

# KAGRA 用アウトプットモードクリーナーの デザイン研究およびプロトタイプ制御実験

東京工業大学大学院 理工学研究科 基礎物理学専攻 宗宮研究室

学籍番号 14M01229

矢野 和城

2016年3月16日

# はじめに

1665年にNewtonが万有引力の法則を発表したころ、重力は質量をもつ物体がその質量に比例して互いに引き合う力であると信じられてきた。しかし1915年、Einsteinが一般相対性理論を発表し、時空という概念によって重力を説明できるようになった。重力波とは、一般相対性理論からその存在が予言されている時空の歪みを伝えるさざ波である。1978年、J.H.TaylorとR.A.Hulseが行った連星パルサーPSR1913+16の観測から重力波の存在が間接的に証明されたが、重力波は物質との相互作用が非常に小さいため、2016年の現在、その直接的な観測はなされていない。重力波の直接検出を目指すことは、一般相対性理論が検証されるだけに留まらず、逆にその高い透過性を利用した”重力波天文学”という新たな天文学の開拓にもつながると期待されている。

重力波の検出方法には様々なものがあるが、Michelson干渉計を基本としたレーザー干渉計を用いたものが主流である。重力波は自由質点間の距離を伸び縮みさせるという特性をもつため、重力波による微小な距離の変化を光の干渉の変化としてみることができる。重力波の信号は非常に小さく、検出器の感度は様々な雑音に制限されている。したがって重力波の初検出成功の鍵は、どれだけ信号を増幅し、どれだけ雑音を低減できるかであり、どのようにしてそれらを実現するかが、重力波検出の最大のテーマだといえる。

このような背景から、今世界中で最先端の技術を導入したレーザー干渉計型重力波検出器が稼働、建設されており、重力波の初検出を目指している。日本でも岐阜県の神岡鉱山内に大型低温重力波望遠鏡KAGRAが建設され、現在テスト運転のための準備が進んでいる。KAGRAの感度は主に量子雑音と呼ばれる雑音に制限されている。光が光子の集まりであることに起因するこの雑音を低減するため、KAGRAではアウトプットモードクリーナー(OMC)を搭載する予定である。OMCとは、干渉計から重力波信号を持って出てきた光から高次モード等の余分な光を取り除く役割をもつ光学系であり、そのデザイン設計はKAGRAの目標感度に到達するための重要な鍵となる。

本修士論文では、KAGRA用OMCの各光学パラメータを検証するために行った数値シミュレーションの結果、およびその安定的な動作のための制御方法確立を目標としたプロトタイプOMCの制御実験結果について述べる。シミュレーションにおいて、我々は鏡の表面粗さを表したミラーマップを用いて、光がKAGRAの出力ポートでどの高次モードを伴って出力されるかを計算し、その結果からKAGRA用OMCの光学パラメータを検証した。また、プロトタイプ実験においては、OMCをその光学定盤ごとサスペンションで懸架した状態でOMCの長さ制御を行った。

# Abstract

The times when Newton announced the law of universal gravitation in 1665, people believed the gravitation is the power that objects with mass pull against each other. However, in 1915 Einstein announced the general relativity, and people became to be able to explain gravity by a concept called the space-time. Gravitational wave is the ripple on a space-time and derived from the Einstein's theory. In 1978, the existence of the gravitational wave was proved indirectly by J.H.Taylor and R.A.Hulse from the observation of the binary pulsar PSR1913+16, but nobody detect it directly still now. Because the gravitational wave has very small interaction with the material. First detection of the Gravitational wave is expected not only the verification of the general relativity but also pioneering the gravitational wave astronomy using the high transmittance of it.

In the various detection method of the gravity wave, the laser interferometer based on the Michelson interferometer is mainstream. We can observe a change of the minute distance by the gravitational wave as a change of the interference of light, because the gravitational wave has a characteristic to let the distance between free masses stretch and contract. The signal of the gravitational wave is very small, and the sensitivity of the detector is limited for various noises. Therefore, the key to success of the first detection of the gravitational wave and the main theme of the detection of the gravitational wave are how much we amplify the signal and reduce the noise.

From such a background, we operate and build the laser interferometer type detectors with the highest technique all over the world now, and we aim at the first detection of the gravitational wave.

In Japan large cryogenic gravitational telescope KAGRA has been built inside Kamioka mine at Gifu prefecture, and we push forward preparations for the test driving now. The sensitivity of KAGRA is limited mainly by quantum noise which is caused by light being the cluster of the photon. In order to reduce the quantum noise level, KAGRA employs an output mode-cleaner (OMC), which filters out junk light to clean up the signal and the reference light at the signal extraction port. The proper design of the OMC is a key to achieve the target sensitivity of KAGRA.

In this master thesis, we present two results. One is the final result of numerical simulations, from which we determined the optical parameters of the KAGRA OMC. The other one is the latest results of our prototype experiment, the goal of which is to establish the length control scheme of the OMC. In the simulation part, I use the simulation software FINESSE with mirror maps created with a random function and a measured spectrum and I calculate which high order mode of the light comes to the signal extraction port from the interferometer. In the experiment part, I control the length of the OMC suspended with its breadboard and checked the performances of it.

# 目次

はじめに	i
Abstract	ii
第 1 章 重力波望遠鏡	1
1.1 重力波	1
1.2 レーザー干渉計型検出器	3
1.3 検出器の感度と量子雑音	10
第 2 章 干渉計の制御	15
2.1 フィードバック制御	15
2.2 変調と復調	18
第 3 章 KAGRA アウトプットモードクリーナー	21
3.1 KAGRA	21
3.2 DC readout	23
3.3 Gaussian ビームと高次モード	24
3.4 要求値	25
第 4 章 デザイン研究	27
4.1 Advanced LIGO でのデザイン決定方法	27
4.2 高次モードの重み付け	28
4.3 最適パラメータの決定	30
4.4 OMC 前後の比較	32
第 5 章 プロトタイプ実験	35
5.1 光学系のセットアップ	35
5.2 光学系の制御	42
5.3 OMC の性能テスト	47
第 6 章 結論	49
付録 A 光線行列	50
参考文献	52





# 第 1 章

## 重力波望遠鏡

Einstein は 1916 年に発表した一般相対性理論の中で、重力場を記述する Einstein 方程式を導いた。重力波は Einstein 方程式の波動解であり、自由質点間の距離を変化させる性質をもつ。重力波望遠鏡は、この距離の変化を検出することによって重力波が地球に到来したことを知らせる。本章では、現在重力波望遠鏡の主流となっているレーザー干渉計型重力波検出器について述べる。

### 1.1 重力波

#### 重力波の導出

Einstein 方程式は以下のように記述される。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

ここで  $G$ 、 $c$  はそれぞれ重力定数、光速であり、 $T_{\mu\nu}$ 、 $G_{\mu\nu}$  はそれぞれエネルギー運動量テンソル、Einstein テンソルと呼ばれるものである。式 (1.1) の左辺を構成する  $G_{\mu\nu}$  は、時空の曲がり具合を表す項による複雑な式を一つにまとめたものであり、右辺はエネルギーや運動量の密度を表している。ここで、エネルギーや運動量と質量は等価であると考えてよい。つまり Einstein 方程式とは、質量の密度分布によって時空の曲がり具合がどのように変化するかを求める方程式であり、これはまさに重力場を記述するものである。

Einstein 方程式から、質量が移動したならば、それに応じて周囲の時空の歪み方も変化すると考えることができる。ここで、電磁波の発生を思い起こしてもらいたい。電荷は、静止または等速運動している限り、周りの静電ポテンシャルに従って運動している。しかし、電荷がその速度を変えて、つまり加速度運動をした場合には、その変化の情報を持った電磁波が発生するのであった。電磁波と同様に、質量をもった物質が加速度運動をするとき、それに応じて変化するエネルギーや運動量の情報を持った時空の歪みが伝播する現象が存在し、この歪みを重力波と呼ぶ。詳しい導出過程については「重力波をとらえる」[1] の第 2 章を参考にしていきたい。

### 重力波の特性

平坦な時空に対して重力波によって生じる時空の摂動項を  $h_{\mu\nu}$  とすると、重力波の進行方向を  $z$  軸にとったとき、重力波解は次のように書ける。

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik(ct-z)} \tag{1.2}$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_+ & \bar{h}_\times & 0 \\ 0 & \bar{h}_\times & -\bar{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ただし、 $A_{\mu\nu}$  は振幅を表すテンソル、 $k$  は波数である。この式から、重力波が横波であること、そして光速で伝播することがわかる。また、 $h_+$ 、 $h_\times$  は 2 つの独立な偏光モードを表しており、それぞれプラスモード、クロスモードと呼ぶ。

$z$  方向から重力波が入射した場合、距離  $\epsilon^i$  だけ離れた 2 質点間の固有距離は次のように変化する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\epsilon^x \\ \delta\epsilon^y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \\ &= \frac{1}{2} h_+ \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} + \frac{1}{2} h_\times \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで、第一項と第二項はそれぞれ重力波のプラスモードとクロスモードの偏波を表している。例えばプラスモードの重力波は、 $\epsilon^i$  だけ離れた 2 質点間の固有距離を、 $h_+ \epsilon^i / 2$  だけ変化させるのである。これらの質点の動きを図示すると、図 1.1 のようになる。今後本論文では、重力波の振幅  $h_+$  や  $h_\times$  を単に  $h$  で表す。

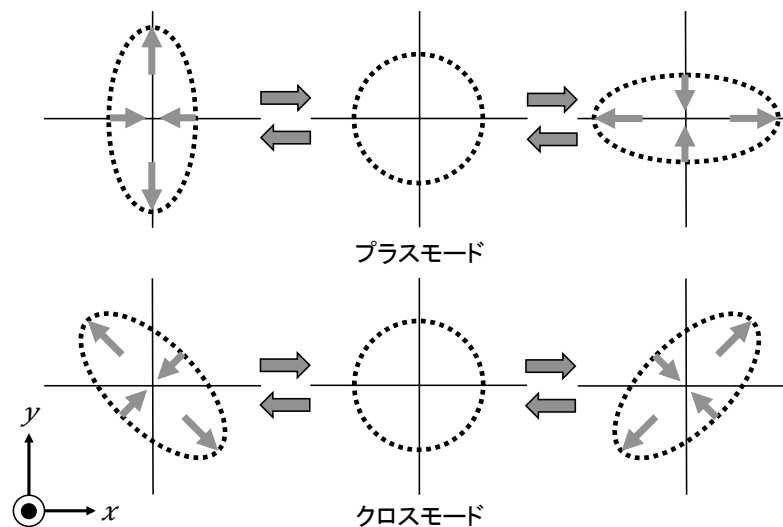


図 1.1 重力波の偏波：重力波にはプラスモードとクロスモードの 2 つの偏波がある。

### 重力波源

これまでの話から、質量をもって加速度運動する物体からは重力波が放出されていることが分かった。しかし、重力波の振幅は非常に小さいため、観測が期待される重力波源は質量スケールのより大きい天体

現象に限られてくる。予想されている発生頻度や検出器の感度などから、観測可能な重力波源としては主に中性子星連星の合体やブラックホール連星の合体、超新星爆発などが考えられる。重力波がその波形まで含めて観測できれば、重力波源までの距離や質量、Hubble 定数などを求めることができる。

例えば、1.4 太陽質量で地球から 20 Mpc 地点にある中性子星連星が、周波数 400 Hz で互いに 20 km まで近づいているとき (インスパイラルレンジ) に発生する重力波の振幅  $h$  は、 $10^{-21}$  程度である。太陽系にこの重力波がやってきた場合、地球と太陽間の固有距離  $1.5 \times 10^{11}$  km を水素原子の直径程度しか変化させない。

## 重力波の間接証明

1974 年、マサチューセッツ大学の Joseph Taylor と Russell Hulse は、プエルトリコのアレジボにある巨大電波望遠鏡を用いて、連星パルサー PSR1913+16 を発見した。さらにこの発見から 5 年後、2 人は連星パルサーの軌道公転周期が短くなっていくことを観測した。そしてこの公転周期の減少率を検証した結果、一般相対性理論から計算された理論値と誤差 1% 以内で一致したことから、重力波の存在を間接的に証明したのである。1993 年、二人はこの業績が認められノーベル賞を受賞した。

また、2014 年にはハーバード大学などからなる研究グループ BICEP2 が、南極のマイクロ電波望遠鏡を用いてインフレーション起源の重力波を観測したと発表した。最終的に、重力波と思われた結果は他起源のものであると結論づけられたが、現在、重力波分野は世界から注目され、その直接検出が期待されていると言えるだろう。

## 1.2 レーザー干渉計型検出器

### Michelson 干渉計

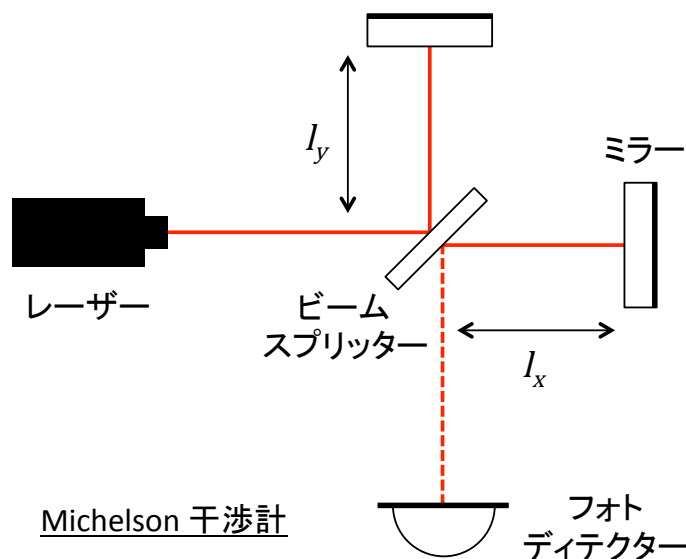


図 1.2 Michelson 干渉計：重力波がやってくることによる干渉光の変化を検出する。

レーザー干渉計型重力波検出器の基本構成は、図 1.2 のような Michelson 干渉計である。Michelson 干渉計とは、レーザー光源から出た光をビームスプリッターによって直交する 2 本の光路、 $x$  方向と  $y$  方向に沿って往復させた後、再びビームスプリッターで再結合し干渉させる装置である。以降、レーザー光がはじめにビームスプリッターを透過する方向を  $x$  方向、反射する方向を  $y$  方向とし、それぞれ X アーム、Y アームと呼ぶ。ミラーを自由質点として扱えるようにしたとき、レーザー干渉計に重力波が入射すると、重力波のもつ性質によってビームスプリッターからミラーまでの固有距離が変化する。その結果、ビームスプリッターに戻ってきた 2 つの光の間に位相差が生じる。この位相差によって生じた光の強度変化を光検出器で検出するというのが、レーザー干渉計の簡単な原理である。

レーザー光源から出た波長  $\lambda$  の入射波の電場を  $E_{\text{in}}$  と与えたとき、Michelson 干渉計を通してビームスプリッターで再結合した後の光波の電場  $E_{\text{out}}$  は、X アームを折り返してきた光  $E_x$  と Y アームを折り返してきた光  $E_y$  の重ね合わせとして次のよう書ける。

$$E_{\text{out}} = E_x e^{i\phi_x} + E_y e^{i\phi_y} \quad (1.5)$$

ここで、 $\phi_x$ 、 $\phi_y$  は、それぞれビームが X アーム、Y アームを折り返して戻ってくるまでに生じる位相変化成分である。

光検出器に流れる光電流  $I_{\text{out}}$  は電場の強度に比例するので、

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{2} P_{\text{in}} (1 - \cos \phi_-) \quad (1.6)$$

となる。ただし  $P_{\text{in}} = |E_0|^2$ 、 $\phi_- = \phi_x - \phi_y$  とした。

実際の Michelson 干渉計では、ミラーの反射率の違いなどによって出力ポートで完全な暗縞にはならず、式 (1.6) から少しずれるため、強度の最大値  $P_{\text{max}}$  と最小値  $P_{\text{min}}$  を用いて次のようになる。

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}{2} - \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{2} \cos \phi_- \quad (1.7)$$

ここで、 $P_{\text{max}}$  と  $P_{\text{min}}$  はそれぞれ干渉縞の明縞と暗縞に対応し、以下で表されるコントラスト  $C$  によって干渉縞の明瞭度を表す指標となる。

$$C \equiv \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}} \quad (1.8)$$

あらかじめ Michelson 干渉計のフォトディテクター側にレーザー光が来ないようにしておけば、重力波による信号のみを検出することができ、この状態をダークフリンジと呼ぶ。また、今後簡単のために Michelson 干渉計のレーザー側をシンメトリックポート、フォトディテクター側をアンチシンメトリックポート (AS ポート) と呼ぶ。シンメトリックポートについては、干渉計の反射光がくることからリフレクションポート (REFL ポート) とも呼び、今後はこちらを使うことにする。

## 重力波による位相差の検出

$x$ - $y$  平面内に固定した Michelson 干渉計に、 $z$  軸方向に進むプラスモードの重力波が入射する場合を考える。入射する重力波の振幅  $h(t)$  が十分小さいとき、光が  $x$  軸、 $y$  軸上を往復するときに生じる位相変化は、レーザーの波長  $\Omega = 2\pi c/\lambda$  を用いて、それぞれ次のように書ける。

$$\phi_x = \frac{2l_x \Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_x/c}^t h(t') dt' \quad (1.9)$$

$$\phi_y = \frac{2l_y \Omega}{c} - \frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_y/c}^t h(t') dt' \quad (1.10)$$

X アームの重力波の影響に対して Y アームでの影響は逆符号となるため、AS ポートで取り出される位相  $\phi_-$  は

$$\phi_- = \frac{2l_- \Omega}{c} + \delta\phi_{\text{GW}} \quad (1.11)$$

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t-2l/c}^t h(t') dt' \quad (1.12)$$

となる。ただし、両腕の長さ  $l_x \simeq l_y = l$ 、 $l_- = l_x - l_y$  とした。上式において、第 1 項はビームスプリッターから 2 つのミラーまでの距離の違いによる静的な位相差を表し、第 2 項の  $\delta\phi_{\text{GW}}$  が重力波の影響による位相変化を表している。

## 周波数応答と基線長

実際に重力波の観測を行う場合、対象となる信号の周波数成分を考える場合が多いため、ここで Michelson 干渉計の周波数応答を考える。 $h(t)$  を Fourier 分解して

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.13)$$

とすると、 $\delta\phi_{\text{GW}}$  は次のように書ける。

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{MI}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.14)$$

$$H_{\text{MI}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin(l\omega/c) e^{-i\frac{l\omega}{c}} \quad (1.15)$$

$H_{\text{MI}}(\omega)$  は、角周波数  $\omega$  の重力波に対する Michelson 干渉計の周波数応答関数である。重力波の周波数を  $\omega_0$  で固定したときの  $H_{\text{MI}}(\omega)$  を Michelson 干渉計の腕の長さである基線長  $l$  の関数として考えると、その絶対値  $|H_{\text{MI}}(\omega)|$  は  $l\omega/c = \pi/2$  のとき最大、つまりこのとき Michelson 干渉計の重力波に対する感度が最も良くなる。しかし、ここからさらに基線長を長くしても感度は向上しない。これは光が往復する間に重力波の影響が相殺し、感度が低下する為である。

ここで具体的な例として、100Hz の重力波に対して  $|H_{\text{MI}}(\omega)|$  が  $l\omega/c = \pi/2$  を満たす基線長を考えてみると、これは 750km と非常に長くなる。現実的にはこのように長い基線長を持った干渉計を地上に建設する事は難しいため、光路長を稼ぐ方法として様々な工夫がなされている。その一つがミラーを向かい合わせに設置し、その中で光を何度も往復させる光共振器を用いる手法である。

## Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot 方式は、Michelson 干渉計の 2 つの腕を、それぞれ Fabry-Perot 共振器に置き換えたものである。光は Fabry-Perot 共振器が構成する 2 枚のミラーの間を何度も往復し、多重干渉する。Michelson 干渉計に組み込まれた Fabry-Perot 共振器のことを腕共振器とも呼ぶ。

ここで、図 1.3 のような Fabry-Perot 共振器を考える。共振器長を  $L$ 、フロントミラーとエンドミラーの振幅反射率、振幅透過率をそれぞれ  $r_F, t_F, r_E, t_E$  とする。ただし反射率と透過率は、 $r_i^2 + t_i^2 = 1$  ( $i = F, E$ ) の関係を満たす。

このときレーザー光源からの入射光の電場を  $E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$  として、Fabry-Perot 共振器からの反射電

