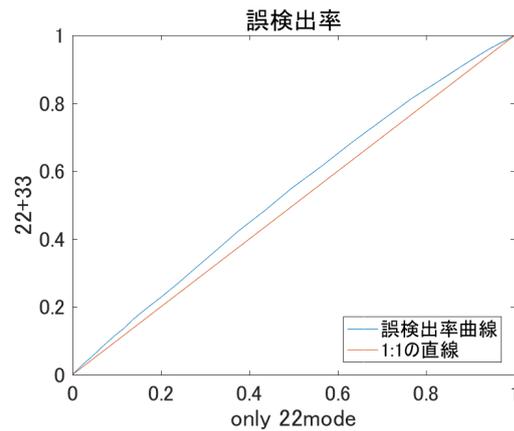


図 5.12: 誤検出率比較

最後に、この解析における信号雑音比を比較したものを図 5.13 に示す。この図は、高調波を含んだ解析の信号雑音比を、基本モードの信号雑音比で割ったものである (前の解析とは割る方が変わっている)。青線が実データを示し、赤線が 10 点での移動平均を取ったものになっている。

図 5.13 を見ると、平均を取った赤線が全体として 1 より大きくなっているように見える。すなわち、高調波を含んだ解析の方が、基本モードのみの解析よりも信号雑音比において数%程度優れているということになる。

以上から、GW150914 のようなパラメータにおいて高調波を含んだ解析を行うと、基本モードのみの解析と比べ、検出率・誤検出率がわずかながら共に上昇し、結果として ROC カーブ上では基本モードとの差はあまり出ず、また信号雑音比が数%ほど向上する、と結論付けられる。検出率の上昇及び、誤検出率の上昇については、信号雑音比が上昇したことによって検出率が向上したとともに、信号のような雑音についても閾値に引っかかるようになってしまい、誤検出率も上昇したものと考えられる。

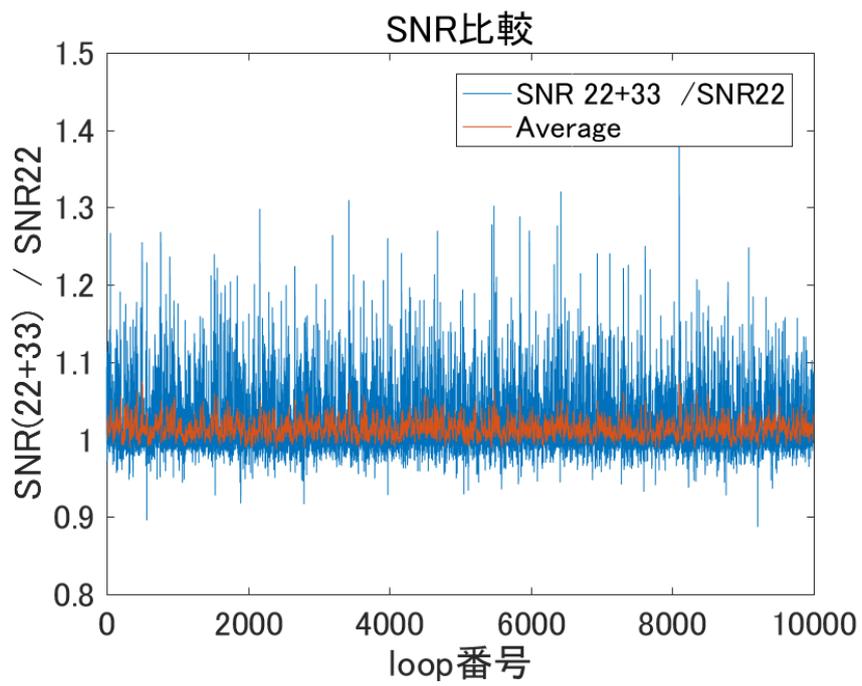


図 5.13: 信号雑音比の比較。高調波込みでの解析結果を基本モードのみでの値で割ったもの。

1.4Msun と 60Msun からの重力波

次に、前節同様に質量比が大きい場合である、 $1.4M_{\text{sun}}$ と $60M_{\text{sun}}$ の連星合体からの重力波について解析を行った。使用した重力波のパラメータは前節と変わらず、合体後質量が $60M_{\text{sun}}$ 、スピンの 0.68 となっている。

ROC カーブを図 5.14 に示す。青線が基本モードのみでの解析で、赤線が基本モードと高調波を合わせた解析での結果を示している。GW150914 のパラメータでの解析よりもさらに基本モードとの差が縮まり、全く同じと言ってよいほどの ROC カーブとなった。これは、質量比を大きくしたことによる効果が見えているのではないかと考えられる。

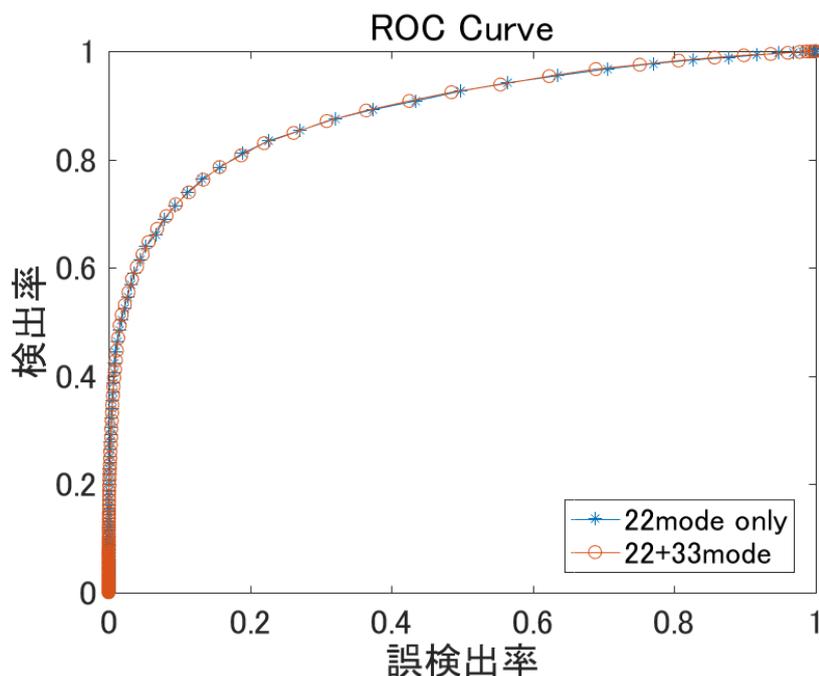


図 5.14: ROC カーブ。青線が基本モード、赤線が高調波を含めた解析のデータを示す。

次に検出率と誤検出率を図 5.15 と図 5.16 に示す。青線がデータを基に描いたグラフで、赤線が 1:1 の直線になっている。検出率・誤検出率ともに、データの傾向は GW150914 のパラメータでの解析を同じであり、検出率において高調波を含んだ解析が上回っており、誤検出率において基本モードのみでの解析が上回っている。しかし、この図からは質量比の増大によって、高調波を含んだ解析が前の解析と比べて有利になっていると言えるほどの改善は見られない。

