

連星系およびブラックホールの準固有振動からの  
重力波の研究

東京工業大学 理学部物理学科 宗宮研究室  
崎浜 幸秀 (09B10251)

2015年2月16日

# 概要

重力波は大質量の変動を伴った天体現象によって生じる。重力波を生む源として中性子星やブラックホールの連星系、またブラックホールの準固有振動が期待されている。本論文では導入として真空の線形近似による重力波を導出する。この重力波の性質をみることで、重力波の特徴的な振る舞いを知ることができる。次に天体の線形近似による重力波について説明し、四重極子の変化が重力波を生む様子を見る。

重力波の基本的な振る舞いは線形近似で説明できるが、観測に用いるには精度が不十分である。そこで現在観測に用いられている、ポストニュートン近似という近似について説明する。高次のポストニュートン近似は連星系が連星をなして衝突する前までの様子を、良い精度で記述する。次にブラックホール準固有振動から生じる重力波について説明する。ブラックホールの準固有振動はブラックホール時空の摂動により導出される。この重力波はブラックホールの質量、角運動量のみ依存しており、初期条件を与えることで求めることができる。準固有振動からの重力波を観測することで、質量と角運動量を測定でき、ブラックホールの物理についての進展が期待される。本研究では、準固有振動の重力波を検出器 KAGRA で検出するというシミュレーションを行った。はじめに重力波検出器について説明した。検出器の重力波に対する振る舞いをみた後で、データ解析について説明を行った。本シミュレーションでは擬似データでマッチドフィルター法を用いた解析を行った。この結果から、KAGRA での観測可能性について述べた。

## 本論文で用いたノテーション

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (1)$$

$$index \text{ ギリシヤ文字} = 0, 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$index \text{ 英字} = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n A^{abk}_{cde} B_{kef}^{ghi} = A^{abk}_{cde} B_{kef}^{ghi} \quad (4)$$

$$\partial_\mu A = A_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (5)$$

$$\partial^\mu A = A^{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (6)$$

$$\partial_t A(t) = \dot{A} \quad (7)$$

$$A^\mu_\nu = g^{\mu\sigma} A_{\sigma\nu} \quad (8)$$

$$\partial^\lambda A_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} \partial_\sigma A_{\mu\nu} \quad (9)$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma} \quad (10)$$

$$A = g^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \quad (11)$$

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha \quad (12)$$

# 目次

概要	i
<b>第 1 章 線形重力波</b>	<b>1</b>
1.1 真空重力波解 . . . . .	1
1.1.1 Einstein 方程式 . . . . .	1
1.1.2 計量の線形近似 . . . . .	2
1.1.3 線形近似下でのゲージ変換 . . . . .	4
1.1.4 真空における重力波解 . . . . .	5
1.1.5 重力波が質点に与える影響 . . . . .	7
1.2 重力波の放射 . . . . .	8
1.2.1 弱い重力場からの重力波 . . . . .	8
1.2.2 質量四重極放射 . . . . .	12
1.2.3 四重極放射によるエネルギーの放出 . . . . .	13
1.2.4 Radiation Reaction . . . . .	14
<b>第 2 章 連星系からの重力波</b>	<b>16</b>
2.1 チャープ (連星) フェイズ . . . . .	16
2.1.1 ニュートン極限とポストニュートン展開 . . . . .	17
2.1.2 1PN 近似 . . . . .	18
2.1.3 質点系における重力波 . . . . .	21
2.1.4 運動方程式 . . . . .	23
2.1.5 二体系におけるポストニュートン運動 . . . . .	24
2.1.6 二体系におけるポストニュートン近似下での重力波 . . . . .	25
2.2 リングダウンフェイズ . . . . .	25
2.2.1 シュバルツシルトブラックホールからの重力波 . . . . .	26
2.2.2 カーブラックホールからの重力波 . . . . .	27
<b>第 3 章 重力波のデータ解析</b>	<b>30</b>
3.1 レーザー型干渉計 . . . . .	30
3.1.1 マイケルソン型干渉計 . . . . .	30
3.1.2 TT ゲージ重力波と干渉計の相互作用 . . . . .	31
3.2 マッチドフィルター法を用いたデータ解析 . . . . .	34
3.2.1 検出データ . . . . .	34

---

3.2.2	自己相関関数と noise spectral density . . . . .	35
3.2.3	マッチドフィルター . . . . .	35
<b>第 4 章</b>	<b>ブラックホールリングダウンのデータ解析</b>	<b>39</b>
4.1	ブラックホールリングダウンのテンプレート . . . . .	39
4.1.1	擬似インプット重力波 . . . . .	39
4.2	コード . . . . .	40
4.2.1	1. 干渉計のコード . . . . .	41
4.2.2	2. テンプレートのコード . . . . .	43
<b>第 5 章</b>	<b>結果と考察</b>	<b>47</b>
5.1	結果 . . . . .	47
5.2	考察 . . . . .	47
付録 A	Appendix A - シュバルツシルトブラックホール解の導出	49
付録 B	Appendix B - カー・ブラックホール解の導出	51
付録 C	Appendix C - Winer-Khintchine の定理	56
付録 D	Appendix D - 使用したコード	57
D.1	干渉計のコード . . . . .	57
D.2	テンプレートのコード . . . . .	59
参考文献		62
謝辞		63

# 第 1 章

## 線形重力波

重力波は真空を光速で伝搬する、時空のさざなみと呼ばれる現象である。この波は時空を歪め、質点間の距離を変化させる性質を持つ。しかし重力波がもたらす変化は非常に小さい。そのため重力波が予言されて 100 年を経てもなお、いまだ直接的な検出はなされていない。直接検出には検出器の改良、解析精度の向上が欠かせない。特に解析精度を上げるという目的において、重力波のより良い近似解の研究は、重要な役割を担っている。

1.1 章では最も単純な近似である線形近似による真空重力波解について説明する。この解は真空における Einstein 方程式を線形近似することで求められ、重力波を生む波源から十分遠方 (far zone 又は wave zone) での重力波に対応する。真空重力波解は重力波の特徴的な性質を知る上で有用な解である。この解は重力波が平面波であり、光速で伝搬する横波で、二つのモードを持つ、といった情報をもたらす。

1.2 章では波源付近 (near zone 又は matter zone) での線形重力波について説明する。この領域の重力波の性質は、物質の運動と密接な関係を持っている。特に興味深い性質は、重力波は質量の四重極子の変化によって生じるという性質だろう。

そういった興味深い性質を計算と共に見ていこう。

### 1.1 真空重力波解

1.1 章では真空における重力波を導出する。はじめに Einstein 方程式が計量の二階微分方程式であることを確認する。線形近似における重力波は、ミンコフスキー計量に摂動項を加えて Einstein 方程式を近似し、波動方程式に書き換えることで導出される。しかし波動方程式を得るにローレンツゲージ条件が必要となるので、その説明をする。こうして波動方程式が得られ、真空重力波解が得られる。この解にトランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ) 条件を課すことで、重力波の持つ性質が一層明確になる。なお 1.1 章の計算は [4] 内山龍雄「一般相対性理論」と、[2] Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson 「Gravitational-Wave Physics and Astronomy」を参照した。

#### 1.1.1 Einstein 方程式

一般相対性理論において時空を記述する際、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) は重要な役割を果たす。4 次元時空における線素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

で表される。

計量テンソルは  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  を満たし、一般に 10 個の変数を持つテンソルである。また次のように  $4 \times 4$  の行列で表すこともできる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

特に時空が平坦な場合には、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  はミンコフスキー計量  $\eta_{\mu\nu}$  に一致し、線素は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

$$= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (1.3)$$

という形を取る。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einstein 方程式は計量の二階微分の形で記述され、時空と物質との関係を与える。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

この方程式は左辺は、クリストッフエル記号

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \quad (1.5)$$

リーマンテンソル

$$R_{\rho\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\lambda + \Gamma_{\tau\mu}^\lambda \Gamma_{\rho\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\mu}^\tau \quad (1.6)$$

リッチテンソル

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\tau\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\tau \quad (1.7)$$

スカラー曲率

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

によって記述されている。右辺のエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は物質やエネルギーを表現する項である。このことから Einstein 方程式は物質やエネルギーの分布と、時空の幾何学との関係を定める方程式だと言える。またこの方程式がリッチテンソルとスカラー曲率で構成されていることから、計量  $g_{\mu\nu}$  の二階微分方程式だということが分かる。すなわち Einstein 方程式は 10 本の計量に対する二階微分方程式であり、方程式を解くことで計量の 10 成分が決定する。

### 1.1.2 計量の線形近似

この章では計量  $g_{\mu\nu}$  を線形近似して Einstein 方程式を計算し、波動方程式を導出する。計量の近似は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.9)$$

という形で行う。 $h_{\mu\nu}$  は平坦な時空の計量であるミンコフスキー計量  $\eta_{\mu\nu}$  からのズレを表している。

計算にあたって、この節では添字の上げ下げなどの幾つかの計算を次のように定義する。

$$A_\nu^\mu \equiv \eta^{\mu\sigma} A_{\sigma\nu} \quad (1.10)$$

$$\partial^\lambda A_{\mu\nu} \equiv \eta^{\lambda\sigma} \partial_\sigma A_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

$$A_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma} \quad (1.12)$$

$$A \equiv \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha \quad (1.14)$$

なお  $h_{\mu\nu}$  が十分に小さいので、 $\eta_{\mu\nu}$  によって添字の上げ下げを行ってよい。

まずはじめに近似 (1.9) を用いてクリストッフェル記号、リーマンテンソル、リッチテンソル、スカラー曲率を、 $h$  の一次までで書き換えよう。

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} (\partial_\alpha h_\beta^\lambda + \partial_\beta h_\alpha^\lambda - \partial^\lambda h_{\alpha\beta}) \quad (1.15)$$

$$R_{\rho\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\rho h_\nu^\lambda - \partial_\mu \partial^\lambda h_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial_\rho h_\mu^\lambda + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\rho\mu}) \quad (1.16)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\mu\lambda}) \quad (1.17)$$

$$R = (-\square h + \partial_\lambda \partial^\alpha h_\alpha^\lambda) \quad (1.18)$$

導出した式 (1.15)、(1.18) を Einstein 方程式 (1.4) に代入しただけでは余計な項が残ってしまい、波動方程式は得られない。そこで計量に幾つかの条件を課し、式の見通しをよくしていく。はじめに (1.17) を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \partial_\lambda \left( h_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \eta_\mu^\lambda h \right) + \partial_\mu \partial_\lambda \left( h_\nu^\lambda - \frac{1}{2} \eta_\nu^\lambda h \right) - \square h_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

この式のはじめの二項に着目して

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.20)$$

と置くと

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \partial_\lambda \bar{h}_\mu^\lambda + \partial_\mu \partial_\lambda \bar{h}_\nu^\lambda - \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square \bar{h} \right) \quad (1.21)$$

$$R = \frac{1}{2} \square \bar{h} + \partial_\lambda \partial^\alpha \bar{h}_\alpha^\lambda \quad (1.22)$$

と変形できる。ただし  $\bar{h} = -h$  より

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \quad (1.23)$$

であることを用いた。式 (1.21)、(1.22) を Einstein 方程式に代入して、

$$\frac{1}{2} \left( -\square \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_{\nu\lambda} \bar{h}_\mu^\lambda + \partial_{\mu\lambda} \bar{h}_\nu^\lambda - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \bar{h}_\alpha^\lambda \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

を得る。この式を眺めると  $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$  となると式が簡単になることが見て取れる。次の章ではローレンツゲージ条件  $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$  の導入と、導入の妥当性についての説明を行う。

### 1.1.3 線形近似下でのゲージ変換

式 (1.24) を更に簡潔に表すために、条件としてローレンツゲージ  $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$  を課したい。この条件は Einstein 方程式の持つ 10 個の自由度のうち、4 つの座標に対する任意関数の自由度を定めることに対応する。

はじめにローレンツゲージ条件を課す妥当性について見ていこう。まずは座標変換

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta) \quad (1.25)$$

からスタートする。 $x'$  は  $x$  と異なる座標系を表し、 $\xi^\alpha$  は  $|\partial_\beta \xi^\alpha| \ll 1$  を満たすとする。この変換により  $g_{\alpha\beta}$  は

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\beta} g_{\alpha\beta} \quad (1.26)$$

と変換される。ここに (1.25) を代入し、 $|\partial_\beta \xi^\alpha|^2$  以上のオーダーを無視して計算すれば

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \partial_\beta \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\beta \quad (1.27)$$

と変形でき、座標変換による計量の変化は

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\beta \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\beta \quad (1.28)$$

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\beta + \eta_{\alpha\beta} \partial_\lambda \xi^\lambda \quad (1.29)$$

であることが分かる。 $|\partial_\beta \xi^\alpha|$  が全て小さければ変換後の  $h'_{\alpha\beta}$  も小さく、適切な座標系にとどまるので問題無い。この変換の妥当性は Einstein 方程式が座標系に制限をつけないことに由来しており、電磁気学に習ってゲージ変換と呼ぶ。

この変換の結果である式 (1.28)、(1.29) を眺めると、任意の微小なベクトル  $\xi^\alpha$  を選ぶ自由度があることが分かる。この自由度を用いることでローレンツゲージを定めることができる。

実際に自由度  $\xi^\alpha$  を用いて、ローレンツゲージ  $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$  が与えられることを示そう。座標系の違いを強調するために  $\{x', x\}$  を  $\{x^{(new)}, x^{(old)}\}$  と置き、(1.29) にローレンツゲージ条件を使うと

$$\partial_\nu \bar{h}^{(new)\mu\nu} = \partial_\nu \bar{h}^{(old)\mu\nu} - \square \xi^\mu \quad (1.30)$$

が得られる。 $\partial_\nu \bar{h}^{(new)\mu\nu} = 0$  となるゲージを求めるには、

$$\square \xi^\mu = \partial_\nu \bar{h}^{(old)\mu\nu} \quad (1.31)$$

と決めればよい。以上の議論により、線形近似においてローレンツゲージ条件が妥当であることが分かった

ローレンツゲージ条件を式 (1.24) に課すことで

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.32)$$

と変形され、波動方程式が得られた。

## 1.1.4 真空中における重力波解

式 (1.32) は真空  $T_{\mu\nu} = 0$  で

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.33)$$

となる。真空中の波動方程式の解は、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (1.34)$$

という形で書ける。 $A_{\mu\nu}$  は振幅を表す複素数のテンソル量であり、 $k_\alpha$  は波数ベクトルを表している。ローレンツゲージと波動方程式により、波数ベクトルには

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (1.35)$$

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0 \quad (1.36)$$

という条件が課される。条件 (1.35) は重力波が光速で進む波であることを示唆しており、この時  $k^\mu$  はヌルであるという。また条件 (1.36) は振幅と波数ベクトルが直交していることを示唆していて、トランスバース条件と呼ばれる。またこの条件は重力波が横波であることを示している。

ところで  $\xi^\mu$  は一意には決まらない。なぜなら

$$\square(\xi^\mu + \chi^\mu) = \partial_\nu \bar{h}^{(old)\mu\nu} \quad (1.37)$$

より、 $\square\chi^\mu = 0$  を満たすベクトル  $\chi^\mu$  もローレンツゲージを与えるからである。すなわち座標関数の任意性は  $\xi^\mu$  だけでなく  $\chi^\mu$  の分もある。この自由度を使って更なるゲージ条件を定めていこう。

ローレンツゲージ条件  $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$  を課したことで、重力波の自由度は4つ減って6の独立な成分が残っている。さらに残りの自由度  $\xi$  を用いて4つのゲージ条件を課すことで、重力波の性質がより明確になる。

$\square\chi^\mu = 0$  の解は (1.34) と同じ波動解であり

$$\chi^\mu = B^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (1.38)$$

という形をとる。 $k_\alpha$  は先ほど導入した波数ベクトルと同じもので、 $B_\mu$  は振幅を表す任意のベクトル量である。この条件を式 (1.29) に代入して、振幅についての条件を書き下すと

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu - \eta_{\mu\nu} B_\lambda k^\lambda \quad (1.39)$$

となる。この式に

「振幅  $A_{\mu\nu}$  が空間的である  $\Leftrightarrow A_{\mu\nu}$  と time-like ベクトル  $\mathbf{u} = d/cdt$  が直行する」 - (a)

「トレース  $\bar{h} = 0$ 」 - (b)

という2つの条件を課す。まず2つの条件のうち前者は

$$A'_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad (1.40)$$

と書ける。一見この4つの条件によって振幅  $B_\mu$  の4つの自由度がすべて使われているように見えるが、上の式にトランスバース条件 (1.36) を用いると

$$k^\mu A'_{\mu\nu} u^\nu = k^0 A'_{0\nu} u^\nu + k^i A'_{i\nu} u^\nu = 0 \quad (1.41)$$

となり、特に

$$k^0 A'_{0\nu} u^\nu = -k^i A'_{i\nu} u^\nu \quad (1.42)$$

とすれば、条件 (1.40) のひとつは他 3 つの条件の和で表せることがわかる。よって  $B_\mu$  の 4 つの自由度のうち、自由度が 1 つだけ定まっていない。この自由度を  $B_\alpha$  とおいて、トレースレス条件 (b) を定めた。そのためにトレース  $h$  を計算しよう。

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + 2B_\mu k^\mu - 4B_\nu k^\nu \\ &= \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} - 2B_\mu k^\mu \end{aligned} \quad (1.43)$$

なので、

$$B_\alpha k^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \quad (1.44)$$

とすることでトレースレス条件を与えることができる。またトレースレス条件により

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (1.45)$$

となる。

以上の議論により、 $h_{\mu\nu}$  に全てのゲージを課し終えた。10 個あった  $h_{\mu\nu}$  の自由度は  $\xi^\mu$  の 4 自由度と  $\chi^\mu$  の 4 自由度を用いることで、2 つにまで減らすことができた。

これら 8 つのゲージ条件を用いて、 $h_{\mu\nu}$  を見やすい形にしていこう。まずは簡単のため  $z$  軸方向に光速で進む重力波を考える。 $k_1 = k_2 = 0$ ,  $k_3 = k_0 = k$  と置くことで

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(i(-k_0 x^0 + k_3 x^3)) = A_{\mu\nu} \exp(ik(-x^0 + x^3)) \quad (1.46)$$

となる。またローレンツゲージ条件  $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$  より

$$k(A^{0\nu} - A^{3\nu}) = 0 \quad (1.47)$$

を得る。

次に time-like ベクトル  $\mathbf{u} = d/cdt$  が  $u^0 = 1$ ,  $u^i = 0$  である座標においては

$$A'_{00} = A_{00} - 2ikB_0 \quad (1.48)$$

$$A'_{0j} = A_{0j} - ikB_j \quad (j = 1, 2) \quad (1.49)$$

となるので、 $A'_{00} = 0$ ,  $A'_{0j} = 0$  とできる。

最後にトレースレス条件より次の表式を得る。

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{11} + A_{22} = 0 \quad (1.50)$$

計量テンソルの対称性  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  より  $h_{12} = h_{21}$  であることに注意して、 $h_{\mu\nu}$  を書き下すと

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (A_{11} \equiv h_+, A_{12} \equiv h_\times) \quad (1.51)$$

となる。 $h_{\mu\nu}^{TT}$  はトランスレス・トランスバースゲージを用いていることを意味する。

(1.51) 見ると重力波の自由度が 2 つであるということがよく分かる。この 2 つの自由度  $h_+$ ,  $h_\times$  はそれぞれプラスモード、クロスモードと呼ばれている。1.1 章ではこれ以降断らない限り  $h_{\mu\nu}$  は TT ゲージでの重力波であるとする。

### 1.1.5 重力波が質点に与える影響

1.1.6 章で得た結果を用いて、重力波が質点にどのような影響を与えるのかを見ていこう。

まず空間に対する影響を見ていく。これまでの計算により、TT ゲージ下における時空の計量は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.52)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_+ e^{i(kz - \omega t)} & h_\times e^{i(kz - \omega t)} & 0 \\ 0 & h_\times e^{i(kz - \omega t)} & 1 - h_+ e^{i(kz - \omega t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