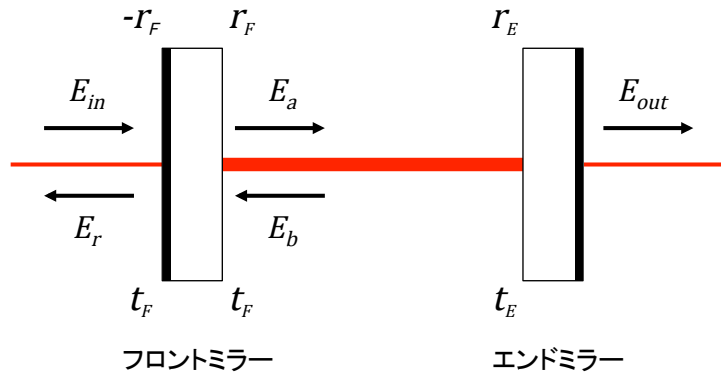


図 1.3 Fabry-Perot 共振器における電場：ミラーの表と裏で反射率の符号が逆になる。

場  $E_r$ 、透過電場  $E_t$  を考える。

$$E_a = t_F E_{in} + r_F E_b \quad (1.16)$$

$$E_b = r_E e^{-2i\frac{L\Omega}{c}} E_a \quad (1.17)$$

$$E_r = t_F E_b - r_F E_{in} \quad (1.18)$$

$$E_t = t_E e^{-i\frac{L\Omega}{c}} E_a \quad (1.19)$$

ここで、 $E_a$ 、 $E_b$  は共振器内でのフロントミラー付近の電場を表す。

上の 4 つの式からなる連立方程式を解くことで、 $E_r$  と  $E_t$  は次のように求められる。

$$E_r = \left( -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} \right) E_{in} \quad (1.20)$$

$$E_t = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} E_{in} \quad (1.21)$$

ここで  $\Phi = 2L\Omega/c$  は光が共振器内を往復する際に生じる位相変化である。

$E_r$ 、 $E_t$  より、Fabry-Perot 共振器を 1 枚のミラーと考えたときの反射率  $r_{cav}(\Phi)$  と透過率  $t_{cav}(\Phi)$  が次のように定義できる。

$$r_{cav}(\Phi) \equiv \frac{E_r}{E_{in}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} \quad (1.22)$$

$$t_{cav}(\Phi) \equiv \frac{E_t}{E_{in}} = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} \quad (1.23)$$

透過光強度  $P_t = |E_t|^2$  が最大になるとき共振器内部の光の強度も最大になり、この状態を入射レーザー光が Fabry-Perot 共振器で共振しているという。また、反射光強度  $P_r = |E_r|^2$  が最大になっている状態を反共振しているという。共振条件と反共振条件はそれぞれ次のように書ける。

$$\Phi = 2\pi n \quad (1.24)$$

$$\Phi = \pi(2n - 1) \quad (1.25)$$

ただし  $n$  は自然数である。

また、共振、反共振の場合での Fabry-Perot 共振器の反射率はそれぞれ、

$$r_{reso} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E}{1 - r_F r_E} \quad (\text{共振}) \quad (1.26)$$

$$r_{anti} = -r_F - \frac{t_F^2 r_E}{1 + r_F r_E} \quad (\text{反共振}) \quad (1.27)$$

となる。実際に干渉計で用いられるミラーは高反射率  $r_F \simeq r_E \simeq 1$ 、低透過率  $t_F \simeq 0$  であるので、

$$r_{\text{anti}} \simeq -1 \quad (1.28)$$

となり、反共振の光はほとんどフロントミラーで反射され、Fabry-Perot 共振器長の変化などによる位相変化の影響をほとんど受けない。

また、反射光強度  $P_r$  と透過光強度  $P_t$  はそれぞれ

$$P_r = |E_r|^2 = \frac{\{(t_F^2 + r_F^2)r_E - r_F\}^2 + 4r_F r_E (t_F^2 + r_F^2) \sin^2(\frac{\Phi}{2})}{(1 - r_F r_E)^2 \{1 + (\frac{2}{\pi})^2 \mathcal{F}^2 \sin^2(\frac{\Phi}{2})\}} |E_{\text{in}}|^2 \quad (1.29)$$

$$P_t = |E_t|^2 = \frac{(t_F t_E)^2}{(1 - r_F r_E)^2} \frac{1}{1 + (\frac{2}{\pi})^2 \mathcal{F}^2 \sin^2(\frac{\Phi}{2})} |E_{\text{in}}|^2 \quad (1.30)$$

と書ける。ただし  $\mathcal{F}$  はフィネスと呼ばれる値である。

## フリースペクトラルレンジとフィネス

式 (1.30) より  $\Phi$  を横軸、透過光強度を縦軸としてグラフを書くと図 1.4 のようになる。

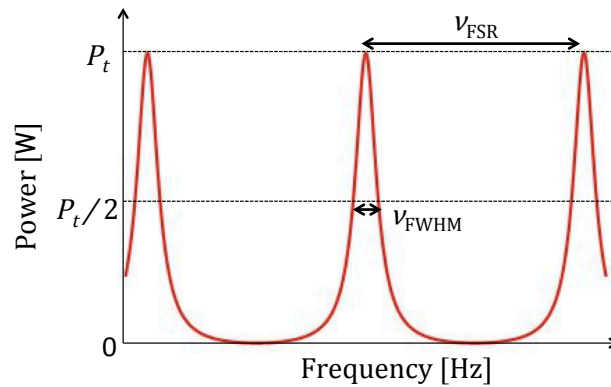


図 1.4 Fabry-Perot 共振器の透過光強度。

$\Phi = 2L\Omega/c$  において共振器長  $L$  を固定して考えると、透過光強度は  $\Omega$  の周期関数となっている。この基本周期をフリースペクトラルレンジ (FSR) と呼び、共振周波数の間隔  $\nu_{\text{FSR}} = \Omega_{\text{FSR}}/2\pi$  は、共振条件 (1.24) より

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{\Omega_{\text{FSR}}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \quad (1.31)$$

となる。また、共振の半値全幅  $\nu_{\text{FWHM}}$  は  $\nu_{\text{FWHM}} \ll \nu_{\text{FSR}}$  のとき、

$$\nu_{\text{FWHM}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r_F r_E}{\sqrt{r_F r_E}} \frac{c}{L} \quad (1.32)$$

となる。

このとき、 $(\nu_{\text{FSR}} = \Omega_{\text{FSR}}/2\pi)$  と  $(\nu_{\text{FWHM}})$  の比

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\nu_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \quad (1.33)$$



をフィネスと呼び、共振の鋭さを表す。この式から、フィネスはミラーの反射率のみで決定される値であることがわかる。フィネスが高いということは、共振させたい周波数をより狭くできるということであり、他の周波数の雑音の影響を受けにくくなる。

### 重力波に対する周波数応答

Fabry-Perot Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答について考える。Michelson 干渉計のときと同じように、 $x$ - $y$  平面内に固定した Fabry-Perot Michelson 干渉計にプラスモードの重力波が  $z$  軸方向から入射しているとする。式 (1.13) と同様に Fourier 変換した  $h(t)$  を用いると、Fabry-Perot 共振器からの反射光  $E_r$  は次のようになる。

$$E_r = E_0 e^{i\Omega t} \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E}{1 - r_F r_E} \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{FP}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \quad (1.34)$$

ただし、入射光を  $E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$  とし、Fabry-Perot 共振器内で共振しているとした。また、 $H_{\text{FP}}(\omega)$  は重力波に対する Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数である。

$$H_{\text{FP}}(\omega) = \frac{\alpha \Omega}{\omega} \frac{\sin \gamma}{1 - r_F r_E e^{-2i\gamma}} e^{-i\gamma} \quad (1.35)$$

$$\alpha = \frac{t_F^2 r_E}{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E}, \quad \gamma = \frac{L\omega}{c} \quad (1.36)$$

ここで  $\gamma$  はキャビティーポールと呼ばれる値で、Fabry-Perot 共振器はキャビティーポールより高い周波数で感度が悪くなっていく。

さらに、光が共振器内を動くのに要する時間内では重力波の時間変化が十分小さい、つまり  $\omega L/c \ll 1$  のとき、周波数応答関数  $H_{\text{FP}}(\omega)$  の絶対値  $|H_{\text{FP}}(\omega)|$  は次のように書ける。

$$|H_{\text{FP}}(\omega)| = \frac{\alpha \Omega L}{c(1 - r_F r_E)} \frac{|\sin \gamma|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi F}{2} \sin \gamma\right)^2}} \quad (1.37)$$

$$\sim \frac{\alpha \Omega L}{c(1 - r_F r_E)} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad (1.38)$$

ここで、 $\tau$  は共振器内での光の平均滞在時間を表す。

$$\tau = \frac{2L}{c} \frac{\sqrt{r_F r_E}}{(1 - r_F r_E)} \quad (1.39)$$

この  $\tau$  から、Fabry-Perot 共振器内での光の実効的な折り返し回数  $N_{\text{FP}}$  を定義することができる。

$$N_{\text{FP}} = \frac{c\tau}{L} \quad (1.40)$$

さらに、 $\tau$  はフィネス  $\mathcal{F}$  を用いて

$$\tau = \frac{2L}{\pi c} \mathcal{F} \quad (1.41)$$

と書くことができ、 $N_{\text{FP}}$  とは

$$\mathcal{F} = \frac{2}{\pi} N_{\text{FP}} \quad (1.42)$$

という関係をもつ。したがって、フィネスを Fabry-Perot 共振器内での光の実効的な折り返し回数を表す値であると考えられることもできる。実際、フィネスは干渉計の特性を表す非常に重要な値のひとつである。

### Michelson 干渉計との比較

Michelson 干渉計と Fabry-Perot Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答は、それぞれ式 (1.15)、(1.37) から次のように書けた。

$$|H_{\text{MI}}(\omega)| = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) \tag{1.43}$$

$$|H_{\text{FP}}(\omega)| = \frac{2\Omega}{\omega} \frac{1 + r_F}{|1 - r_F e^{-2i\frac{L\omega}{c}}|} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) \tag{1.44}$$

観測すべき周波数を固定して考えると、 $H_{\text{MI}}$  を基線長  $l$  の関数としたとき、 $l\omega/c = \pi/2$  で絶対値が最大になり、これ以上基線長を長くしても感度の向上はない。同じように  $H_{\text{FP}}$  を  $L$  の関数として考えると、 $L\omega/c = \pi/2$  のとき絶対値が最大となる。

$l = L$ 、 $T = t_F^2$  として式 (1.43) と式 (1.44) を比べると、

$$\frac{|H_{\text{FP}}(\omega)|}{|H_{\text{MI}}(\omega)|} = \frac{4}{T} \frac{1}{\sqrt{1 + (4\omega L/Tc)^2}} \tag{1.45}$$

となり、FPMI では  $4/T\sqrt{1 + (4\omega L/Tc)^2}$  倍得していることがわかる。

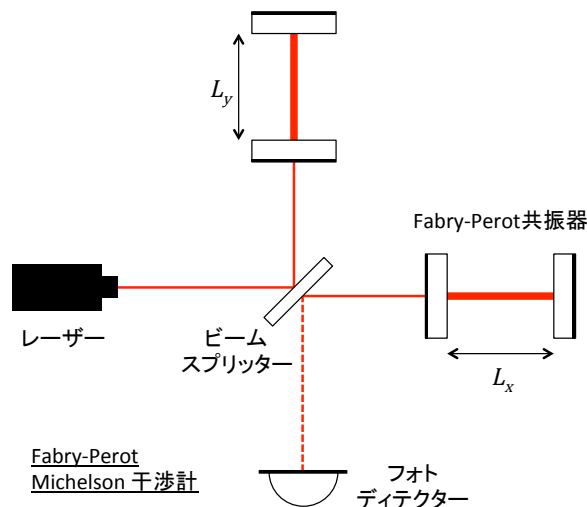


図 1.5 Fabry-Perot Michelson 干渉計。

### 世界の重力波検出器

現在世界中で稼働、またはアップグレード中のレーザー干渉計型重力波検出器について簡単に紹介する。

#### KAGRA

日本の大型レーザー干渉計型低温重力波検出器。岐阜県神岡鉱山の地下 1 km に建設されており、現在テスト運転に向けた光学系のインストールが行われている。基線長は 3 km である。KAGRA の大きな特

徴は、干渉計全体が地下にあること、そして腕共振器を構成するミラーが 20 K まで冷却されることであり、KAGRA については第 3 章で詳しく述べる。

## LIGO

アメリカの大型レーザー干渉計型重力波検出器。基線長 4 km の干渉計がワシントン州ハンフォードとルイジアナ州リヴィングストンの 2 ヶ所に設置されている。2 台同時に稼働させることで相関をとることができ、感度を高めている。現在 Advanced LIGO への大幅なアップグレードを終え、本格的な運転を開始した。

## Virgo

フランスとイタリアの共同研究による大型レーザー干渉計型重力波検出器。イタリアのピサ近辺に基線長 3 km の干渉計が設置されている。大型低周波防振装置の開発によって低周波での感度が優れている。現在 Advanced Virgo へのアップグレードが進んでいる。

## GEO600

イギリスとドイツの共同研究による基線長 300 m の大型レーザー干渉計型重力波検出器。ドイツのハノーファーに設置されており、LIGO や Virgo のアップグレード中にも重力波観測を続けていた。光スクイーズ技術を用いた量子雑音の低減に成功している [3]。

## 1.3 検出器の感度と量子雑音

### 検出器の感度

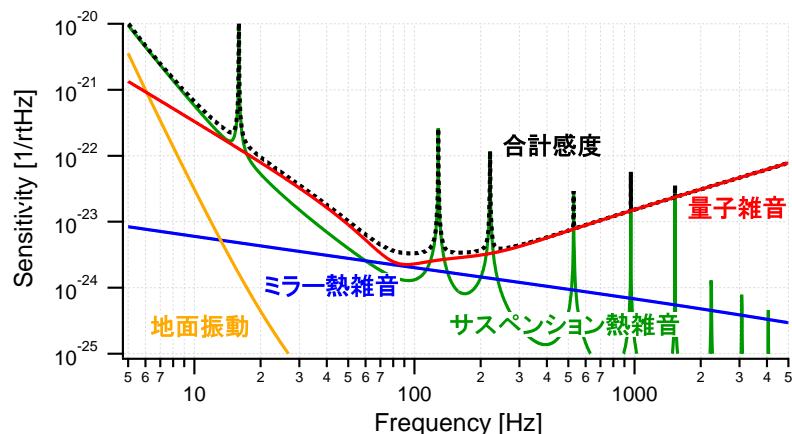


図 1.6 KAGRA の目標感度曲線。重力波望遠鏡の感度は様々な雑音の合計であるノイズスペクトルによって表される。

重力波望遠鏡の感度とは図 1.6 のようなノイズスペクトルのことを指し、各周波数での雑音の合計を干渉計のことである。感度の単位としてはよく  $1/\sqrt{\text{Hz}}$  や  $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  を用いる。雑音による変位を  $x(t)$  とおく。一般に  $x(t)$  が無限に続くときしか Fourier 変換は存在しないため、 $x(t)$  を区間  $[-T/2, T/2]$  に切り

出した関数を

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (|t| \leq T/2) \\ 0 & (|t| > T/2) \end{cases} \quad (1.46)$$

と定義し、この Fourier 変換を  $X_T(\omega)$  で表す。

$$X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{i\omega t} dt \quad (1.47)$$

この  $X(\omega)$  を用いてパワースペクトル密度  $S(\omega)$  は次のように定義される。

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |X_T(\omega)|^2 \rangle}{2\pi T} \quad (1.48)$$

この  $S(\omega)$  は単にパワースペクトルと呼ぶことが多い。 $x(t)$  と  $S(\omega)$  には次のような関係がある。

$$\bar{x}^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (1.49)$$

つまりパワースペクトル  $S(\omega)$  は、ランダムに変動する変位の平均パワー  $\bar{x}^2(t)$  の各周波数成分からの寄与を示している。実際には  $\omega = 2\pi f$  とおき、 $f \geq 0$  に対するスペクトルを考える。これは片側パワースペクトルと呼ばれ、次のように  $G(f)$  で表す。

$$\bar{x}^2(t) = \int_0^{\infty} G(f) df \quad (1.50)$$

$$G(f) = 4\pi S(\omega) \quad (1.51)$$

パワースペクトルの具体値をあげるときには、 $\sqrt{G(f)}$  で表すことが多い。以上が感度の単位として  $1/\sqrt{\text{Hz}}$  や  $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  を用いる理由である。

## 検出器における雑音

### 地面振動

地面は地震等がなくてもあらゆる周波数で微小振動しており、微小なミラーの動きが雑音となる重力波望遠鏡では、特に低周波で大きな問題となる。また、低周波に現れる突発的な地面振動の影響は、検出器の観測帯域がある高周波側へアップコンバートすることが知られている [4]。干渉計の設置場所における地面振動の大きさ、および干渉計に組み込まれる多段振り子などの防振系の性能で決まる。

### 熱雑音

物質は周りの熱浴と接することによって熱振動する。熱振動の代表的な現象に Brown 運動があり、高感度を目指す重力波検出器にとってはこの熱振動も雑音源となる。干渉計の中でも、ミラーやミラーを吊る振り子の熱雑音は光路長の変化に繋がる大きな問題となる。熱雑音を低減する方法として、ミラーや振り子自体の温度を下げたり、物質がどれくらい共振周波数で揺れやすいかを表す、Q 値と呼ばれる値の高い材質を用いることが挙げられる。

### その他の雑音

これまで挙げた主な雑音以外にも、干渉計の感度を制限する様々な雑音が存在する。例えば、光路上の気体分子による屈折率の変化によって光路長が変化することによる雑音や、レーザー源自体の周波数や振

幅の揺らぎによる雑音などがある。これらの雑音の問題を改善するために、干渉計を真空槽に設置したり、より安定なレーザー源の開発などの研究がなされている。また、特に次世代の重力波望遠鏡においては、地磁気等の環境雑音の影響も懸念されている。

### 量子雑音

干渉計の最終的な感度は、Heisenberg の不確定性原理に由来する光子の量子的な揺らぎによって制限されてしまう。干渉計がダークフリンジの状態に制御されているとき、AS ポートから入射する真空場による量子雑音が問題となる。真空場とは、光源が存在しない空間でも量子的に光子が揺らいでいる状態である。量子雑音は、光子の配列を表す位相の揺らぎに起因する雑音と、光子の数を表す振幅の揺らぎに起因する雑音に分けることができ、それぞれショットノイズ、輻射圧雑音と呼ぶ。ショットノイズは位相揺らぎであるから、重力波信号を位相差として検出する干渉計では直に雑音となる。また、光子数揺らぎである輻射圧雑音はレーザー光のパワーを変化させてしまうことでミラーを揺らし、その結果として位相差が生じて雑音となる。

量子雑音を考える際には、図 1.3 右のような同相成分と差動成分を直交軸にとった位相空間、フェイザーダイアグラムを用いると分かりやすい。重力波信号をレーザー光に対する位相変調として検出するため、振幅方向にレーザー光を固定して考える。このような場合、基本となる位相のレーザー光をキャリア光、キャリア光に対して位相の異なる信号をサイドバンドと呼ぶ。重力波信号は、キャリアの上下にサイドバンドを形成する。

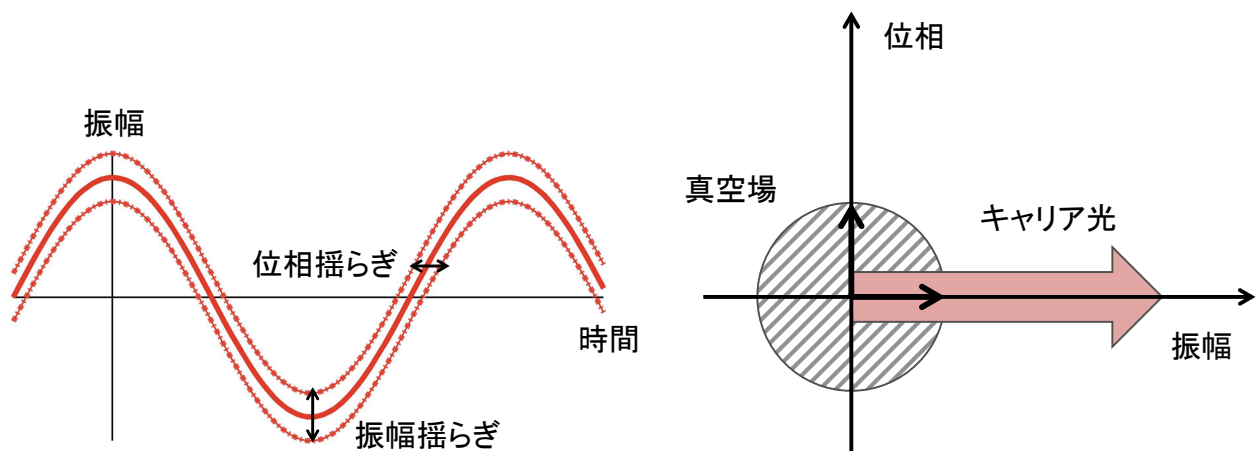


図 1.7 光の振幅と位相の揺らぎ。右図のように振幅と位相を直交軸にとった位相空間をフェイザーダイアグラムと呼ぶ。真空場の揺らぎは位相空間では減点付近で広がっているように見える。