最後に、二つの解析結果の信号雑音比を比較したものが図 5.17 である。青線が、高調波込みでの解析結果における信号雑音比を、基本モードのみでの解析の信号雑音比で割ったものになっており、赤線が 10 点での移動平均を取ったものになっている。このグラフにおいても前の結果と同様に、高調波を含んだ解析の方が、平均的におよそ 5%ほど信号雑音比が高くなっていることが読み取れる。従って、検出率・誤検出率の傾向についても同様の説明がつくと考えられる。

以上から、質量比を大きくした場合についても、GW150914 のパラメータについて解析した場合とほぼ変わらない結果となり、高調波の振幅が大きくなったことによる恩恵はあまり見られないと思われる。

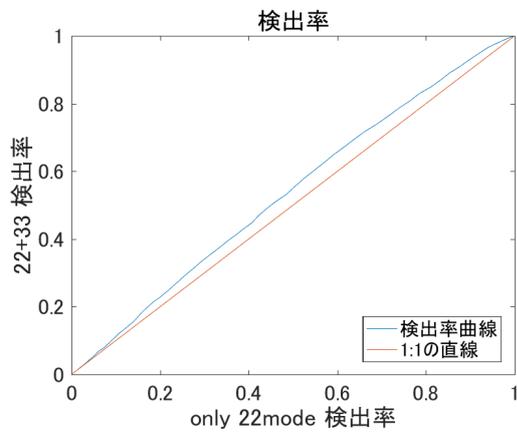


図 5.15: 検出率比較

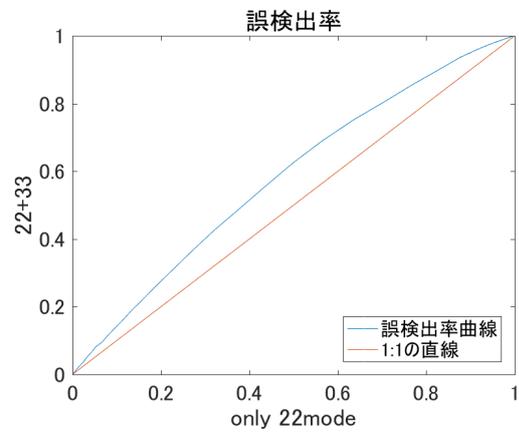


図 5.16: 誤検出率比較

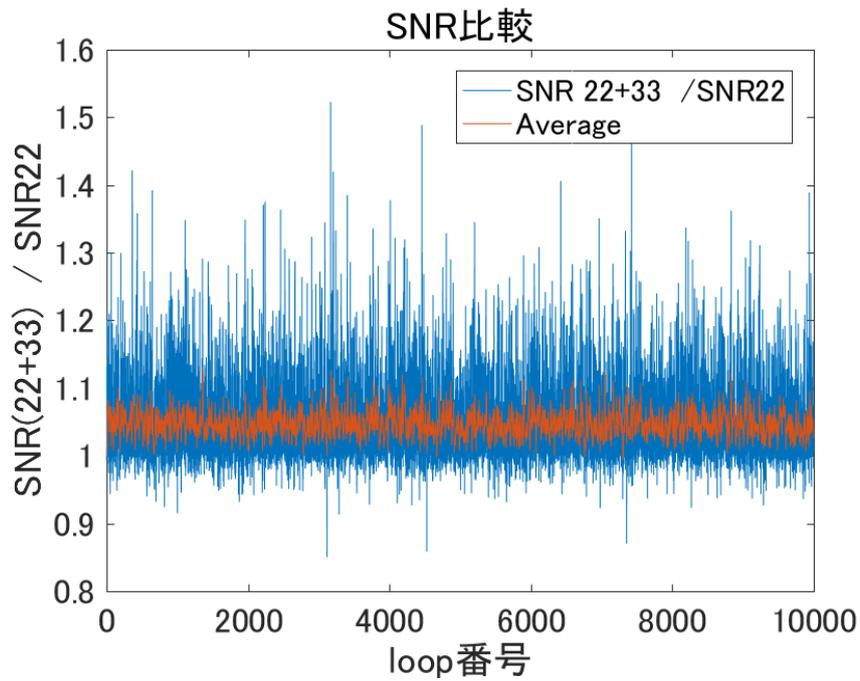


図 5.17: 信号雑音比の比較。高調波込みでの解析結果を基本モードのみでの値で割ったもの。

5.4 結論と考察

以上すべての結果をまとめると、

- (3,3) モードのみでの重力波検出解析は、基本モードのみでの場合よりも、検出率・誤検出率・信号雑音比のどれにおいても劣っている。
- 基本モードと (3,3) モードを合わせた解析方法は、基本モードのみでの解析比べて、誤検出率が増加する代わりに検出率・信号雑音比が向上する。
- (3,3) モードのみでの解析においても、基本モードと (3,3) モードを合わせた解析においても、質量比が増えたことによる効果はあまり見られなかった。

となる。

5.2 節と 5.2 節の結果について、高調波の振幅を増大させたのにもかかわらず、大きな変化が見られなかった点について考える。5.2 節の解析から 5.2 節の解析へ移行すると、高調波の振幅はおよそ 7 倍になることはすでに述べた通りである。しかし、7 倍に増幅したとはいえ、5.2 節の冒頭に記載したとおり、(3,3) モードの振幅は基本モードの振幅と比べると 4 割ほどの大きさしかない。従って、検出解析を行ったときに、基本モードの振幅が大きいため、マッチドフィルタの値が基本モードで計算した値に支配されてしまっている恐れがある。その検証をするために、基本モードのみを入れた解析を、5.2 節と同様の手順で行った。図 5.18 から 5.21 がその結果である。