であり、その線素は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \left(1 + h_+ e^{i(kz - \omega t)}\right) (dx^1)^2 + \left(1 + h_+ e^{i(kz - \omega t)}\right) (dx^2)^2 \quad (1.54)$$

$$+ 2h_\times e^{i(kz - \omega t)} dx^1 dx^2 + (dx^3)^2 \quad (1.55)$$

となる。これは xy 軸、xy 軸を 45 度傾けた軸が空間的に作動の周期振動をする様子を表している。

次に重力波が質点に与える影響をみていく。そのためにまずは測地線の方程式をみてみよう。測地線の方程式は質点の四元速度を  $u^\mu$  として

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \quad (1.56)$$

で与えられる。測地線の方程式は自由質点の曲がった空間に沿った等速直線運動を表す。力学的な解釈をすると  $ma - F = 0$  のようなものであり、クリストッフェル記号の項は粒子に働く力だと解釈出来る。

測地線の方程式を用いて  $\tau = 0$  で静止している粒子に対する重力波の影響をみてみよう。この時速度の空間成分が  $u^i = 0$  であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{d\tau} &= - \left[ \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) u^\alpha u^\beta \right]_{\tau=0} \\ &= - \left[ \Gamma^\mu_{00}(x) (u^0)^2 \right]_{\tau=0} \end{aligned} \quad (1.57)$$

を得る。これを計算するために (1.51) を (1.57) に代入するが、クリストッフェル記号の被微分関数は全てゼロなので、必然的にゼロになる。よって

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0 \quad (1.58)$$

である。この結果は TT ゲージ下における重力波は静止している粒子に作用をしないという結果である。しかしこの結果は座標系の取り方に依存するため、重力波の本質的な作用を評価する手段としては妥当でない。なので座標系に依存しない指標が必要となる。座標変換に対して普遍的な、本質的な重力の影響はリーマンテンソルに現れてくるので、これまでの計算結果を用いてリーマンテンソルを計算しよう。

測地線偏差の方程式は、リーマンテンソルを幾何的なイメージと結びつける上で有用だ。測地線偏差の方程式は、微小な距離だけ離れた自由落下する二つの質点間に働く加速度を調べる式である。二つの質点をそれぞれ A, B、四元速度をそれぞれ  $u^\mu(x_A), u^\mu(x_B)$ 、二点間の微小距離を  $\zeta^\mu$ 、とする。この時二点間の微小距離の間に働く加速度は

$$a^\alpha = -R_{\mu\rho\nu}{}^\alpha u^\mu \zeta^\rho u^\nu \quad (1.59)$$

で与えられるので、リーマンテンソルを計算すれば良いということが分かる。先ほどと同様に静止している粒子に対しての計算を試みる。この時四元速度は  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  だから

$$a^\alpha = -R_{0i0}{}^\alpha \zeta^i \quad (i = 1, 2) \quad (1.60)$$

のみが残る。  $h_+ = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22})$ ,  $h_\times = h_{12} = h_{21}$  として各成分を書き下せば

$$a^1 = -R_{010}{}^1 \zeta^1 + R_{020}{}^1 \zeta^2 = \frac{1}{2} \ddot{h}_+ \zeta^1 + \frac{1}{2} \ddot{h}_\times \zeta^2 \quad (1.61)$$

$$a^2 = -R_{020}{}^2 \zeta^1 + R_{010}{}^2 \zeta^2 = -\frac{1}{2} \ddot{h}_+ \zeta^1 + \frac{1}{2} \ddot{h}_\times \zeta^2 \quad (1.62)$$

$$a^3 = 0 \quad (1.63)$$

となり、z 方向に光速で進む TT ゲージの重力波は xy 平面に静止している質点間に加速度を与えることが分かる。

## 1.2 重力波の放射

この章では 1.1 章で  $T^{\mu\nu} = 0$  として計算した式 (1.32) を、 $T^{\mu\nu} \neq 0$  である場合について計算していく。1.1 章で計算した重力波は波源から十分遠方における重力波であり、波源付近の重力波は異なった性質を持つ。この重力波は  $T^{\mu\nu}$  と密接な関係を持っており、導出することで物質場の変化と重力波の発生との関連が明らかになる。重力波の放射を計算するには多重極展開が用いられる。この研究手法は電磁気学で行ったものと非常に良く似ている。電磁気学において電磁波を発生させたのは電気双極子モーメント以上の極子であった。しかし重力波の放射は保存則の影響により、四重極子以上によってもたらされる。なお 1.2 章の計算は [1]Michael Maggiore 「Gravitational Waves : volume1 THEORY AND EXPERIMENTS」を参照した。

### 1.2.1 弱い重力場からの重力波

これまで線形近似を用いて重力波を導出してきた。この近似は重力場が弱い場合に成り立つ近似である。この時場の方程式は 1.1.3 章で導出したように

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.64)$$

で与えられるのだった。またこの時ローレンツゲージ  $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  を課していることから、平坦な時空における保存則  $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$  が成り立つ。

この方程式はグリーン関数  $G(x)$  を用いて解くことができる。グリーン関数は

$$\square_x G(x - x') = \delta^4(x - x') \quad (1.65)$$

を満たす関数なので、これを用いて

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4 x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x') \quad (1.66)$$

(1.65) の解として遅延グリーン関数

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(x_{ret}^0 - x'^0) \quad (1.67)$$

ここで  $x' = ct'$ ,  $x_{ret}^0 = ct_{ret}$  であり

$$t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (1.68)$$

は遅延時刻と呼ばれている。これらを用いて (1.64) の解は

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu} \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, x' \right) \quad (1.69)$$

となる。この式にいくつかの近似をすると、重力波の持つ幾つかの特徴的な性質が見えてくる。

ここで TT ゲージを与えるための射影子を導入しておく。射影子  $\Lambda_{ij,kl}$  は、重力波の進行方向と平行な単位ベクトル  $\hat{\mathbf{n}}$  を用いて

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ij}P_{kl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \quad (1.70)$$

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (1.71)$$

で与えられる。なおこの射影子は

$$\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} \quad (1.72)$$

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0 \quad (1.73)$$

を満たす。この射影子を用いると TT ゲージの重力波は

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\bar{h}_{kl} = \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})h_{kl} \quad (1.74)$$

で与えられる。そのため以後の議論では

$$\bar{h}_{ij} = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{ij} \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, x' \right) \quad (1.75)$$

を計算していく。

この式にいくつかの近似をすると、重力波の持つ幾つかの特徴的な性質が見えてくる。

(1.75) に施す一つ目の近似は、ソースの半径  $d$  に比べてソースから観測者までの距離  $|\mathbf{x}| = r$  が十分に離れている、つまり  $r \gg d$  という近似である。この条件を (1.75) に適用していく。計算の便宜上  $|\mathbf{x}|$  の単位ベクトルを  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}/r$  と定め、

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + O\left(\frac{d^2}{r}\right)$$

と近似する。これにより式 (1.75) の非積分項の分母は  $dr \equiv -\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + O(d^2/r)$  として

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{|r + dr|} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{dr}{r^2} + \dots \end{aligned}$$

と展開できる。ソースから検出器までの距離が十分遠いとすれば  $r \rightarrow \infty$  としてよいので、主要項だけを残す。こうして

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \int d^3x' T_{ij} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, x' \right) \quad (1.76)$$

という表式が得られる。

次に  $\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c \gg 1$  として  $T_{\mu\nu}$  を展開する。その妥当性についてまず考えよう。はじめに (1.76) の  $T_{ij}$  をフーリエ変換する。

$$T_{ij} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, x' \right) = \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \tilde{T}_{kl}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega(t-r/c+\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \quad (1.77)$$

非相対論的なソースに対して  $\tilde{T}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  はある周波数  $\omega_s$  にピークを持つ。よって積分値に占めるこの周波数付近の寄与が最も支配的なので、それ以外の積分領域は無視して良い。また

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \lesssim \frac{\omega_s d}{c} \ll 1 \quad (1.78)$$

を満たすので

$$e^{-i\omega(t-r/c+\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c)} = e^{-i\omega(t-r/c)} \left[ 1 - i \frac{\omega}{c} x'^i n^i + \frac{1}{2} \left( -i \frac{\omega}{c} \right)^2 x'^i x'^j n^i n^j + \dots \right] \quad (1.79)$$

と近似できる。この近似をして (1.76) を逆フーリエ変換したものは

$$T_{kl} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, x' \right) \simeq \left[ T_{ij} \left( t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}' \right) + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_t T_{kl} + \frac{1}{2c^2} x'^i x'^j n^i n^j \partial_t^2 T_{kl} + \dots \right]_{ret} \quad (1.80)$$

に対応する。またこの式の偏微分は点  $ret \equiv (t - r/c, \mathbf{x}')$  でのものである。

次に  $T_{ij}$  に対する運動量を

$$S^{ij}(t) = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) S^{ij,k}(t) = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k S^{ij,kl}(t) = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k x^l \quad (1.81)$$

と定義する。運動量のインデックスの「,」はストレステンソルと  $\mathbf{x}$  のインデックスを区別するために用いている。運動量の対象性はストレステンソルの対称性に依存する。(1.64) よりストレステンソルの対称性は計量の対称性  $h^{ij} = h^{ji}$  を引き継いでいるので、 $T^{ij} = T^{ji}$  を満たす。よって運動量テンソルは  $S^{ij} = S^{ji}$  を満たす。また運動量テンソル中の被積分項としての各  $x^{in}$  は可換なので、カンマのあとのインデックスは全ての置換に対して同値である。しかし一般には  $S^{ij,k} \neq S^{ik,j}$  であることに注意する。

こうして

「十分に弱い重力場」

「波源の大きさ  $d$  が波源からの観測地点までの距離  $r$  より十分小さい」

「 $\tilde{T}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  のピークを与える周波数  $\omega_s$  と波源の半径の積、 $\omega_s d$  が光速に比べて十分小さい」

という三つの仮定により、重力波は

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \left[ S^{ij} + \frac{1}{c} n_k \dot{S}^{ij,k} + \frac{1}{2c^2} n_k n_l \ddot{S}^{ij,kl} + \dots \right]_{ret} \quad (1.82)$$

という多重極の形に展開ができる。

(1.82) をもう少しよく見てみよう。 $S^{ij,k}, S^{ij,kl}, \dots$  にはソースの大きさに依存する因子  $x \sim O(d)$  が  $T_{ij}$  に掛かっている。また  $\dot{S}^{ij,k}, \ddot{S}^{ij,kl}, \dots$  は式 (1.79) より  $O(\omega_s)$  の因子を持つ。よって  $\dot{S}^{ij,k}, \ddot{S}^{ij,kl}, \dots$  は波源の速度を  $v$  として、 $O(\omega_s d) = O(v)$  の因子を持つ。すなわちこれは  $(1/c)\dot{S}^{ij,k}, (1/c^2)\ddot{S}^{ij,kl}, \dots$  がそれぞれ  $O(v/c), O(v^2/c^2), \dots$  の因子を持つ量だということが分かる。更に  $S^{ij}$  は  $v^2$  に比例する量なので、(1.82) の  $4G/c^4$  の  $(1/c^2)$  と合わせてみれば、 $\bar{h}_{ij}$  は  $v/c$  のべき乗で展開されているという結果に他ならず、これは2章で述べるポストニュートン展開と同じべき展開の形であることに言及しておく。

さて次にエネルギー密度  $T^{00}/c^2$ 、 $T^{0i}/c$  に対し運動量テンソルを定義していこう。エネルギー密度  $T^{00}/c^2$  に対しては

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) \quad (1.83)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i \quad (1.84)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j \quad (1.85)$$

$$M^{ijk} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j x^k \quad (1.86)$$

$T^{0i}/c$  に対しては

$$P^i = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) \quad (1.87)$$

$$P^{i,j} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j \quad (1.88)$$

$$P^{i,jk} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j x^k \quad (1.89)$$

という形を取る。これらをまとめて運動量テンソル  $S^{\mu\nu}$  として書くと

$$S^{\mu\nu} = \int d^3x T^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c^2 M & cP^1 & cP^2 & cP^3 \\ cP^1 & S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ cP^2 & S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ cP^3 & S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

という形にまとめられる。

定義した式 (1.84)~(1.89) の時間変化と保存則  $\partial_\mu T^{\mu\nu}$  の関係を見ていこう。積分はソースの体積よりも十分に大きい体積が  $V$  である箱を考え、その表面積を  $\partial V$  として計算する。 $\partial_0 = (1/c)\partial_t$  に注意して

$$\begin{aligned} c\dot{M} &= \int_V d^3x \partial_0 T^{00}(t, \mathbf{x}) \\ &= - \int_V d^3x \partial_i T^{0i}(t, \mathbf{x}) = - \int_{\partial V} dS^i T^{0i}(t, \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

を得る。最後の積分は十分に波源よりも十分に大きい箱の表面積での積分であるために値を持たない。しかし実際の系では質量を失う天体からの重力波放射はありうる。この計算で質量が保存しているのは、線形理論が天体が重力波の放射でエネルギーを失うことによって天体を受ける反動を無視しているためであるということに言及しておく。

同様の計算により

$$\begin{aligned} c\dot{M}^i &= \int_V d^3x x^i \partial_0 T^{00}(t, \mathbf{x}) \\ &= - \int_V d^3x x^i \partial_j T^{0j}(t, \mathbf{x}) = \int_V d^3x (\partial_j x^i) T^{0i}(t, \mathbf{x}) = \int_V d^3x \delta_j^i T^{0i}(t, \mathbf{x}) \\ &= cP^i \end{aligned} \quad (1.92)$$

を得る。更に高階のテンソルに対しても同様に計算して、 $T^{00}$  に対して

$$\dot{M} = 0 \quad (1.93)$$

$$\dot{M}^i = P^i \quad (1.94)$$

$$\dot{M}^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i} \quad (1.95)$$

$$\dot{M}^{ijk} = P^{i,jk} + P^{j,ki} + P^{k,ij} \quad (1.96)$$

$T^{0i}$  に対して

$$\dot{P}^i = 0 \quad (1.97)$$

$$\dot{P}^{i,j} = S^{ij} \quad (1.98)$$

$$\dot{P}^{i,jk} = S^{ij,k} + S^{jk,j} \quad (1.99)$$

$$(1.100)$$

を得る。式 (1.95)、(1.98) は質量、運動量の保存を表している。また (1.99) に着目すると、対称性  $S^{ij} = S^{ji}$  から  $\dot{P}^{i,j} - \dot{P}^{j,i} = S^{ij} - S^{ji} = 0$  が得られる事が分かり、これは角運動量の保存に対応する。

これらの表式により  $S^{ij}, \dot{S}^{ij,k}$  を  $M$  や  $P$  を使って表せる。式 (1.96) と式 (1.99) を用いて

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij} \quad (1.101)$$

を得る。また

$$\ddot{M}^{ijk} = 2 \left( \dot{S}^{ij,k} + \dot{S}^{ik,j} + \dot{S}^{jk,i} \right) \quad (1.102)$$

であり、(1.100) から  $\dot{P}^{i,jk} = \dot{S}^{ij,k} + \dot{S}^{jk,j}$  なので、

$$\dot{S}^{ij,k} = \frac{1}{6} \ddot{M}^{ijk} + \frac{1}{3} \left( \ddot{P}^{i,jk} + \ddot{P}^{j,ik} - 2\ddot{P}^{k,ij} \right) \quad (1.103)$$

という関係を得る。(1.101)、(1.103) を用いることで (1.82) を書き換えることができる。これまでの計算の手法を用いることで (1.82) の更に高階の項を計算することが出来る。

## 1.2.2 質量四重極放射

1.2.1 章で得た結果を用いて式 (1.82) の最低次の項は

$$[h_{ij}(t, \mathbf{x})]_{quad} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \ddot{M}^{ij}(t - r/c) \quad (1.104)$$

という式で表せる。あるいは TT ゲージでの重力波は射影子  $\Lambda_{ij,kl}$  を用いて

$$[h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x})]_{quad} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{M}^{kl}(t - r/c) \quad (1.105)$$

$M^{kl}$  は対称性  $M^{kl} = M^{lk}$  をもつから、回転群の規約表現に分解できて、

$$M^{kl} = \left( M^{kl} - \frac{1}{3} \delta^{kl} M_{ii} \right) + \frac{1}{3} \delta^{kl} M_{ii} \quad (1.106)$$

と表せる。 $M_{ii}$  は  $M$  のトレースである。また上の式に射影子  $\Lambda_{ij,kl}$  を施すと最後の項は消える。質量密度を

$$\rho = \frac{1}{c^2} T^{00} \quad (1.107)$$

と定義して四重極子を書けば

$$w_{ak} Q^{ij} \equiv M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_{kk} \quad (1.108)$$

$$= \int d^3x \rho(t, \mathbf{x}) \left( x^i x^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \right) \quad (1.109)$$

と表わせ、四重極子からの重力波は

$$[h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x})]_{quad} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{Q}^{kl}(t - r/c) \quad (1.110)$$

で書ける。

重力波の放射が四重極以上の極子によって生じるという結果は、電磁気において双極子以上の極子が電磁波を生み出すことと比較しても興味深い点である。質量単極子、双極子が放射を与えないという結果は、(1.91)からも分かるように質量、運動量の保存からくるものである。しかし以前にも少し触れたように、実際の天体現象においては常に質量、運動量の保存が成り立つわけではない。しかし線形理論以外の理論も単、双極子からの放射の予言はしない。なぜならばローレンツゲージ条件を課した Einstein 方程式を用いて、近似せずに変形をすると

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad \text{から} \quad \square \bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} \quad (1.111)$$

に取って代わり、エネルギー運動量テンソルの保存が、有効エネルギー運動量テンソルの保存

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{から} \quad \partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0 \quad (1.112)$$

に取って代わりるので、これまでの議論と同様の議論が展開できるからである。 $\tau^{\mu\nu}$  は

$$\tau^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} \quad (1.113)$$

で定義されている。 $t^{\mu\nu}$  はエネルギー運動量擬テンソルと呼ばれる量である。この量は  $\mathbf{h}$  のみに依存することから、背景時空の計量がエネルギー運動量テンソル的に振る舞うという、摂動の効果を表している。(1.113) は Einstein 方程式を近似ではなく、DeDonder ゲージ、あるいは調和ゲージと呼ばれるゲージ条件を課して式変形をただけのもので、このゲージ下における Einstein 方程式の表式は時空の情報に損なっていない。この形式においても (1.91) の  $T^{00}$  を  $\tau^{00}$  に変えて計算すればよいだけであり、この場合も保存が成立する。その為重力波の放射は四重極以上の極子からのみ生じると結論できる。この議論の詳細は Michael Maggiore 「Graavitational Waves : volume1 THEORY AND EXPERIMENTS」又は Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson 「Gravitational-Wave Physics and Astronomy」を参照。

### 1.2.3 四重極放射によるエネルギーの放出

線形近似によって得られた重力波が運び去るエネルギーは Isaacson の公式として知られている。

$$\left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{quad} = \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (1.114)$$

$P = dE/dt$ 、 $\Omega$  は立体角を表す。この式に (1.110) を代入して

$$\left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{quad} = \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle \quad (1.115)$$

を得る。ここで次の関係式

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (1.116)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.117)$$

を用いて計算すると、 $\Lambda_{ij,kl}$  は

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.118)$$

と書ける。これを用いると

$$\mathcal{L}_{quad} \equiv P_{quad} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (1.119)$$

となる。これが求める表式である。

## 1.2.4 Radiation Reaction

四重極以上の変化を伴う運動をしている天体は、重力波の放出によってエネルギーを失うことで反作用を受ける。1.2.3章で求めた (1.119) を用いることで、反作用を求めることが出来る。重力波源から放出されるエネルギーは (1.119) より

$$\frac{dE_{source}}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle \quad (1.120)$$

と書けるのであった。運動が限りなくニュートンの的であるとすれば、この時の反作用力を  $\mathbf{F}$  として

$$\frac{dE_{source}}{dt} = \langle F^i v^i \rangle = \left\langle \int d^3x \frac{dF^i}{dV} dx^i \right\rangle \quad (1.121)$$

という関係が得られる。一方で (1.120) を部分積分を用いて書き換えると

$$\frac{dE_{source}}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{dQ^{ij}}{dt} \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \right\rangle \quad (1.122)$$

という関係が得られる。(1.123) の時間微分は

$$\frac{dQ^{ij}}{dt} = \int d^3x' \partial_t \rho(t, \mathbf{x}') \left( x'^i x'^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \right) \quad (1.123)$$