### 標準量子限界

AS ポートから干渉計に入って再び AS ポートに出てくる真空場は、振幅成分を 1 行目、位相成分を 2 行目で表したベクトルを使って次のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{2i\beta} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} e^{i\beta} \quad (1.52)$$

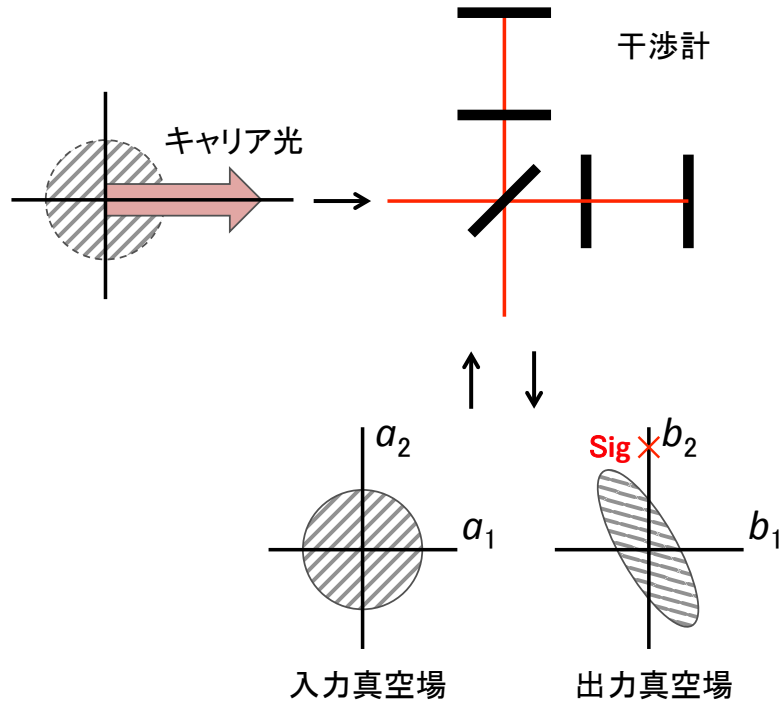


図 1.8 AS ポートから干渉計にはいり、再び AS ポートに出てくる真空場の変化を表したフェイザーダイアグラム。

ここで、 $\mathcal{K}$  は腕共振器によって真空場が受ける影響を表した係数、 $\beta$  は干渉計を片道通過するときの位相の遅れ、 $\alpha$  は干渉計からでてきた信号の大きさである。

$$\mathcal{K} = \frac{8\omega_0 I_0}{mL^2\Omega^2(\gamma^2 + \Omega^2)}, \quad \tan \gamma = \frac{\Omega}{\gamma}, \quad \alpha \sqrt{\frac{2\omega_0 I_0}{(\gamma^2 + \Omega^2)\hbar}} \quad (1.53)$$

$\omega_0$  はキャリア光の角周波数、 $I_0$  はビームスプリッター上でのレーザーパワー、 $L$  は腕共振器の長さ、 $\Omega$  は測定角周波数、 $\gamma$  はキャビティーポール、そして  $\hbar$  は Planck 定数である。干渉計に入ってきた真空場は、干渉計を通ることで輻射圧雑音の影響を受け、図 1.8 のようにその形が変化する。

重力波信号が現れる位相方向での量子雑音の大きさを歪み  $h_n$  で表すと、

$$h_n = h_{\text{SQL}} \sqrt{\frac{\mathcal{K}^2 + 1}{2\mathcal{K}}} \quad h_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2}} \quad (1.54)$$

となり、レーザーパワーに関わらず、ある限界値  $h_{\text{SQL}}$  を超えないことが分かる。これを標準量子限界と呼び、図 1.9 のようレーザーパワーを変えて行ったときに見える包絡線である。ただし  $m$  はミラーの質量、 $L$  は干渉計の基線長である。この標準量子限界をどう超えていくかという問題が量子雑音改善のテーマである。

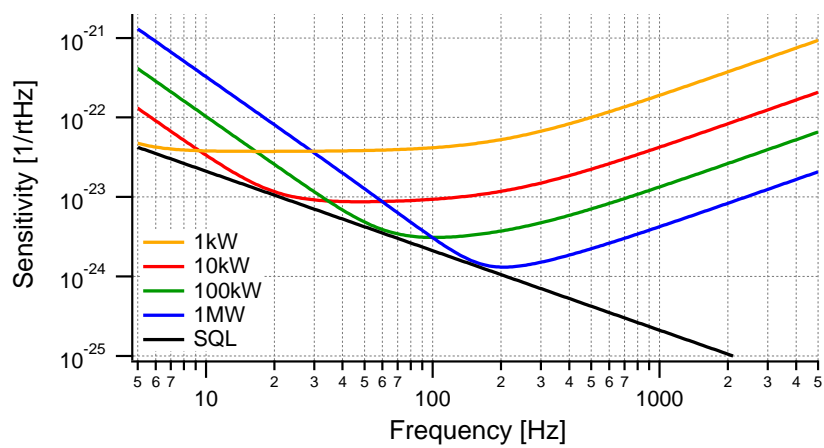


図 1.9 標準量子限界。レーザーパワーを変えていったときの感度がもっともよい点の包絡線を引くと標準量子限界が現れる。

## 第2章

# 干渉計の制御

制御とは「ある目的に適合するように、対象となっているものに所要の操作を加えること」<sup>1</sup>である。重力波望遠鏡において、ある目的とは検出器の感度を高く保つこと、つまり干渉計を構成するミラーの位置を常に最適な動作点に合わせるということである。ミラーはそのままでは様々な外乱によってその位置が変化してしまうため、重力波検出にとって制御系の設計は非常に重要な点の一つである。本章では、干渉計の制御方法や、そのために必要な制御信号の取得方法について述べる。

### 2.1 フィードバック制御

#### 制御の流れ

制御方法には、大きく分けてフィードフォワード制御とフィードバック制御の2通りの方法がある。フィードフォワード制御とは、制御対象に混入してきた外乱によって生じるずれを予測し、あらかじめ打ち消すような信号を対象に入力する制御法である。フィードバック制御とは、外乱によるずれを実際に測定し、それに応じた信号を対象に入力するようなループを組んだ制御法である。干渉計を構成するミラーを動かすような外乱の挙動をあらかじめ予測することは非常に困難であるため、干渉計実験においてはフィードバック制御を行うことが多い。以下、フィードバック制御についてより詳しくみていく。

図 2.1 は、Fabry-Perot 共振器について、実際に実験をするときに用いるセットアップを簡単に示したものである。共振状態に保たれた共振器 (Cavity) に何らかの外乱 (Noise) が入ってきたとする。共振状態が崩れてもれてきた光を検出器 (Sensor) で取り出し、フィードバックフィルター (Feedback filter) を通して制御信号を作り、外乱による影響を打ち消すように、ミラーに取り付けられたアクチュエーター (Actuator) へと入力する。図 2.2 はこの系のブロックダイアグラムであり、この系について次のような連立方程式を立てることができる。

$$\begin{cases} (\Delta x - \delta x) CS = y \\ \delta x = FAy \end{cases} \quad (2.1)$$

この連立方程式を  $\delta x$  について解くと

$$\delta x = \frac{CSFA}{1 + CSFA} \Delta x \quad (2.2)$$

となり、最終的にミラーを揺らす大きさは以下ようになる。

$$\Delta x - \delta x = \frac{1}{1 + G} \Delta x \quad (G = CSFA) \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> 日本工業規格 (JIS) での定義。



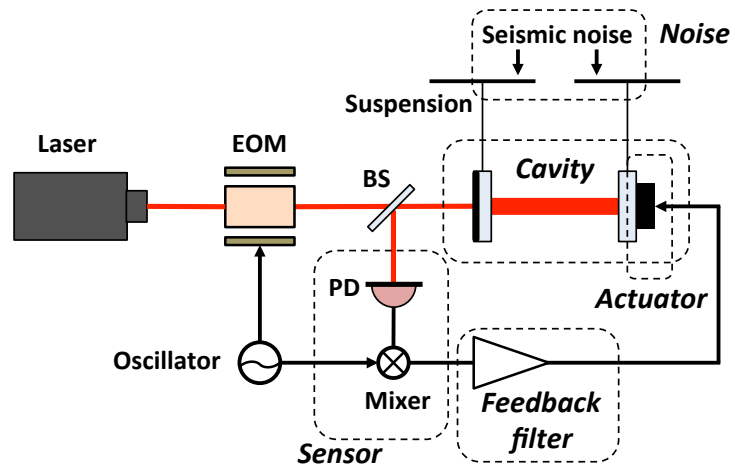


図 2.1 Fabry-Perot 共振器まわりの制御系の簡単なセットアップ。

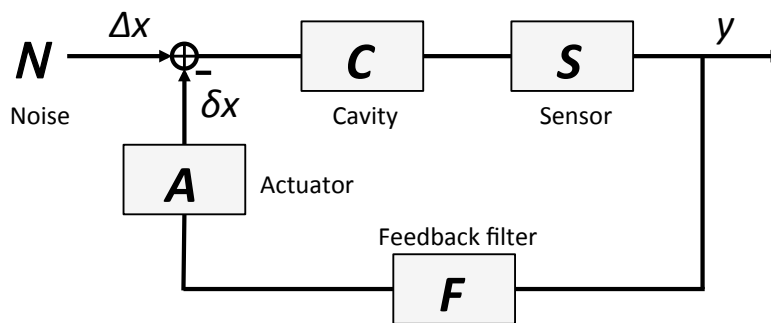


図 2.2 フィードバック制御系のブロックダイアグラム。

$G$  は系全体のゲインであり、開ループゲイン、もしくは開ループ伝達関数と呼ばれる。つまり、フィードバック制御を行うことによって、ミラーを揺らす大きさがもとの外乱の大きさから  $1/(1+G)$  倍だけされた値となっていることがわかる。このようにミラーの動きに対する線形信号が得られれば、フィードバック制御によってミラーの位置を最適な動作点に保つことができる。

### 制御系の設計と安定性

ここまで制御についての流れをみてきたが、結局のところ制御の質を決めるのは図 2.2 の  $F$  にあたるサーボの設計である。サーボをどのような設計にするかによって、制御系のゲインだけでなく、系の安定性についても決まってくる。サーボの基本となるものは、低周波でのゲインを高くするローパスフィルター、高周波でのゲインを高くするハイパスフィルターである。フィードバック制御を行う場合、外乱の影響を測定するという動作が加わる分、入力と出力にずれが生じる。

図 2.3 は、ボード線図と呼ばれる伝達関数のゲインと位相を示した図である。1 次のローパスフィルターの場合、カットオフ周波数と呼ばれる周波数より高周波になると、ゲインが落ちていくのと同時に位相が  $90 \text{ deg}$  遅れていく。2 次の場合は  $180 \text{ deg}$  の位相の遅れが生じる。ハイパスフィルターの場合はカットオフ周波数からゲインが上がっていき、位相が進む。 $n$  次のローパスフィルター、ハイパスフィルターのことを、それぞれ  $n$  ポール、 $n$  ゼロと呼ぶ。

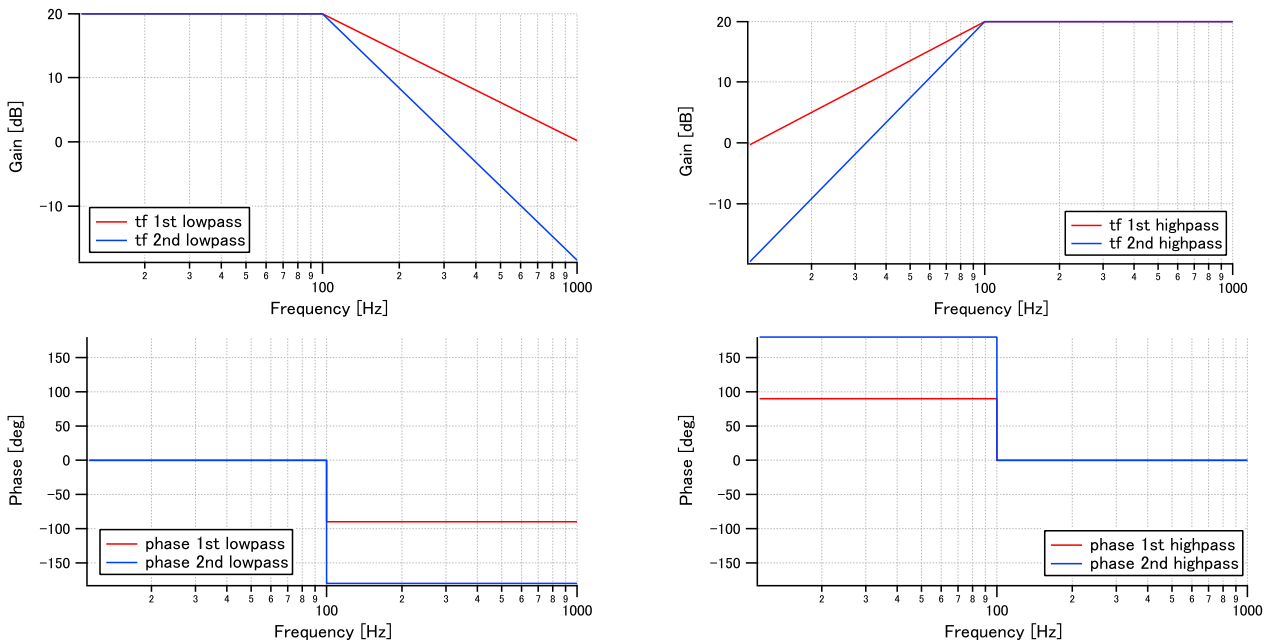


図 2.3 左: ローパスフィルターのボード線図。右: ハイパスフィルターのボード線図。

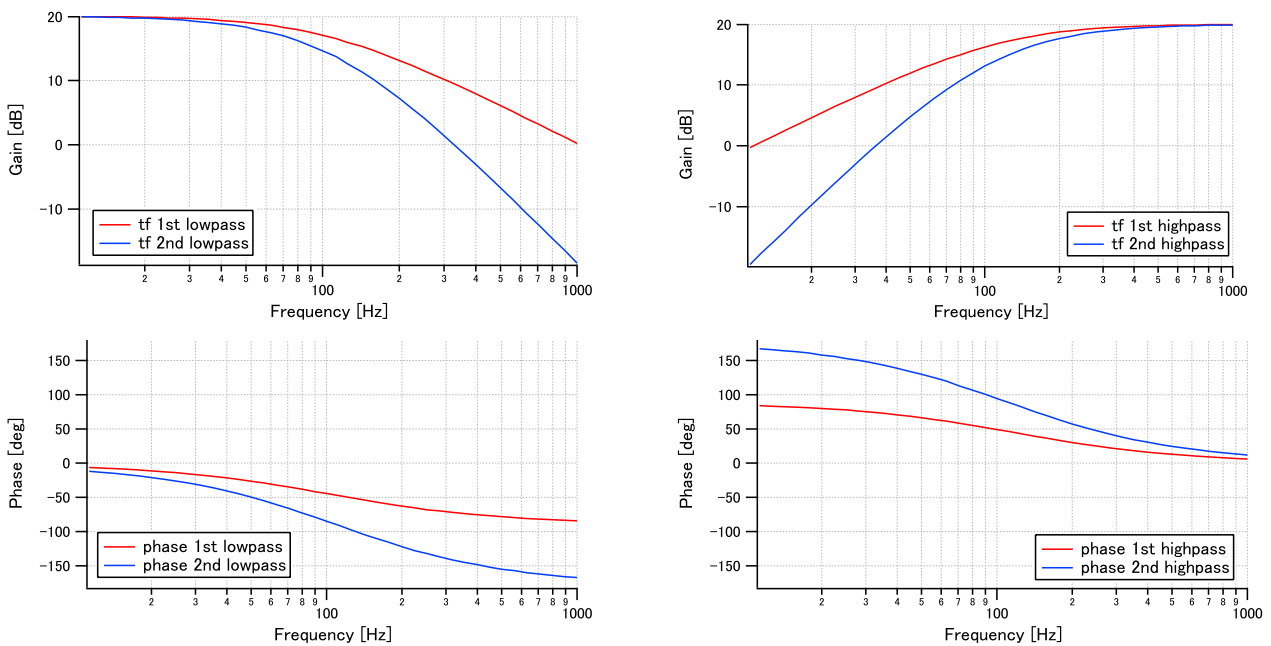


図 2.4 左: 実際のローパスフィルターのボード線図。右: 実際のハイパスフィルターのボード線図。

実際にフィルターの伝達関数を測定した場合、ゲインと位相のスロープは図 2.4 のように、よりスムーズな形になる。先ほどカットオフ周波数から位相が遅れる、もしくは進むと述べたが、実際にはその周波数から 10 倍低い周波数でも約 5.7 deg だけ位相の遅れ、進みが出てきてしまう。

制御系を設計するに当たって最も注意すべき部分は、開ループゲインが 1 になる周波数での位相である。UGF (Unity Gain Frequency) と呼ばれるこの周波数での位相が  $\pm 180 \text{ deg}$  を越えると、系は不安定になってしまう。したがって共振器を共振状態にロックすることができたら、伝達関数を測定し、開ループゲインの UGF を知ることが重要となる。

伝達関数の測定

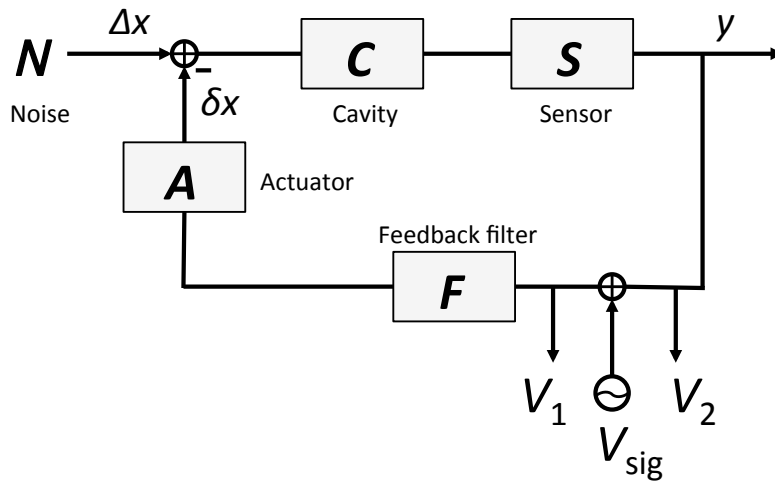


図 2.5 左: 伝達関数の測定方法。

伝達関数を測定するには、測定したい周波数範囲の正弦波を入力し、入力した直後もしくは直前で信号を取り出せばよい。図 2.5 の位置に  $V_{sig}$  の正弦波を入力し、 $V_1$  もしくは  $V_2$  の信号を取り出した場合、伝達関数として次のような値が測定される。

$$\frac{V_1}{V_{sig}} = \frac{G}{1 + G} \tag{2.4}$$

$$\frac{V_2}{V_{sig}} = \frac{1}{1 + G} \tag{2.5}$$

ここから、開ループゲイン  $G$  は次のように二つの方法で求めることができる。

$$G = \frac{V_{sig}}{V_2} - 1 \quad \text{or} \quad \frac{V_1}{V_2} \tag{2.6}$$

ここで、これまでゲインを単純に  $G$  として扱ってきたが、実際には  $G$  は周波数  $\omega$  について複素数で表される関数である。ボード線図はこの複素数  $G(i\omega)$  について、

$$\text{ゲイン} : |G(i\omega)| = \sqrt{(Re[G(i\omega)])^2 + (Im[G(i\omega)])^2} \tag{2.7}$$

$$\text{位相} : \angle G(i\omega) = \arctan \frac{Im[G(i\omega)]}{Re[G(i\omega)]} \tag{2.8}$$

と変換した値を表していたのである。したがって閉ループゲインから開ループゲインへの変換の際には、測定したゲインだけでなく、位相についても考慮に入れた上で計算する必要がある。

また、測定した伝達関数の信頼度を示す指標としてコヒーレンスを測ることも重要である。

## 2.2 変調と復調

第 1 章で述べたように、ダークフリンジにある Michelson 干渉計の鏡の差動揺らぎは AS ポートに現れる式 (1.6)。

$$P_{out} = \frac{1}{2} P_{in} (1 - \cos \phi_-)$$

このとき、フォトディテクターで検出できる信号は強度の時間平均であり、光の位相の情報は失われてしまっている。干渉計のフィードバック制御には位相の情報をもった線形信号が必要である。そこで、Schnupp 変調法と呼ばれる方法を用いる。Schnupp 変調法とは、サイドバンドとマクロ<sup>2</sup>なアシンメトリを用いて線形信号を取得する方法である。