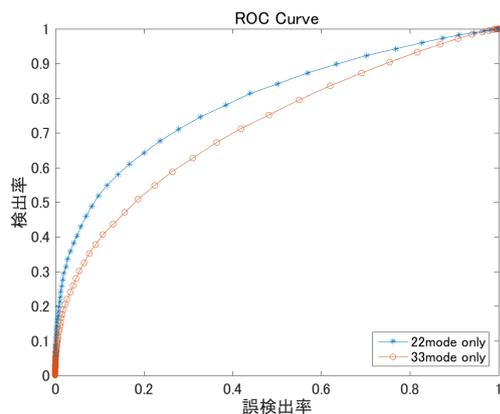


図 5.18: ROC カーブ比較

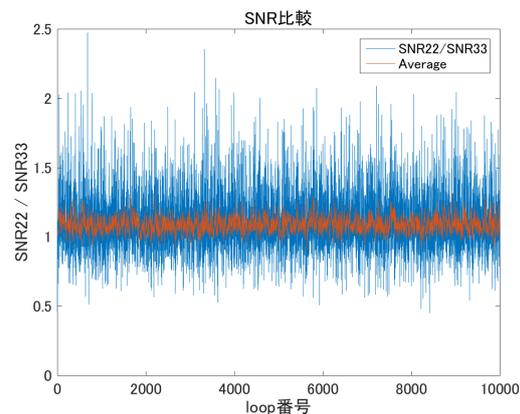


図 5.19: 信号雑音比比較

5.2 節の結果と比較すると分かるように、ほとんど変わらない結果となってしまった。基本モードのみでもほぼ同様の結果を得られるということは、(3,3) モードのみを用いた解析では、少なくとも今回用いたデータでは、基本モードによって支配されてしまっていると考えられる。すなわち、重力波を目的とした検出解析において、(3,3) モードのみを用いる手法は基本モードの影響によって非効率的であると言える。

対して、基本モードに高調波を含めた後半の解析では、高調波を含めた分、信号とテンプレートを掛け合わせた際の値が大きくなりやすくなり、結果として検出率及び信号雑音比の向上に繋がったと考えられる。同時に誤検出率も増加してしまう問題点が生じているが、ROC カーブの図を見る限りでは、このデメリットがメリットを上回るほど足を引っ張る訳ではないと考えられる。

史上初の重力波観測がブラックホール連星合体であったことを鑑みるに、今までは中性子星のインスパイラルを主なターゲットとしていた重力波解析が、ブラックホールにも重きを置いて解析

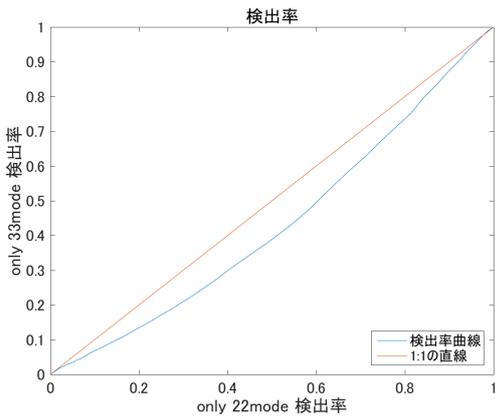


図 5.20: 検出率比較

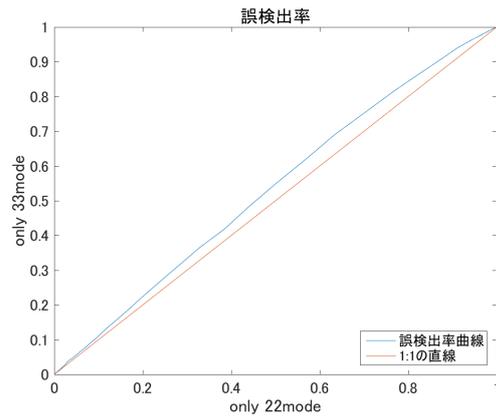


図 5.21: 誤検出率比較

されることが予想される。その中で、リングダウンのマッチドフィルタ解析にも光が当たり、「重力波の検出」が主目的である現在においては、高調波をマッチドフィルタのテンプレートに入れることによる検出率及び信号雑音比の向上は、利点となるのではないかと考えられる。

また、他の高調波をさらに盛り込むことや、他のフェイズから情報を共有することなどによって高調波を含ませることに対するデメリットを抑えることができれば、基本モードの上位互換の解析手法になる可能性もあると考えられる。(例として、連星合体における質量比はインスパイラルフェイズの段階で推定できるため、高調波のテンプレートが本解析のような膨大な数にならずに済むと考えられる。今回の解析では基本モード 125 個、高調波含んだ解析に 7500 個のテンプレートを用いている。)

本論文中の解析では、計算時間や PC 性能などの制限から、サーチ対象とするテンプレートのパラメータ範囲を非常に絞り、また種々の簡略化を行っての計算であったが、それでも新しい解析方法の提案として、一定の成果を見せられたのではないかとと思われる。

5.5 追加解析

前節に記述したとおり、基本モード解析と高調波を含んだ解析の間には膨大なテンプレート数の差が生じていた。また、高調波解析における必要な情報として、連星の質量比が挙げられるが、それはインスパイラルフェイズにおいて推定可能であることが分かっている。そこで、連星の質量比が既知であるという前提のもと、テンプレート数を合わせる場合の解析シミュレーションを試してみよう。基本モード解析よりも、高調波を含んだ解析の方が用いている情報量が単純に増加しているため、これは高調波込みの解析の方が有利ではないかと考えられる。

ここでは、上で行った解析と同じパラメータを用いて、高調波に関するパラメータの選択肢を無くした場合の解析を行った。

29Msun と 36Msun からの重力波

ではまず、GW150914 と同じパラメータの場合の結果から見ていこう。図 5.22 から図 5.25 まだが今回の結果である。プロットの表記方法は前回の解析と同じである。