である。ニュートン力学的な波源は  $T^{00}/c^2 = \rho$ ,  $T^{0i}/c = \rho v^i$  と書けるから、保存則  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  は次のように書き下せる。

$$\partial_t \rho + \partial_k (\rho v^k) = 0 \quad (1.124)$$

これを用いて (1.123) を書き直す。この時  $\partial_k (\rho v^k)$  に関して部分積分をする際、無限遠での  $\rho$  の評価が求められるが、無限遠 (特にソースの半径以上の領域) において  $\rho = 0$  となるから、

$$\int d^3x' \partial_t \rho(t, \mathbf{x}') \left( x'^i x'^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \right) = \int d^3x' \rho(t, \mathbf{x}') \dot{x}'^k (\delta^{ik} x'^j + \delta^{jk} x'^i) \quad (1.125)$$

であり

$$\frac{dE_{source}}{dt} = -\frac{2G}{5c^5} \left\langle \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \int d^3x' \rho(t, \mathbf{x}') \dot{x}'^i x'^j \right\rangle \quad (1.126)$$

(1.121) と (1.126) を比べると

$$\left\langle \int d^3x' \frac{dF^i}{dV} dx^i \right\rangle = -\frac{2G}{5c^5} \left\langle \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \int d^3x' \rho(t, \mathbf{x}') \dot{x}'^i x'^j \right\rangle \quad (1.127)$$

より、単位体積当たりの反作用の力は

$$\frac{dF^i}{dV'} = -\frac{2G}{5c^5} \rho(t, \mathbf{x}') x'^j \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \quad (1.128)$$

と書ける。これを積分して、反作用の力は

$$F^i = -\frac{2G}{5c^5} \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \int d^3 x' \rho(t, \mathbf{x}') x'^j \quad (1.129)$$

と書ける。ここで質点の中心座標を次の様に定義しよう。

$$x^j(t) \equiv \frac{1}{m} \int d^3 x' \rho(t, \mathbf{x}') x'^j \quad (1.130)$$

これを用いて力を書き直すと

$$F^i = -\frac{2G}{5c^5} m x^j \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \quad (1.131)$$

が得られる。なおこの力は  $v^5/c^5$  に比例した力であり、後述するポストニュートン近似においてその影響は 2.5PN の近似式からあらわれてくる。

## 第 2 章

# 連星系からの重力波

この章では重力波のターゲットとして最も有力な連星系からの重力波、更に限定して連星が衝突してブラックホールになる、というイベントについての概要について話す。

はじめに連星系からの重力波の概要を述べる。連星系からの重力波には 3 つのフェイズがある。連星を成した 2 つの星は重力波を放出することでエネルギーを失う。2 つの星は回転しながら徐々に接近していき、やがて衝突し、星の核が自重に耐えられなかった場合にブラックホールになる。この衝突は時空に複雑な変化をもたらすので、それに伴った重力波も複雑な波形となる。衝突して間もなくは複雑な変化だが、重力波の放出によってエネルギーを失うことで、やがて落ち着いた振動に移行する。それが最後のブラックホールリングダウンフェイズである。

整理すると、1) チャープ (連星) フェイズ、2) マージャー (衝突) フェイズ、3) リングダウンフェイズに分けられ、それぞれの解析方法も異なった手法が用いられる。1) ではポストニュートン近似、2) では数値相対論によるシュミレート、3) ではブラックホール時空解の摂動による重力波の近似がそれぞれ用いられる。2 章では 1) と 3) について詳しく述べる。次章以降では実際に研究を行った 3) のブラックホールリングダウンについての模擬的な解析の手法と、その結果について説明していく。

### 2.1 チャープ (連星) フェイズ

2.1 章では中性子星やブラックホールの連星系が回転している状態であるチャープフェイズから放出される重力波について説明していく。第 1 章では線形近似を用いて重力波を導出し、その性質について説明した。そこで用いた線形近似は十分に重力場弱い場合にのみ成り立つ近似であったため、中性子星連星やブラックホール連星の重力場に対して線形近似を用いることはできない。かわりに用いられるのがポストニュートン展開である。この近似は重力波源の運動が光速に比べ十分遅い (同時に重力が弱い) という仮定、すなわち  $(v/c) \ll 1$  という近似の元、摂動によって近似の精度をあげていく。

PN 近似における重力波は、波源付近の物質場の影響が有効な  $T^{\mu\nu} \neq 0$  である領域 (near zone 又は matter zone) での重力波と、ソースから十分遠方の  $T^{\mu\nu} = 0$  である領域 (far zone 又は wave zone) での重力波を計算し、中間の領域で両者が一致するという要請をし、導かれる。重力波による摂動の効果は有効エネルギー運動量テンソル  $\tau^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$  のランダウのエネルギー運動量偽テンソル  $t^{\mu\nu}$  に取り込まれ、高次の摂動項を生み出す。これを繰り返してよりよい精度の重力波を得るという計算方法だ。摂動の次数を上げることに伴って摂動項は増えていき、摂動のパラメーターである  $v/c$  のべき乗の値も増していく。例えば  $(v/c)^4$  の項までの摂動なら 2PN (以後ポストニュートン近似を PN 近似と呼ぶ) 近似、 $(v/c)^5$  の項までの摂動なら 2.5PN 近似とよばれ、2015 年現在では 3.5PN 近似までの計算がなされている。

る。

連星フェイズの重力波は現在建設中である第二世代型重力波望遠鏡がメインとするターゲットソースであり、PN 近似は連星フェイズの重力波の運動を非常に良い精度で記述する。高精度の波形の計算は観測の精度の向上に寄与するため、できるだけ高い摂動項が欲しい。更に精度を上げるにつれ、実は PN 展開だけで計算を行うと無限遠において発散の問題がつかまとう。それを解消するため導入されるのがポストミンコフスキー展開 (PM 展開) である。この展開も摂動近似であり、PN 展開の  $v/c$  に対し、PM 展開は  $G$  のべきで計算をする。この二つの展開は波源付近を PN 展開、波源遠方を PM 展開を使って記述し、波源付近、遠方の中間で波が等しくなるという条件を課し、発散を回避する。これらの計算は Blanchet 等によって精力的に行われており、Blanchet は PM 展開を用いて 3.5PN 展開の計算を行い、発散の問題を解決した。

2.1 章ではニュートン近似の次の摂動である 1PN 近似を計算し、連星系の重力波に応用する。

### 2.1.1 ニュートン極限とポストニュートン展開

PN 展開はパラメーター  $\epsilon \equiv v/c$  によって計量を展開する摂動近似である。計量の展開のオーダーは成分によって異なる。2.1.1 章ではその様子を見ていく。

PN 展開が対象とする系は重力によって束縛されている非相対論的な天体である。複数の天体が存在するとき、これらの天体の平均質量、平均速度、重心からの平均距離を  $M, v, r$  とする。ニュートン力学での結果から運動エネルギー  $(1/2)mv^2$  とニュートンポテンシャル  $GM/r$  は同じオーダーであると言って良いので、

$$v^2 \sim \frac{2GM}{r} \Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} \sim \frac{R_S}{r} \quad (2.1)$$

という関係が成り立つ。ここでシュバルツシルト半径を  $R_S \equiv 2GM/c^2$  とおいた。展開には  $(v/c) \ll 1$  をパラメーターとして用いるが、これは”速度が十分遅いという”条件である。 $(v/c)^2$  は条件 (2.1) によって結ばれているから、”重力が十分小さい”も同値な条件である。

次に計量に対して要求される  $\epsilon$  のオーダーを考えよう。はじめに時間反転に対しての振る舞いを考える。 $g_{00}$  と  $g_{ij}$  は時間反転に対して不変なので、 $v$  は偶数のべき乗、すなわち  $\epsilon$  も偶数のべき乗で展開される。 $g_{0i}$  は時間反転に対して符号が変化するので、 $v$  は奇数のべき乗、すなわち  $\epsilon$  も奇数のべき乗で展開される。次に線素を

$$ds^2 = g_{00}d(ct)^2 + 2\epsilon g_{0i}d(ct)dx^i + \epsilon^2 g_{ij}dx^i dx^j \quad (2.2)$$

という形で書き下す。 $\epsilon$  は線素の各項のオーダーを数える為に導入した。この表式からわかることは、 $g_{00}$  を  $\epsilon^n$  のオーダーまで展開した時、線素のオーダーを等しく保つために  $g_{0j}, g_{ij}$  はそれぞれ  $\epsilon^{n-1}, \epsilon^{n-2}$  のオーダーで展開されるということだ。またニュートン極限において  $g_{0i}$  は値を持たないので、 $g_{0i}$  の展開は  $\epsilon^3$  からはじまる。以上をまとめると、 $g_{\mu\nu}$  の展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + {}^{(2)}g_{00} + {}^{(4)}g_{00} + {}^{(6)}g_{00} + \dots \\ g_{0i} &= {}^{(3)}g_{0i} + {}^{(5)}g_{0i} + \dots \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + {}^{(2)}g_{ij} + {}^{(4)}g_{ij} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

ただし  ${}^{(n)}a$  は、 $a$  のオーダーを表している。

次にエネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  のオーダーについて議論しよう。今物質が完全流体であると仮定

すると、物質の圧力を  $p$ 、エネルギー密度を  $\rho$  とすれば  $|T^{ij}|/T^{00} \sim p/\rho$  となり、 $p/\rho \sim O(\epsilon^2)$  から  $|T^{ij}|/T^{00} \sim O(\epsilon^2)$  となる。また  $T^{0i}$  は速度に比例する項である。よって  $T^{\mu\nu}$  の展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} T^{00} &= {}^{(0)}T^{00} + {}^{(2)}T^{00} + \dots \\ T^{0i} &= {}^{(1)}T^{0i} + {}^{(3)}T^{0i} + \dots \\ T^{ij} &= {}^{(2)}T^{ij} + {}^{(4)}T^{ij} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

このように展開した計量とエネルギー運動量テンソルを Einstein 方程式に代入し、オーダーの等しい同士で計算をすることで、求める精度の重力波が計算できる。

## 2.1.2 1PN 近似

2.1.1 章の議論でポストニュートン展開の方法論について議論した。2.1.2 章ではニュートン近似からオーダーを  $O(\epsilon^4)$  まで上げたポストニュートン (1PN) 近似を、実際に計算していく。PN 近似の計算方法や流儀は複数あるが、ここでは Epstein、Weinberg、Misner に近い方法で行う。なおこの章における計算は Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson の「Gravitational-Wave Physics and Astronomy」に基いて行った。計算の流れは次の通りだ。まず波源付近での (物質から生じる) 重力波を計算する。次に遠方での (真空中における) 重力波を計算する。

### NearZone

はじめにエネルギー運動量テンソルについて考えよう。ここでは波源である天体の内部が完全流体であるとすると、このとき  $T^{\mu\nu}$  は

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

と書ける。ここで  $\mathbf{u} = u^0[1, \mathbf{v}]$  は流体の四元速度である。また  $\rho \equiv \rho_0(c^2 + \Pi)$  は、物質の密度だけでなく、 $\rho_0\Pi$  の項が圧力や熱エネルギーなど、様々なエネルギーを与えている。規格化条件  $-1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$  を計算すると

$$-1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (u^0)^2 \left\{ \left[ -1 - \frac{2\phi}{c^2} + O(\epsilon^4) \right] + \frac{v^2}{c^2} + O(\epsilon^4) \right\} \quad (2.6)$$

だから、

$$u^0 = 1 - \frac{\phi}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(\epsilon^4) \quad (2.7)$$

となることが分かる。ここで  $\nabla^2 \rho = 4\pi G \rho_0 \sim O(\epsilon^4)$  に注意して式 (2.5) の  $T^{\mu\nu}$  を計算すると

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho (u^0)^2 \\ &= \rho_0 \left[ 1 + \left( \frac{\Pi}{c^2} - \frac{2\phi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + O(\epsilon^4) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \rho c (u^0)^2 \frac{v^i}{c} \left[ 1 + \frac{p}{\rho c^2} \right] \\ &= \rho_0 \left[ \frac{v^i}{c} + O(\epsilon^3) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \rho c^2 (u^0)^2 \frac{v^i v^j}{c^2} \left[ 1 + \frac{p}{\rho c^2} \right] + p g^{ij} \\ &= \rho_0 c^2 \left[ \left( \frac{v^i v^j}{c c} + \frac{p}{\rho_0 c^2} \delta^{ij} \right) + O(\epsilon^4) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

を得る。これらの関係を用いて (1) 相対論におけるポストニュートン近似下での天体運動の計算、(2) 重力波の放射の二つを計算していこう。 これまでに得た関係を調和ゲージ下での Einstein 方程式

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} \quad (2.11)$$

に代入して計算を進める。有効エネルギー運動量テンソル  $\tau^{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  とエネルギー運動量偽テンソル  $t^{\mu\nu}$  を用いて

$$\tau^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

と定義されている量である。エネルギー運動量偽テンソルは  $O(h^2)$  までの計算において次の関係を満たす。

$$\frac{16\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} \equiv 2G_{\mu\nu} - \square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \\ & - \bar{h}^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \right) \\ & + \frac{1}{2} \bar{h} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\nu} + \frac{3}{2} \bar{h} \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{h}_{\mu\nu} \square \bar{h} \\ & + \eta^{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \text{bar} h_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \right) - \frac{\partial \bar{h}_\mu^\sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{h}_{\nu\sigma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \bar{h}_\mu^\sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{h}_{\nu\beta}}{\partial x^\sigma} \right] \\ & - \frac{1}{2} \bar{h}_\mu^\alpha \frac{\partial^2 \text{bar} h}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \bar{h}_\nu^\alpha \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} - \bar{h}_\mu^\alpha \square \bar{h}_{\alpha\nu} - \bar{h}_\nu^\alpha \\ & + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left( \frac{3}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{h}_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{h}^{\rho\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{3}{4} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\beta} + 2 \bar{h}^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta} \right. \\ & \left. - \bar{h} \square \bar{h} - \frac{\partial \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \bar{h}^{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} + \bar{h}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.14) にはローレンツゲージが課されている。(2.14) を使って  $h^{00}$  を計算しよう。線形近似における重力波は

$$\bar{h}_{00} = -\frac{4\Phi}{c^2} + O(\epsilon^4), \quad \bar{h}_{0i} = \frac{A_i}{c} + O(\epsilon^5), \quad \bar{h}_{ij} = O(\epsilon^4) \quad (2.15)$$

という形で書けていた。この結果を用いて

$$\begin{aligned} \square h^{00} &= \square \left( \bar{h}^{00} - \frac{1}{2} \eta^{00} \bar{h} \right) = \frac{1}{2} \square \bar{h}^{00} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \bar{h}^{ij} \\ &= -\frac{8\pi G}{c^4} (\tau^{00} + \delta_{ij} \tau^{ij}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

という表式を得る。上式に (2.15) を代入して

$$16\pi G t_{\mu\nu} = -4 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} - 8\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \eta_{\mu\nu} (8\Phi \nabla^2 \Phi + 6(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Phi)) \quad (2.17)$$

を得る。これと (2.8)~(2.10) をさらに  $\tau^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$  を代入して、

$$\tau^{00} = \rho_0 \left( 1 + \frac{\Pi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} - 4\frac{\Phi}{c^2} \right) - \frac{3}{8\pi G c^2} (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \tau^{ij} = & \rho_0 v^i v^j + p \delta^{ij} \\ & - \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} - \frac{1}{2\pi G} \Phi \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i \partial x^j} \\ & + \frac{1}{8\pi G} \delta^{ij} (4\Phi \nabla^2\Phi + 3(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

が得られる。これを (2.16) に代入して、

$$\begin{aligned} \square h^{00} = & -\frac{8\pi G}{c^4} \rho_0 \left( 1 + \frac{\Pi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} - 4\frac{\Phi}{c^2} + 3\frac{p}{\rho_0 c^2} \right) \\ & - \frac{1}{c^6} (8\Phi \nabla^2\Phi + 4(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

またニュートン極限において  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0$  が成り立つから

$$\square h^{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho_0 \left( 1 + \frac{\Pi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} + 3\frac{p}{\rho_0 c^2} \right) - \frac{1}{c^6} 4(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi) \quad (2.21)$$

となる。この方程式の解は次のようになる。

$$h^{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} - \left( \frac{2\Phi}{c^2} \right)^2 + \frac{4\Psi}{c^2} - \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + O(\epsilon^6) \quad (2.22)$$

ここでニュートンポテンシャル  $\Phi$ 、ポストニュートンポテンシャル  $\Psi$ 、スーパーポテンシャル  $\chi$  は次のように置いた。

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0 \quad (2.23)$$

$$\nabla^2\Psi = -4\pi G\rho_0 \left( \frac{1}{2} \frac{\Pi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} - \frac{\Phi}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{p}{\rho_0 c^2} \right) \quad (2.24)$$

$$\nabla^2\chi = 2\Phi \quad (2.25)$$

これらのポテンシャルは次のような解を持つ。

$$\Phi(x, t) = -G \int \frac{\rho_0(x', t)}{|x - x'|} d^3x' \quad (2.26)$$

$$\Psi(x, t) = +G \int \frac{\rho_0(x', t)}{|x - x'|} \left( \frac{1}{2} \frac{\Pi(x', t)}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} - \frac{\Phi(x', t)}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{p(x', t)}{\rho_0(x', t)c^2} \right) d^3x' \quad (2.27)$$

$$\chi(x, t) = -G \int \rho_0(x', t) |x - x'| d^3x' \quad (2.28)$$

これらの値を計算することで NearZone におけるポストニュートン近似の重力波が計算出来る。次に波源遠方での重力波をみていこう。

## FarZone

遠方での重力波は波動方程式 (2.11) を解いた

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tau^{\mu\nu} \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, x' \right) \quad (2.29)$$

を使って求める。波源との距離が十分遠いという条件  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \sim r$  と、TT ゲージを課せば

$$\bar{h}_{TT}^{ij}(t, x) = \frac{4G}{rc^4} \int d^3x' \tau^{ij}(t - r/c, x') \quad (2.30)$$

が得られる。この式を多重極展開して

$$\bar{h}_{TT}^{ij}(t, x) = \frac{4G}{rc^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \int d^3x' \tau^{ij}(t - r/c, x') (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'/c) \quad (2.31)$$

が得られる。 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}'/r$  と置いた。ここで

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (x^i x^j \tau^{00}) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left( x^i \tau^{jk} + x^j \tau^{ki} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} (x^i x^j \tau^{kl}) \right) \quad (2.32)$$

と

$$\begin{aligned} \tau^{ij} x^k &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\tau^{0i} x^j x^k + \tau^{0k} x^i x^j) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} (\tau^{li} x^j x^k + \tau^{lj} x^i x^k - \tau^{lk} x^i x^j) \end{aligned} \quad (2.33)$$

の二つの関係、そして保存則

$$\frac{\partial \tau^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.34)$$

を用いて、

$$h_{TT}^{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{n}_{k_1} \hat{n}_{k_2} \cdots \hat{n}_{k_m} I^{ijk_1 k_2 \cdots k_m}(t - r/c) \right]_{TT} \quad (2.35)$$

という関係式を得る。また

$$I^{ij}(t) \equiv \int \tau^{00}(t, x) x^i x^j d^3x \quad (2.36)$$

$$I^{ijk}(t) \equiv \int [\tau^{0i}(t, x) + \tau^{0j}(t, x) x^i x^k - \tau^{0k}(t, x) x^i x^j] d^3x \quad (2.37)$$

$$I^{ijk_1 k_2 \cdots k_m}(t) \equiv \frac{2}{m!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int \tau^{ij}(t, x) x^{k_1} x^{k_2} \cdots x^{k_m} d^3x \quad (2.38)$$

と置いた。(ただし、今物質が無く、かつ重力が十分弱い場での積分を考えているので、面積分は値を持たないことに注意する。) これがポストニュートン近似における、遠方での求めるべき表式である。