キャリア光を  $E_0 e^{i\Omega t}$  とする。この光に変調器によって変調指数  $m$ 、変調角周波数  $\omega_m$  で位相変調をかけると、キャリア光の周りにサイドバンドが形成される。

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{i(\Omega t + m \sin \omega_m t)} \quad (2.9)$$

$$\simeq J_0(m) E_0 e^{i\Omega t} + J_1(m) E_0 e^{i(\Omega + \omega_m)t} + J_{-1}(m) E_0 e^{i(\Omega - \omega_m)t} \quad (2.10)$$

ここで  $J_n (n = 0, 1, \dots)$  は以下で表される Bessel 関数である。

$$J_n(m) = \frac{1}{n!} \left(\frac{m}{2}\right)^n + \frac{-1}{(n+1)!} \left(\frac{m}{2}\right)^{n+2} + \dots \quad (2.11)$$

$$J_{-n} = (-1)^n J_n \quad (2.12)$$

Bessel 関数は  $m$  が小さいとき、 $J_0 \sim 1$ 、 $J_{\pm 1} \sim \pm m/2$  と近似できるので、式 (2.10) は次のように書ける。

$$E_{\text{in}} \simeq E_0 e^{i\Omega t} \left(1 + \frac{m}{2} e^{i\omega_m t} - \frac{m}{2} e^{-i\omega_m t}\right) \quad (2.13)$$

$$= E_0 e^{i\Omega t} (1 + im \sin \omega_m t) \quad (2.14)$$

一般的に変調周波数は数十 MHz と高いため、このサイドバンドを RF サイドバンドと呼ぶ。式 (2.13) から、変調位相によって角周波数  $\Omega$  の光が  $\Omega - \omega_m$ 、 $\Omega$ 、 $\Omega + \omega_m$  の3つの角周波数の光に分けられたことがわかる。

次に Michelson 干渉計の基線長にマクロな差  $\Delta l$  を用意する。 $\Delta l$  をキャリアの波長の整数倍にしておけば、干渉計がキャリアに対してダークフリンジであることには変わらない。このように腕の長さにマクロな差を Schnupp アシンメトリと呼ぶ。このとき、AS ポートのフォトディテクターからは以下のような信号を得ることができる。

$$\begin{aligned} E_{\text{out}} &= \left| \frac{1}{2} E_0 e^{i(\Omega t + \phi_-)} \left[1 - im \sin \omega_m \left(t + \frac{\Delta}{c}\right)\right] - \frac{1}{2} E_0 e^{i(\Omega t - \phi_-)} \left[1 - im \sin \omega_m \left(t - \frac{\Delta}{c}\right)\right] \right|^2 \\ &\simeq E_0^2 \left| i[\sin \phi_- + m \sin \alpha \cos \omega_m t] - [m \sin \phi_- \cos \alpha \sin \omega_m t] \right|^2 \\ &= E_0^2 \left[ \sin^2 \phi_- + \frac{m^2}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \phi_- \cos^2 \alpha) \right. \\ &\quad \left. + 2m \sin \phi_- \sin \alpha \cos \omega_m t \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \phi_- \cos^2 \alpha) \cos 2\omega_m t \right] \quad (2.15) \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha$  はアシンメトリによってサイドバンドが受ける位相差  $\alpha = \Delta l \omega_m / c$ 、 $\phi_-$  は2つの腕の光路差による位相変化である。式 (2.15) の1段目が DC 成分、2段目が  $\omega_m$  の成分、3段目が  $2\omega_m$  成分である。このままではまだ3種類の角周波数が混在している。この中から  $\omega_m$  成分だけを取り出すことができたならば、自乗されていない  $\phi_-$  の線形信号を得ることができる。

式 (2.15) で表される出力信号に  $\cos(\omega_m t + \xi)$  を掛け合わせるにより、 $\omega_m$  成分だけを抽出し、それ以外を RF 周波数帯に押しやることのできる。この作業を復調、 $\xi$  を復調位相と呼び、出力信号に掛け

<sup>2</sup> ここでのマクロとは、1波長よりも大きい値のことである。

合わせる  $\cos(\omega_m t + \xi)$  の波を参照光 (ローカルオシレーター) と呼ぶ。RF 周波数帯に押しやった成分はローパスフィルタを通すことによって取り除くことができる。このようにして得られた  $\omega_m$  成分の線形信号をエラー信号と呼ぶ。

信号の検出方法には、大きく分けてホモダイン検出とヘテロダイン検出の 2 つの方法が存在し、これらは復調に用いる参照光にどのような周波数の光を用いるかが異なる。ホモダイン検出では信号光と同じ周波数の参照光、ヘテロダイン検出では信号光と異なる周波数の参照光を使用する。KAGRA では主干渉計の制御にホモダイン検出を応用した DC readout と呼ばれる信号検出法を使用し、OMC の制御にはヘテロダイン検出を応用した PDH (Pound Drever Hall) 法を用いている。DC readout については次章で詳しく述べる。PDH 法とは、変調器を用いて信号光を生成する方法である。

## 第 3 章

# KAGRA アウトプットモードクリーナー

KAGRA は日本の岐阜県神岡鉱山内に建設された大型低温重力波望遠鏡であり、現在そのテスト運転に向けた準備が進んでいる。KAGRA の感度は主に量子雑音に制限されており、これを低減するためにアウトプットモードクリーナー (OMC) を搭載する予定である。OMC とは、干渉計から重力波信号を伴って出てきた光から高次モード等の余分な光を取り除く役割をもつ光学系である。OMC のデザイン設計は、KAGRA の目標感度に到達するための重要な鍵となる。

### 3.1 KAGRA

#### 重力波望遠鏡 KAGRA

現在世界中に設置されているレーザー干渉計型重力波望遠鏡は、その歴史から第 2 世代と位置付けられるが、KAGRA は第 2.5 世代にあたると言われることがある。その理由は、KAGRA のもつ大きな 2 つの特徴に由来している。ひとつは、望遠鏡全体が地下に建設されていることである。地下では地上に比べて地面振動が小さいことが分かっており、干渉計を構成するミラーが揺れにくい。そしてもうひとつの特徴は、腕共振器を構成するミラーがサファイアでできており、20 K という低温で運転されることである。低温にすることで、ミラー表面の熱雑音を低減することができる。このような特徴をもつキロメートルスケールの大型重力波望遠鏡による観測は、世界初の試みである。

KAGRA の干渉計構成は図 3.1 のようになっている。Michelson 干渉計をベースとして、両腕には長さ 3 km の高フィネス Fabry-Perot 共振器、そして REFL ポートと AS ポートには、それぞれパワーリサイクリング共振器とシグナルリサイクリング共振器を搭載している。パワーリサイクリング共振器は、キャリア光を共振させて干渉計の入射パワーを増幅させる。一方シグナルリサイクリング共振器は、重力波信号を腕共振器内で減少してしまう前に効率良く取り出す役割を持つ。この状態を BRSE (Broadband Resonant Sideband Extraction) 干渉計と呼ぶ。さらに、シグナルリサイクリング共振器の共振器長は共振点から少しずらした長さに制御 (デチューン) され、ターゲットとする連星中性子星からの重力波信号がやっていく観測帯域に最適化される。この状態を DRSE (Detuned RSE) 干渉計と呼ぶこれらの工夫を経て KAGRA は最終的に 100 Hz 付近のインスパイラル信号に最も良い感度を持つ。240 Mpc ~ 280 Mpc 遠方の連星中性子星による重力波が干渉計に垂直入射してきた場合、KAGRA は年に 6 ~ 10 回重力波を検出できると期待されている [6]。

現在、KAGRA はテスト運転に向けた光学系のインストールが行われており、2017 年から 2018 年にかけて本格的な運転が予定されている。

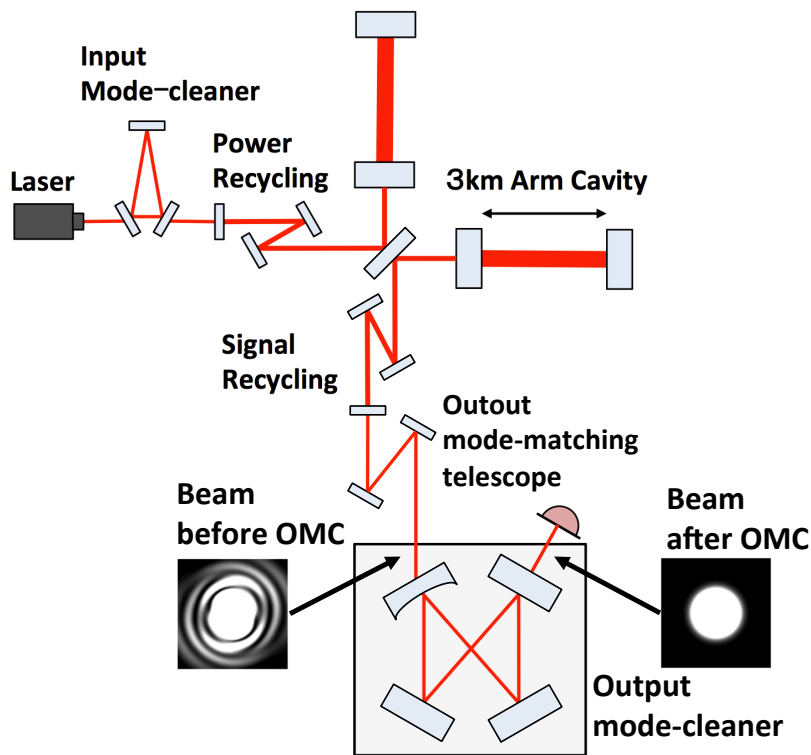


図 3.1 KAGRA の干渉計構成。Michelson 干渉計をベースとして、両腕には長さ 3 km の高フィネス Fabry-Perot 共振器、そして REFL ポートと AS ポートにはそれぞれパワーリサイクリング共振器とシグナルリサイクリング共振器を搭載している。また、最終的に信号を取得する直前に OMC を設置している。

### KAGRA の感度

ほとんどの周波数帯域において、KAGRA の感度を制限しているものは量子雑音である。量子雑音を低減するために、KAGRA では量子非破壊測定を行い、その一つが Back-Action Evasion (BAE) である。BAE とは、フォトディテクターで原理的な振幅揺らぎを測定し、ミラーの変位によって生まれる振幅揺らぎで相殺させることである。

第 1 章 3 節の量子雑音の説明の中で、干渉計を通った真空場は干渉計内で変形して AS ポートへ出てくると述べた。図 3.2 左のように、そのままのセットアップでは重力波信号と量子雑音の比、つまり信号雑音比 (SNR; signal-to-noise ratio) は悪い。しかし図 3.2 右のように、信号雑音比が最も良くなる方向に信号取得角を変えることができれば、信号雑音比は向上する。BAE を導入した場合の量子雑音は次のようになる。

$$h_{\text{BAE}} = h_{\text{SQL}} \sqrt{\frac{(\mathcal{K} - \tan \xi)^2 + 1}{2\mathcal{K}}}, \quad h_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2}} \tag{3.1}$$

ここで、 $\xi$  は信号取得角の変更具合 (デチューン具合) を表す角度である。  $\tan \xi = \mathcal{K}$  となるように信号取得角を選べば、上式から  $\mathcal{K}$  についての項がなくなる。これは、キャリアをデチューンすることで輻射圧雑音が相殺されたことを意味する。KAGRA では、DC readout とよばれる信号取得方法をとることによって、狭帯域で BAE を成立させている [7]。

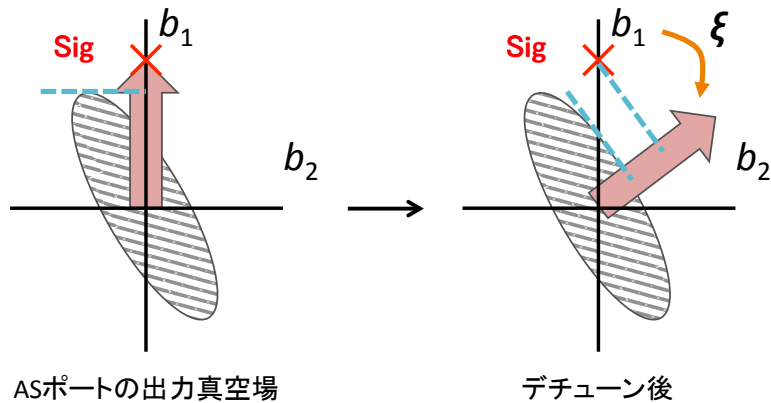


図 3.2 デチューン前後の AS ポートにおけるフェイザーダイアグラム。

## 3.2 DC readout

KAGRA では、OMC の制御信号取得に DC readout を行う。重力波がやってくると、腕共振器内のキャリア光の位相に変調がかかり、重力波信号の周波数の上下にサイドバンドが形成される。シグナルリサイクリング共振器がデチューンされていないとき、両信号サイドバンドの大きさは同じである。第 1 世代の重力波検出器において採用されていた信号の検出方法は、RF サイドバンドを参照光として用いたホモダイン検出法であった。しかし第 2 世代の検出器では、AS ポートに漏れ出たキャリア光を参照光として重力波信号と積をとるホモダイン検出法をとり、これを DC readout と呼ぶ。

キャリア光を AS ポートに漏れ出させる方法はふたつある。ひとつは、干渉計を構成する両腕共振器の間で反射率のアンバランスをつくることである。この結果生まれる参照光は、フェイザーダイアグラムにおける振幅方向に現れる。もうひとつは両腕共振器に異なるオフセットを加える、つまり両腕の長さにマイクロ<sup>1</sup>な差をつけることによって作動ポイントをずらすことである。この結果生まれる参照光はフェイザーダイアグラムの位相方向に現れる。このふたつの要素の組み合わせによって、参照光の信号位相は決定する。

デチューンされたときの干渉計構成はより複雑となり、信号サイドバンドのバランスは崩れてしまう。最適な信号位相を選択するためには、感度スペクトルと観測帯域を見ながら、様々なデチューン具合と信号位相の組み合わせを比べる必要がある。KAGRA では量子雑音の低減のために BAE を行うため、DC readout として漏れ出させるオフセット光の量が非常に微小なものとなる。LIGO では約 50 mW のオフセット光を用いていたが、KAGRA では約 1 mW のオフセット光が使用される予定である。この結果 KAGRA では、デチューン位相は 3.5 deg、DC readout 位相は 132 deg となっている。ホモダイン検出に最適化した状態での観測レンジは 128 Mpc であるが、デチューンした場合には 148 Mpc となる。

<sup>1</sup> ここでのマイクロとは、1 波長よりも小さい値である。



### 3.3 Gaussian ビームと高次モード

#### 基本モード

レーザー干渉計型重力波望遠鏡のレーザー光源には、Gaussian ビームが用いられている。基本 Gaussian モードと呼ばれる波長  $\lambda$  ビームの分布は、複素振幅の分布関数として次のように与えられる [1]。

$$\psi^{\text{FG}}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega(z)} \exp \left[ - \left( \frac{1}{\omega^2(z)} + \frac{ik_0}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i\zeta(z) \right] \quad (3.2)$$

$$R(z) = z[1 + (z/z_R)^2] \quad (3.3)$$

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2} \quad (3.4)$$

$$\zeta(z) = \arctan(z/z_R) \quad (3.5)$$

ここで、 $k_0 = 2\pi\nu_0/c$  は、振動数  $\nu_0$  をもつ平面波の波数である。式 (から、Gaussian ビームの強度は

$$|\psi^{\text{FG}}(x, y, z)|^2 \propto \exp \left( \frac{-2(x^2 + y^2)}{\omega^2(z)} \right) \quad (3.6)$$

と書け、光の強度が、進行方向のある点  $z$  に垂直な  $x$ - $y$  平面内で Gauss 分布になっていることが分かる。また、 $R(z)$  は等位相面の曲率半径、 $\omega(z)$  はビーム半径、 $z_R (= \pi\omega_0^2/\lambda)$  は Rayleigh レンジ、そして  $\zeta(z)$  は Gouy 位相シフトである。ビーム半径  $\omega(z)$  の定義は、ある  $z$  平面内における  $x = 0$ 、 $y = 0$  でのピーク値に対して、強度  $|\psi|^2$  が  $e^{-2}$  に下がった時の半径である。 $\omega_0$  はビーム半径が最小となる位置であり、ビームウエストと呼ばれる。そして Gouy 位相シフトとは、光軸付近での Gaussian ビームと他の平面波との位相差を示しており、後述する高次モードと基本モードとの差を表す。

#### 高次モード

これまで基本 Gaussian モードの光について述べたが、実際には高次のモードについても考慮する必要がある。このような Hermite-Gauss モードの光は、エルミート多項式<sup>2</sup>を用いて次のように書ける。

$$\psi_{mn}^{\text{HG}}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{H_m(\xi)}{\sqrt{2^m m!}} \frac{H_n(\eta)}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{k_0}{\pi z_R}} \cos \zeta \cdot \exp \left[ - (1 + i \tan \zeta) \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + i(1 + m + n)\zeta \right] \quad (3.7)$$

$$= \frac{H_m(\xi)}{\sqrt{2^m m!}} \frac{H_n(\eta)}{\sqrt{2^n n!}} \psi_{00}^{\text{HG}}(\xi, \eta, \zeta) e^{i(m+n)\zeta} \quad (3.8)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{k_0 z_R}{z^2 + z_R^2}} x, \quad \eta = \sqrt{\frac{k_0 z_R}{z^2 + z_R^2}} y \quad (3.9)$$

次数が  $m$ 、 $n$  のモードの光を TEM $_{mn}$  と呼ぶ。図 3.3 は、TEM $_{00}$  から TEM $_{11}$  までの Hermite-Gauss モードの断面強度分布を示したものである。基本モード  $\psi^{\text{FG}}$  に対して、高次モード  $\psi_{mn}^{\text{HG}}$  では Gouy 位相シフトが  $(n + m)\zeta(z)$  だけ増加しているのが分かる。この位相シフトにより、共振器において基本モー

<sup>2</sup> ロドリゲスの公式  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  によって定義される。

ドと高次モードが同時に共振することはほとんどない。しかし、共振器の往復分にあたる周回 Gouy 位相シフト  $2\zeta$  の整数倍が  $2\pi$  に近い場合、基本モードと高次モードが同時に共振するという問題が発生する。したがって OMC では、高次モードの共振が基本モードの共振に重ならないようにする必要がある。基本モードが変形を受けて高次モードが発生する大きな理由としては、光軸のミスアライメント、モードのミスマッチング、そして非点収差と呼ばれる、曲率のついたミラーへの斜入射による影響がある。