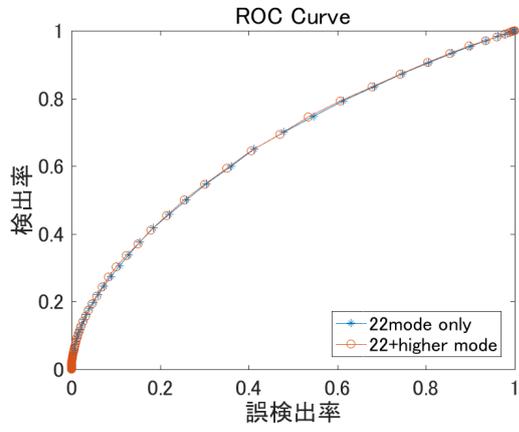


図 5.22: ROC カーブ比較

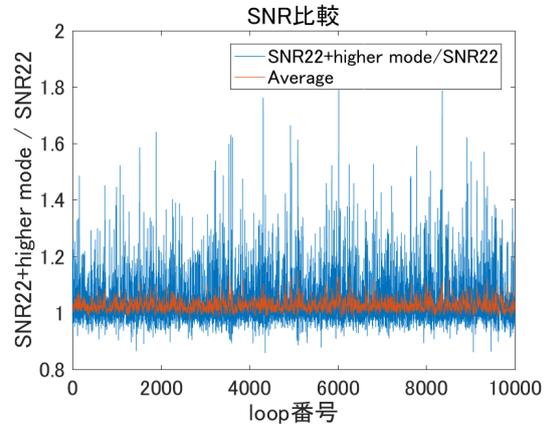


図 5.23: 信号雑音比比較

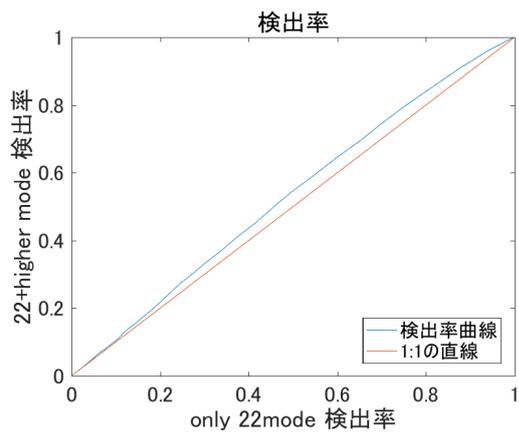


図 5.24: 検出率比較

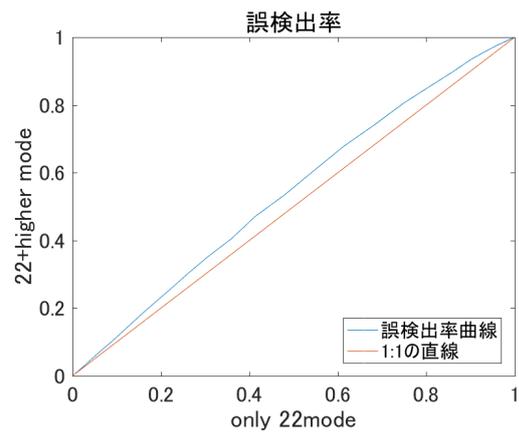


図 5.25: 誤検出率比較

ROCカーブ上で見る限り、二つの解析についてあまり違いは見られない。また、前節の方で行った解析同様、検出率は高調波を含んだ解析が優勢となり、誤検出率では基本モード解析の方が優れているという結果になった。信号雑音比では少し高調波を含んだ解析の方が高くなっている。全体として、前節で行った解析結果と大差ないものと言える。これは、GW150914でのパラメータの場合、前述の通り高調波の振幅が小さくなってしまい、高調波を解析に含んだ効果が十分発揮できていないためであると考えられる。

1.4Msun と 60Msun からの重力波

次に、1.4Msun と 60Msun でのパラメータの場合の結果を見ていこう。図 5.26 から図 5.29 までがその結果である。プロットの表記方法は前回の解析と同じである。

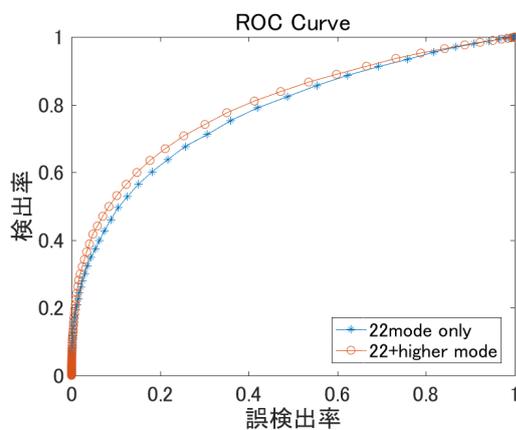


図 5.26: ROC カーブ比較

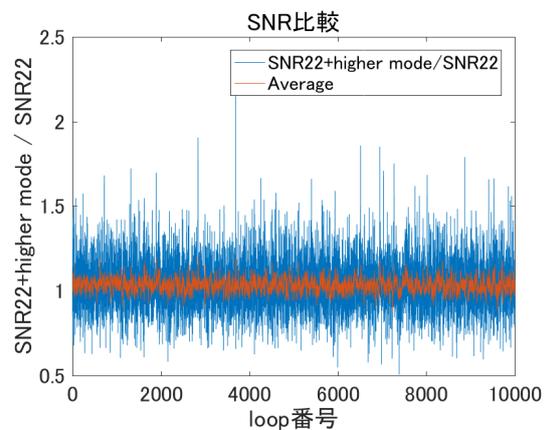


図 5.27: 信号雑音比比較

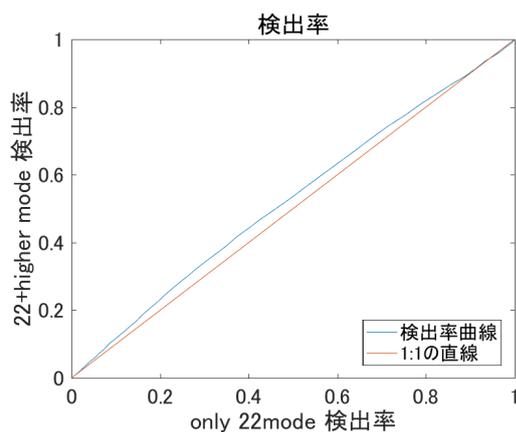


図 5.28: 検出率比較

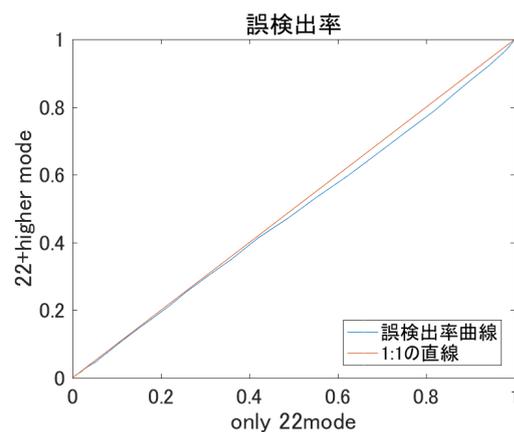


図 5.29: 誤検出率比較

こちらの結果は GW150914 のパラメータでの解析とは変わり、高調波を含んだ解析の方が有利であることが見て取れる。ROCカーブプロットでは、高調波を含んだ解析の方が基本モードのみの解析を上回っていることが分かる。また、検出率では依然として高調波を含んだ解析の方が高くなっており、さらには誤検出率が基本モード解析を下回っている。信号雑音比ではあまり差が

出していないが、少し高調波を含んだ解析の方が大きくなっている。今まで、検出率で優位であり、誤検出率で不利となっていた高調波を含んだ解析であったが、誤検出率が下がり、基本モードのみの解析よりもすべての点で上回る解析となった。

以上の結果を踏まえると、インスパイラルフェイズから連星の質量比等の情報を得ることができれば、基本モードのみで解析を行うよりも、高調波を含めて解析した方が効率が良いという結果となった。現在の解析の一つに、インスパイラルフェイズの重力波について遅延の少ないリアルタイム解析が行われている。インスパイラルフェイズから推定されるパラメータが必要な高調波を含むリングダウン解析をここに盛り込むことは非常に難しいと考えられるが、リアルタイム解析で見つかった重力波と思わしき信号には追解析が行われるはずである。ここが高調波を含めた解析が生きる場面であると思われる。また、GW150914 と GW151226 という二つ連続してブラックホールによる重力波イベントが観測された今、重力波検出器が稼働を開始する前に予想されていたイベントの内、次に観測されるものは中性子星 - ブラックホール連星の合体によるものかもしれない。追加解析で行ったうちの後者のパターンであれば、中性子星 - ブラックホール連星との合体に特化した解析と考えることができ、中性子星の質量が 1.4 太陽質量とほぼ決まっているため、高調波を用いた解析が現状もっとも有効であるといえよう。今後、高調波を含めることによって、リングダウンの解析が改善していくものと予想され、その概観を本論文で示すことができたのではないかと考える。