### 2.1.3 質点系における重力波

2.1.2 章で得た式を用いて N 個の質点 (太陽系や連星系を想定して) がある系を考えよう。このような系に対するエネルギー運動量テンソルは

$$T^{00} = \sum_A m_A \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} - \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{c^2 r_{AB}} \right) \delta^3(x - x_A(t)) \quad (2.39)$$

$$T^{0j} = \sum_A m_A v_A^j \delta^3(x - x_A(t)) \quad (2.40)$$

$$T^{ij} = \sum_A m_A v_A^i v_A^j \delta^3(x - x_A(t)) \quad (2.41)$$

と書ける。ここで  $m_A, x_A, v_A$  はそれぞれ質点 A の質量、位置、速度、 $r_{AB} = |x_A - x_B|$  は質点 A, B 間の距離である。これを 2.1.2 で求めた有効エネルギー運動量テンソルの表式に代入して、

$$\tau^{00} = \sum_A m_A \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} - \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{c^2 r_{AB}} \right) \delta^3(x - x_A(t)) - \frac{3}{8\pi G c^2} [4\Phi \nabla^2 \Phi + 3(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Phi)] \quad (2.42)$$

$$\tau^{0j} = \sum_A m_A v_A^j \delta^3(x - x_A(t)) \quad (2.43)$$

$$\tau^{ij} = \sum_A m_A v_A^i v_A^j \delta^3(x - x_A(t)) - \frac{1}{8\pi G} \left( -2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - 4\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} + \delta^{ij} (4\Phi \nabla^2 \Phi + 3(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Phi)) \right) \quad (2.44)$$

を得る。ここで

$$\Phi(x, t) = - \sum_B \frac{Gm_B}{|x - x_B(t)|} \quad (2.45)$$

である。同様にして残りのポテンシャルは

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{4} \sum_A \frac{Gm_A}{|x - x_A(t)|} \left( 3 \frac{v_A^2}{c^2} - 2 \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{c^2 r_{AB}} \right) \quad (2.46)$$

$$\chi(x, t) = -G \sum_A m_A |x - x_A(t)| \quad (2.47)$$

と求められる。これらを用いて質点系におけるポストニュートン近似の計量を書き下すと

$$g_{00} = -1 + h_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{4\Psi}{c^4} - \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + O(\epsilon^6) = -1 + 2 \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} - 2 \left( \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \right)^2 \quad (2.48)$$

$$+ 3 \sum_A \frac{Gm_A v_A^2}{c^2 r_A} - \sum_A \sum_{A \neq B} \frac{Gm_A Gm_B}{c^2 r_A c^2 r_B} - \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + O(\epsilon^6) \quad (2.49)$$

$$g_{0i} = -4 \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \left( \frac{v_A}{c} \right)_i + O(\epsilon^5) \quad (2.50)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left( 1 + 2 \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \right) + O(\epsilon^6) \quad (2.51)$$

ただし  $r_A \equiv |x - x_A(t)|$  と置いた。

ここで standard post-Newtonian ゲージと呼ばれる座標変換を行う。座標変換をうまくとることにより  $g_{00}$  のスーパーポテンシャル  $\chi$  を消すことができる。1 章でもみたように、無限小の座標変換  $x' \rightarrow x + \xi$  による計量の変化は

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (2.52)$$

で与えられるのだった。微小量  $\xi_\alpha$  を

$$\xi_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{c^4} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \xi_i = 0 \quad (2.53)$$

と選ぶことで、計量は次のように変換される。

$$g_{00} \rightarrow g'_{00} = g_{00} + \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (2.54)$$

$$g_{0i} \rightarrow g'_{0i} = g_{0i} + \frac{1}{2} \frac{1}{c^4} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.55)$$

$$g_{ij} \rightarrow g'_{ij} = g_{ij} \quad (2.56)$$

ここで

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \left( v_A - \frac{(v_A \cdot r_A)}{r_A^2} r_A \right) \quad (2.57)$$

であることに注意する。以上の変換により、計量は

$$g_{00} = -1 + 2 \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} - 2 \left( \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \right)^2 \quad (2.58)$$

$$+ 3 \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \frac{v_A^2}{c^2} - \sum_A \sum_{A \neq B} \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \frac{Gm_B}{c^2 r_B} + O(\epsilon^6) \quad (2.59)$$

$$g_{0i} = -\frac{7}{2} \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \left( \frac{v_A}{c} \right)_i - \frac{1}{2c} \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \frac{(v_A \cdot r_A)}{r_A^2} r_A + O(\epsilon^5) \quad (2.60)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left( 1 + 2 \sum_A \frac{Gm_A}{c^2 r_A} \right) + O(\epsilon^6) \quad (2.61)$$

と書き換えられる。

#### 2.1.4 運動方程式

前章で得られた計量を用いてポストニュートン近似下での  $N$  個の質点系における運動方程式を解こう。ラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv - \sum_A \frac{d\tau}{dt} = - \sum_A m_A c \sqrt{-g_{00} - 2g_{0i} v_A^i - g_{ij} v_A^i v_A^j} \\ &= - \sum_A m_A \left( c^2 - \frac{1}{2} v_A^2 - \frac{1}{8} \frac{v_A^4}{c^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}} \left( 1 + 3 \frac{v_A^2}{c^2} - \sum_{C \neq A} \frac{Gm_C}{c^2 r_{AC}} - \frac{7}{2} \frac{v_A \cdot v_B}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{(v_A \cdot r_{AB})(v_B \cdot r_{AB})}{c^2 r_{AB}^2} \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

で与えられる。オイラーラグランジュ方程式を解いて

$$\begin{aligned}
\frac{dv_A}{ct} = & - \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B r_{AB}}{r_{AB}^3} \left[ 1 - 4 \sum_{C \neq A} \frac{Gm_C}{c^2 r_{AC}} \right. \\
& + \sum_{C \neq A, B} \left( -\frac{Gm_C}{c^2 r_{BC}} + \frac{1}{2} \frac{Gm_C (r_{AB} \cdot r_{BC})}{c^2 r_{BC}^3} \right) \\
& \left. - 5 \frac{Gm_A}{c^2 r_{AB}} + \frac{v_A^2}{c^2} - 4 \frac{v_A \cdot v_B}{c^2} - \frac{3}{2} \left( \frac{v_B \cdot r_{AB}}{c r_{AB}} \right)^2 \right] \\
& - \frac{7}{2} \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}} \sum_{C \neq A, B} \frac{Gm_C r_{BC}}{c^2 r_{BC}^3} \\
& + \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}^3} \frac{r_{AB} \cdot (4v_A - 3v_B)}{c} \frac{v_A - v_B}{c}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

運動方程式が得られる。

### 2.1.5 二体系におけるポストニュートニアン運動

二体系問題を考えることで連星系の運動とその重力波を得ることができる。はじめにラグランジアンを計算しよう。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -(m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{8}m_1 \frac{v_1^4}{c^2} + \frac{1}{8}m_2 \frac{v_2^4}{c^2} \\
& + \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2 r_{12}} - \frac{7}{2} \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{(v_1 \cdot r_{12})(v_1 \cdot r_{12})}{c^2 r_{12}^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.64}$$

また運動量は

$$p_1 = m_1 v_1 + \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{c^2} m_1 v_1 + \frac{Gm_1 m_2}{c^2 r_{12}^2} \left[ 3v_1 - \frac{7}{2} v_2 - \frac{1}{2} \frac{v_2 \cdot r_{12}}{r_{12}^2} r_{12} \right] \tag{2.65}$$

である。 $p_2$  も同様である。

また  $M \equiv m_1 + m_2$ 、 $a \equiv r_{12}$  として、座標を重心系にとる。

$$r_1 = -\frac{m_2}{M} a, \quad r_2 = \frac{m_1}{M} a, \quad v_1 = -\frac{m_2}{M} v, \quad v_2 = \frac{m_1}{M} v \tag{2.66}$$

系のエネルギーはハミルトニアンを計算すればよい。 $\mu \equiv m_1 m_2 / M$ 、 $\eta \equiv \mu / M$  として

$$\begin{aligned}
E = & M c^2 + \mu \left[ \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{a} + \frac{3}{8} (1 - 3\eta) \frac{v^4}{c^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{GM}{c^2 a} \left( \frac{GM}{a} + (3 + \eta) v^2 + \frac{(v \cdot a)^2}{a^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.67}$$

となる。運動方程式は次の通りである。

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} = & -\frac{GM}{a^3} a \left[ 1 - (4 + 2\eta) \frac{GM}{c^2 a} + (1 + 3\eta) \frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{2} \eta \frac{(v \cdot a)^2}{c^2 a^2} \right] \\
& + (4 - 2\eta) \frac{GM}{c^2 a^3} (v \cdot a) v
\end{aligned} \tag{2.68}$$

特に二つの天体が円軌道で運動しているときは  $v \cdot a = 0$  なので、運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{a^3} a \left[ 1 - (4 + 2\eta) \frac{GM}{c^2 a} + (1 + 3\eta) \frac{v^2}{c^2} \right] \quad (2.69)$$

という形を取る。

### 2.1.6 二体系におけるポストニュートン近似下での重力波

$(r, \iota, \phi)$  にいる観測者の感じる重力波は、スピンウェイト-2 の球面調和関数を用いて次のように展開できる。

$$h_+ - ih_\times = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}_{-2}Y_{lm}(\iota, \phi) h_{lm} \quad (2.70)$$

ポストニュートンパラメーターとして  $x \equiv (GM\omega/c^3)^{2/3}$  を導入する。このとき

$$x^{3/2} = \frac{GM\omega}{c^3} = \frac{GM}{c^2 a} \frac{v}{c} = v^3 [1 + (3 - \eta)v^2] \quad (2.71)$$

と書ける。このパラメーター  $x$  を用いてエネルギー関数  $\mathcal{E}$  と流束関数  $\mathcal{F}$  が計算できる。それらの釣り合いを数値計算することで、回転運動の速度に対応する  $x$  の時間発展と、回転運動の周波数に対応する  $\varphi$  の時間発展を得る。この二つのパラメーターを用いて、ポストニュートン近似での重力波は次のように展開される。

$$h_{+,\times} = \frac{2G\mu}{c^2 r} x \left( H_{+,\times}^{(0)} + x^{1/2} H_{+,\times}^{(1/2)} + x H_{+,\times}^{(1)} + O(\epsilon^3) \right) \quad (2.72)$$

ここで

$$\begin{aligned} H_+^{(0)} &\equiv -(1 + \cos^2 \iota) \cos 2\varphi \\ H_\times^{(0)} &\equiv -2 \cos \iota \sin 2\varphi \\ H_+^{(1/2)} &\equiv -\frac{1}{8} \frac{\delta m}{M} \sin \iota [(5 + \cos^2 \iota) \cos \varphi - 9(1 + \cos^2 \iota) \cos 3\varphi] \\ H_\times^{(1/2)} &\equiv -\frac{3}{4} \frac{\delta m}{M} \sin \iota \cos \iota [\sin \varphi - 3 \sin 3\varphi] \\ H_+^{(1)} &\equiv \frac{1}{6} [(19 + 9 \cos^2 \iota - 2 \cos^4 \iota) - \eta(19 - 11 \cos^2 \iota - 6 \cos^4 \iota)] \cos^2 \varphi \\ &\quad - \frac{4}{3} \sin^2 \iota (1 + \cos^2 \iota) (1 - 3\eta) \cos 4\varphi \\ H_\times^{(1)} &\equiv \frac{1}{3} \cos \iota [(17 - 4 \cos \iota) - \eta(13 - 12 \cos^2 \iota)] \sin 2\varphi \\ &\quad - \frac{8}{3} \cos \iota \sin^2 \iota (1 - 3\eta) \sin 4\varphi \end{aligned}$$

であり、 $\delta m = m_1 - m_2$  と置いた。

## 2.2 リングダウンフェイズ

ブラックホールにもものが落ちると、ブラックホールは準固有振動をする。リングダウンという呼び方は鐘を叩いてその音が減衰していく様子になぞらえられている。マージャーフェイズから一定時間経つと準固有振動に移行するため、連星系の重力波解析においても必要な解析手法である。

準固有振動の波形は解析的に得ることができる。背景時空としてシュバルツシルト、あるいはカーブ  
ラックホール解を用意し、そこに摂動を加えることで重力波が抽出できる。準固有振動の振動数は Leaver  
が提案した連分数を用いた数値計算法がよく用いられている。

### 2.2.1 シュバルツシルトブラックホールからの重力波

シュバルツシルト解における時空の線素は

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.73)$$

という形を取る。この線素を与える計量を作る曲率を  ${}^{(0)}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  とし、重力波による摂動項を表す曲率を  
 ${}^{(1)}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  とすれば、リーマンテンソルは

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(0)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^{(1)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.74)$$

と書ける。ここで次のような基底ベクトルを導入しよう

$$l^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, 1, 0, 0 \right] \quad (2.75)$$

$$k^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{c}, -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), 0, 0 \right] \quad (2.76)$$

$$m^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 0, 0, \frac{1}{r}, \frac{i}{r \sin \theta} \right] \quad (2.77)$$

このベクトルを用いて  $\Psi_4$  を次のように定める。

$$\Psi_4 = -k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.78)$$

$$= -k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} {}^{(1)}R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.79)$$

ただし

$$-k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} {}^{(0)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (2.80)$$

を用いた。この量を用いて

$$-k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} \nabla^2 R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.81)$$

を計算することで、Teukolsky 方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{r^4}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & + 4i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + 4 \left[ \frac{GM r^2 / c^2}{\Delta} - r \right] \frac{\partial \psi}{c \partial t} + 2(2 \cot^2 \theta + 1) \psi = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

ただし  $\psi \equiv r^4 \Psi_4 / \Delta$ 、 $\Delta \equiv r^2 - 2GM r / c^2$  と置いた。この方程式は変数分離して解くことが可能である。  
そのために  $\psi$  を次のように展開する。

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l -{}_2Y_{lm}(\theta, \phi) \int_{-\infty}^{\infty} R_l(r, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.83)$$

ここで  ${}_{-2}Y_{lm}(\theta, \phi)$  はスピンウェイト  $-2$  の球面調和関数である。これにより、動径方向の方程式は

$$\Delta^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[ \frac{r^4 (\omega/c)^2 - 4ir^2 (r - 3GM/c^2) (\omega/c)}{\Delta} - l(l+1) + 2 \right] R_l = 0 \quad (2.84)$$

となる。この方程式を解くことでシュバルツシルトブラックホールからの重力波が求められる。この方程式はある複素数の値を持つ固有角周波数  $\omega_n$  に対して解かれ、解は quasi normal mode と呼ばれる。得られた重力波は  $e^{-(t-t_0)/Q} \sin f_c(t-t_0)$  というリングダウンの波形をしており、 $\omega_n$  の実部が  $f_c$  に、 $\omega_n$  の虚部は  $Q$  に比例する。詳細な議論は [9]Leaver(1985) と [10]Echeverria (1988) を参照。

	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell \gg 1$
$n = 1$	$\pm 0.373\,672 + 0.088\,962i$	$\pm 0.599\,443 + 0.092\,703i$	
$n = 2$	$\pm 0.346\,711 + 0.273\,915i$	$\pm 0.582\,644 + 0.281\,298i$	$\pm \frac{\ell+1}{3\sqrt{3}} + \frac{n+1}{3\sqrt{3}}i$
$n = 3$	$\pm 0.301\,054 + 0.478\,272i$	$\pm 0.551\,685 + 0.479\,093i$	
$n \rightarrow \infty$	$\pm 0.08 + (\frac{1}{4}n - 0.1)i$	$\pm 0.08 + (\frac{1}{4}n - 0.32)i$	

図 2.1 quasi-normal mode の周波数。Leaver によって連分数を用いた数値解析による周波数値の計算方法が開発された。Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson の「Gravitational-Wave Physics and Astronomy」、p126 から引用

## 2.2.2 カーブラックホールからの重力波

カー解における時空の線素は

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GMr}{c^2 \Sigma} \right) (cdt)^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{c^2 \Sigma} (cdt)d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2 r}{c^2 \Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.85)$$

ただし  $\Delta \equiv r^2 - 2GMr/c^2 + a^2$ 、 $\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  と置いた。またブラックホールの自転によるスピン角運動量を  $S$ 、質量を  $M$  として、 $a \equiv S/Mc$  と定義した。

シュバルツシルトの場合と同様に、次のような基底ベクトルを導入する。

$$l^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{r^2 + a^2}{c\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right] \quad (2.86)$$

$$k^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{r^2 + a^2}{c\Sigma}, -\frac{\Delta}{\Sigma}, 0, \frac{a}{\Sigma} \right] \quad (2.87)$$

$$m^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{ia \sin \theta}{c(r^2 + ia \cos \theta)}, 0, \frac{1}{r + ia \cos \theta}, \frac{i}{(r + ia \cos \theta) \sin \theta} \right] \quad (2.88)$$

また次もシュバルツシルトの場合と同様に、 $\Psi_4 = -k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$  と定め、 $k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} \nabla^2 R_{\mu\nu\rho\sigma}$  を計算することで、ker 時空に対する Teukolsky 方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} + \frac{4GMa r}{c^3 \Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \phi} + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\
& - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\
& + 4 \left[ \frac{a(r - GM/c^2)}{\Delta} + i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\
& + 4 \left[ \frac{GM(r^2 - a^2)/c^2}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{c \partial t} + 2(2 \cot^2 \theta + 1) \psi = 0
\end{aligned} \tag{2.89}$$

ここで  $\psi \equiv (r - 1a \cos \theta)^4 \Psi_4$  と置いた。この方程式も変数分離が可能である。そのために  $\psi$  を次のように展開する。

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{im\phi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{lm}(\cos \theta, \omega) R_{lm}(r, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{2.90}$$

これにより、 $S_{lm}(\cos \theta, \omega)$  と  $R_{lm}(r, \omega)$  に対する方程式が次のように定まる。

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d \cos \theta} \left[ (1 - \cos^2 \theta) \frac{dS_{lm}}{d \cos \theta} \right] \\
& + \left[ a^2 (\omega/c)^2 \cos^2 \theta + 4a(\omega/c) \cos \theta - 2 - \frac{(m - 2 \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} + A_{lm} \right] S_{lm} = 0
\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{dR_{lm}}{dr} \right) \\
& + \left[ \frac{((r^2 + a^2)(\omega/c) - am)^2 - 4i(r - GM/c^2)((r^2 + a^2)(\omega/c) - am)}{\Delta} \right. \\
& \left. - 8ir(\omega/c) + 2am(\omega/c) - a^2(\omega/c)^2 - A_{lm} \right] R_{lm} = 0
\end{aligned} \tag{2.92}$$

ここで  $A_{lm}(a\omega/c)$  は分離定数である。無限遠における境界条件として  $\cos \theta = \pm 1$  を課すことで、微分方程式の解  $S_{lm}(\cos \theta, \omega)$  としてスピヌウェイト-2 の楕円調和 (spheroidal harmonics) 関数が得られる。シュバルツシルトの場合と同様に、この方程式の解もカー・ブラックホールの quasi-normal mode を表す。

	$c^2 a / (GM)$	$A_{\ell m}$	$GM \omega_{\ell m} / c^3$
$\ell = 2, m = +2$	-0.98	$4.71083 + 0.19500i$	$+0.292\ 663 + 0.088\ 078i$
	-0.90	$4.66623 + 0.18160i$	$+0.297\ 244 + 0.088\ 281i$
	-0.80	$4.60808 + 0.16428i$	$+0.303\ 313 + 0.088\ 512i$
	-0.60	$4.48269 + 0.12765i$	$+0.316\ 784 + 0.088\ 892i$
	-0.40	$4.34266 + 0.08821i$	$+0.332\ 458 + 0.089\ 131i$
	-0.20	$4.18385 + 0.04574i$	$+0.351\ 053 + 0.089\ 183i$
	0	4	$\pm 0.373\ 672 + 0.088\ 962i$
	+0.20	$3.78097 + 0.04921i$	$-0.402\ 145 + 0.088\ 311i$
	+0.40	$3.50868 + 0.10185i$	$-0.439\ 842 + 0.086\ 882i$
	+0.60	$3.14539 + 0.15669i$	$-0.494\ 045 + 0.083\ 765i$
	+0.80	$2.58529 + 0.20530i$	$-0.586\ 017 + 0.075\ 630i$
	+0.90	$2.10982 + 0.21112i$	$-0.671\ 614 + 0.064\ 869i$
	+0.98	$1.33362 + 0.14999i$	$-0.825\ 429 + 0.038\ 630i$
$\ell = 2, m = +1$	-0.98	$4.38917 + 0.07868i$	$+0.343\ 922 + 0.083\ 713i$
	-0.90	$4.36229 + 0.07547i$	$+0.344\ 359 + 0.084\ 865i$
	-0.80	$4.32786 + 0.07049i$	$+0.345\ 356 + 0.086\ 003i$
	-0.60	$4.25579 + 0.05767i$	$+0.348\ 911 + 0.087\ 566i$
	-0.40	$4.17836 + 0.04150i$	$+0.354\ 633 + 0.088\ 484i$
	-0.20	$4.09389 + 0.02224i$	$+0.362\ 738 + 0.088\ 935i$
	0	4	$\pm 0.373\ 672 + 0.088\ 962i$
	+0.20	$3.89315 + 0.02520i$	$-0.388\ 248 + 0.088\ 489i$
	+0.40	$3.76757 + 0.05324i$	$-0.407\ 979 + 0.087\ 257i$
	+0.60	$3.61247 + 0.08347i$	$-0.435\ 968 + 0.084\ 564i$
	+0.80	$3.40228 + 0.11217i$	$-0.480\ 231 + 0.077\ 955i$
	+0.90	$3.25345 + 0.11951i$	$-0.516\ 291 + 0.069\ 804i$
	+0.98	$3.07966 + 0.10216i$	$-0.564\ 155 + 0.051\ 643i$
$\ell = 2, m = 0$	0	4	$\pm 0.373\ 672 + 0.088\ 962i$
	$\pm 0.20$	$3.99722 \pm 0.00139i$	$\mp 0.375\ 124 + 0.088\ 700i$
	$\pm 0.40$	$3.98856 \pm 0.00560i$	$\mp 0.379\ 682 + 0.087\ 827i$
	$\pm 0.60$	$3.97297 \pm 0.01262i$	$\mp 0.388\ 054 + 0.085\ 995i$
	$\pm 0.80$	$3.94800 \pm 0.02226i$	$\mp 0.401\ 917 + 0.082\ 156i$
	$\pm 0.90$	$3.93038 \pm 0.02763i$	$\mp 0.412\ 004 + 0.078\ 483i$
	$\pm 0.98$	$3.91269 \pm 0.03152i$	$\mp 0.422\ 254 + 0.073\ 532i$