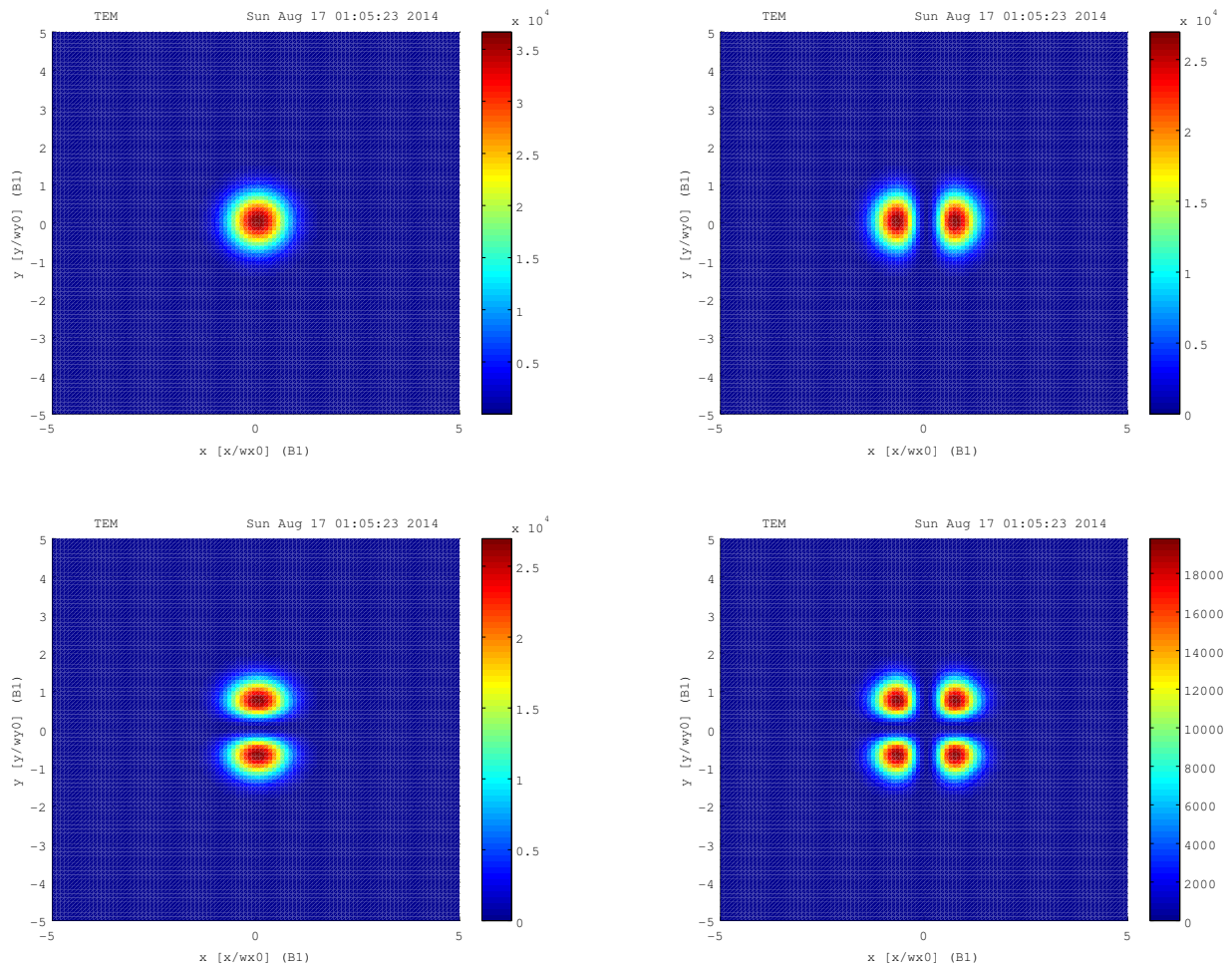


図 3.3 干渉計シミュレーションソフト FINESSE を用いて作成した Hermite-Gauss モードの断面強度分布。左上から時計回りに TEM00、TEM10、TEM11、TEM01 モードである。

### 3.4 要求値

ミラー表面におけるナノスケールの凹凸を数値化したデータがない場合の結果から、DC readout に使用される参照光のパワーは OMC 前で約 1mW であり、干渉計の腕に付けられた差動のオフセットによって作られる。KAGRA 用 OMC は、共振器内での光学ロスがなく不必要な光を全て除去する理想的な OMC と比べて、ショットノイズレベルが 5% 以上悪化しないようにしなければならない [8]。オフセット光が 1mW であるときに OMC で許容されるノイズの内訳は、信号のロスが 2% 以下、除去しきれなかった空間高次モード、RF サイドバンドのパワーがそれぞれ基本モードの 1% (10  $\mu$ W) 以下、2% (20  $\mu$ W) 以下である。これらの要求は OMC の各パラメータを適切に選ぶことによって実現され、その

主なパラメータとは、フィネス、周回 Gouy 位相、そして共振器長の3つである。

### フィネス

第1章2節でも述べたが、光共振器のフィネスとは光が共振器内を何回往復するかを表す値であり、共振器を構成するミラーの反射率によって決定される。 $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_3$ 、そして $r_4$ で構成される4枚鏡のリング共振器の場合、フィネスは次のように与えられる。

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}}{1 - r_2 r_3 r_4} \quad (3.10)$$

OMC における信号の透過率を最大にするために、OMC1 と OMC3 については部分透過ミラーを ( $r_1 = r_3 < 1$ )、OMC2 と OMC4 については全反射ミラー ( $r_2 = r_4 \simeq 1$ ) を用いる。OMC を構成するミラーの光学ロス  $\mathcal{L}$  は約 40 ppm であるとされている。もしフィネスが高すぎると、光が OMC 内を往復する回数が多くなりすぎて、トータルでの信号の光学ロスが要求値を満たさなくなってしまう。信号のロスを 2% 以下にするため、KAGRA 用 OMC のフィネスは 800 以下にする必要がある。

$$\text{信号ロス} : 40 \text{ ppm} \times \mathcal{F}_{\text{OMC}} < 2\% \quad (3.11)$$

### 周回 Gouy 位相と共振器長

OMC の役割のひとつは空間高次モードを除去することであり、各高次モードをどれくらい除去できるかは周回 Gouy 位相で決まる。共振器内を往復することで高次モードが受ける位相差は式 (3.5) と少し異なり、以下のように表される。

$$\zeta_{\text{cav}} = 2 \arccos \sqrt{g} \quad \left( g = 1 - \frac{L}{R} \right) \quad (3.12)$$

ここで、 $g$  は  $g$  ファクターと呼ばれる値であり、共振器を構成する曲率付き鏡の曲率  $R$  と共振器長  $L$  によって決まる。

また、 $m$  番目のモードの光の OMC の透過率は以下ようになる。

$$T_{\text{HOM}} = \frac{(1 - r_1^2 - \mathcal{L})(1 - r_3^2 - \mathcal{L})r_2^2 r_4^2}{|1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{im\zeta_{\text{cav}}}|^2} \quad (3.13)$$

もし、各高次モードの周回 Gouy 位相が  $2\pi$ 、つまりキャリアが共振点に近かった場合、 $m$  番目のモードは OMC 内のキャリア光の共振に入り込んでしまい、除去されなくなってしまう。基本モードの共振に最も近い高次モードの共振点までの距離とバンド幅の比が、各高次モードの除去率を決める。Gouy 位相と共振器長を適切に選ぶことが重要であり、それぞれの高次モードが OMC 前でどれだけのパワーで出てくるのかに注意を払う必要がある。このパワーは FINESSE と呼ばれるシミュレーションツールを用いて数値計算でき、詳しくは第4章で述べる。

OMC を透過する RF サイドバンドのパワーは次の式から得られる。

$$T_{\text{RF}} = \frac{(1 - r_1^2 - \mathcal{L})(1 - r_3^2 - \mathcal{L})r_2^2 r_4^2}{|1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{im\zeta_{\text{cav}} + 2iL\omega_{\text{RF}}/c}|^2} \quad (3.14)$$

ここで  $\omega_{\text{RF}}$  は RF サイドバンドの周波数である。KAGRA の場合、AS ポートに出てくる  $\pm 16.875$  MHz である。上式から、OMC 後で RF サイドバンドを要求値の  $20 \mu\text{W}$  以下まで除去するためには、共振器長  $L$  は 75 cm 以上にする必要がある。

## 第4章

# デザイン研究

干渉計の構成によって、ASポートからでてくる高次モードの光の分布は異なる。本研究では、KAGRAの腕共振器を構成するミラーにミラーマップを導入した FINESSE シミュレーションを行い、KAGRAに最適なアウトプットモードクリーナー (OMC) の光学パラメータを選択した。

### 4.1 Advanced LIGO でのデザイン決定方法

#### Waldman 方式

OMC は Advanced LIGO でも採用されており、これまでに2つのステップを踏んで OMC の光学デザインが決定されてきた。初めてとられた計算方法は、Sam Waldman が行ったものである [11]。Waldman 方式では、各高次モードと RF サイドバンドについて、OMC の共振点と間の距離  $|\nu_{m,n,l}|$  / (OMC のバンド幅) を計算していく。

$$\nu_{m,n,l} = \frac{c}{2\pi L} (m\zeta_{\text{OMC}} + n\pi) + l\omega_{\text{RF}} \quad (4.1)$$

ここで、 $m$  は高次モードの次数、 $n$  は考慮する OMC の共振点の数、そして  $l$  は RF サイドバンドの次数である。あとはこの  $\nu_{m,n,l}$  が最も大きくなるような Gouy 位相と共振器長を選択する。図 4.1 は、Waldman 方式を KAGRA について適用した場合の、OMC の共振とそれに最も近い高次モード、もしくは RF サイドバンドとの距離を OMC の共振器長ごとにプロットしたものである。図中の範囲で Gouy 位相を見たとき、KAGRA 用 OMC では、青線の共振器長 50 cm における Gouy 位相シフト 40 deg 付近がもっとも良いパラメータであると言える。共振器長と Gouy 位相が決まれば、OMC に用いるミラーの曲率が決まっていく。なお、Waldman 方式では OMC の光学パラメータを決定する際、全ての高次モードを等価に扱っている。

#### Arai 方式

Waldman 方式では各高次モードを全て同等に扱ったが、実際には干渉計の構成や使用するミラーのパラメータから、ASポートに出てくる各モードのパワーには偏りがある。そこで新たに用いられた計算方法が Arai 方式である [12]。干渉計から出てくる高次モードの分布を知り、それぞれのモードの重みを計算に導入するというのが Arai 方式の特徴である。Advanced LIGO では最終的にこの Arai 方式が採用され、前身の Enhanced LIGO の測定結果を用いて重み付けが行われた。

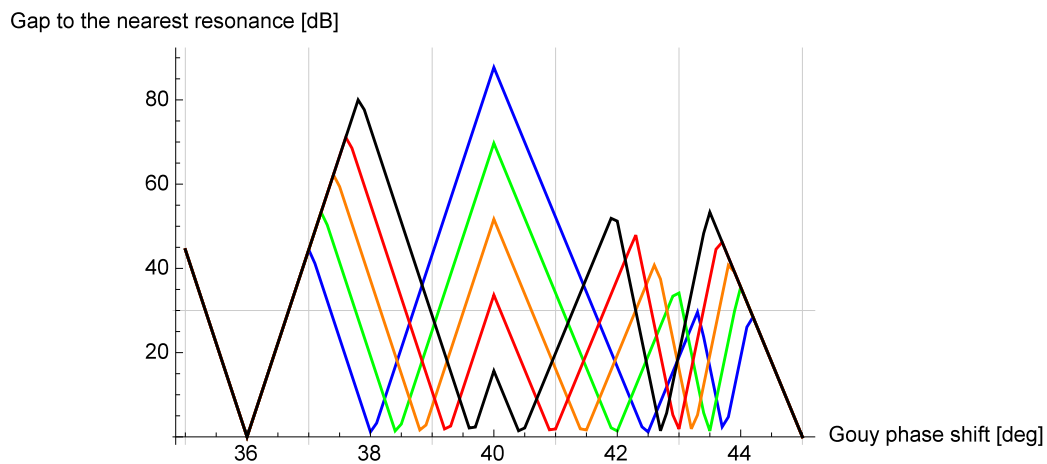


図 4.1 Waldman 方式による KAGRA 用 OMC の光学パラメータ選択。高次モードと RF サイドバンドの中から、OMC の共振に最も近いものの距離を表している。線の色の違いは共振器長の違いを表しており、青、緑、橙、赤、黒色の順に 50、60、70、80、90 cm である。

## 4.2 高次モードの重み付け

### FINESSE とミラーマップ

KAGRA は新しく建設された重力波望遠鏡であるため、LIGO で行われた Arai 方式のように以前の測定結果から AS ポートに出てくる高次モードの分布をすることはできない。そこで我々は、ミラーマップを導入した FINESSE シミュレーションを行い、KAGRA での高次モード分布を予測した。

FINESSE とは、バーミンガム大学の Andreas Freise が開発した干渉計シミュレーションツールである [9]。FINESSE を使うことで、ユーザーが定義した干渉計セットアップにおけるエラー信号や伝達関数、量子雑音などを計算することができる。OMC のシミュレーションにおいて最も重要な FINESSE の特徴は、平面波の伝搬だけでなく、Hermite-Gauss モデルによって記述される高次の波の伝搬もシミュレーションできることである。ミラーマップとは、ミラー表面の歪みを位相として数値的に表した多数の配列からなるデータである (図 4.2)。KAGRA で使用するミラーはまだ製作段階であるため、今回用いたミラーマップは、実際に使用するミラーの作製の際に要求されるパワースペクトル密度から、表面粗さの二乗平方根、RMS (root-mean-square) が 0.5 nm の表面エラーをもつように、カルフォルニア工科大学の山本博章氏によって作成されたものである [10] [15]。KAGRA の腕共振器を構成する 4 枚全てのミラーに同じミラーマップを用いてしまうとその影響が相殺してしまうため、4 つの独立なミラーマップを使用した。したがって 4 つのテストマスに割り当てるミラーマップの組み合わせから、24 通りの干渉計についてシミュレーションした。

### 設定パラメータ

本研究において用いたパラメータについて記述する。ビームスプリッター上でのレーザーパワーは 515 W、腕共振器を構成するミラーの曲率は 1.9 km で、曲率においては両腕共振器の間で  $\pm 1\%$  の誤差を採用した。また、腕共振器のフィネスは 1550 で、周回光学ロス は 100 ppm、両腕共振器間の反射率差、

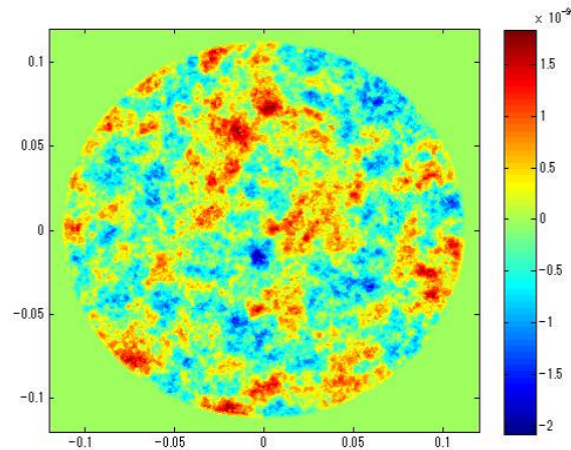


図 4.2 FINESSE シミュレーションに用いたミラーマップ。今回は 0.5 nm の凹凸を持つミラーマップを、腕共振器を構成するミラー 4 つにそれぞれ使用した。

インバランスは  $\pm 10\%$  とした。パワーリサイクリング、およびシグナルリサイクリング共振器内での周回 Gouy 位相シフトはそれぞれ 33 deg、35 deg であり、各リサイクリング共振器を構成するミラーへのビームの入射角は 0.6 deg である。また、シグナルリサイクリング鏡の反射率は 85 % である。

### チューニングの流れ

ミラーマップの組み合わせに応じて、干渉計を構成するミラーの最適な位置は異なってくる。したがってミラーマップの組み合わせ 24 通りそれぞれについて、ミラーの位置を最適な場所にチューニングする必要がある。以下にチューニングの流れを示す。なお、ミラー間距離や曲率半径、ビームのパラメータは既に KAGRA で使用する値に設定してあるとする。

1. 両腕のエンドミラーの位相調整: 最適な共振状態にするために、腕の透過光が最大になるように位相を合わせた。ただし、リサイクリング共振器の影響を無視するために、PRM や SRM の反射率はゼロにしてある。
2. ビームスプリッターの位相調整: 干渉計をダークフリンジにするよう、SRM の透過光が最小になるように合わせた。
3. パワーリサイクリングミラーの位相調整: パワーリサイクリングミラーは、腕の透過光が最大になるように調整した。
4. シグナルリサイクリングミラーの位相調整: シグナルリサイクリングミラーは、腕を 10 kHz で差動に振った際に生成される信号が SRM 後で最大になるように合わせた。このときの KAGRA は BRSE 干渉計になっているため、さらに +3.5 deg だけ位相をずらして DRSE 干渉計にした。
5. SRM-OMC 間の距離調整: AS ポートに出てくる信号サイドバンドが最大になるように調整した。
6. DC readout 位相の調整: DC readout 位相は 132 deg である。まず AS ポートにでてくる光が最小になる X アームの位相を求め、その値に  $|1/\tan(132 \text{ deg})|$  倍した位相に合わせた。Y アームについては、X アームと差動方向にオフセットをつけた。



ここまでの作業を行うことで、KAGRA は DC readout のためのオフセットを加えた DRSE 干渉計となる。なお、チューニングに用いたコードは同研究室の加藤氏が Matlab および SimTools を用いて作成し、その後熱田氏によって改良されたものを用いた。

## シミュレーション結果

図 4.3 は、干渉計の AS ポートへでてくる  $m$  次のモードのパワーを示しており、全てのミラーマップの組み合わせ 24 通りについて、それぞれの基本モードで規格化してある。KAGRA の干渉計構成では、2 次と 10 次のモードが AS ポートにより多く出て来ることがわかる。我々はこれらの平均値を KAGRA での高次モードの重み、ウェイトニングファクターとした。

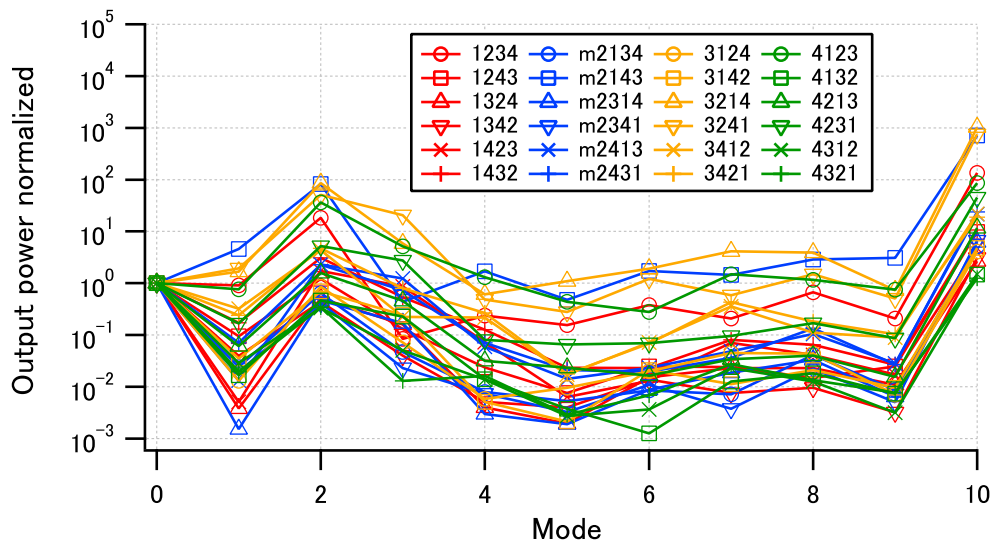


図 4.3 ミラーマップの組み合わせ 24 通りの AS ポートにでてくる高次モード分布。

## 4.3 最適パラメータの決定

### 共振器長と Gouy 位相

各モードのウェイトニングファクターに式 (3.13) と (3.14) で示した高次モードの OMC 透過率をかけ、OMC の透過光に含まれる高次モードが最も小さくなるように各パラメータを求めた。今回は共振器長 75cm ~ 90cm について計算しており、図 4.4、4.5 は、共振器長 75 cm の場合の OMC のパラメータ選択に用いた図である。最終的に Gouy 位相  $\zeta_{\text{OMC}} = 55.4 \text{ deg}$ 、共振器長  $L_{\text{OMC}} = 75 \text{ cm}$  を最適値とした。

### OMC 内ミラーの曲率

OMC のように限られた範囲内で共振器長をかせぐために設計された共振器では、Gouy 位相の計算が式 (3.5) と少し異なる。そこで OMC に用いるミラーの曲率について以下の 3 つの行列を定義し、行列を用いて計算する。このように行列を用いたビームの計算については、付録 A を参照してほしい。

$$S(L) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

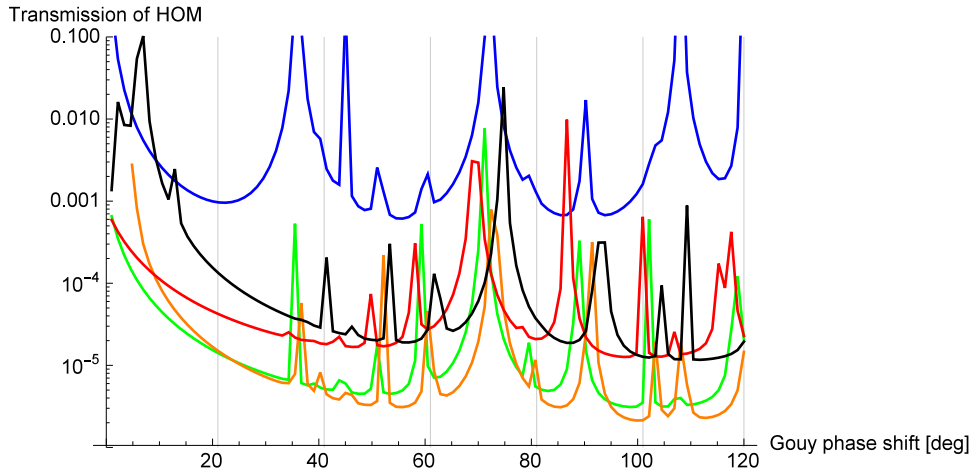


図 4.4 各モードのウェイトニングファクターに高次モードの OMC 透過率をかけた値。図中では 75cm の共振器長をもつ OMC について、Gouy 位相を 0deg から 90deg まで幅広くとった場合である。青線：高次モード、緑線：+16 MHz の RF サイドバンド、橙線：-16 MHz の RF サイドバンド、赤線：+45 MHz の RF サイドバンド、黒線：-45 MHz の RF サイドバンド。