付録

A : ノイズパワースペクトル密度と自己相関関数

パワースペクトル密度の定義に関して、自己相関関数によって定義した式を紹介した。それが、式 (3.10) である。ここでは、パワースペクトル密度の定義と自己相関関数の定義から、この式が導かれる過程を示す。

静的なランダム事象 $n(t)$ について、パワースペクトル密度の定義は次のようになった。

$$S_n(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} n(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \quad (\text{A.1})$$

これは、自己相関関数

$$R_n(\tau) = \langle n(t)n(t+\tau) \rangle \quad (\text{A.2})$$

においても同様に定義することが可能である。なお、自己相関関数 $R_n(\tau)$ は変数 τ にのみ依存し、時間 t に依存していない。これは現在考えている事象が静的であり、時間によってその性質が変化していないことに基づく。パワースペクトル密度の定義式 (A.1) を次のように書き換えよう。

$$S_n(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) e^{-2\pi i f t} dt \int_{-T/2}^{T/2} n(t') e^{-2\pi i f t'} dt' \quad (\text{A.3})$$

さらに、 $t = t' + \tau$ とすると、

$$S_n(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} d\tau \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t') n(t' + \tau) dt' \right] \quad (\text{A.4})$$

括弧で囲まれた中の式に注目すると、これは自己相関関数 (A.2) の定義において、アンサンブル平均を時間平均で置き換えたものに相当する。今考えているデータについては、時間平均とアンサンブル平均が等価 (エルゴード性) なものであるため、括弧の中の式を自己相関関数で置き換えることが可能である。従って、

$$S_n(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (\text{A.5})$$

となる。

B : Matlabによるパワースペクトル密度の計算

3章や4章では、本解析においてパワースペクトル密度という量の計算が必要であると述べた。ここでは、数式で表されたパワースペクトル密度を Matlab 上のコードで表現するまでを述べる。パワースペクトル密度の定義は式 3.9 にあるとおり、

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \quad (\text{B.1})$$

であった。従って、本来、データ $x(t)$ についてのパワースペクトル密度は、その無限時間の時間平均から求められる量であるため、厳密には現実時間内に求めることが不可能である。そこで、有限時間の積分でパワースペクトル密度を推定することによって、計算に用いる。まずは B.1 式を、 $x(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{x}(f)$ を用いて変形し、有限時間内での表記へ変更すると、

$$S'_x(f) = \frac{2}{T} |\tilde{x}(f)|^2 \quad (\text{B.2})$$

と書くことができる。しかし、ここで問題になるのが、フーリエ変換である。扱うデータ長が有限であるため、フーリエ変換を有限積分で定義することは良いとしても、積分という行為自体が連続的であることが問題となる。実際に取得するデータは、あるサンプリング周波数に従って、離散的にデータを取得しており、そのため離散データに対するフーリエ変換が必要になる。

Matlab を始め、多くの計算言語には、こうした離散データに対するフーリエ変換である、離散フーリエ変換 (DFT) を計算する関数が用意されており、高速フーリエ変換 (FFT) と呼ばれる。測定時間 T 、サンプリング周波数 Δf 、サンプリング周期 Δt のデータ数 N 個のデータに対する離散フーリエ変換とその逆変換の定義は、

$$\tilde{x}(f_k) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) e^{-2\pi i f_k t_j} \quad (\text{B.3})$$

$$x(t_j) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(f_k) e^{2\pi i f_k t_j} \quad (\text{B.4})$$

となる。ここで、 $t_j = j\Delta t$ 、 $f_k = k\Delta f$ 、 $\Delta f = 1/T$ 、 $T = N\Delta t$ である。なお、離散フーリエ変換とその逆変換の係数については慣習的なものであり、係数同士を掛け合わせた際に $1/N$ となればよい。

それでは、離散フーリエ変換をフーリエ変換だと思ってパワースペクトル密度を計算すればよいが、ここで Matlab における FFT コマンドでの離散フーリエ変換の計算式を確認すると、

$$\tilde{x}(f_k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) e^{-2\pi i f_k t_j} \quad (\text{B.5})$$

$$x(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(f_k) e^{2\pi i f_k t_j} \quad (\text{B.6})$$

従って、Matlab コマンド FFT を用いてパワースペクトル密度を求めると、

$$S_x(f) = \frac{2\Delta t}{N} |FFT(x(t))|^2 \quad (\text{B.7})$$

となる。

これで Matlab を用いて計算できるようになったが、このままでパワースペクトル密度を計算すると図 B.1 の赤線のようにになってしまう。これは、データを切り取って扱うことによって生じる問題である。これを防ぐために、窓関数を使って処理をする。

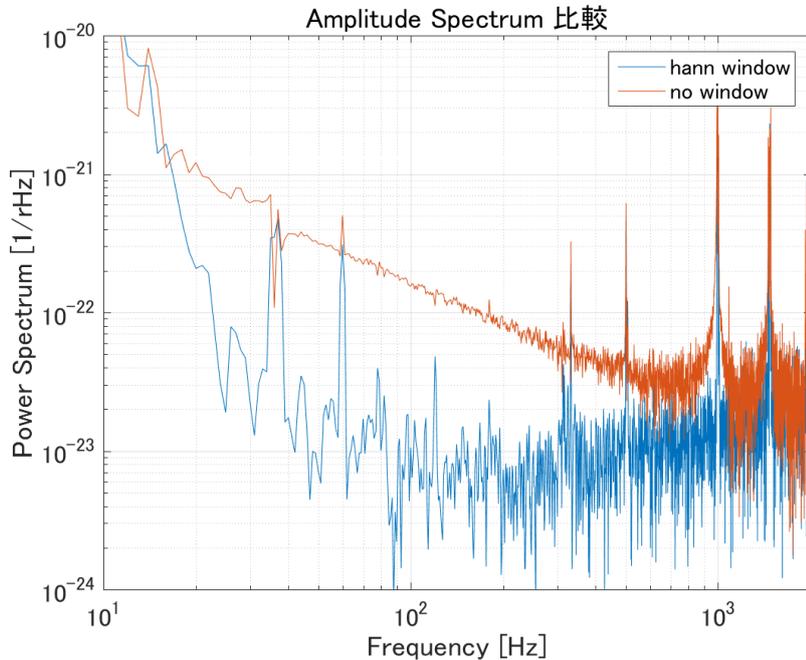


図 B.1: ある 1 秒分の aLIGO データの振幅スペクトル。

ある区間でデータを切り取ると、最初と最後のデータは基本的に 0 ではないため、実際には存在しない波が存在しているように見えてしまう。これによって、誤ったパワースペクトル密度が計算されてしまう。これを防ぐためには、データの最初と最後を 0 に落としてやればよい。そこで考えられたものが、窓関数という、データを切り抜く際の窓を関数によって表現したものである。窓関数には、ハミングウィンドウ、ハンウィンドウ、矩形窓など多くの種類が存在するが、ここではハンウィンドウについて紹介する。ハンウィンドウは次のように定義される。