図 2.2  $n=1, l=2$  における quasi-normal 周波数の値。Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson の「Gravitational-Wave Physics and Astronomy」、p128 から引用

## 第3章

# 重力波のデータ解析

重力波は非常に小さい。これまで直接検出が実現出来なかったのはその小ささのせいであるとも言える。現在世界で建設が急がれているレーザー型の検出器は  $10^{-23}[1/\sqrt{\text{Hz}}]$  の感度を目指して設計されており、チャープ重力波を長時間観測することで直接検出が実現出来ると考えられている。

3章ではレーザー型干渉計での重力波の検出原理、そして検出器で得た検出データの解析に用いられるマッチドフィルター法について述べる。

### 3.1 レーザー型干渉計

現在世界では重力波の検出を目指して最新型の検出器が建設されている最中である。日本では KAGRA、アメリカでは AdvancedLIGO、イタリアでは Advanced Virgo が建設されている。これらの検出器の最高感度はおおよそ  $10^{-23}[1/\sqrt{\text{Hz}}]$  で、中性子星やブラックホールなどの重い連星系からの放出が期待される重力波の周波数帯である  $10\sim 10^3[\text{Hz}]$  付近に良い感度を持つように設計されている。これらの干渉計は全てレーザー型干渉計であり、マイケルソン型干渉計が基本となっている。3.1章ではマイケルソン型干渉計を通して重力波信号を得る様子を見ていく。なおこの章の計算は [1]Michael Maggiore 「Graavitational Waves : volume1 THEORY AND EXPERIMENTS」を参照した。

#### 3.1.1 マイケルソン型干渉計

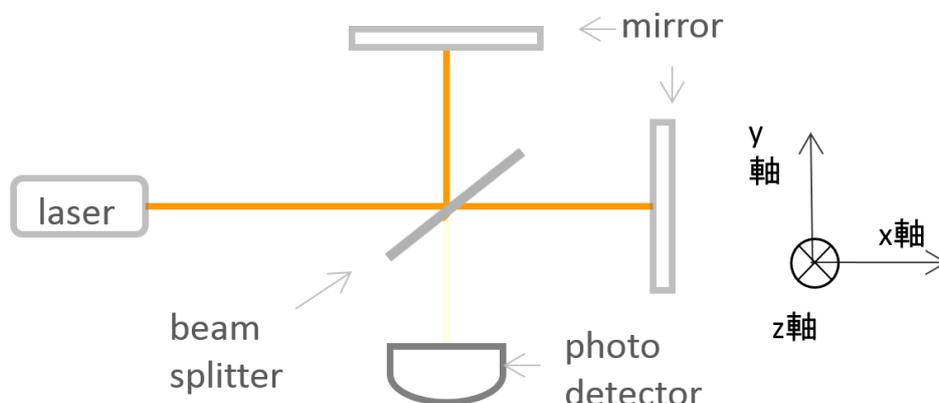


図 3.1 マイケルソン型干渉計

重力波は1,2章で見えてきたように、時空に差動の変化をもたらす。レーザー型干渉計ではマイケルソン型の干渉計の用いられ、干渉が重力波の影響で崩れる様子を観測することで検出をしようと試みている。干渉は通常最も弱め合うよう、つまり光が打ち消し合うように制御されている。ここに重力波がやってくるとフォトディテクターはその変化をどのように捉えるのかを見ていこう。

図3.1のようなマイケルソン干渉計を考える。干渉計は重力波の進行方向  $z$  に垂直な平面に設置されており、 $x, y$  平面の原点にビームスプリッターを、 $x, y$  軸上、それぞれ  $L_x, L_y$  上に鏡を置く。レーザー光の振動数、波数は  $\omega_L$ ,  $\mathbf{k}_L$  とした。まずレーザー光の電場は

$$E_0 e^{-i\omega_L t + i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1)$$

と書ける。レーザーから出た光はビームスプリッターで半分が  $x$  アーム (ビームスプリッター～ $x$  軸上の鏡) に、もう半分が  $y$  アーム (ビームスプリッター～ $y$  軸上の鏡) にわかれる。ビームスプリッターでわかれ、鏡で反射し再びビームスプリッターを経て干渉をする。この時どちらかの電場はビームスプリッターでの反射の際に符号がマイナスになる。鏡を往復してビームスプリッターに到達した瞬間を  $t$ 、 $x, y$  軸を往復した光の電場をそれぞれ  $E_1, E_2$  とすれば

$$E_1 = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L t + 2ik_L L_x} \quad (3.2)$$

$$E_2 = +\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L t + 2ik_L L_y} \quad (3.3)$$

となる。 $E_1$  と  $E_2$  がはじめてビームスプリッターに入射する時刻は異なっている。二つの電場は異なる距離  $L_x, L_y$  を往復して時刻  $t$  において再びビームスプリッターに到達した電場であることに注意しよう。ビームスプリッター～フォトディテクター間で干渉している電場を  $E_1 + E_2 \equiv E_{out}$  とすれば、

$$E_{out} = -iE_0 e^{-i\omega_L t + ik_L(L_x + L_y)} \sin[k_L(L_y - L_x)] \quad (3.4)$$

となる。フォトディテクターで実際に検出される量は電場のパワーである。上の式を書き直して

$$|E_{out}|^2 = E_0^2 \sin^2[k_L(L_y - L_x)] \quad (3.5)$$

とすると、光が打ち消し合うには  $\sin$  がゼロになるよう距離を調整すれば良いことが分かる。

### 3.1.2 TT ゲージ重力波と干渉計の相互作用

マイケルソン型干渉計に重力波がどのように相互作用をするのかをみていこう。重力波は質間の距離を変化させるのであった。重力波が  $z$  軸の正の方向から  $z=0$  にある干渉計に入射し、+モードに対してのみ値を持っている状況を考えよう。このとき重力波は実部のみ考えれば良いから

$$h_+(t) = h_0 \cos \omega_{gw} t \quad (3.6)$$

と書ける。線素は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [1 + h_+(t)] dx^2 + [1 - h_+(t)] dy^2 + dz^2 \quad (3.7)$$

となる。この重力波の、 $x$  アームにいる光に対する影響を考えよう。光はヌル測地線に沿って運動するから  $ds^2 = 0$  である。 $O(h)$  までで計算すれば

$$dx = \pm \frac{cdt}{\sqrt{1 + h_+(t)}} \simeq \pm cdt \left[ 1 - \frac{1}{2} h_+(t) \right] + O(h^2) \quad (3.8)$$

プラスマイナスはビームスプリッター～ミラーの往路、復路に対応する。まず往路について積分する。はじめてビームスプリッターに入射する時刻を  $t_0$ 、はじめてミラーに到達する時刻を  $t_1$  とすると

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} &= c \int_{t_0}^{t_1} dt' \left[ 1 - \frac{1}{2} h_+(t') \right] \\ L_x &= c(t_1 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt' h_+(t') \end{aligned} \quad (3.9)$$

次に復路について積分する。折り返してビームスプリッターに到達した時刻を  $t_2$  とすると

$$\begin{aligned} \int_{L_x}^0 &= -c \int_{t_1}^{t_2} dt' \left[ 1 - \frac{1}{2} h_+(t') \right] \\ L_x &= c(t_2 - t_1) - \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt' h_+(t') \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。よって光が x アームを往復するのにかかる時間は

$$t_2 - t_0 = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} dt' h_+(t') \quad (3.11)$$

である。ここで積分区間の上限値  $t_2$  を  $2L_x/c$  に置き換える。今  $O(h^2)$  を無視しているのので、この置き換えは成り立つ。計算を進めて

$$\begin{aligned} t_2 - t_0 &= \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{2L_x/c} dt' h_0 \cos \omega_{gw} t \\ &= \frac{2L_x}{c} + \frac{h_0}{2\omega_{gw}} (\sin[\omega_{gw}(t_0 + 2L_x/c)] - \sin \omega_{gw} t_0) \\ &= \frac{2L_x}{c} + \frac{h_0 L_x}{c} \frac{\sin(\omega_{gw} L_x/c)}{\omega_{gw} L_x/c} \cos[\omega_{gw}(t_0 - L_x/c)] \\ &= \frac{2L_x}{c} + \frac{L_x}{c} h(t_0 - L_x/c) \text{sinc} \left( \frac{\omega_{gw} L_x}{c} \right) \quad \left( \text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

表式を得る。これを用いてアームを往復後に時刻  $t$  でビームスプリッターに到達した光の、入射時刻  $t_0$  を書き直そう。x,y 軸で + モードの重力波の符号が逆であることに注意して、x,y アームそれぞれ

$$t_0^{(x)} = t - \frac{2L_x}{c} - \frac{L_x}{c} h(t_0 - L_x/c) \text{sinc} \left( \frac{\omega_{gw}}{c} \right) \quad (3.13)$$

$$t_0^{(y)} = t - \frac{2L_y}{c} + \frac{L_y}{c} h(t_0 - L_y/c) \text{sinc} \left( \frac{\omega_{gw}}{c} \right) \quad (3.14)$$

と書ける。以上の条件を用いて、鏡を往復してビームスプリッターに到達した瞬間  $t$  の、重力波の影響を含めた電場を計算しよう。x,y アームそれぞれ

$$\begin{aligned} E^{(x)}(t) &= -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L t_0^{(x)}} \\ &= -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L (t - 2L_x/c) + i\Delta\phi_x(t)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} E^{(y)}(t) &= +\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L t_0^{(y)}} \\ &= +\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L (t - 2L_y/c) + i\Delta\phi_y(t)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ただし

$$\Delta\phi_x(t) = +\frac{\omega_L L_x}{c} h(t - L_x/c) \text{sinc}\left(\frac{\omega_{gw} L_x}{c}\right) \quad (3.17)$$

$$\Delta\phi_y(t) = -\frac{\omega_L L_y}{c} h(t - L_y/c) \text{sinc}\left(\frac{\omega_{gw} L_y}{c}\right) \quad (3.18)$$

とした。こうして得られた電場の式を  $L = (L_x + L_y)/2$  で書き換えると、 $\phi_0 = k_L(L_x - L_y)$  として

$$E^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L(t-2L/c) + i\phi_0 + i\Delta\phi_x(t)} \quad (3.19)$$

$$E^{(y)}(t) = +\frac{1}{2} E_0 e^{-i\omega_L(t-2L/c) - i\phi_0 + i\Delta\phi_y(t)} \quad (3.20)$$

とかける。ここで  $|L_x - L_y|$  が限りなくゼロに近いという条件を置こう。この条件は実際の検出器でもノイズを消すために用いられている。このとき

$$\Delta\phi_x(t) \simeq \frac{\omega_L L}{c} h(t - L/c) \text{sinc}\left(\frac{\omega_{gw} L_x}{c}\right) \quad (3.21)$$

$$\Delta\phi_{Mich}(t) \equiv \Delta\phi_x(t) - \Delta\phi_y(t) = 2\Delta\phi_x(t) \quad (3.22)$$

だから、往復してビームスプリッターを通り干渉した後の電場  $E_{tot}(t)$  は

$$E_{tot}(t) = E^{(x)}(t) + E^{(y)}(t) \quad (3.23)$$

$$= -iE_0 e^{-i\omega_L(t-2L/c)} \sin[\phi_0 + \Delta\phi_x(t)] \quad (3.24)$$

と書ける。以上よりフォトディテクターで検出される重力波の信号を含む量  $P \sim |E_{out}|^2$  を

$$\begin{aligned} P &\sim P_0 \sin^2[\phi_0 + \Delta\phi_x(t)] \\ &= \frac{P_0}{2} (1 - \cos[2\phi_0 + 2\Delta\phi_x(t)]) \\ &= \frac{P_0}{2} (1 - \cos[2\phi_0 + \Delta\phi_{Mich}(t)]) \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。この表式が求める式であり、重力波のマイケルソン干渉計に対する影響を示すものである。 $\omega_{gw} L/c \ll 1$  の極限では

$$\Delta\phi_x(t) \simeq h(t - L/c) k_L L \quad (3.26)$$

となるから、Pは

$$P \sim \frac{P_0}{2} (1 - \cos[2\phi_0 + h(t - L/c) k_L L]) \quad (3.27)$$

となり、 $h(t)$  が  $\cos(t)$  に比例する量なので、上式は  $\cos(\cos(t))$  という関数の形で表されることが分かる。この関数は正弦波によく似た周期的な関数である。なので重力波がやってくると打ち消し合うように制御されていた（暗かった）ビームスプリッター～フォトディテクター間に、重力波の差動変異に伴った光の明滅が見られるということが分かる。このようにして得られた重力波の信号はシグナルとして検出器からアウトプットされ、データ解析によって重力波であるかどうかの判別が行われる。ところで検出量は(3.25)だけでない。重力波の効果を表す項以外にも様々なノイズがミックスされている。そのためノイズと重力波を判別する解析方法が必要となってくる。3.2章ではその方法について説明する。

## 3.2 マッチドフィルター法を用いたデータ解析

3.1章で見たように検出器にインプットされる重力波は、レーザー光の干渉を利用したマイケルソン型干渉計からのアウトプットに焼き直され、検出される。この様子をもう少し形式的に議論していこう。

### 3.2.1 検出データ

テンソルである重力波が検出器にインプットされる際、重力波はスカラー量に変換される。例えば3.1章で扱ったマイケルソン干渉計を例にとると、片方のアームへの重力波の影響が(3.37)のように表されることから見て取れる。検出器の形、幾何に応じたスカラー量となって重力波は影響する。この様子は検出器の幾何情報を表すディテクターテンソル  $D^{ij}$  を用いて

$$h(t) = D^{ij} h_{ij}(t) \quad (3.28)$$

と書ける。こうしてディテクターにスカラーの形で変化を与え、インプットとなる。インプットはその後レーザー光の位相の変化に取り込まれ、フォトディテクターで検出される。検出されるまでにいくつもの検出器の系を経て、フォトディテクターへ到達する。例えば鏡でのレーザーの反射や、ビームスプリッターでの反射などがそうだ。系を経る都度、重力波の情報は形を変える。それぞれの系からの影響が線形だと仮定すれば、アウトプットは

$$\tilde{h}_{out}(f) = T(f)\tilde{h}(f) \quad (3.29)$$

と書ける。 $T$  は伝達関数で、元の情報がある系を通してどう変化するか、を教える関数である。ここまではノイズの影響を無視してきたが、ノイズを含めた線形な系のアウトプットを

$$s_{out}(t) = h_{out}(t) + n_{out}(t) \quad (3.30)$$

と置く。この時ノイズも伝達関数を用いて

$$\tilde{n}_{out}(f) = T(f)\tilde{n}(f) \quad (3.31)$$

と書ける。ところで  $\tilde{n}(f)$  は  $n(t)$  という量のフーリエ変換である。この量はノイズの”インプット”を表す量であり、実際には存在しない量ではあるが、 $n_{out}(t)$  を生み出す量と考えると便利なので導入する。この時インプットシグナルは

$$s(t) = h(t) + n(t) \quad (3.32)$$

と書ける。 $n(t)$  は各ノイズ源から  $n_i(t)$  としてインプットされる（と考える）。なのでノイズの論理的なモデルが存在すれば、ディテクターテンソルは分かっている量なので、 $n(t)$  を導入することで  $h(t)$  との比較が容易になるというメリットがある。また伝達関数の計算も省くことが出来るという利点もある。伝達関数は検出器ごとに、かつ検出器のセッティングごとに異なる関数なので、アウトプットを用いて議論するのは実践的ではない。その為インプットでの計算が有効であるといえる。これ以降は  $n(t)$  をディテクターのノイズとして議論を進めていこう。

### 3.2.2 自己相関関数と noise spectral density

重力波検出器の感度を扱う量として noise spectral density  $S_n$  が用いられる。この量は自己相関関数とのフーリエ変換として定義されている (appendixC を参照)。

ノイズが定常的である場合を考えよう。この時エルゴード理論により、調和平均と時間平均が一致する。この時次の関係が成り立つ。

$$\langle \tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f') \rangle = \delta(f - f') \frac{1}{2} S_n(f) \quad (3.33)$$

計算の便宜上 appendix の  $S_n$  に  $1/2$  をかけたものを  $S_n$  と定義した。  $-T/2 < t < T/2$  のとき、  $f = f'$  とすると、

$$\delta(f = 0) \rightarrow \left[ \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{2\pi i f t} \right]_{f=0} = T \quad (3.34)$$

なので、このとき

$$\langle |\tilde{n}(f)|^2 \rangle = \frac{1}{2} S_n T \quad (3.35)$$

となる。  $[-T/2, T/2]$  で定義された関数のフーリエモードは離散的な周波数  $f_n = n\Delta f = n/T$  を持つ。

ここで我々が扱うノイズ  $n(t)$  は実関数なので  $\tilde{n}(-f) = \tilde{n}^*(f)$ 、  $S_n(-f) = S_n(f)$  が成り立つ。また一般性を失うことなく

$$\langle n(t) \rangle = 0 \quad (3.36)$$

としてよい。この時

$$\begin{aligned} \langle n^2(t) \rangle &= \langle n^2(0) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df df' \langle n^*(f) n(f') \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df S_n(f) \\ &= \int_0^{\infty} df S_n(f) \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる。  $f$  は  $[0, \infty]$  で定義されている量なので、(3.37) の最後の表式が最も扱いやすい形である。予め  $1/2$  を掛けておいた目的はこのためである。

### 3.2.3 マッチドフィルター

3.2.1 章ではディテクターのアウトプット (正確にはインプット) が  $s(t) = h(t) + n(t)$  という形をとるとした。この時  $|h(t)|$  が  $|n(t)|$  よりも大きければ検出は可能だろう。しかし現在までに稼働した検出器においては  $|h(t)| \ll |n(t)|$  であり、この状況が変わることは無いだろう。

しかし  $|h(t)| \ll |n(t)|$  だからといって重力波の検出が出来ないわけではない。マッチドフィルター法は重力波の波形が理論的に予測できている場合に有効な解析法である。この解析ではやってきた重力波  $h(t)$  に対して、こちらで用意した複数のテンプレート重力波信号  $h_i^{temp}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を比較し、本物の

重力波に近いテンプレートを見つけ出すという作業を行う。式を使ってマッチフィルターの概略をみていこう。 $s(t) = h(t) + n(t)$  の両辺に  $h^{temp}(t)$  を掛けて時間で積分し、平均をする。

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt s(t) h^{temp}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt h(t) h^{temp}(t) + \frac{1}{T} \int_0^T dt n(t) h^{temp}(t) \quad (3.38)$$

特に  $h(t)$  だった場合

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt s(t) h(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt h^2(t) + \frac{1}{T} \int_0^T dt n(t) h(t) \quad (3.39)$$

ここで注目すべき点は  $n(t)$ 、 $h(t)$  が振動する量であるという点である。右辺第一項目は  $\cos^2 \omega t$  のような量になる。よって  $h(t)$  の典型的な振幅を  $h_0$  とすれば