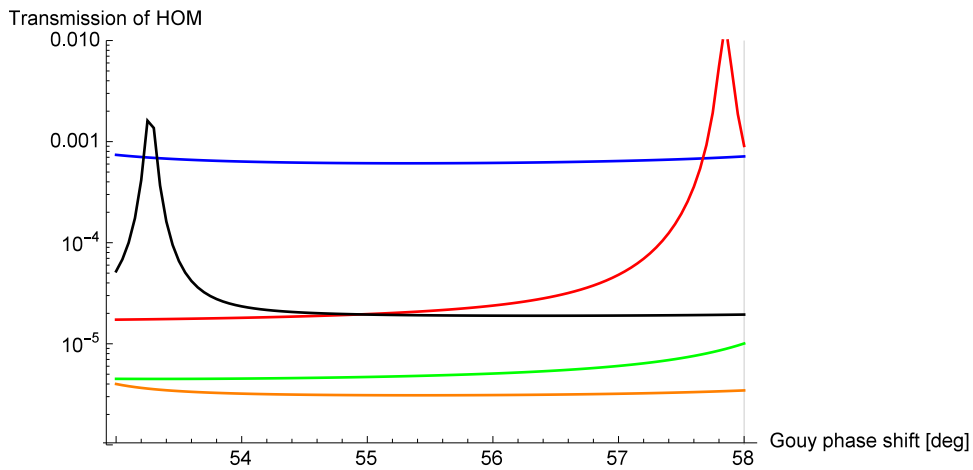


図 4.5 各モードのウェイトニングファクターに高次モードの OMC 透過率をかけた値。図 4.4 に対して、Gouy 位相を 53deg から 58deg と狭めた場合である。

$$C_{\pm} = M_{\pm}S(L_2)M_{\pm}F(R_{\pm})S(L_1)M_{\pm}F(R_{\pm})S(L_2)M_{\pm}S(L_1) . \tag{4.3}$$

ここで、OMC はフラットな部分反射ミラー 2 枚と曲率付きの完全反射ミラー 2 枚で構成されているとし、フラットミラー同士および曲率付きミラー同士の間隔が  $L_1$  で、曲率の異なるミラー間の距離が  $L_2$ 、曲率付きミラーの曲率は 2 枚とも  $R$  であるとした。非点収差の影響によってビームに対して縦方向と横方向での曲率は異なっており、 $R_{\pm} = R \cos(\theta) \pm 1$  となる。この行列を  $ABCD$  行列と考えて対角成分、すなわち  $A$  と  $D$  の平均をとると、周回 Gouy 位相シフトのコサイン関数を得る。

$$\zeta_{\text{OMC}} = \text{sgn}B \cdot \arccos \frac{A + D}{2} . \tag{4.4}$$



KAGRA の場合

KAGRA 用 OMC の共振器長  $L_{OMC}$  が 75 cm で片道の Gouy 位相シフト  $\zeta_{OMC}$  が 55.4 deg となっている。鏡への入射角は  $\theta = 6.7 \text{ deg}$  となっているので、 $L_1 = 0.369825 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.380175 \text{ m}$  となる。非点収差を無視して  $\zeta_{OMC} = 55.4 \text{ deg}$  を与える  $R$  を求めると、 $R = 1.88693 \text{ m}$  となる。非点収差を計算に入れると、横方向 (-) は  $\zeta_- = 55.17 \text{ deg}$ 、縦方向 (+) は  $\zeta_+ = 55.64 \text{ deg}$  となる [13][14]。

### 4.4 OMC 前後の比較

我々は、FINEESE 上の干渉計構成に前々節で求めた Gouy 位相  $\zeta_{OMC} = 55.4 \text{ deg}$ 、共振器長  $L_{OMC} = 75 \text{ cm}$  で、曲率つきミラーを 1 枚を含む OMC を組み込んだ。表 4.1 は、FINESSE を用いて OMC 前後のビームについて基本モード、高次モード、RF サイドバンドのパワーをまとめたものであり、図 4.7 は OMC 後の高次モードの分布である。1 から 4 までの数字の順番は、X アームのフロントミラー、エンドミラー、Y アームのフロントミラー、エンドミラーに使用したミラーマップを表している。また、図 4.7 と表 4.2 は、AS ポートに漏れ出てくる光が、ミラーマップがない状態の 1 mW に近い 1.3 mW であった 3421 の組み合わせの場合についてまとめたものである。重み付けの際、特に重みが大きかった 2 次や 10 次のモード、そして RF サイドバンドが、OMC 前後で低減されていることが確認できる。

表 4.1 の中から、ミラーマップの組み合わせが 1234、2143、3214、3241、4123 の場合には、高次モードと RF サイドバンドがそれぞれ基本モードの 1%、2% 以下という、第 3 章で示した KAGRA 用 OMC の要求値を満たさないことが分かった。これらの組み合わせに共通することは、AS ポートに漏れ出てくる基本モードのパワーが小さく、1 mW に満たないということである。Gouy 位相等の選択によって、高次モードや RF サイドバンドは OMC 内での共振から遠いはずだが、もともとの基本モードが小さいために、相対的に比率が高くなってしまったと考えられる。したがって、パラメータを適切に選択した上で OMC が要求値を満たす確率は約 79% である。実際に KAGRA で AS ポートに漏れ出てくる基本モードのパワーが小さい場合には、それぞれの腕で使用するミラーの組み合わせを変える必要があるだろう。

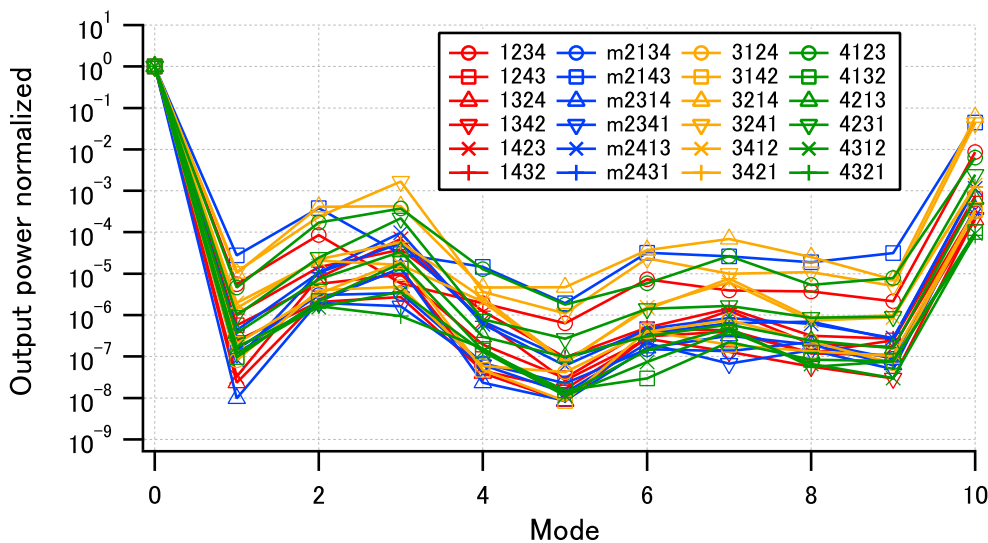


図 4.6 ミラーマップの組み合わせ 24 通りの OMC を透過してでてくる高次モード分布。図 4.7 に対して、全体的に高次モードが低減されている。

ミラーマップ	OMC 前			OMC 後		
	0 次	1 ~ 10 次	RF	0 次	1 ~ 10 次	RF
1234	4.80E-04	7.49E-02	3.62E-01	4.60E-04	4.00E-06(0.87%)	2.08E-05(4.51%)
1243	5.36E-03	6.04E-02	3.56E-01	5.14E-03	3.35E-06(0.07%)	2.14E-05(0.42%)
1324	1.12E-02	3.81E-02	3.58E-01	1.07E-03	2.32E-06(0.02%)	2.06E-05 (0.19%)
1342	1.22E-02	4.42E-02	3.56E-01	1.17E-02	2.71E-06(0.02%)	2.14E-05(0.18%)
1423	3.10E-03	2.34E-02	3.59E-01	2.98E-03	1.27E-06(0.04%)	2.06E-05(0.69%)
1432	2.21E-03	3.27E-02	3.63E-01	2.13E-03	1.69E-06(0.08%)	2.09E-05(0.98%)
2134	1.05E-02	6.24E-02	3.67E-01	1.01E-02	3.30E-06(0.03%)	2.09E-05(0.21%)
2143	6.29E-05	5.11E-02	3.61E-01	6.11E-05	2.77E-06(4.54%)	2.27E-05(37.2%)
2314	1.21E-02	8.35E-02	3.50E-01	1.16E-02	4.29E-06(0.04%)	2.00E-05(0.17%)
2341	1.26E-02	9.12E-02	3.49E-01	1.21E-02	4.75E-06(0.04%)	2.21E-05(0.18%)
2413	2.22E-03	5.61E-02	3.45E-01	2.14E-03	2.70E-06(0.13%)	1.97E-05(0.92%)
2431	2.89E-03	7.81E-02	3.50E-01	2.78E-03	3.70E-06(0.13%)	1.99E-05(0.72%)
3124	7.69E-03	3.98E-02	3.57E-01	7.38E-03	2.37E-06(0.03%)	2.04E-05(0.28%)
3142	8.51E-03	4.95E-02	3.57E-01	8.19E-03	3.06E-06(0.04%)	3.04E-05(0.37%)
3214	9.59E-05	1.09E-01	3.57E-01	9.15E-05	5.56E-06(6.08%)	2.04E-05(22.4%)
3241	1.50E-04	1.24E-01	3.58E-01	1.45E-04	6.60E-06(4.54%)	2.22E-05(15.3%)
3412	1.47E-03	4.08E-02	3.56E-01	1.42E-03	2.01E-06(0.14%)	2.04E-05(1.44%)
3421	1.39E-03	3.56E-02	3.58E-01	1.33E-03	1.81E-06(0.14%)	2.04E-05(1.53%)
4123	1.40E-04	1.86E-02	3.53E-01	1.34E-04	9.31E-07(0.70%)	2.29E-05(17.1%)
4132	1.29E-02	2.88E-02	3.59E-01	1.24E-02	1.52E-06(0.01%)	2.29E-05(0.18%)
4213	3.90E-03	5.42E-02	3.52E-01	3.75E-03	2.55E-06(0.07%)	2.16E-05(0.58%)
4231	1.47E-03	7.91E-02	3.59E-01	1.41E-03	3.81E-06(0.27%)	2.29E-05(1.63%)
4312	1.56E-02	3.08E-02	3.56E-01	1.50E-02	1.51E-06(0.01%)	2.19E-05(0.15%)
4321	1.54E-02	2.64E-02	3.57E-01	1.48E-02	1.30E-06(0.01%)	2.32E-05(0.16%)

表 4.1 OMC 前後における基本モード、高次モードおよび RF サイドバンドの総パワーをまとめたもの。単位は全て [W] であり、OMC 後での () 内は、基本モードに対する比率である。赤文字は第 3 章で述べた要求値を満たさない数字である。

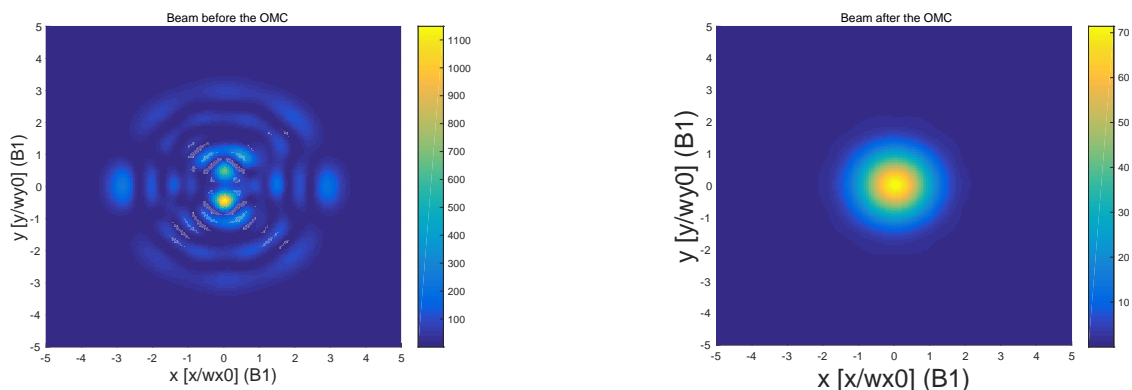


図 4.7 ミラーマップの組み合わせ 3421 において、FINESSE 上で OMC 前後のビームプロファイルをした場合の結果。OMC 前では基本モードが確認できないほど高次モードが見えているのに対し、OMC 後では基本モードがきれいに見えている。なお、この図の作成の際には RF サイドバンドをオフにしてある。

	0th	1st	2nd	3rd	10th	RF
Before OMC	1.38 mW	333 $\mu$ W	6.58 mW	1.10 mW	26.1 mW	358 mW
After OMC	1.33 mW	1.96 nW	29.5 nW	76.9 nW	1.69 $\mu$ W	20.4 $\mu$ W

表 4.2 ミラーマップの組み合わせ 3421 において、OMC 前後の各モードおよび RF サイドバンドのパワー。OMC 前で大きかった 2 次や 10 次のモードについて、要求値を満たしていることが分かる。

## 第5章

# プロトタイプ実験

アウトプットモードクリーナー (OMC) が高次モードの光を除去するという性能をきちんと発揮するためには、共振器長および干渉計と OMC 間の相対位置の制御が必要となる。本実験では、Michelson 干渉計と懸架された OMC を同時制御した状態をつくり、OMC 前後で高次モードの低減を確認することを目標とした。

### 5.1 光学系のセットアップ

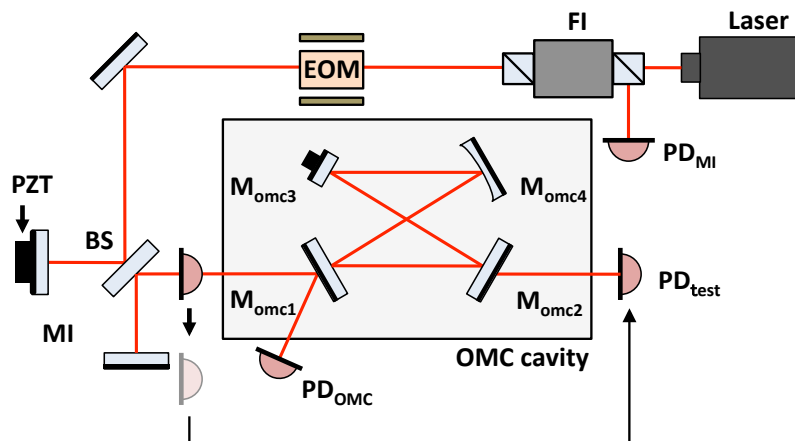


図 5.1 プロトタイプ OMC 実験のセットアップ。FI: アイソレーター、EOM: 変調器、BS: ビームスプリッター、MI: Michelson 干渉計、PD: フォトディテクター PZT: ピエゾ素子。OMC: 曲率付きミラー 1 枚を含む計 4 枚のミラー ( $M_{omc1} \sim M_{omc4}$ ) で構成され、サスペンションによって懸架されている。

#### 入射光学系

レーザー光源には波長 1064 nm、最大出力 200 mW の Nd:YAG レーザーを使用した。ビームを直線偏光にするために 1/4 波長板を設置した後、干渉計からの戻り光を防ぐためのアイソレーターを設置した。今回用いた Faraday アイソレーターは、Faraday 効果を用いて反射光の偏光状態を入射光に対して 90 deg 変え、偏光ビームスプリッターで分離する装置である。アイソレーター前後には 1/2 波長板を設置し、分離比が最大になるように調整した。なお、アイソレーター前後でレーザーパワーに約 10% の口

スがあることを確認した。その後変調器 (Electro Optical Modulator; EOM) を設置して発振器を接続し、12 MHz の RF サイドバンドを生成できるようにした。なお、アイソレーターと EOM はアライメント調節ができるように 3 軸可変マウントに固定してある。図 5.2 は変調器後のビームプロファイル結果である。マーカーが測定値であり、以下のように測定位置  $z$  の関数として表される Gaussian ビームの関数でフィッティングした [16]。エラーバーはビーム半径について  $\pm 10\%$ 、距離についてはプロファイラーの設置精度として  $\pm 5\text{ mm}$  を取っている。

$$f(z) = a\sqrt{1 + \left(\frac{z-b}{a^2} \times \frac{\lambda}{\pi}\right)^2} \quad (5.1)$$

ここで、 $a$ 、 $b$  はビームウエスト半径、およびビームウエストの位置であり、 $\lambda$  はビームの波長である。

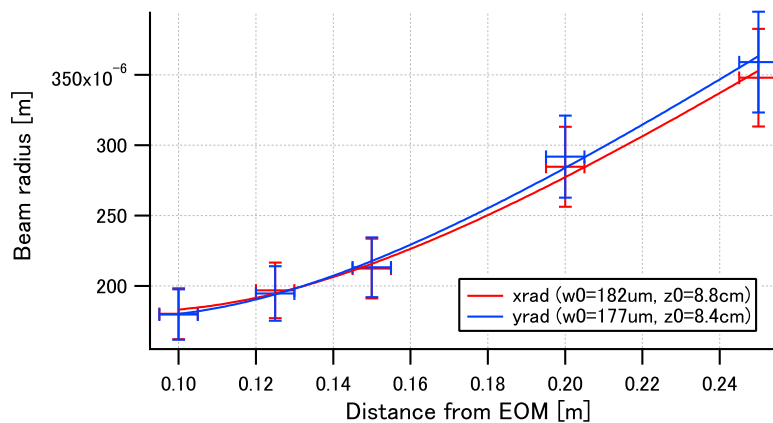


図 5.2 変調器後のビームプロファイル結果。

## Michelson 干渉計

変調器後、腕の長さが 10 cm の Michelson 干渉計 (MI) を組み立てた。今回用いたビームスプリッターにはわずかに偏光依存性があるため、直前に 1/2 波長板を設置し、ビームスプリッターがちょうど 50% ずつ反射、透過するように調整した。両腕を構成するフラットミラーを使用したため、ビームウエストがちょうどミラー表面にくるように、2 枚のレンズを用いてモードマッチングを行った。モードマッチングの計算には図 5.3 にあるシミュレーションソフト JamMT を使用し、ビームプロファイラーで確認しながら行った。このときアシンメトリによるモードミスマッチングを抑えるため、ビームウエストが急激に変化しないようにしてある。ウエスト位置がミラー表面にくることで、REFL ポートに返ってくるビームを入射光と一致させることができる。Y アームのミラーには MI の長さ制御用に piezo 素子を取り付け、5 cm のアシンメトリをつけてある。図 5.4 は、MI への最終的なモードマッチングを終えた後のビームプロファイル結果である。

アイソレーターまで戻ってきた MI の反射光を、フォトディテクターや CCD カメラで確認しながら、ミラーのアライメントをとった。図 5.5 は、Y アームの piezo を発振器から入力した 50 Hz の三角波で振りながら見た反射光である。フォトディテクターの入力レンジを超えないように、検出器直前にはレーザーパワーを弱めるために用いる ND フィルターが設置してある。今回の MI のコントラストは約 92% であった。

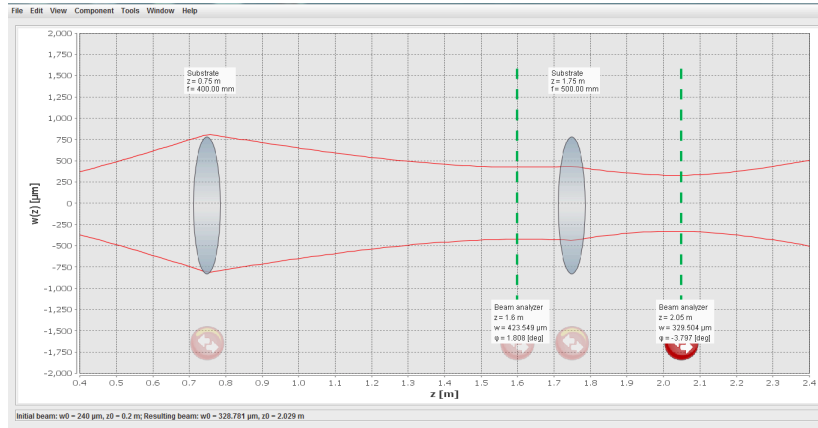


図 5.3 モードマッチングのシミュレーションに使用したソフト JamMT。ビームの初期値や最終的に作りたモードを指定することで、リストしたレンズの中からモードマッチングのシミュレーションを行うことができる。