$$w_{hann}(x) = 0.5(1 - \cos(2\pi x)) \quad (\text{B.8})$$

式から分かるとおり、 x が 0 と 1 の付近で緩やかに値が 0 へ近づき、両端では 0 になるようになっている。これによって、両端が 0 でないことによる問題を回避する。なお、もともと矩形窓で切り取っていたデータを、ハンウィンドウのような窓で切り取ってしまうと、その分全体のパワーが落ちてしまう。そのため、窓の面積で割ることによって補正する必要がある。これらを全て考慮して描いたパワースペクトル密度が図 B.1 の青線である。

ここに私が作成した Matlab コードを記載しておく。

```
function [Sn,f] = ASD(x,Fs,k)

%%を列ベクトルにするx
if(isrow(x)==1)
    x = x.';
    if(iscolumn(x)==0)
        error('x is not vector.')
```

```

    end
else
    if(iscolumn(x)==0)
        error('x is not vector.')
```

```

    end
end

T = 1/Fs;
l = length(x)/k;

segment = zeros(l,k);
psd = zeros(l/2+1,k);
asd = zeros(l/2+1,k);
segment_fft = zeros(l,k);
f = Fs/2 * linspace(0,1,l/2 + 1);

for n=1:k

    segment(:,n) = x(l*(n-1)+1:l*n,1);

    w = hann(l);                                %hann-window
    fun = @(x) (0.5*(1-cos(2*pi*x))).^2;
    S = integral(fun,0,1);

    segment(:,n) = segment(:,n).*w;
    segment_fft(:,n) = fft(segment(:,n)) ;
    psd(:,n) = segment_fft(1:l/2+1,n);
    psd(:,n) = T*psd(:,n).*conj(psd(:,n)) / l /S;    %power spectrum[V^2/Hz]
    psd(2:end-1,n) = 2*psd(2:end-1,n);
    psd(:,n) = abs(psd(:,n));    %Amplitude spectrum[strain/rtHz]
    asd(:,n) = sqrt(psd(:,n));

end

Sn = mean(asd,2);

```

なお、本コードは関数形式で、パワースペクトル密度の平方根を取った振幅スペクトルを記述するものである。計算したいデータと、そのデータのサンプリング周波数、振幅スペクトルを導くのに平均化したい回数を入力情報として、平均した振幅スペクトルを求める。コード内でハンウィンドウの定義及び面積を計算し、その面積で割り算を行っている。

Matlab 内の関数にも、窓関数を指定してパワースペクトル密度を推定する関数というものはいくつか存在しており、平均化や細部の計算方法が異なっているが、pwelch コマンドや periodogram コマンドがそれに該当する。詳細は、MathWorks の解説ページを参考。

C : スピンウェイト-2の球面調和関数

今回の私の解析においては、簡単のため基本モードと(3,3)モードの解析において、ブラックホールのスピン軸角度の影響を無視した。これは、暗にブラックホールが観測者に対して、基本モードと(3,3)モードの振幅が同程度になるような角度に傾いていることを示している。ここでは、実際にそのような角度が存在しているのかを、スピンウェイト-2の球面調和関数を用いて実際に見ていこう。

スピンウェイト球面調和関数 ${}_s Y_{lm}(\theta, \phi)$ は、球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ を用いて定義されるが、定義に用いる演算子を先に定義しておこう。スピンウェイト s の関数 $\eta(\theta, \phi)$ に対する、演算子 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の応答を以下で定義する。

$$\hat{\alpha}\eta = -(\sin\theta)^s \left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i \csc\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right] (\sin\theta)^{-s}\eta \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{\beta}\eta = -(\sin\theta)^{-s} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} - i \csc\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right] (\sin\theta)^s\eta \quad (\text{C.2})$$

実はこの二つの演算子は、スピンに対する昇降演算子のような役目を果たしている。演算子 $\hat{\alpha}$ は、作用させた関数のスピンウェイトを1上昇させ、演算子 $\hat{\beta}$ はスピンウェイトを1下降させる働きがある。

Goldberg et al. [10] によれば、この演算子を用いて、スピンウェイト s の球面調和関数は次のように定義される。

$${}_s Y_{lm} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(l-s)!}{(l+s)!}} \hat{\alpha}^s Y_{lm}(\theta, \phi) & (0 \leq s \leq l) \\ \sqrt{\frac{(l+s)!}{(l-s)!}} (-1)^s \hat{\beta}^s Y_{lm}(\theta, \phi) & (-l \leq s \leq 0) \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

なお、 $|s| > l$ のものには定義されていない。

ここからは実際に計算をしていこう。しかし、この定義のままでは非常に扱いにくいので、次のような形で表現されたものを計算に用いる。

$${}_s Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^s \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} d_{m(-s)}^l(\theta) \exp(im\phi) \quad (\text{C.4})$$

ここで、 d_{mn}^l はウィグナーのD行列 (Wigner D-matrix) と呼ばれるものの定義に使用される関数であり、Wigner's (small)d-matrix と呼ばれる。 d_{mn}^l の定義は次のようになる。

$$d_{mn}^l(\theta) = (-1)^{l-n} \sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+n)!(l-n)!} \\ \times \sum_k \frac{(-1)^k (\sin(\theta/2))^{2l-m-n-2k} (\cos(\theta/2))^{m+n+2k}}{k!(l-m-k)!(l-n-k)!(m+n+k)!} \quad (\text{C.5})$$

また、次の性質が役に立つ。

$$(-1)^{n+m} {}_n Y_{lm}^*(\theta, \phi) = -{}_n Y_{l-m}(\theta, \phi) \quad (\text{C.6})$$

これらを用いて、式(2.25)によって定義される角度の寄与を計算する。

Matlabを用いて、実際に基本モードと(3,3)モードについて、角度を関数として計算したものが図C.1である。なお、ここでは重力波のプラスモードのみを考えて計算した。図から分かる通

り、基本モードと (3,3) モードとの交点が存在し、ブラックホールと観測者の角度関係によっては、角度の振幅に対する寄与が同じ程度になる点が存在している。

本解析では、このような振幅への寄与が同程度である軸を想定した解析と考えることができるが、しかし、高調波を解析パラメータとして加えるにあたって、必要なパラメータであり、今後の改善点として解析に加える必要がある。