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt h^2(t) \sim h_0^2 \quad (3.40)$$

と評価できる。第二項目は  $n(t)$  と  $h(t)$  との積になっている。両者の間には相関が無いく、また  $n(t)h(t)$  という量は振動量なので、この積分は  $T$  が十分に大きい時  $T^{1/2}$  で増える量となる。 $\tau_0$  を重力波の周期とすれば

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt n(t) h(t) \sim \left(\frac{\tau_0}{T}\right)^{1/2} n_0 h_0 \quad (3.41)$$

と評価できる。ただし  $n_0$  は  $n(t)$  の典型的な振幅である。この結果から  $T \rightarrow \infty$  の極限で第二項目が限りなく小さくなることがわかり、すなわちノイズがフィルターによって弾かれた状態といえる。これらの評価をみると、 $h_0 > n_0$  である必要はなく、 $h_0 > (\tau_0/T)^{1/2} n_0$  であれば良いことが分かる。例えば、 $\tau_0 = 1ms$  の重力波を  $T = 1yr$  の間観測し続けると、 $(\tau_0/T)^{1/2} \sim 10^{-5}$  となり、重力波の振幅に対して  $10^5$  のノイズに埋もれている状況であっても、フィルターで弾くことが出来る。

以上の議論がマッチドフィルターの概要である。この議論を精確に行っていこう。はじめに次のような量を定義する

$$\hat{s} = \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t) K(t) \quad (3.42)$$

$K(t)$  はフィルターファンクションと呼ばれる量であり、 $h^{temp}(t)$  などがこれに対応する。この中から後で導入する S/N 比 (signal to noise ratio、信号雑音比) を最大にするような  $K(t)$  を探す。このようにして  $h(t)$  にマッチするフィルターを探す様子からマッチドフィルターと呼ばれている。

はじめに S/N 比の S を定義しよう。S は  $\hat{s}$  の期待値として定義される。 $\langle n(t) \rangle = 0$  に注意して (3.42) の期待値を取ることで

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle s(t) \rangle K(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt h(t) K(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}(f) \tilde{K}^*(f) \end{aligned} \quad (3.43)$$

を得る。一方  $N$  は  $h$  が無い場合  $\hat{s}_{h=0}$  の標準偏差として定義されている。よって

$$\begin{aligned}
N^2 &= \left[ \langle \hat{s}^2(t) \rangle - \langle \hat{s}(t) \rangle^2 \right]_{h=0} \\
&= \langle \hat{s}^2(t) \rangle_{h=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' K(t) K(t') \langle n(t) n(t') \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' k(t) K(t') \int_{-\infty}^{\infty} df df' e^{2\pi f t - 2\pi f' t'} \langle \tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f') \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{1}{2} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 \quad (\because (3.33))
\end{aligned}$$

よって

$$N = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{1}{2} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

以上より  $S/N$  は

$$\frac{S}{N} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}(f) \tilde{K}^*(f)}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{1}{2} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 \right]^{1/2}} \quad (3.45)$$

で定義される。

次に  $S/N$  を最大にするフィルターを考えよう。その為に内積を次のように導入する。 $A(t)$  と  $B(t)$  を実関数として

$$\begin{aligned}
(A|B) &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f) \tilde{B}(f)}{(1/2) S_n(f)} \\
&= 4 \text{Re} \int_0^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f) \tilde{B}(f)}{(1/2) S_n(f)}
\end{aligned} \quad (3.46)$$

と定義する。ただし  $\tilde{A}(-f) = \tilde{A}^*(f)$ 、 $S_n(-f) = S_n(f)$  を用いた。これを使って (3.45) を書き換えて

$$\frac{S}{N} = \frac{(u|h)}{(u|u)^{1/2}} \quad (3.47)$$

を得る。ただし  $\tilde{u}(f) = \frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f)$  と置いた。(3.47) を最大にする  $u$  は明白であり、それは  $u$  と  $h$  が並行だった場合である。この条件を与えるフィルターは

$$\tilde{K}(f) = \text{const} \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)} \quad (3.48)$$

である事が分かる。(3.48) はマッチドフィルター、あるいはウィナーフィルターと呼ばれるフィルターであり、この時  $S/N$  比は最大となる。この時  $\tilde{u} = \text{const} \times \tilde{h}$  と書けるので、(3.47) に代入すると

$$\frac{S}{N} = (h|h)^{1/2} = 4 \int_0^{\infty} df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \quad (3.49)$$

という表式を得る。ところが実際の解析でウィナーフィルターを用いることは出来ない。言い換えると重力波におけるウィナーフィルターは存在しない。その為我々が用意するのは理論式から計算した、ウィ

ナーフィルターに近いフィルターである。前述の通りこれをテンプレートと呼び、 $\tilde{u} = \text{const} \times \tilde{h}_i^{\text{temp}}$  を用いて計算する。すなわち

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_i &= \frac{(h|h_i^{\text{temp}})}{(h_i^{\text{temp}}|h_i^{\text{temp}})^{1/2}} \\ &= \frac{\int_0^\infty df \frac{\tilde{h}(f)(\tilde{h}_i^{\text{temp}})^*(f)}{S_n(f)}}{\left[\int_0^\infty df \frac{\tilde{h}_i^{\text{temp}}(f)(\tilde{h}_i^{\text{temp}})^*(f)}{S_n(f)}\right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

である。(3.50) が最大となるのは  $h = h_i^{\text{temp}}$  の時だが、実際の解析においてそうなることは無い。よって一定時間積分した後ある一定以上の S/N 値を得た場合に、重力波を検出したと宣言する。

## 第4章

# ブラックホールリングダウンのデータ解析

本論文ではブラックホールリングダウンをテンプレートとして用い、こちらで用意した擬似的なインプット重力波とノイズに対してS/Nを計算し、最大値を与えるテンプレートを探すという解析を行った。パラメーターには重力波の到着時刻、ブラックホールの質量、ブラックホールの角運動量に対応する値を設定した。この章では実際に行った解析についての説明をしていく。

### 4.1 ブラックホールリングダウンのテンプレート

今回擬似解析の対象として選んだのは、ブラックホールリングダウンである。2章で説明したようにブラックホール解に摂動を加えて得られる重力波である。この波源に対して解析を行うことで、未だ謎の多いブラックホールの実態を明らかにする手がかりが得られる。なぜならば初期条件を与えた時、リングダウン重力波は二つのパラメーター ( $a, M$ )、すなわちブラックホールの角運動量と質量によって完全に決定されるからであり、この二つのパラメーターを精度よく決定することで、電波天文学による解析で解明出来ない物理学の解明に繋がるからである。

#### 4.1.1 擬似インプット重力波

前述の干渉計のコードにインプットした重力波についての説明をする。今回の解析ではブラックホールのパラメーター ( $a, M$ ) が  $(0.98, 10M_{sun})$ 、 $(0.98, 100M_{sun})$ 、 $(0.98, 400 \times 10^4 M_{sun})$  である場合のシミュレーションを行った。それぞれ低質量、中間質量、超大質量ブラックホールに対応している。2章で想定した連星系合体によってできたブラックホールの質量は  $10M_{sun}$  程度であると考えられ、有効な波源であると言える。超大質量ブラックホールは多くの銀河の中心に存在することが確認されており、これもソースとして有効である。一方その間の中間質量ブラックホールは、電波天文学では観測されておらず、謎が多い。

2章でリングダウン重力波は

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{im\phi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{lm}(\cos\theta, \omega) R_{lm}(r, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.1)$$

と書けると紹介した。ここではもっとも長く振動する重力波のモードである  $(l, |m|) = (2, 2)$  だけに注目する。さらに quasi-normal mode の中で最も長く振動する  $n = 1 (n = 1, 2, \dots)$  にだけ着目すれば、最終

的な重力波の波形は次の様に見える。

$$h_+ - ih_\times \propto e^{Im(\omega_1)t - iRe(\omega_1)t} \quad (4.2)$$

$$h(t) \propto e^{-\pi f_c(t-t_0)/Q} \cos[2\pi f_c(t-t_0) - \phi_0] \quad (4.3)$$

また、Leaver(1985) と Echeverria (1988) によれば、(4.3) の  $f_c$  と  $Q$  は

$$f_c \simeq 32 (1 - 0.63(1 - a^{0.3})) \left( \frac{M}{M_{sun}} \right)^{-1} [kHz] \quad (4.4)$$

$$Q \simeq 2.0 (1 - a)^{-0.45} \quad (4.5)$$

で与えられる。インプット重力波の波形は (4.3) を使って表した。振幅は任意に定め、KAGRA での検出可能性を評価した。

## 4.2 コード

本解析で作成したコードは三つあり、次の 1 → 2 の順に走らせることで計算結果が表示される。

1. 干渉計にインプットされたノイズや重力波シグナルのデータをアウトプットとして出力するコード
2. もう一つは複数のパラメーターに対しテンプレートを作成、S/N を計算するコード

である。それぞれについて説明していこう。なお、コードの全体像は Appendix に別途添付するので、この章ではコードを細かく説明する。

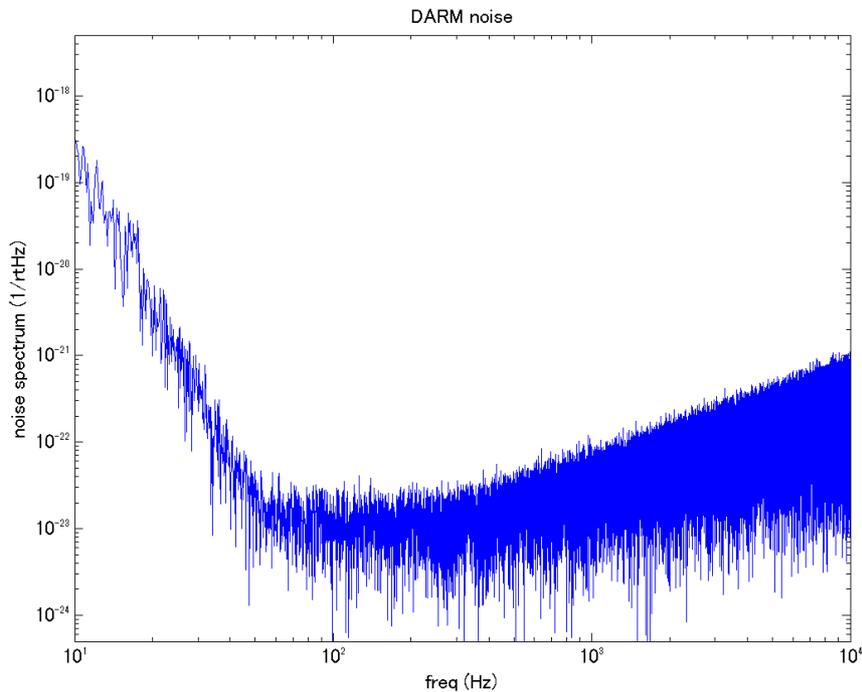


図 4.1 KAGRA の感度モデル。モデルの設定には Kentaro Somiya 「LCGT and the global network of gravitational-wave observation」と、Michael Maggiore 「Gravitational waves」を参照した。作成したモデルでの感度曲線は図 4.1 の通りである。なおサンプリング周波数はを 16000Hz、観測時間を 5 秒としてプロットした。

### 4.2.1 1. 干渉計のコード

今回擬似ノイズとして KAGRA のモデルを使った。ランダムなノイズがインプットされ、各セクションでの応答を経てアウトプットにやってくる。

```

Fs = 16000;                % Sampling frequency (Hz)
T = 1/Fs;                  % Sample time (s)
Lt = 5;                    % Time length (s)
L = Fs*Lt;                 % Length of signal
t = (0:L-1)*T;            % Time vector

dt=T;
tau=0.1;                   %% arrival time
m=m_1or m_2 or m_3;       %% M/Msun
a=0.98;                    %% ker parameter

fc=32*10^3*(1-0.63*((1-a)^0.3))*m^(-1); %1/fc>Δ f
q=2.0*(1-a)^(-0.45);

```

はじめに必要な定数を定める。今回定めるべき定数には二種類ある。前半が観測時間と観測周波数帯域に関する設定で、後半が対象とする天体のパラメーター設定である。

前半について設定すべきパラメーターは、サンプリング周波数と観測時間の長さだ。この二つを決めることで、残りの時間分解能  $T$ 、シグナルの長さ  $L$  が決まる。また時間領域で物理量を扱うため、時間ベクトル  $t$  を定める必要がある。

後半について設定すべきパラメーターは、重力波の到着時刻  $\tau$ 、目的とする天体の太陽質量との比  $m$ 、kerr パラメーター  $a$  である。 $\tau$  を定める必要性は、他のリングダウンシグナル (ノイズ) との区別のためである。リングダウン波形を持ったノイズは多数存在するため、本物の重力波シグナルとの区別が難しい。その為に  $\tau$  が必要となる。残りの  $m$ 、 $a$  は前述のとおり、 $m$  をかえて 3 つのパターンで計算をした。 $dt$  は計算式上での混乱を避けるため、便宜的に導入した。

本来観測時間は十分に長くとるべきである。第3章で述べたとおり、 $S/N$  は積分時間が長いほど良い値を示すためだ。しかし PC のメモリの上限に対応して、定められる  $F_s$  と  $T$  が制限されてしまう。その為本解析では上のようにパラメーターを定めた。 $F_s$  は周波数空間での  $S_n$  の定義域を定める働きがある。今回の解析において最も高い周波数を持つのは  $10M_{sun}$  の擬似シグナルである。この重力波の周波数は  $f_c = 2.6 \times 10^3$  なので、 $F_s=16000$  の範囲に収まっているため問題無い。

```

h = 10^(-k)*heaviside(t-tau).*exp(-pi*fc/q*(t-tau)).*\sin(2*pi*fc*(t-tau));
y1 = 1e-23*randn(size(t)); % shot noise darm
y2 = 1e-24*randn(size(t)); % shot noise carm
y3 = 1e-9/3000*randn(size(t)); % seis noise x at 1Hz
y4 = 1e-9/3000*randn(size(t)); % seis noise y zt 1Hz
y5 = 1e-22*randn(size(t)); % mirror thermal noise x zt 1Hz
y6 = 1e-22*randn(size(t)); % mirror thermal noise y zt 1Hz
y7 = 1e-20*randn(size(t)); % laser freq noise at CARM at 1Hz (MC ignored)

```

ここではシグナルとランダムノイズのインプットを行っている。今インプット擬似重力波の振幅は  $10^{-k}$  としているが、実際には  $k$  を変えて計算を行っている。 $y_1 \sim y_7$  は各腕から量子雑音、 $x$  方向と  $y$  方向の地面雑音、 $x$  方向と  $y$  方向の熱雑音、片方の腕からの 1Hz の周波数雑音である。

```

NFFT = 2^nextpow2(L); % Next power of 2 from length of y
Sig = fft(sig,NFFT);

```

```

Y1 = fft(y1,NFFT);
Y2 = fft(y2,NFFT);
Y3 = fft(y3,NFFT);
Y4 = fft(y4,NFFT);
Y5 = fft(y5,NFFT);
Y6 = fft(y6,NFFT);
Y7 = fft(y7,NFFT);
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
f2 = Fs/2*linspace(0,2,NFFT);

cp = 200; %DARM cavity pole
cp2 = 10; %CARM cavity pole
z0=ifft(Sig,NFFT);
z1=ifft(Y1/cp.*sqrt(cp^2+f2.^2),NFFT);
z2=ifft(Y2/cp2.*sqrt(cp2^2+f2.^2),NFFT);
z3=ifft(Y3./sqrt(1+f2.^12),NFFT); % 3-stage pendulum
z4=ifft(Y4./sqrt(1+f2.^12),NFFT); % 3-stage pendulum
z5=ifft(Y5./sqrt(1+f2),NFFT);
z6=ifft(Y6./sqrt(1+f2),NFFT);
z7=ifft(Y7./sqrt(1+f2.^2),NFFT);

```

ここではそれぞれのインプット量をフーリエ変換し、それぞれのノイズに対応する伝達関数を掛けて時間領域に戻すという作業を行っている。

```

yd0=z0+z1+(z3-z4)+(z5-z6);
yc0=z2+(z3+z4)+(z5+z6)+z7;
yd=yd0*0.99+yc0*0.01;
yc=yc0*0.99+yd0*0.01;

```

そして最終的なアウトプットを計算する。

次に  $S_n$  を定義するための定義を行う。

%%  $s(t), n(t)$  を定義

```
s=yd;
```

```
n=s-z0;
```

%%  $\hat{h}(f), \hat{n}(f), \hat{s}(f)$  を定義 (hist(real(nf),100) で nf のヒストグラムを確認)

```
hf=fft(h,NFFT);
```

```
nf=fft(n,NFFT);
```

```
sf=fft(s,NFFT);
```

シグナル  $s$  とノイズ  $n$  を定め、それぞれを FFT しておく。

%% hf を規格化 → hf<sub>u</sub> / S<sub>n</sub> を定義

```
Sn=2*abs((fft(n)/sqrt(NFFT)));
```

```
hfhf=4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,conj(hf(:)),hf(:)),Sn(:))))*dt; %% int=sum*dt
```

```
hfu=hf/sqrt(hfhf);
```

```
%% OptimalFilter での SNR を計算
```

```
SNRopt=sqrt(4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,conj(sf(:)),hfu(:)),Sn(:))))*dt));
```

$S_n$  を計算し、参照のための理想的な S/N を計算しておく。

#### 4.2.2 2. テンプレートのコード

%% テンプレのパラメーターは 12 列の横ベクトルに格納。3 つの周波数の塊が各質量に分並んでいる。

```
t0=[0.0996:0.0001:0.1005];                %% arrival time
mt= m_1 or m_2 or m3 *[0.8 0.9 1 1.1];    %% M/Msun
at=[0.97:0.01:0.99];                      %% ker parameter
```

ここではまずパラメーターを設定した。質量の係数はいずれか 1 つの場合についてのみ計算をする。これらの値はそれぞれ要素が 10 個、4 個、3 個の行ベクトルとして定められている。設定の基準はノイズのコードで定めた真のパラメーターが含まれるよう、前後の近い値を設定した。

```
%% 使うパラメーターの整形
```

```
I=bsxfun(@minus,t',t0);
```

```
fct=zeros(length(at),length(mt));
fctqt=zeros(length(at),length(mt));
qt=zeros(length(at));
```

```
for i=1:length(mt)
    for j=1:length(at)
        fct(i,j)=bsxfun(@rdivide,32*10^3*(1-0.63*((1-at(j)).^0.3)), mt(i).');
        fctqt(i,j)=bsxfun(@rdivide,16*10^3*((1-at(j)).^0.45-0.63*(1-at(j)).^0.75),mt(i).');
        qt(j)=2.0*(1-at(j)).^(-0.45);
```

```
    end
```

```
end
```

行列 I は、観測時間 50 秒を 1 秒 16000 個の点に分割した時間の列ベクトル t から、行ベクトル t0 の各要素を引いた行列であり、それぞれの列が t0 のそれぞれの要素を引いた列ベクトルとなっている。

次に与えたパラメーターを周波数  $f_c$  と持続時間  $Q$  に直す作業を行う。まず fct について説明しよう。初めに行の大きさが at の要素の数、列の大きさが mt の要素の数である空の行列を用意する。各要素にはパラメーターの異なる (4.4) の値を収納する。各行には異なる mt の値が、各列には異なる at の値が対応しており、 $4 \times 3 = 12$  個の異なる値を持った行列となっている。fctqt と qt も同様で、それぞれ (4.3) の  $f_c/Q$ 、 $Q$  を計算している。

```
%% S と E の中に入れる行列を作成、S と E に代入
```

```

N=zeros(length(t),length(t0),length(mt),length(at));
M=zeros(length(t),length(t0),length(mt),length(at));
H=zeros(length(t),length(t0));

for h=1:length(t0)
    for i=1:length(mt)
        for j=1:length(at)

            N(:,h,i,j)=2*pi*bsxfun(@times,I(:,h),fct(i,j));
            M(:,h,i,j)=-pi*bsxfun(@times,I(:,h),fctqt(i,j));
            H(:,h)=heaviside(I(:,h));

        end
    end
end

S=sin(N);
E=exp(M);