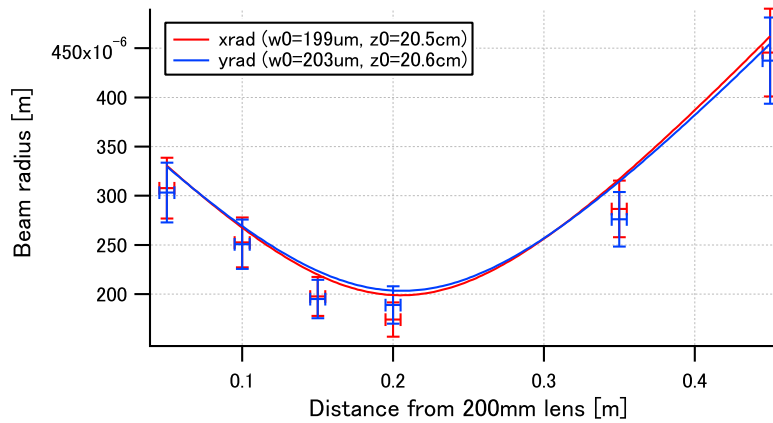


図 5.4 MI へのモードマッチング結果。ビームウエスト位置に X アーム、そしてウエストから 5 cm 遠い位置に Y アームのミラーを設置した。

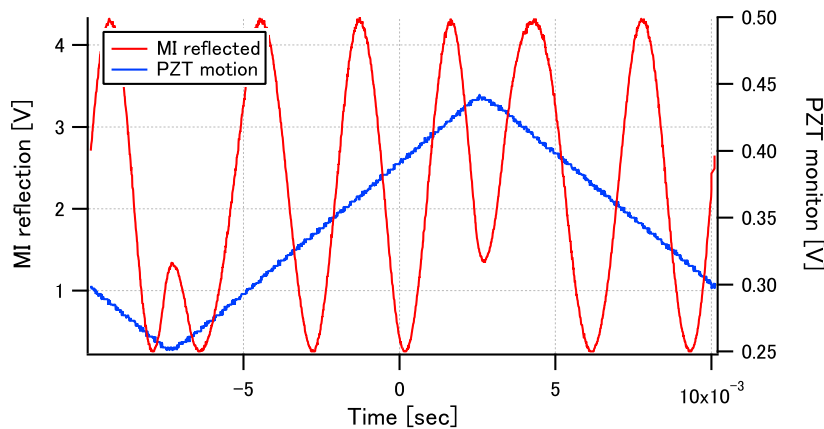


図 5.5 Y アームのピエゾを 50Hz で振りながら反射光を測定した結果。ピエゾの折り返し点以外で MI からの反射光が振れているのがよく分かる。コントラストを計算するために用いた。

## OMC

OMC へのモードマッチングについては、MI の片腕をビームダンパーでブロックしながら行った。今回はアシンメトリをつけた Y アームをブロックした。しかし期待されたビームがなかなか作れなかったため、レンズをスライダーに乗せることで位置を調整できるようにし、最終的なモードマッチングは OMC の共振状態を見ながら行うこととした。

KAGRA では曲率のついたミラーを 2 枚使用し、共振器の対称性を高めるのであるが、本実験の目標は OMC の長さ制御方法を確立することであり、KAGRA で実際に用いるセットアップを使用する必要はないため、より作成が簡単な、1 枚の曲率付きミラーで構成された OMC で実験を行った。第 4 章では OMC のパラメータを決定するためにミラーマップを用いたシミュレーションを行ったが、今回はミラーに関する情報がないため、図 5.6 のように Waldman 方式で計算を行った。その結果、共振器長は 44 cm、周回 Gouy 位相は 55.9 deg とし、 $M_{\text{omc4}}$  の曲率は 2 m とした。

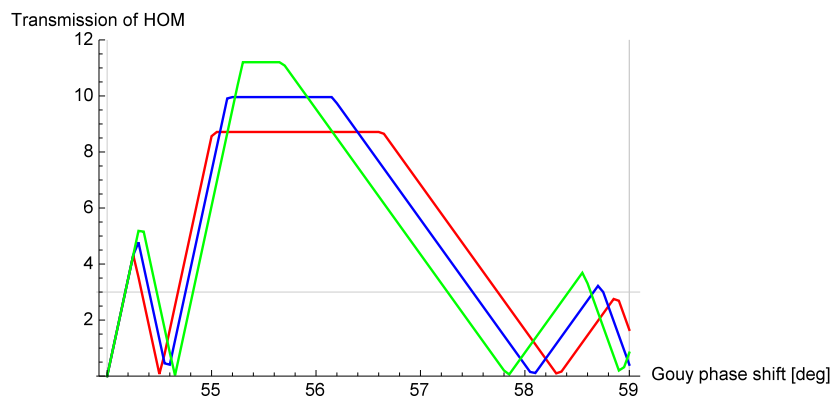


図 5.6 Waldman 方式による OMC のパラメータ設定。色の違いは共振器長の違いを示しており、赤、青、緑線の順に 35、40、45 cm である。

図 5.7 の  $M_{\text{omc1}}$  と  $M_{\text{omc2}}$  には反射率 98% のフラットミラー、 $M_{\text{omc3}}$  には全反射の 1/2 インチフラットミラー<sup>1</sup>、 $M_{\text{omc4}}$  には全反射の曲率付きミラーを使用している。この場合、設計フィネスは 155 となる。さらに、先行研究においてピエゾ付きミラーマウントの共振によると思われる問題があったため、 $M_{\text{omc3}}$  は真鍮製のマウント、およびハーフインチミラーを使用した [15]。図 5.10 右にある真鍮マウントは、2015 年 10 月に共同で本実験に取り組んだ Janis Woehler が設計したものを、東工大ものづくりセンターでさらに加工したものである。図 5.8 はその真鍮マウントの共振周波数について、CAD 作成ソフト Inventor を用いて解析した結果である。

OMC の後には、 $M_{\text{omc4}}$  を透過してきた光をモニターできるようにフォトディテクターと CCD カメラを設置した。透過光をモニターしながら、OMC 内のミラーや OMC 直前に設置した 2 枚のミラーのアライメントを取る操作、そしてレンズの位置を変える操作を行って、OMC を共振までもっていった。図 5.9 は、 $M_{\text{omc3}}$  のピエゾを発振器から入力した 50 Hz の三角波で振りながら見た透過光を時系列で見たグラフである。最も大きなピークが基本モードの共振であり、その横に見える小さなピークが高次モードの共振である。このグラフから、今回作成した OMC のフィネスと Gouy 位相シフトが計算でき、表

<sup>1</sup> 本実験に用いたミラーは  $M_{\text{omc3}}$  以外全て 1 インチミラーである。



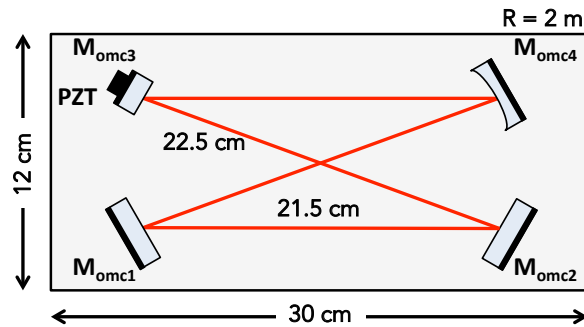


図 5.7 OMC を構成する 4 枚のミラー ( $M_{omc1} \sim M_{omc4}$ ) は、12cm×30cm×1cm のアルミ製ブレッドボードに設置されている。

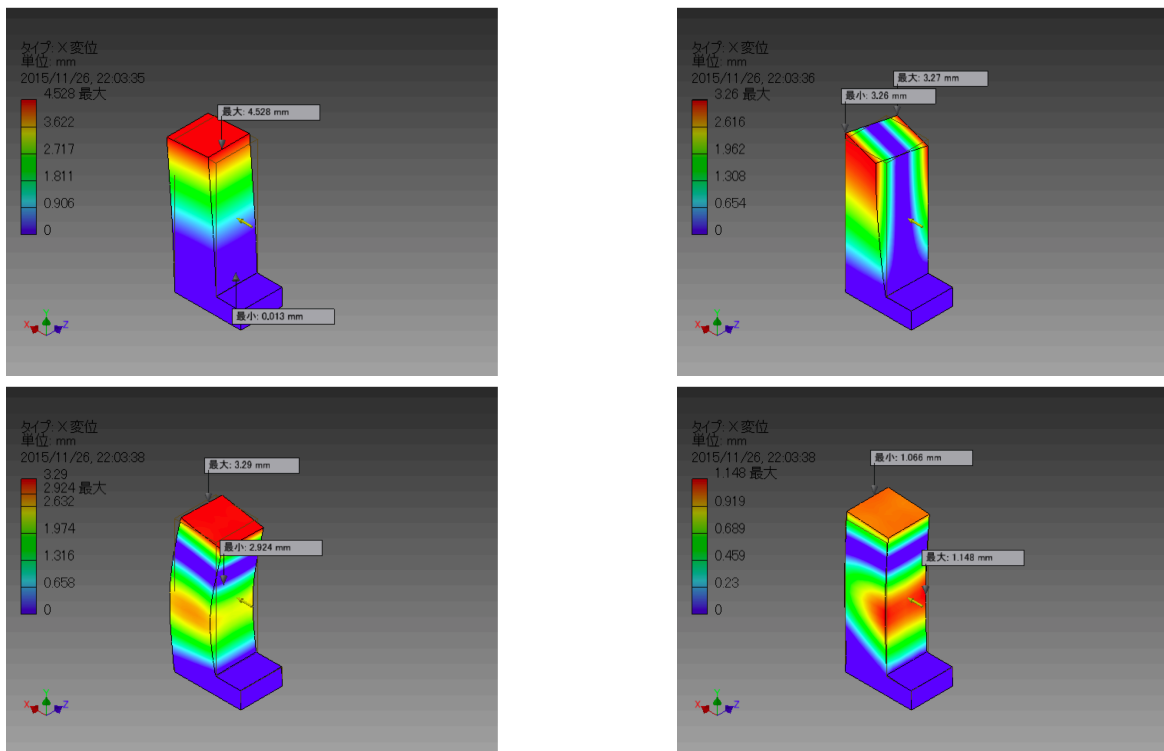


図 5.8 本実験で用いた真鍮製マウントの共振周波数の解析結果。左上から時計回りに 2298.87Hz、6492.23Hz、10456.09Hz、11568.92Hz の共振周波数でのマウントの光軸方向 (図中の  $x$  軸) への最大変位を示している。

5.1 はそれらについてまとめたものである。フィネスは図 5.9 のデータを用いて基本モードの FSR と半値全幅から、周回 Gouy 位相は FSR と各モードの間隔の比から計算した。各ミラーの反射率がそれぞれ 0.3% 下回った場合のフィネスは 115.4 となり、実測値 116.6 に近い値となる。また、周回 Gouy 位相は理論値と実測値で大きく異なっている。たとえば曲率付きミラーの曲率が 2m ではなく 20m であった場合、周回 Gouy 位相は 17.1 deg と実測値の 16.7 deg に近づく。実験室にあった曲率 2m のミラーと入れ替えてみる等のテストを行ったが、いずれも同じような結果となった。しかし、もし曲率が 10 倍大きいと、OMC 内でのモードマッチングが悪くなってしまって実測値ほどのフィネスは実現できないと考えられる。したがって曲率が 10 倍異なるということは考えにく。今回、周回 Gouy 位相の違いについてはこれ以上の検証を行わなかった。



	理論値	実測値
フィネス	155.5	116.6
周回 Gouy 位相	55.9 deg	16.7 deg

表 5.1 今回作成した OMC の光学パラメータ。

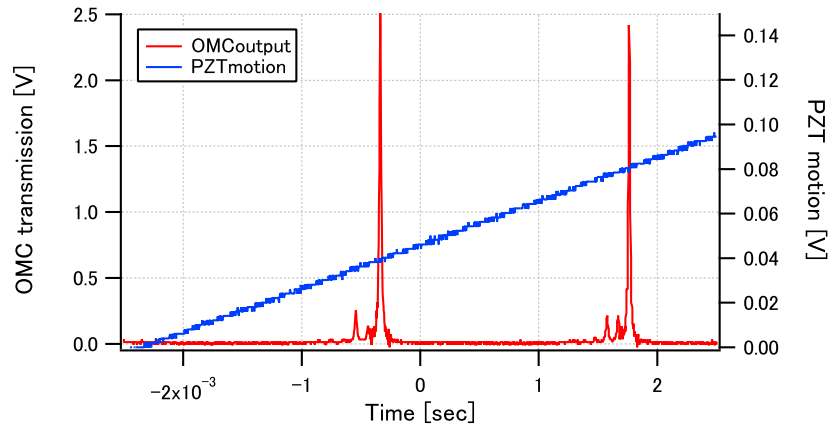


図 5.9 OMC の透過光。

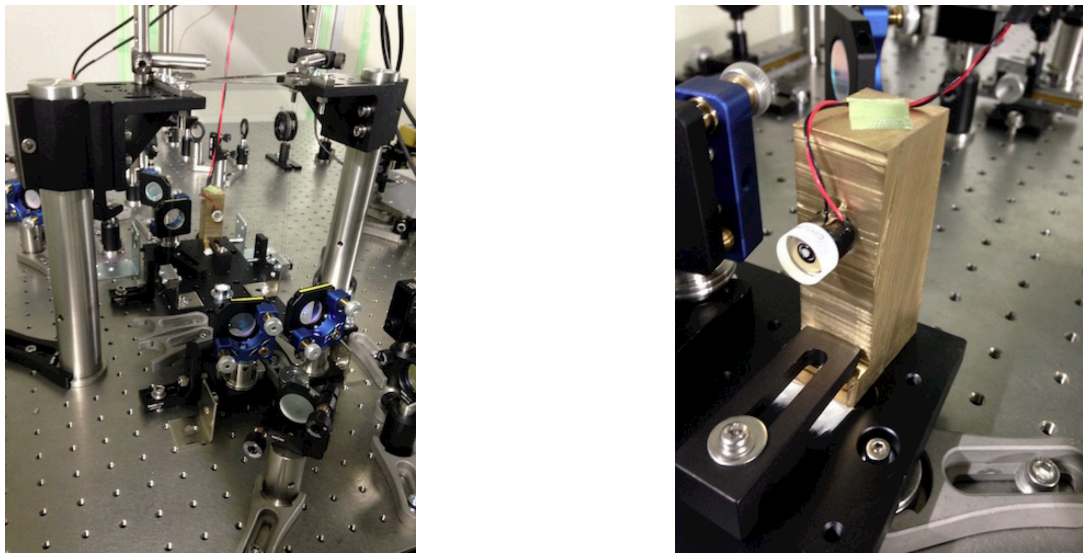


図 5.10 OMC と真鍮マウントの写真。瞬間接着剤を用いて真鍮マウントにピエゾ、ピエゾにハーフインチミラーを固定した。ピエゾから伸びている赤と青の動線はピエゾドライバーに接続されている。

### サスペンション

本実験で用いたサスペンションは以前研究室に滞在していた Stefan Gossler と Tobias Westphal が作成したものである。長さ 13.5 cm、厚さ 1 mm のマレージング鋼<sup>2</sup>のブレードをロッドに固定し、その先から長さ 19 cm、直径 50  $\mu$  m のスチールのワイヤー（ピアノ線）を下ろして、OMC を設置したブレッドボードごと吊る仕様になっている。KAGRA では OMC を構成する 4 枚のミラー以外に、フォトディテ

<sup>2</sup> Ni、Co などを 30 % 程含む、炭素の含有量を減らした鋼である。強度や靱性に優れ、ひずみの少ない素材として開発された。

クターも設置したブレッドボードを懸架する。

今回は  $M_{omc3}$  のマウントにのみ真鍮製のものを使用したため、サスペンションで懸架する OMC の重心位置がブレッドボードの中心からずれてしまった。このずれを補正するために、光学素子類の固定に用いるフォークをカウンターマスとして用いた。さらに、ブレッドボード中心に設置した水準器を参照にしながら、アルミ製のスペーサーを使用して重心位置の微調整を行った。また、図 5.11 のようにネオジウム磁石を配置し、渦電流ダンピングを行った。導体が磁場中を運動すると、渦電流が発生して Joule 熱を発生する。すなわち、アルミ製ブレッドボードの揺れという運動エネルギーが、ネオジウム磁石を設置することによって熱エネルギーに変換される。このとき発生する力は減衰力であり、ブレッドボードの揺れを抑えることができる。

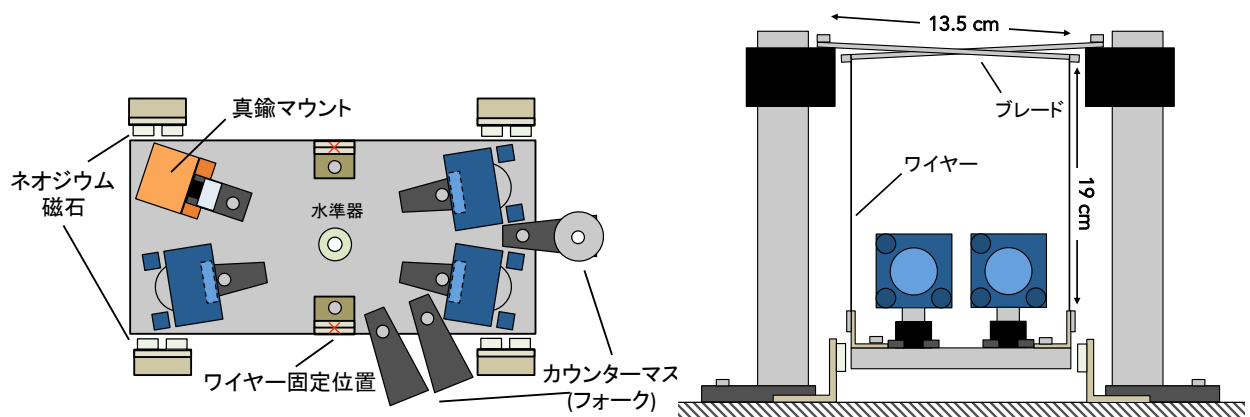


図 5.11 懸架 OMC の絵。左図は上から見た場合、右図は光軸方向 (OMC 透過側) から見た場合。

図 5.12 は、3 軸速度計をブレッドボードの中央に設置し、出力を周波数解析装置 (FFT アナライザー) で測定した結果である。ブレッドボード水平方向では 1.13 Hz と 3.94 Hz に、垂直方向では 2.25 Hz に、そして光軸方向では 1.05 Hz と 1.33 Hz に共振周波数を持つことがわかる。サスペンションの共振周波数は、その周波数をカットオフ周波数として、その方向について 1 次のローパスフィルタのような役割をもつことに相当する。

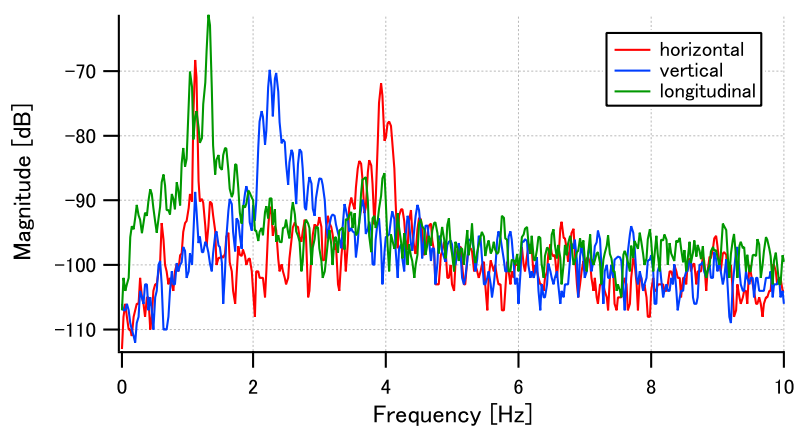


図 5.12 3 軸速度計をブレッドボードの中央に設置し、ブレードやブレッドボードを手で押して揺らした状態で、出力を FFT アナライザーで測定した結果。赤線: ブレッドボード水平方向、青線: ブレッドボード垂直方向、緑線: 光軸方向。