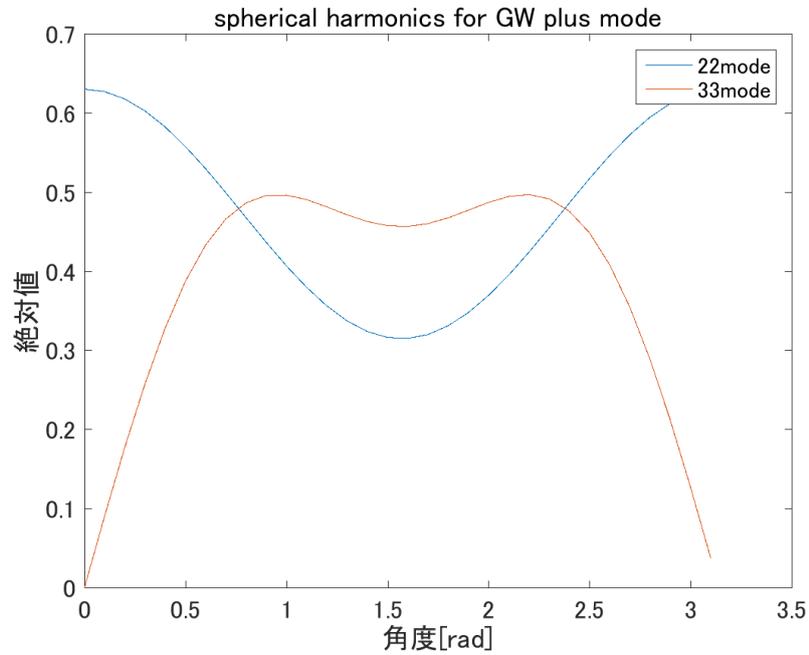


図 C.1: 振幅における球面調和関数部分の寄与。青線が基本モードで赤線が (3,3) モードを示す。

なお、ブラックホールの角度はもう一成分存在し、方位角と呼ばれる成分が残っているが、これに関する寄与は式 (2.24) の通り、重力波の初期位相にしか関わってこないため、初期位相のパラメータとしてサーチ対象に含まれている。

D : GW150914 イベントのリングダウンによる解析

1.4 節でも紹介した、史上初の重力波イベントについて、アメリカの研究機関 LIGO は、そのデータを一般に公開している。そこで、本節では、実際に取得された重力波イベントに対してリングダウンのみでの解析を行おう。用いるデータは LIGO Open Science Center で公開されている、重力波イベント付近 32 秒分のものを用いて行う。データは hdf5 形式と、見慣れない形式であるが、Matlab や Python 等の計算言語では容易に扱うことが可能である。

ここでは、解析の章と同様に、基本モードである (2,2) モードのみでの解析と、基本モードに高調波 (3,3) モードを加えた解析とでイベント付近をサーチする。なお、簡単のため、サーチに用いるテンプレートはパラメータ推定された GW150914 の値付近のみを用いて行うことにする。以下に使用したコードを示す。

```
filename = 'H-H1_LOSC_4_V1-1126259446-32.hdf5';
data = h5read(filename, '/strain/Strain');

Fs = 4096;
T = 1/Fs;

GPStime = linspace(1126259446.0, 1126259478.0, 131072);

snr22 = zeros(31, 1);
snrhh = zeros(31, 1);

for i = 1:31

    tevent = 1126259446.422 + i;    %GWevent = 1126259462.422
    deltata = 0.5;

    I = find(GPStime >= tevent - deltata & GPStime <= tevent+deltata);

    if length(I) == 4095
        I = horzcat(min(I)-1, I);
    end

    event_data = data(I);

    Sn_data = data(1:10*Fs);

%%----- Matched filtering -----%%

[SNR_22, kerr22, mass22, time22, Amp22]
=SNR22_GW150914(0.58, 0.98, 40, 100, 0.3, 0.7, event_data, Fs, Sn_data);

m1 = 29;
m2 = 36;
[SNRwithangle, kerrhh, masshh, nuhh, timehh, Amphh]
=SNR_with_angle_GW150914(0.58, 0.98, 40, 100, 0.3, 0.7, event_data, Fs, Sn_data, m1, m2);

[max22, I22] = max(SNR_22(:));
[imass22, ikerr22, itime22] = ind2sub(size(SNR_22), I22);
```

```

snr22(i) = max22;

[maxhh, Ihh] = max(SNRwithangle(:));
[imasshh, ikerrhh, inuhh, itimehh, ianglehh] = ind2sub(size(SNRwithangle), Ihh);

snrhh(i) = maxhh;

disp(i)
end

x = 1:1:31;
x = x-16;

figure(1)
plot(x, snr22, 'b-o')
hold on
plot(x, snrhh, 'r-*')
grid on
xlabel('time from event[s]')
ylabel('SNR')
title('SNR GW150914')
legend('22mode', '22+33mode')
set(gca, 'FontSize', 16)

```

32秒分のデータについて、1秒毎にデータを区切り、全31個のデータセグメントについてそれぞれマッチドフィルタによる解析を行った。32秒データに対して、1秒毎のデータが31個しかないのは、GW150914での連星合体が発生した時刻が、GPS時間で1126259462.422であるので、その前後0.5秒を含めたデータを1セグメントとして作ったためである。このデータを基準に、そこから1秒ずつデータセットを作っていた。

サーチした範囲は、

- 合体後質量：40 100Msun の合計7個
- 合体後BHのスピン：0.58 0.98 の5個
- 到達時刻：各データについての初めから0.3 0.7秒の5個
- 連星の質量比：0 0.2471 までの計10個
- 高調波の初期位相： $0 \sim 5\pi/3$ までの6個

となり、基本モードのみの解析ではテンプレート総数175個、高調波込みでの解析は10500個となった。

本解析の結果を次に示そう。このサーチについて、それぞれの1秒データにおける最大の信号雑音比をプロットしたものが図D.1となる。青線で示しているものが基本モードのみでの解析結果、赤線が高調波も含めた解析結果になっている。縦軸が解析で得られた最大の信号雑音比、横軸がGW150914イベントからの時間を秒で表したものになっている。

この図を見ると、基本モード解析および高調波込みの解析のどちらも、GW150914イベントの時刻において高い信号雑音比を示していることが分かる。他の部分については、およそ信号雑音比5程度で推移しているのに対し、イベントの時刻では信号雑音比はおよそ18程度にもなっており、その差は明らかである。二つの解析方法の差について考えたいが、その差はあまり見られない。平均的に少しだけ高調波を含めた解析の方が高い信号雑音比を出しているようにも見えるが、顕著に高いわけではないという結果となった。GW150914における信号雑音比についても、二つ