```

このパートでは (4.3) の  $\sin$  や  $\exp$  の中にいれるテンソルを作り、 $\sin$ 、 $\exp$  のテンソルを作る作業を行っている。まず  $N$  について説明しよう。はじめに  $80000 \times 10 \times 4 \times 3$  の空のテンソルを用意する。 $N$  の各要素には (4.3) の  $2\pi f_c(t-t_0)$  を計算した値が収納されている。 $M$  も同様に  $-\pi f_c(t-t_0)/Q$  の値が収納されたテンソルである。 $H$  はヘヴィサイド関数で、 $t-t_0=0$  の前後で 0、1 になるように設定している。最後にテンソル  $N$  と  $M$  を各関数の中に入れて、 $\sin$  と  $\exp$  のテンソルが完成する。

```

%% ht(t;t0,m,a)

ht=zeros(length(t),length(t0),length(mt),length(at));

for h=1:length(t0)
    for i=1:length(mt)
        for j=1:length(at)

            ht(:,h,i,j)=m*H(:,h).*E(:,h,i,j).*S(:,h,i,j);

        end
    end
end

```

定めた  $\sin, \exp, \text{heaviside}$  関数を使って、時刻  $t_0$  にやってくる  $10 \times 4 \times 3$  個のパラメーターを持った、振幅が  $10^{-20}$  であるテンプレートテンソルが完成する。

```

%% htf,htfu を定義

htf=zeros(NFFT,length(t0),length(mt),length(at));
htfhtf=zeros(1,length(t0),length(mt),length(at));

htfu=zeros(NFFT,length(t0),length(mt),length(at));
htfuhfu=zeros(1,length(t0),length(mt),length(at));

for h=1:length(t0)

```

```

for i=1:length(mt)
    for j=1:length(at)

        htf(:,h,i,j)=fft(ht(:,h,i,j),NFFT);
        htfhtf(:,h,i,j)=4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,conj(htf(:,h,i,j))),
htf(:,h,i,j)),Sn(:))))*dt;

        htfu(:,h,i,j)=bsxfun(@rdivide,htf(:,h,i,j),sqrt(htfhtf(:,h,i,j)));
        htfuhtfu(:,h,i,j)=4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,conj(htfu(:,h,i,j))),
htfu(:,h,i,j)),Sn(:))))*dt;

    end
end
end

```

このテンプレートに FFT を施し、

%% SNR を計算

```

SNR=zeros(1,length(t0),length(mt),length(at));

for h=1:length(t0)
    for i=1:length(mt)
        for j=1:length(at)

            SNR(:,h,i,j)=sqrt(bsxfun(@rdivide,4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,
conj(htfu(:,h,i,j)),sf(:)),Sn(:))))*dt,htfuhtfu(:,h,i,j)));

        end
    end
end

```

ここでは各パラメーターに対して、擬似重力波とテンプレートとの S/N を計算するテンソルを作っている。

%% max(SNR) を与える n,m を探す

```

[I i]=max(max(max(abs(SNR(1,:,:,:))));

[J j]=max(max(abs(SNR(1,:,:,:i))));

[SNRmax k]=max(abs(SNR(1,:,j,i)));

SNRmax=SNRmax
t0max=t0(k)
mtmax=mt(j)
atmax=at(i)

```

上で作った S/N テンソルの各要素の中で最大となる値を探している。解析的な計算において S/N は実数となるが、数値計算だと完全に実数とはならない。そのため虚部は不要なので、実部を取って最大値を求めている。この計算は、上から順に最大値を持つ at、最大値を持つ mt、最大値を持つ t0 を探し、全てのパラメーターで最大となった S/N を表示させるという計算である。

## 第 5 章

# 結果と考察

### 5.1 結果

4章で説明したコードを用いて、擬似インプット重力波の質量を  $400 \times 10^4 M_{sun}$ 、 $100 M_{sun}$ 、 $10 M_{sun}$  の 3つの場合に対して試した。それぞれの質量に対してテンプレートが擬似インプット重力波と正しいテンプレートを見つげられた場合に検出が可能であると仮定し、それぞれの質量で要求される振幅を見積もった。今回の解析で正しいテンプレートと呼んでいるのは 3つのパラメーター ( $t_0, a, M$ ) が  $(0.1, 0.98, m_1 \text{ or } m_2 \text{ or } m_3)$  の場合である。以降で結果を示す

$$(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = (0.98, 400 \times 10^4 M_{sun})$$

超大質量ブラックホールの場合、正しいテンプレートを与えた振幅の下限値は  $10^{-9}$  であった。このため KAGRA での検出は現行のセットアップではほぼ不可能と言える。

$$(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = (0.98, 100 M_{sun})$$

中間質量ブラックホールの場合、正しいテンプレートを与えた振幅の下限値は  $10^{-23}$  であった。リングダウンの振幅としても現実的であるため、KAGRA での検出は現実的であると言える。しかしターゲットとなる天体の位置、質量等々、マッチドフィルターを用いるためにパラメーターをあらかじめ知っておく必要があるという点に、困難がある。

$$(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = (0.98, 10 M_{sun})$$

低質量ブラックホールの場合、正しいテンプレートを与えた振幅の下限値は  $10^{-21}$  であった。この振幅を与えるリングダウン重力波はやや非現実的と言える。建設中の KAGRA のセットアップでは難しいかもしれないが、セットアップを変更し、1000Hz 付近での  $10^{-23}$  程度の感度を実現できれば、観測可能であるといえる。連星合体のイベントは電波天文学で多数確認されている。また発生頻度も高い。そのため中間質量ブラックホールの観測が抱えている、パラメーターが分からないという困難も問題にならない。そういった意味では現実的なターゲットソースと言える。

### 5.2 考察

今回のシミュレーションから、KAGRA でのブラックホールリングダウンの検出可能性は、あると言って良いだろう。観測可能であるソースは中間質量ブラックホール、または低質量ブラックホールである。しかしどちらの場合も現状では難しい。

中間質量ブラックホールの場合ブラックホールのパラメーターの範囲が絞れないと、実際の解析ではリングダウン波形を持つノイズが複数存在するため、候補となるテンプレートが多数見つかってしまうだろう。

一方低質量ブラックホールからのリングダウン重力波について、連星合体によって低質量ブラックホールが発生するというイベント全体としてみれば、有力なイベントと言える。何故ならば KAGRA をはじめ、第二世代型重力波検出器がターゲットとしているソースが、中性子星や低質量ブラックホールの連星フェイズから来る重力波であるためである。それに加えマージャーフェイズ、リングダウンフェイズ、これらを含めて 1つの重力波として解析をすれ

ば、ノイズとの差別化も可能なため S/N も向上すると考えられるので、有望な波源だといえる。

連星運動～連星合体～低質量ブラックホールリングダウンによる重力波の S/N を上げる方法として、特にリングダウンフェイズにおける改善策として、高調波を用いた解析が有望であると言える。ブラックホールリングダウンの解析は主に  $n=1$  の quasi-normal mode が用いられる。しかし前述のとおり、この場合リングダウンノイズとの見分けが困難だという弱点がある。ここに  $n=2, 3$  などの高調波成分を加えて解析を行うことで、リングダウンノイズとの差別化が可能となり、S/N の向上に繋がると考えられる。

## 付録 A

# Appendix A - シュバルツシルトブラックホール解の導出

ここではシュバルツシルトブラックホール解の導出を行う。シュバルツシルト解は Einstein 方程式に真空球対称という条件を要請することで得られる。真空球対称という条件は次の二つに分けられる。

$$\text{真空} \iff T_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\text{球対称} \iff \text{線素の } dx^i dx^j (i, j = \theta, \phi, i \neq j) \text{ の係数がゼロ} \quad (\text{A.2})$$

まず条件 (A.2) を確かめてみよう。線素を書き下すと

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{kl}dx^k dx^l + 2g_{0k}dx^0 dx^k + 2g_{1k}dx^1 dx^k \quad (\text{A.3})$$

( $k, l = 2, 3$ )

となる。 $\mu = 0, 1, 2, 3$  をそれぞれ  $ct, r, \theta, \phi$  に対応させて考えよう。 $\theta \rightarrow -\theta, \phi \rightarrow -\phi$  と変換すると、

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{kk}(dx^k)^2 - 2g_{12}dx^1 dx^2 - 2g_{0k}dx^0 dx^k - 2g_{1k}dx^1 dx^k \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで各計量が  $\theta, \phi$  によらないことを用いた。(A.4) とすることで、条件 (A.2) が成り立つ事がわかる。よって真空球対称解を与える計量による時空の線素は

$$ds^2 = -D(dx^0)^2 + A dr^2 + B d\Omega^2 + 2E dx^0 dr \quad (d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{A.5})$$

と書ける。ここで A~E は  $x^0$  と  $r$  の関数である。ここで次のような座標変換を考える。

$$dx^0 = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} dx'^0 + \frac{\partial x^0}{\partial r'} dr' \quad (\text{A.6})$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x'^0} dx'^0 + \frac{\partial r}{\partial r'} dr' \quad (\text{A.7})$$

この変換を (A.5) に適用して整理すると、 $(dx'^0 dr' \text{ の係数}) = 0, (d\Omega^2 \text{ の係数}) = (r')^2$  という条件を

$$-D \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial x^0}{\partial r'} + E \left( \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial r}{\partial r'} + \frac{\partial x^0}{\partial r'} \frac{\partial r}{\partial x'^0} \right) + A \frac{\partial r}{\partial x'^0} \frac{\partial r}{\partial r'} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$B = (r')^2 \quad (\text{A.9})$$

となるよう  $x'^0, r$  に課すことで与えられることが分かる。よって一般性を失うことなく (A.5) において  $E = 0, B = r^2$  としよ。

次にデイングルの公式を用いてアインシュタインテンソル  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$  の成分を計算する。デイングルの公式は次のように計量の対角成分だけが値を保つ場合、線素で表すと

$$ds^2 = -D(dx^0)^2 + A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2 + C(dx^3)^2 \quad (\text{A.10})$$

といった形に書ける場合の Einstein テンソルの各成分を計算した公式である。今回はこの公式を用いて計算する。

$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$  とすると、 $A, D$  は  $x^0, x^1$  の関数、 $B = r^2, C = r^2 \sin^2 \theta$  となる。この条件のもと、Einstein テンソルのゼロでない成分をすべて書き出していく。ただし今回は宇宙定数項をゼロとして計算した。

$$G_1^1 = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{r} \frac{D_{,1}}{D} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{2A} \left[ \frac{D_{,11}}{D} - \frac{1}{2} \left( \frac{D_{,1}}{D} \right)^2 + \frac{1}{r} \left( \frac{D_{,1}}{D} - \frac{A_{,1}}{A} \right) - \frac{1}{2} \frac{A_{,1} D_{,1}}{AD} \right] - \frac{1}{2D} \left[ \frac{A_{,00}}{A} - \frac{1}{2} \left( \frac{A_{,0}}{A} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{A_{,0} D_{,0}}{AD} \right] = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$G_0^0 = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{A_{,1}}{A} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$G_0^1 = \frac{A_{,0}}{rA^2} = 0 \quad (\text{A.14})$$

今真空を仮定しているから、 $G_{\mu}^{\nu} = 0$  である。

これらの式を解いていく。まず式 (A.14) より  $A$  は  $x^1$  だけの関数であることが分かる。式 (A.14) を整理して、

$$\frac{A_{,1}}{A(1-A)} = \frac{1}{r} \quad (\text{A.15})$$

が得られる。これを積分して

$$A = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (\text{A.16})$$

が得られる。 $m$  は積分定数である。 $A$  を (A.12) に代入して整理すると

$$\frac{D_{,1}}{D} = \frac{1}{r} (A - 1) = \frac{2m/r^2}{1 - 2m/r} \quad (\text{A.17})$$

となる。これを積分すると、 $t^0$  の関数である積分定数  $f(x^0)$  を用いて  $D$  は

$$D = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) f(x^0) \quad (\text{A.18})$$

となる。ここで

$$x'^0 = \int_0^{x^0} (f(x^0))^{1/2} dx^0 \quad (\text{A.19})$$

と座標変換する。

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} = 1 = \frac{\partial}{\partial x'^0} \int_0^{x'^0} (f(x^0))^{1/2} dx^0 = f(x'^0) \quad (\text{A.20})$$

だから、一般性を失うことなく  $f(x^0) = 1$  とおける。したがって  $D$  は

$$D = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \quad (\text{A.21})$$

となる。以上よりシュバルツシルト解が得られ、その線素は

$$ds^2 = -c^2 \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.22})$$

と与えられる。

## 付録 B

# AppendixB - カー・ブラックホール解の導出

ここではカーブラックホール解の導出を行う。カーブラックホールはアインシュタイン方程式を定常軸対称という条件を課すことで得られる厳密解である。いくつかの解法が存在するが、ここでは富田賢二 著の「相対性理論」に習い、ernst 方程式を解くことで kerr 解を導出する。まず定常軸対称な時空の計量は時間座標  $x^0$  と軸の周りの角度座標  $x^3$  に依存せず、 $x^1, x^2$  のみの関数で表せる。 $x^1$  は軸に垂直な方向の長さ、 $x^2$  は軸に沿った方向の長さを表す。このとき線素は一般に次の様に書ける。

$$ds^2 = -f(dx^0)^2 + e^\mu(dx^1)^2 + e^\nu(dx^2)^2 + l(dx^3)^2 + 2mdx^0 dx^3 \quad (\text{B.1})$$

上の式では  $dx^1 dx^2$  成分が現れない。これは等温座標系を選んだためである。この議論は中原 幹夫「理論物理学のための幾何学とトポロジー〈1〉」を参照。

$f, \mu, \nu, l, m$  は  $x^1, x^2$  の関数である。計量を行列表示で書くと

$$g_{\mu\nu}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & m \\ 0 & e^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^\nu & 0 \\ m & 0 & 0 & l \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

となる。また逆行列  $g^{\mu\nu}$  は  $g_{\mu\gamma}g^{\gamma\nu} = \delta_\mu^\nu$  より  $w \equiv fl - m^2$  として

$$g^{\mu\nu}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} -w^{-2}l & 0 & 0 & w^{-2}m \\ 0 & e^{-\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\nu} & 0 \\ w^{-2}m & 0 & 0 & w^{-2}m \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

である。 $g_{\mu\nu}$  の行列式  $g$  は

$$g = -w^2 e^{\mu+\nu} \quad (\text{B.4})$$

となる。これらの表式から真空における Einstein 方程式を、変分法を用いて計算しよう。Einstein 方程式の変分による導出は

$$\delta \int \left[ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} \right] d^4x = 0 \quad (\text{B.5})$$

で与えられる。この式の計算に必要なクリストッフェル記号は次の通りである。

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{-\mu} f_{,1} & , & & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \mu_{,1} & , & & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} e^{\nu-\mu} \nu_{,1} \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2} e^{-\mu} l_{,1} & , & & \Gamma_{03}^1 &= -\frac{1}{2} e^{-\mu} m_{,1} \\ \Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2} e^{-\mu} f_{,2} & , & & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} e^{\nu-\mu} \mu_{,2} & , & & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \nu_{,2} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} e^{-\nu} l_{,2} & , & & \Gamma_{03}^2 &= -\frac{1}{2} e^{-\nu} m_{,2} \end{aligned}$$

これらを (B.5) に代入すると、長い計算の結果変分式は次のように書ける。

$$\delta \int \left[ e^{(\nu-\mu)/2} \left( \frac{f_{,1}l_{,1} + (m_{,1})^2}{w} + 2w_{,1}\nu_{,1} \right) + e^{(\mu-\nu)/2} \left( \frac{f_{,2}l_{,2} + (m_{,2})^2}{w} + 2w_{,2}\mu_{,2} \right) \right] dx^1 dx^2 = 0 \quad (\text{B.6})$$

(B.6) において、まず  $l$  の変分  $\delta l$  にだけ注目すると

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{w} \left[ e^{(\nu-\mu)/2} \left( f_{,1}\delta l_{,1} - \frac{f_{,1}l_{,1} + (m_{,1})^2}{2w^2} f\delta l + \nu_{,1} \frac{f\delta l_{,1}}{w} \right) \right. \\ & \left. + e^{(\mu-\nu)/2} \left( f_{,2}\delta l_{,2} - \frac{f_{,2}l_{,2} + (m_{,2})^2}{2w^2} f\delta l + \mu_{,2} \frac{f\delta l_{,2}}{w} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ここで  $2w\delta w = f\delta l$  であることを用いた。次に部分積分を行い、境界値がゼロであることを使う。この段階で  $\mu = \nu$  とおくと、上式は

$$\int \left[ \left( \frac{f_{,1}}{w} \right)_{,1} + \left( \frac{f_{,2}}{w} \right)_{,2} + \frac{f}{2w} \left( \frac{(f,l) + (m,m)}{w^2} + 2\delta^2\nu \right) \right] \partial l dx^1 dx^2 = 0 \quad (\text{B.8})$$

となる。ここで

$$(\phi, \psi) \equiv \phi_{,1}\psi_{,1} + \phi_{,2}\psi_{,2} \quad (\text{B.9})$$

$$\partial^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \quad (\text{B.10})$$

と置いた。 $\delta l$  は任意の量なので、式 (B.8) が成立するためには

$$\left( \frac{f_{,1}}{w} \right)_{,1} + \left( \frac{f_{,2}}{w} \right)_{,2} + \frac{f}{2w} \left( \frac{(f,l) + (m,m)}{w^2} + 2\delta^2\nu \right) = 0 \quad (\text{B.11})$$

が必要である。これが  $\delta l$  に対する条件式である。同様にして  $\delta f$ 、 $\delta m$ 、 $\delta\mu$ 、 $\delta\nu$  に対して次の条件式が求まる。

$$\left( \frac{l_{,1}}{w} \right)_{,1} + \left( \frac{l_{,2}}{w} \right)_{,2} + \frac{l}{2w} \left( \frac{(f,l) + (m,m)}{w^2} + 2\delta^2\nu \right) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\left( \frac{m_{,1}}{w} \right)_{,1} + \left( \frac{m_{,2}}{w} \right)_{,2} + \frac{m}{2w} \left( \frac{(f,l) + (m,m)}{w^2} + 2\delta^2\nu \right) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$2w_{,11} = \Phi \quad (\text{B.14})$$

$$2w_{,22} = -\Phi \quad (\text{B.15})$$

ここで

$$\Phi \equiv w_{,1}\mu_{,1} - w_{,2}\mu_{,2} + \frac{1}{2w} [(f_{,1}l_{,1} + (m_{,1})^2) - (f_{,2}l_{,2} + (m_{,2})^2)] \quad (\text{B.16})$$

と置いた。また (B.14)+(B.15) から明らかに

$$w_{,11} + w_{,22} = 0 \quad (\text{B.17})$$

が成り立つ。この式に  $w = \sqrt{fl - m^2}$  を代入して、 $f$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $\mu$ 、 $\nu$  の条件式を使うと

$$\partial^2\nu = \frac{1}{2w^2} [(f,l) + (m,m)] \quad (\text{B.18})$$

という関係が導かれる。

ここで  $x^1 = w$  という座標変換を考えよう。この座標変換は  $x^1$  と  $x^2$  が

$$x^1 + ix^2 = g(x'^1 + ix'^2) \quad (\text{B.19})$$

と変換でき、この変換に対し線素は

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = \left| \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=x'^1+ix'^2}^2 ((dx'^1)^2 + (dx'^2)^2) \quad (\text{B.20})$$

とかわるので、(B.1) は形をかえない。よって  $x^1 = w$  としてよい。この座標を用いて  $f$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $\mu$ 、 $\nu$  の条件式を変換すると

$$\nabla^2 f - \frac{2f_{,1}}{w} = -\frac{f}{w^2} [(f, l) + (m, m)] \quad (\text{B.21})$$

$$\nabla^2 l - \frac{2l_{,1}}{w} = -\frac{l}{w^2} [(f, l) + (m, m)] \quad (\text{B.22})$$

$$\nabla^2 m - \frac{2m_{,1}}{w} = -\frac{m}{w^2} [(f, l) + (m, m)] \quad (\text{B.23})$$

$$\nu_{,1} = -\frac{1}{2w} [(f_{,1}l_{,1} + (m_{,1})^2) - (f_{,2}l_{,2} + (m_{,2})^2)] \quad (\text{B.24})$$

となる。ここで

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial w} \quad (\text{B.25})$$

である。また  $\nu_{,2}$  に対する式は真空中の Einstein 方程式の成分  $R_{12}$  から導かれ

$$\nu_{,2} = -\frac{1}{2w} (f_{,1}l_{,2} + f_{,2}l_{,1} + 2m_{,1}m_{,2}) \quad (\text{B.26})$$