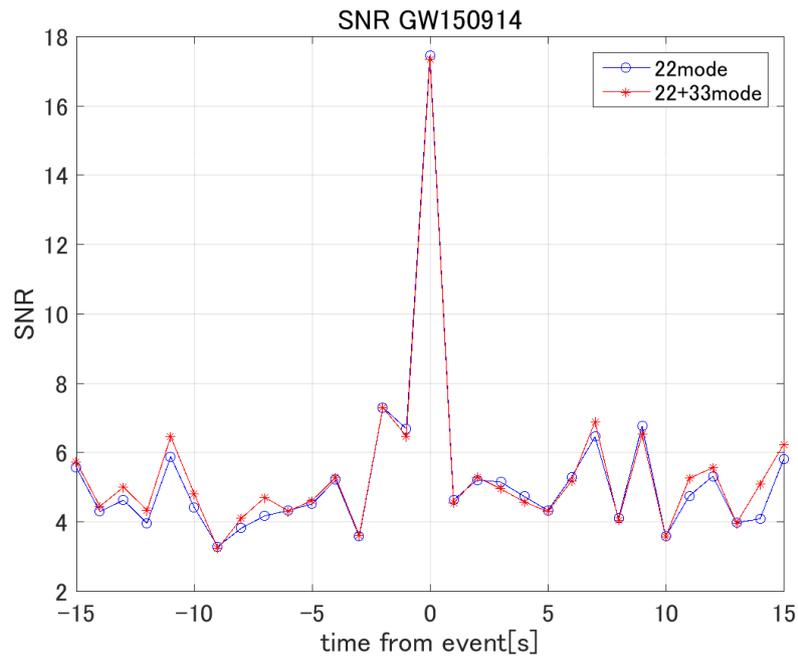


図 D.1: GW150914 付近 32 秒分のデータの信号雑音比。

の結果に大きな違いは見受けられない。これは、そもそも GW150914 の信号に高調波がはっきりと含まれているわけではないからではないかと考えられる。従って、基本モード解析との差異はあまり生じない結果となった。全体を通して、重力波信号が入っていないにもかかわらず、5以上の信号雑音比が生じてしまっているが、これは検出器からの雑音にリングダウンに近い雑音が含まれているためであり、これこそがリングダウン解析の弱い部分であると考えられる。

参考文献

- [1] LIGO Scientific Collaboration, "LIGO Open Science Center release of GW150914", 2016, DOI 10.7935/K5MW2F23
- [2] B. P. Abbott et al. 「Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger」 Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)
- [3] B. P. Abbott et al. 「GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence」 Phys. Rev. Lett. 116, 241103 (2016)
- [4] Fernando Echeverria 「Gravitational-wave measurements of the mass and angular momentum of a black hole」 Phys.Rev.D 40 10 (1989)
- [5] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Clifford M. Will 「On gravitational wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA」 Phys.Rev.D73 064030 (2006)
- [6] S. Gossan, J. Veitch, and B. S. Sathyaprakash 「Bayesian model selection for testing the no-hair theorem with black hole ringdowns」 Phys. Rev. D 85, 124056 (2012)
- [7] Ioannis Kamaretsos, Mark Hannam, and B. S. Sathyaprakash 「Is Black-Hole Ringdown a Memory of Its Progenitor?」 Phys. Rev. Lett. 109, 141102 (2012)
- [8] Saul A. Teukolsky 「Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbations」 Phys. Rev. Lett. 29, 1114 (1972)
- [9] Micheal P. Ryan, Jr 「Teukolsky equation and Penrose wave equation」 Phys. Rev. D 10, 1736 (1974)
- [10] J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich and E. C. G. Sudarshan 「Spin-s Spherical Harmonics and 5」 J. Math. Phys. 7, 11 (1967)
- [11] Y. Wiaux, L. Jacques, P. Vandergheynst 「Fast spin ± 2 spherical harmonics transforms and application in cosmology」
- [12] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正建 「重力波をとらえる-存在の証明から検出へ」 京都大学学術出版社 (1998)
- [13] 崎浜幸秀 「連星系およびブラックホールの準固有振動からの重力波の研究」 東京工業大学 学士論文 (2015)

謝辞

私が宗宮研に所属してから、この論文を書くまで、本当に多くの方からご支援を頂きました。私一人の力では、到底本論文を書くことはできませんでした。

指導教官である宗宮先生には、ゼミやコロキウムなどの学問における指導だけでなく、生活上での立ち振る舞いなど、本当にいろいろなことについてご指導いただきました。特に、物事への多角的な見方や、考え方はとても勉強になりました。そもそも、光学実験がメインである研究室において、データ解析というテーマを承諾して頂き、ありがとうございました。また、海外の学会に参加させて頂いたり、私の研究テーマに関する学会に連れて行っていただいたりと、面白い研究に触れられる多くの機会を頂きました。ありがとうございました。

東大の端山先生には、データ解析の基礎の基礎からご指導いただきました。光学実験などを主に行っている宗宮研でデータ解析の研究をすることができたのは、端山さんのおかげです。データ解析だけでなく、釣りに連れて行ってくれたりと、遊びにも本気で付き合っていたいただいたことは、とても良い思い出です。

天文台の藤本先生には、理論的な観点からアドバイスを頂きました。定例ゼミやコロキウム練習などにもお越しいただき、宗宮研が誰も分からないことに直面した際には、分かり易くご指導いただきました。

宗宮研の皆にも大変お世話になりました。同期の片岡くんには、何かあるたびに相談にのってもらいました。長期出張などにも一緒に行きましたが、そのたびにお世話になりっぱなしでした。本当に感謝しています。M1の粕谷さんと柳沼くんには、物事に対する積極的な姿勢で研究室を明るくしてもらいました。粕谷さんの創作品には驚かされるばかりでしたし、柳沼くんの突発的な言動には笑いをこらえられませんでした。B4の下井くんと久富くんは研究室に新鮮な雰囲気を与えてくれました。下井くんは不思議な雰囲気を出しながらも、その言動に癒されました。柳沼くんとは違った芸能面の可能性を秘めていると思います。久富くんは誰にでもフランクに接してくれて、研究室が一層明るくなったと思います。無茶ぶりにも応えてくれそうな安心感がありました。留学生のJanくんには、まず英会話の勉強をさせてもらいました。また、僕の就職する業界に似た場での業務経験もあり、色々なことを教えてもらいました。

他にも、宗宮研を卒業した先輩方、KAGRAに関わる多くの先生方や学生、学会で出会った海外の研究者の方々など、感謝を述べたい人を挙げればキリがありません。それと同時に、自分が非常に恵まれた環境で研究を行えたということを再確認できました。皆様、本当にお世話になりました。ありがとうございました。

最後に、大学院へ進学することへの理解を示してくれ、生まれてから今まで支えてくれた家族に感謝します。