となる。また  $\nu$  は関係  $\nu_{,1,2} = \nu_{,2,1}$  も満たす。以上より解くべき式は (B.21)~(B.26) となる。

ここで式の見通しを良くするために幾つか文字の置き換えをする。はじめに  $x^1 = w$ 、 $x^2 = z$ 、 $x^3 = \phi$  として、

$$e^\nu = f^{-1}e^{2\gamma}, \quad l = f^{-1}w^2 - f\omega^2, \quad m = f\omega \quad (\text{B.27})$$

と置き換える。これによって線素は次のように変更される。

$$ds^2 = -f(dx^0 - \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(dw^2 + dz^2) + w^2 d\phi^2] \quad (\text{B.28})$$

これらを式 (B.22)、(B.23) に代入することで、 $f$  と  $\omega$  の式を得る。

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - w^2 f^4 \nabla \omega \cdot \nabla \omega \quad (\text{B.29})$$

$$\nabla(w^{-2}f^2\nabla\omega) = 0 \quad (\text{B.30})$$

ただし  $\nabla = (\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2)$  である。 $\gamma$  に対する式は

$$\gamma_{,1} = \frac{1}{4w} \left[ \frac{w^2}{f^2} (f_{,1}^2 - f_{,2}^2) - f^2 (\omega_{,1}^2 - \omega_{,2}^2) \right] \quad (\text{B.31})$$

$$\gamma_{,2} = \frac{1}{4w} \left[ \frac{w^2}{f^2} f_{,1}f_{,2} - f^2 \omega_{,1}\omega_{,2} \right] \quad (\text{B.32})$$

である。さらに  $\omega$  を用いて、関数  $\phi$  を次のように置く。

$$\omega_{,1} = -\frac{w^2}{f^2} \phi_{,2} \quad (\text{B.33})$$

$$\omega_{,2} = \frac{w^2}{f^2} \phi_{,1} \quad (\text{B.34})$$

これらの式が (B.33) を満たすことは、代入することで分かる。またこのような  $\phi$  が見つかるためには上の二つの式が積分可能条件  $w_{,1,2} = w_{,2,1}$  を満たさなくてはならない。この条件を  $f$ 、 $\phi$  を用いて書けば、

$$f\nabla^2 = 2\nabla f \cdot \nabla \phi \quad (\text{B.35})$$

とあらわされる。また (B.33)、(B.34) を式 (B.29) に代入すると

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla \phi \cdot \nabla \phi \quad (\text{B.36})$$

となる。さらに

$$f + i\phi = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad (\text{B.37})$$

で変換すると、(B.35)、(B.36) より

$$(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi = 2\xi^*\nabla\xi \cdot \nabla\xi \quad (\text{B.38})$$

という 1 つの式にまとめられる。ただし  $\nabla^2\xi \equiv \xi_{,11} + \xi_{,1}/w + \xi_{,22}$  とした。また、 $f$ 、 $\omega$ 、 $\gamma$  と  $\xi$  との関係は次の通りである。

$$f = \text{Re}\left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right) \quad (\text{B.39})$$

$$\omega_{,1} = -\frac{2w}{(\xi\xi^* - 1)^2} \text{Im}[(\xi^* + 1)^2\xi_{,2}] \quad (\text{B.40})$$

$$\omega_{,2} = \frac{2w}{(\xi\xi^* - 1)^2} \text{Im}[(\xi^* + 1)^2\xi_{,1}] \quad (\text{B.41})$$

$$\gamma_{,1} = \frac{w}{(\xi\xi^* - 1)^2} (\xi_{,1}\xi^*_{,1} - \xi_{,2}\xi^*_{,2}) \quad (\text{B.42})$$

$$\gamma_{,2} = \frac{w}{(\xi\xi^* - 1)^2} \text{Re}(\xi_{,1}\xi^*_{,2}) \quad (\text{B.43})$$

無限遠方でミンコフスキー時空に漸近するような真空解は、 $\xi$  を次のように置くことで得られる。

$$\xi = px - iqy \quad (\text{B.44})$$

ここで  $x, y$  は偏重型楕円体座標で、 $p$  と  $q$  は

$$p^2 + q^2 = 1 \quad (\text{B.45})$$

を満たす定数である。変換 (B.44) が式 (B.38) を満たすことを確かめるには

$$\nabla^2\xi = \frac{1}{x^2 - y^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 - 1) \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (1 - y^2) \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{B.46})$$

$$(\nabla\xi)^2 = \frac{1}{x^2 - y^2} \left[ (x^2 - 1) \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 + (1 - y^2) \left( \frac{\partial\xi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{B.47})$$

の関係を用いる。変換 (B.44) を (B.46)、(B.47) に代入し、式 (B.38) の両辺を計算すると一致することが分かるので、確かに変換 (B.44) は式 (B.38) を満たす。

さて変換によって  $f$  は

$$\frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{(px + 1)^2 + q^2y^2} \quad (\text{B.48})$$

となる。また  $\omega$ 、 $\gamma$  を計算して

$$e^{2\gamma} = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{p^2(x^2 - y^2)} \quad (\text{B.49})$$

$$\omega = -22mq(1 - y^2) \frac{px + 1}{p^2(x^2 - 1) - q^2(1 - y^2)} \quad (\text{B.50})$$

となる。ここで次の様に定義される

$$r = \sigma x + \frac{\sigma}{p}, \quad \cos\theta = y \quad (\text{B.51})$$

ポイヤール・リンドスキンの座標  $(r, \theta)$  を用いて書き直すと

$$f = 1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} \quad (\text{B.52})$$

$$e^{2\gamma} = \frac{r(r - 2m) + a^2 \cos^2\theta}{(r - m)^2 - (m^2 - a^2) \cos^2\theta} \quad (\text{B.53})$$

$$\omega = -\frac{2mar \sin^2\theta}{r(r - 2m) + a^2 \cos^2\theta} \quad (\text{B.54})$$

となる。ただし

$$m \equiv \frac{\sigma}{p}, \quad a \equiv \frac{\sigma q}{p} = mq \quad (\text{B.55})$$

と置いた。また  $p^2 + q^2 = 1$  から

$$|a| \leq m \quad (\text{B.56})$$

という条件が課される。以上よりカー時空中における線素は

$$\begin{aligned} ds^2 = & -(dx^0)^2 + \frac{2mr}{\Sigma} (dx^0 + a \sin^2 \theta d\phi)^2 \\ & + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \Sigma \left( d\theta^2 + \frac{dr^2}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

と表される。ただし

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (\text{B.58})$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr \quad (\text{B.59})$$

と置いた。

## 付録 C

# AppendixC - Winer-Khintchine の定理

3章で導入した noise spectral density  $S_n$  の定義を紹介しておく。統計量  $n(t)$  に対して自己相関関数  $C(\tau)$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2+\tau} n^*(t) n(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2+\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}^*(f) e^{-2\pi i f t} df \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(f') e^{2\pi i f' (t+\tau)} df' \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f') \delta(f' - f) e^{2\pi i f' \tau} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{|\tilde{n}(f)|^2}{T} e^{2\pi i f \tau} \\
 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} df S_n(f) e^{2\pi i f \tau} \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

$S_n$  は

$$S_n(f) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{n}(f)|^2}{T} \tag{C.2}$$

と定義した。この式は自己相関関数と（ノイズの）密度スペクトルがフーリエ変換で結びついている事を示している。

## 付録 D

# AppendixD - 使用したコード

## D.1 干渉計のコード

```
% Sample Program (http://www.mathworks.co.jp/help/ja\_JP/techdoc/ref/fft.html)
clear all
clf

Fs = 16000;           % Sampling frequency (Hz)
T = 1/Fs;            % Sample time (s)
Lt = 5;              % Time length (s)
L = Fs*Lt;           % Length of signal
t = (0:L-1)*T;       % Time vector

dt=T;
tau=0.1;             %% arrival time
m=m_1 or m_2 or m_3;           %% M/Msun
a=0.98;              %% ker parameter

fc=32*10^3*(1-0.63*((1-a)^0.3))*m^(-1);  %%1/fc>Δ f
q=2.0*(1-a)^(-0.45);

% signal
h = 10^(-k)*heaviside(t-tau).*exp(-pi*fc/q*(t-tau)).*sin(2*pi*fc*(t-tau));
y1 = 1e-23*randn(size(t));    % shot noise darm
y2 = 1e-24*randn(size(t));    % shot noise carm
y3 = 1e-9/3000*randn(size(t)); % seis noise x at 1Hz
y4 = 1e-9/3000*randn(size(t)); % seis noise y zt 1Hz
y5 = 1e-22*randn(size(t));    % mirror thermal noise x zt 1Hz
y6 = 1e-22*randn(size(t));    % mirror thermal noise y zt 1Hz
y7 = 1e-20*randn(size(t));    % laser freq noise at CARM at 1Hz (MC ignored)

NFFT = 2^nextpow2(L); % Next power of 2 from length of y
H = fft(h,NFFT);
Y1 = fft(y1,NFFT);
Y2 = fft(y2,NFFT);
Y3 = fft(y3,NFFT);
```

```

Y4 = fft(y4,NFFT);
Y5 = fft(y5,NFFT);
Y6 = fft(y6,NFFT);
Y7 = fft(y7,NFFT);
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
f2 = Fs/2*linspace(0,2,NFFT);

cp = 200; %DARM cavity pole
cp2 = 10; %CARM cavity pole
z0=ifft(H,NFFT);
z1=ifft(Y1/cp.*sqrt(cp^2+f2.^2),NFFT);
z2=ifft(Y2/cp2.*sqrt(cp2^2+f2.^2),NFFT);
z3=ifft(Y3./sqrt(1+f2.^12),NFFT); % 3-stage pendulum
z4=ifft(Y4./sqrt(1+f2.^12),NFFT); % 3-stage pendulum
z5=ifft(Y5./sqrt(1+f2),NFFT);
z6=ifft(Y6./sqrt(1+f2),NFFT);
z7=ifft(Y7./sqrt(1+f2.^2),NFFT);

yd0=z0+z1+(z3-z4)+(z5-z6);
yc0=z2+(z3+z4)+(z5+z6)+z7;
yd=yd0*0.99+yc0*0.01;
yc=yc0*0.99+yd0*0.01;

%% s(t),n(t) を定義

s=yd;

n=s-z0;

%% h^(f),n^(f),s^(f) を定義 (hist(real(nf),100) で nf のヒストグラムを確認)

hf=fft(h,NFFT);

nf=fft(n,NFFT);

sf=fft(s,NFFT);

%% hf を規格化→ hf_u / S_n を定義

Sn=abs((fft(n)/sqrt(NFFT))); %% S_n=2*<|nf|^2>*dt

hfhf=4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,conj(hf(:)),hf(:)),Sn(:))))*dt; %% int=sum*dt

hf_u=hf/sqrt(hfhf);

%% OptimalFilter での SNR を計算

```

```
SNRopt=sqrt(4*real(sum(bsxfun(@divide,bsxfun(@times,conj(sf(:)),hfu(:)),Sn(:))*dt));

loglog(f2, Sn)
axis([10^(-5),10^4,5e-25,5e-10]);
title('DARM noise')
xlabel('freq (Hz)')
ylabel('noise spectrum (1/rtHz)')
```

## D.2 テンプレートのコード

% テンプレのパラメーターは 12 列の横ベクトルに格納。3 つの周波数の塊が各質量に分並んでいる。

```
t0=[0.0996:0.0001:0.1005]; % arrival time
mt=m_1 or m_2 or m_3 *[0.8 0.9 1 1.1]; % M/Msun
at=[0.97:0.01:0.99]; % ker parameter

% 使うパラメーターの整形

I=bsxfun(@minus,t',t0);

fct=zeros(length(at),length(mt));
fctqt=zeros(length(at),length(mt));
qt=zeros(length(at));

for i=1:length(mt)
    for j=1:length(at)

        fct(i,j)=bsxfun(@divide,32*10^3*(1-0.63*((1-at(j)).^0.3)), mt(i).');
        fctqt(i,j)=bsxfun(@divide,16*10^3*((1-at(j)).^0.45-0.63*(1-at(j)).^0.75),mt(i).');
        qt(j)=2.0*(1-at(j)).^(-0.45);

    end
end

% S と E の中に入れる行列を作成、S と E に代入

N=zeros(length(t),length(t0),length(mt),length(at));
M=zeros(length(t),length(t0),length(mt),length(at));
H=zeros(length(t),length(t0));

for h=1:length(t0)
    for i=1:length(mt)
        for j=1:length(at)

            N(:,h,i,j)=2*pi*bsxfun(@times,I(:,h),fct(i,j));
            M(:,h,i,j)=-pi*bsxfun(@times,I(:,h),fctqt(i,j));
            H(:,h)=heaviside(I(:,h));
```

```

        end
    end
end

S=sin(N);
E=exp(M);

%% ht(t;t0,m,a)

ht=zeros(length(t),length(t0),length(mt),length(at));

for h=1:length(t0)
    for i=1:length(mt)
        for j=1:length(at)

            ht(:,h,i,j)=m*H(:,h).*E(:,h,i,j).*S(:,h,i,j);

        end
    end
end

%% htf,htfu を定義

htf=zeros(NFFT,length(t0),length(mt),length(at));
htfhtf=zeros(1,length(t0),length(mt),length(at));

htfu=zeros(NFFT,length(t0),length(mt),length(at));
htfuhtfu=zeros(1,length(t0),length(mt),length(at));

for h=1:length(t0)
    for i=1:length(mt)
        for j=1:length(at)

            htf(:,h,i,j)=fft(ht(:,h,i,j),NFFT);
            htfhtf(:,h,i,j)=4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,conj(htf(:,h,i,j)),
            htf(:,h,i,j)),Sn(:))))*dt;

            htfu(:,h,i,j)=bsxfun(@rdivide,htf(:,h,i,j),sqrt(htfhtf(:,h,i,j)));
            htfuhtfu(:,h,i,j)=4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,conj(htfu(:,h,i,j)),
            htfu(:,h,i,j)),Sn(:))))*dt;

        end
    end
end

%% SNR を計算

SNR=zeros(1,length(t0),length(mt),length(at));

```

```
for h=1:length(t0)
    for i=1:length(mt)
        for j=1:length(at)

            SNR(:,h,i,j)=sqrt(bsxfun(@rdivide,4*real(sum(bsxfun(@rdivide,bsxfun(@times,
conj(htfu(:,h,i,j)),sf(:)),Sn(:))))*dt,htfuhtfu(:,h,i,j)));

            end
        end
    end

%% max(SNR) を与える n,m を探す

[I i]=max(max(max(abs(SNR(1, :, :, :)))));

[J j]=max(max(abs(SNR(1, :, :, i))));

[SNRmax k]=max(abs(SNR(1, :, j, i)));

SNRmax=SNRmax
t0max=t0(k)
mtmax=mt(j)
atmax=at(i)
```

## 参考文献

- [1] Michael Maggiore 「Gravitational Waves : volume1 THEORY AND EXPERIMENTS」
- [2] Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson 「Gravitational-Wave Physics and Astronomy」
- [3] Steven Weinberg 「GRAVITATION AND COSMOLOGY」
- [4] 内山龍雄 「一般相対性理論」
- [5] 富田憲二 「相対性理論」
- [6] Luc Blanchet 「SECOND—POST-NEWTONIAN GENERATION OF GRAVITATIONAL RADIATION」 (1995)
- [7] Luc Blanchet 「Gravitational waveforms from inspiralling compact binaries to second-post-Newtonian order」 (1996)
- [8] Luc Blanchet 「Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries」 (2006)
- [9] E.W.Leaver 「An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes」 (1985)
- [10] Fernando Echeverria 「Gravitational-wave measurements of the mass and angular momentum of a black hole」 (1989)
- [11] Kentaro Somiya 「LCGT and the global network of gravitational-wave observation」

# 謝辞

本論文を書くにあたり、多くの方々に助けていただきました。この場を借りて皆様に感謝の意をお伝えできればと思います。

まずはじめに指導教官である宗宮健太郎准教授、先生には数えればきりがなほご迷惑をお掛けしました。気がつけば研究室に所属してもう三年が経ちます。充実した、楽しい三年間でした。研究室に入って間もない頃の自分からは考えられませんが、今や卒業するのが寂しいとすら思います。あれやこれやとこの三年のことを思い返していますが、書きたいことがたくさん浮かんできます。全て書くには骨が折れるので、最も印象に残っているワルシャワの学会に参加させていただいたことに絡め、感謝をお伝えようと思います。4年生でもあるにも関わらず、私を学会に連れて行って下さりありがとうございました。一週間という短い間ではありましたが、ポーランドの町並みや風景や学会の様子がありありと思い出せます。それ程に密度の高い時間でした。それだけでなく研究という世界に触れられた貴重な経験でした。この経験は宗宮研に入ったからこそできた経験に違いありません。そのような機会を下さったことに深く深く感謝しております。本当に三年間お世話になりました。宗宮研がこれからも宗宮研らしくあり続けてくれることを願ってやみません。重ねてありがとうございました。

藤本眞克藤本客員教授、藤本先生からは行き詰まった時に的確なアドバイスをいただきました。私は理解力に乏しく、先生のご説明を中々理解できずにいても、根気強く付き合っただけのおかげで研究を前進させることが出来ました。ありがとうございました。

伊藤洋介特任助教には、データ解析の基礎を教えて頂きました。毎週本郷に通い、右も左も分からない状況で宇宙論のやデータ解析の議論についていくのは骨が折れましたが、おかげさまで本論文を執筆することが出来ました。ありがとうございました。

神田展行教授、大阪市立大ではお世話になりました。それまではデータ解析のコードが全く書けずにいましたが、先生に教わって驚くほど前進させることができました。ありがとうございました。

須佐友紀先輩、今年一年は同じ部屋だったこともあり、特にお世話になりました。3階での研究生活が快適であったのは、須佐先輩が部屋を綺麗に保っていて下さったおかげだということは自明です。時にはくだらない話に、時には物理の議論に付き合っ頂き、ありがとうございました。

上田慎一郎先輩、もう先輩は卒業されましたが、二年間お世話になりました。上田先輩とは共にデータ解析のゼミに参加し、就職活動を経験しました。上田先輩の率直な意見を言える強さと洞察力を尊敬しております。私も上田さんを見習って率直に言うべきズバツと言えるようになります。ありがとうございました。

斎藤那菜先輩、斎藤さんの素敵な笑顔のお陰で研究室が明るくなりました。私のくだらない話に笑ってくれてありがとうございました。

加藤淳平君、加藤くんとは入学以来の付き合いなので思い出がたくさんあります。地元が近いせいもあってか、余計に親しみを感じています。加藤くんの魅力は頭が良いという事は然ることながら、その優しさだと信じて疑いません。社会に出てもかわることなく、そのままいて欲しいなあと思います。別の会社、業界に進むことになりましたが、きっとお付き合いはこれからもあると信じています。ですのでこれからも宜しく願います。6年間ありがとうございました。

糸田綾香さん、糸田さんは人として尊敬すべき方です。こんなことをこういった場を借りて言うのは変だと思いますが、私も糸田さんのような正しい人間になれるよう、日々努力していきます。またいつもくだらない話に付き合わせてしまってすみませんでした。2年間ありがとうございました。

矢野和城君、矢野くんと誕生日が同じだと知った時はただならぬものを感じました。それはそうと矢野くんはクリエイティブですね。矢野くんの素晴らしいところは、そのクリエイティブ性を発揮した気遣いができることだと思います。来年から研究室は少しさみしくなってしまうかもしれませんが、持ち前のクリエイティブさを発揮して、どうか研究室を引っ張って行ってください。そういえばこれから就職活動ですね。何か力になれることがあれば気兼ねなく声をか

けて下さい。2年間ありがとうございました。

熱田将君、熱田くんの温和さには救われることが多々ありました。また一緒に歌いましょう。ありがとうございました。

片岡優君、片岡くんの聡明さには常々舌を巻いております。私が勉強を教えて欲しいくらいでした。それはそれとして出張もあったせいであまり接する機会がありませんでしたが、卒業しても遊びに行くのでその時は趣味の話をしましょう。短い間でしたがありがとうございました。

その他にも学科の友人、データ解析でお世話になった方々、天文台でお世話になった方々などなど、多くの方々のご支援のお陰で本論文を書くことができました。最後となりましたが、改めまして感謝申し上げます。ありがとうございました。