## 実験装置リスト

実験装置名	型番
レーザー	Innolight, GmbH Mephisto S200NE
フラットミラー	THOLABS, NB1-K14 or BB1-E03
フラットミラー (ハーフインチ)	LAYERTEC, 100323
98% フラットミラー	Lattice, BS-1064-Rs98-7-B-1025
曲率つきミラー	Lattice, RX-1064-B-MPC-1025-2000
レンズ	THOLABS, LA****-C
ビームスプリッター	Lattice or THOLABS
ピエゾ素子 (MI)	Piezomrchanik, HPSt 500/10-5/5
ピエゾ素子 (OMC)	Piezomrchanik, HPSt-150/20-15/12
ピエゾドライバー	Piezosystem jena, SVR 500/3
Faraday アイソレーター	THOLABS, IO-3-1064-VHP <sup>a</sup>
変調器	New Focus, Splitter 4003-IR 12MHz
復調器	Mini-Circuit, Frequency Mixer ZEM-2B+
フォトディテクター (モニター用)	THOLABS, PDA10CS-EC
フォトディテクター (信号取得用)	Electro-Optics Technology, ET-3040-InGaAs
パワーディバイダー	Mini-Circuit, ZFRSC-2075+
発振器 (モニター用)	SONY, TEKTRONIX AFG320
発振器 (RF サイドバンド用)	GW Instek, AFG2025
サーボ	Stanford Research Systems, SR560
オシロスコープ	Agilent Technologies, DSO-X 2004A
FFT アナライザー	ONO SOKKI, CF350z
ビームプロファイラー (ソフト)	VISULUX LLC, vBeam
ビームプロファイラー (カメラ)	Mightex, MCN-B013-U
パワーメーター	THOLABS, S121C
速度計	Pico Technology, Three-Axis Accelerometer Kit

表 5.2 主な実験装置

## 5.2 光学系の制御

## Michelson 干渉計の制御

MI の制御用の参照光には、アイソレーターでピックアップした干渉計からの反射光の一部を使用した。信号光は変調器の出力からパワーディバイダーで分けたローカルオシレーターとともに復調器に入力し、1 次のローパスフィルターと通して制御信号を作成した。そして制御信号は Y アームのピエゾに入力し、MI を制御することができた。図 5.2 は MI のロックまでの流れである。制御時の MI の反射光がピエゾを振っているときの最大値になるよう、ピエゾドライバーにかけるオフセット電圧をかえるなどして MI

をダークフリンジにもっていった。図 5.14 上は、MI をロックしているときの開ループゲインについて、サーボの設定を変えて比較したものである。今回はゲイン 2,000、カットオフ周波数 10 Hz の設定を採用し、UGF が 100 Hz 付近にある MI を OMC との同時制御に使用した。図 5.14 下は制御時の MI の開ループゲインと位相、そしてコヒーレンスをグラフにしたものである。なお、ダークフリンジでの MI の透過光は約 12 mW であった。

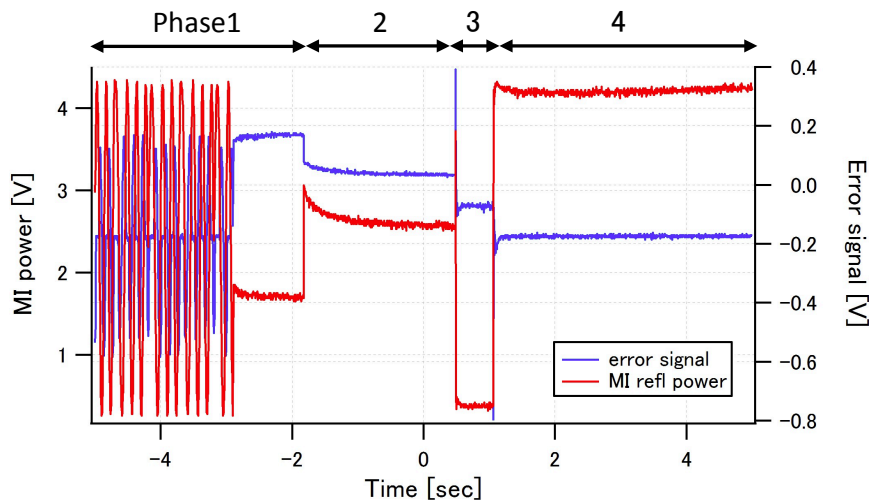


図 5.13 MI をダークフリンジにロックした際の流れ。赤線が MI からの光を REFL ポートでピックアップしたもの、青線がその際のエラー信号である。Phase1 の Y アームのピエゾを発振器で振っている状態から、Phase2 で発振器を外して制御用サーボに繋ぎかえ、Phase3 でピエゾにかかるオフセット電圧調整等の操作を行い、Phase4 で OMC を基本モードにロックした。

## OMC の制御

OMC の制御に用いた信号光には  $M_{omc1}$  からの反射光を使用し、MI 同様、変調器の出力から分けたローカルオシレーターとともに復調器に入力し、1 次のローパスフィルターと通して制御信号を作成した。制御信号は  $M_{omc3}$  に取り付けられたピエゾに返し、OMC をロックした。図 5.15 は、MI の Y アームをブロックした状態で取得した OMC の開ループゲインについて、サーボの設定を変えて比較したグラフである。下図は今回はゲイン 500、カットオフ周波数 100 Hz の場合について詳しくみた場合であり、このとき UGF は約 3 kHz 付近にある。

## Michelson 干渉計と OMC の同時制御

MI をダークフリンジで制御し、その状態で OMC をロックした (図 5.16)。このとき、OMC の制御は前項のよりも弱く、伝達関数を測定することができなかった。なお、サーボの設定はゲイン 100~500、カットオフ周波数 30 Hz~100 Hz で適宜変更するという形式をとった。また、MI にオフセットを加えて DC readout による制御は行わなかった。

図 5.17 と表 5.3 は、アシンメトリが 5 cm ある場合の AS ポートに出てくる RF サイドバンドを用いたときの OMC のエラー信号について、FINESSE でシミュレーションした結果である。MI の腕に 1~5 deg のオフセットを加えたときと、腕のミラーの反射率に 1~5% の差をつけた場合に得られるエラー

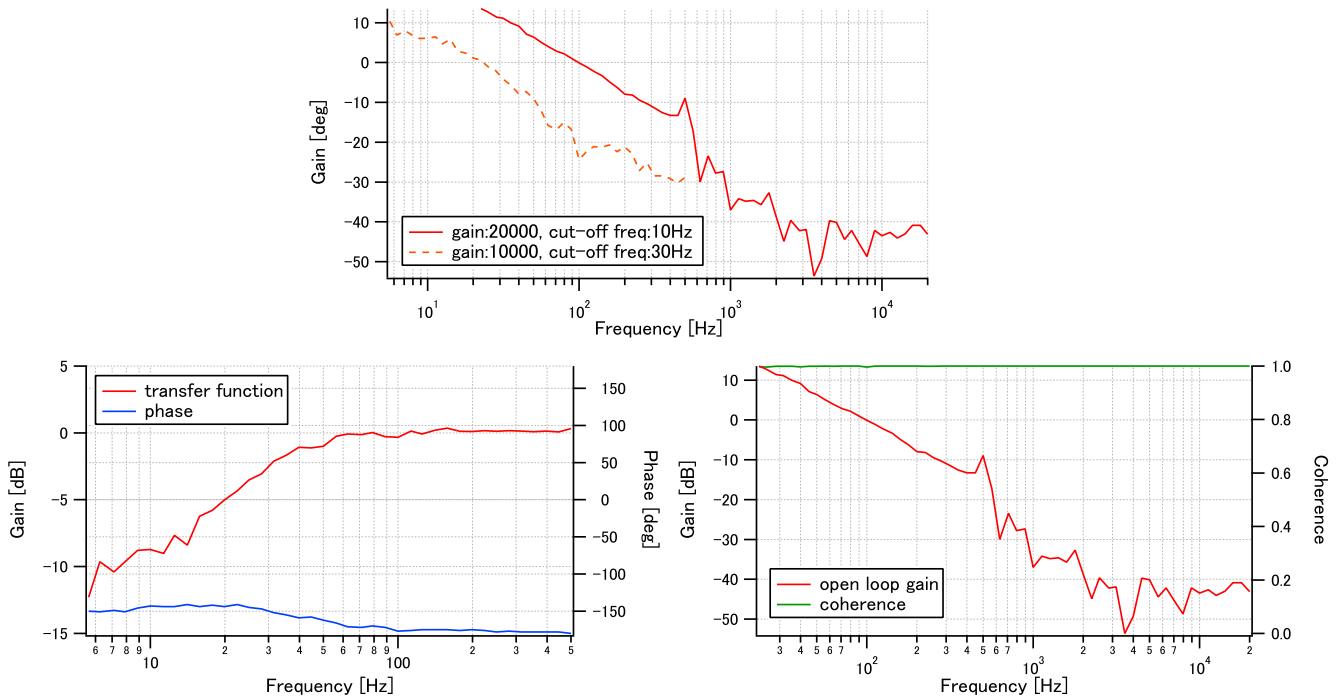


図 5.14 上図は MI をダークフリッジに制御したときの開ループゲインの比較。赤線: 制御用サーボゲイン 20,000、カットオフ周波数 10 Hz。赤点線: ゲイン 10,000、カットオフ周波数 30 Hz。前者の方が UGF が高周波側にあるため、制御帯域が広いことがわかる。下図は赤線の開ループゲインについて詳しくみたグラフ。左図は位相を、右図はコヒーレンスを同時に掲載している。

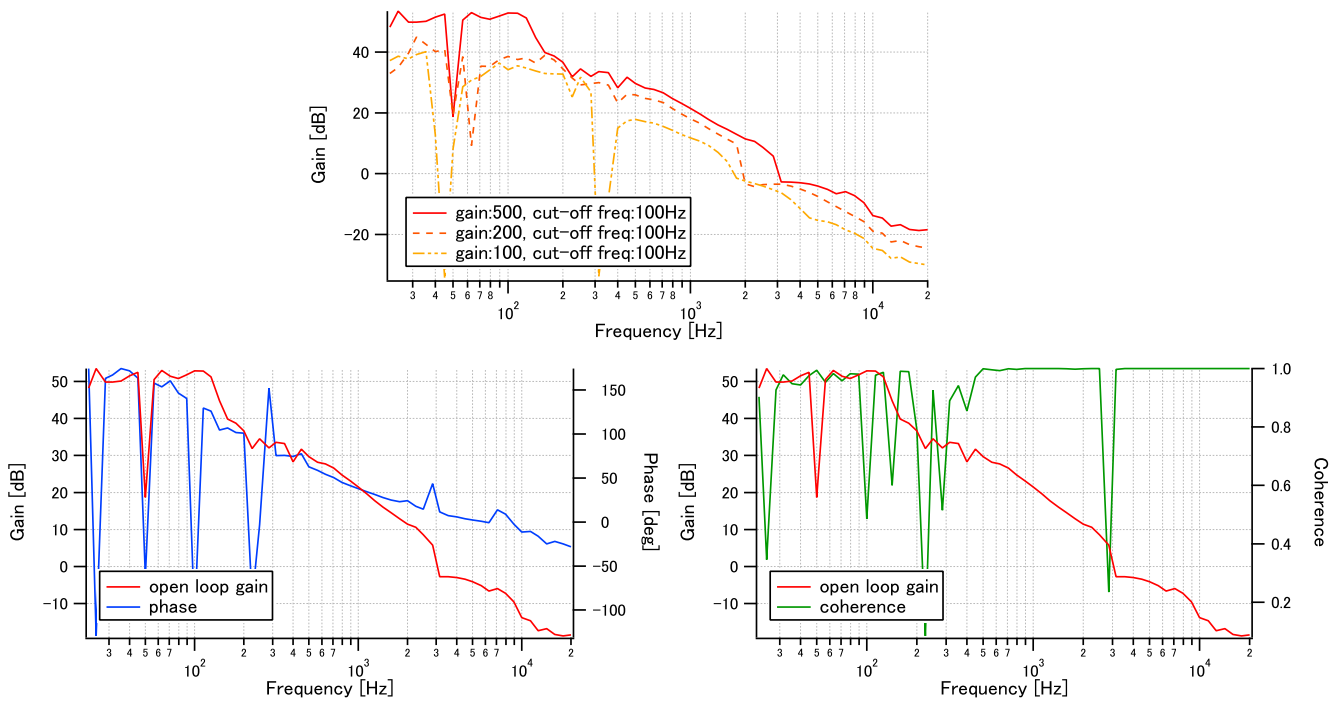


図 5.15 上図は、MI の片腕をブロックした状態で OMC を基本モードに制御したときの閉ループゲイン比較。赤線: 制御用サーボゲイン 500。橙点線: ゲイン 200。薄橙点線: ゲイン 100。カットオフ周波数は全て 100 Hz である。サーボゲインが小さくなるにつれ、開ループゲインも小さくなっていることがわかる。下図は赤線の開ループゲインについて詳しく見たグラフ。

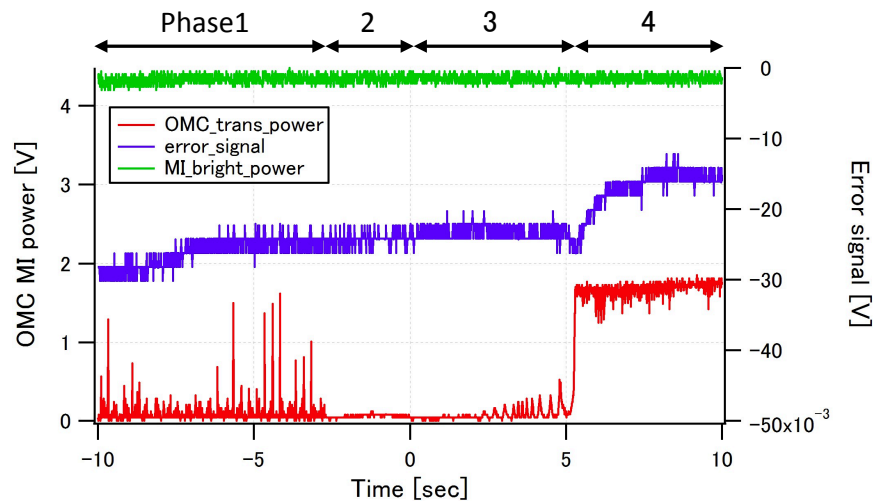


図 5.16 MI をダークFRINGEにロックしながら OMC をロックした際の流れ。赤線が OMC の透過光、青線がエラー信号、緑線が MI からの光をの REFL ポートでピックアップしてみたものである。Phase1 の OMC 内のピエゾを発振器で振っている状態から、Phase2 で発振器を外して制御用サーボに繋ぎかえ、Phase3 でピエゾにかけるオフセット電圧を調整、そして Phase4 で OMC を基本モードにロックした。

信号について行った。1 deg のオフセットを加えた場合と 1% の反射率差をつけた場合を比較すると、反射率差をつけた場合の方が MI の透過光量で約 200 倍、エラー信号量で約 5 倍大きい。また、OMC の透過光を一定にした場合には、反射率差によるエラー信号の方が約 10 倍大きい。しかし、オフセットを大きくしていくことによるエラー信号の増加は、反射率差を大きくしていった場合よりも大きい。したがって、エラー信号に関わる要因としては、オフセットが小さい場合には反射率差による影響の方が大きいですが、加えるオフセットを大きくしていくと、反射率差をつけるよりも RF サイドバンドが OMC まで漏れ出ていく結果になると考えられる。

図 5.18 は、実際に OMC 内のピエゾに発振器から 50 Hz の三角波を入力し、OMC の透過光およびエラー信号をオシロスコープで見たものである。今回、MI の腕に意図的なオフセットを加える操作は行っていない。エラー信号の形状から、FINESSE でのシミュレーションにおける、MI の腕に反射率差がある際のエラー信号の形状に似ていることが確認できる。

オフセット位相 and 反射率差	OMC 透過光 [W]	エラー信号 [W/deg]
1 deg	2.38.E-04	1.90.E-05
2 deg	9.49.E-04	7.59.E-05
5 deg	5.88.E-03	4.70.E-04
1 %	1.25.E-06	1.03.E-06
2 %	5.03.E-06	2.25.E-06
5 %	3.19.E-05	7.18.E-06

表 5.3 MI にオフセット位相や反射率差をつけた場合の、OMC 用エラー信号のシミュレーション結果。

ここで、MI と OMC が同時制御されてるとき、MI 直後のレーザーパワーは約 12mW、OMC 直後のレーザーパワーは約 0.7mW であった。図 5.18 における基本モードと高次モードの比率から、MI の透



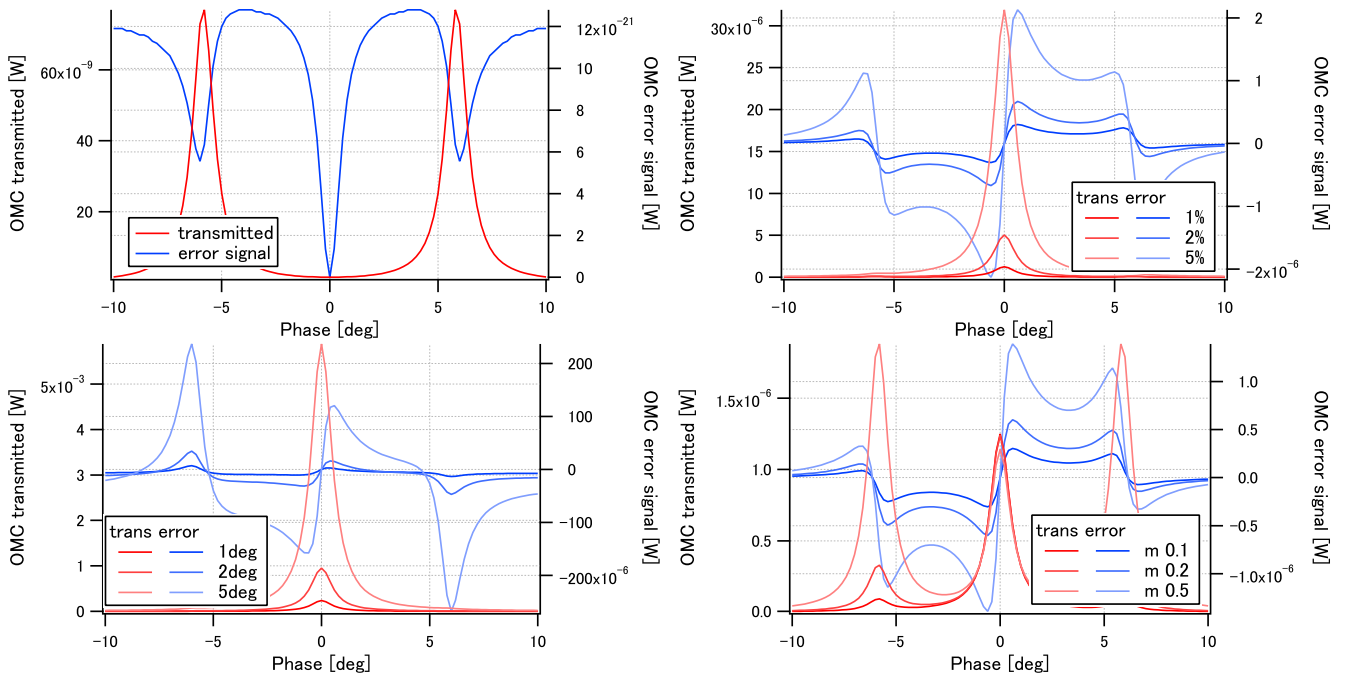


図 5.17 OMC の透過光から取得できるエラー信号について、FINESSE を用いて計算した結果。赤線が OMC の透過光、青線が OMC の反射光から取得できるエラー信号である。左上: MI にオフセットも反射率の差もない場合。右上: MI に 1、2、5 deg のオフセットを加えた場合。左下: MI のミラーに 1、2、5% の反射率の差をつけた場合。右下: MI に 1 deg のオフセットを加えた状態で、変調器での変調指数を 0.1、0.2、0.5 にした場合。

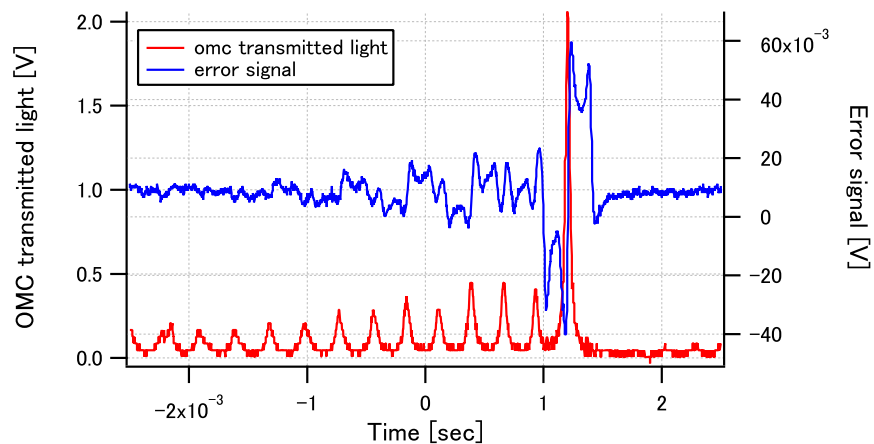


図 5.18 OMC 内のピエゾを 50 Hz で振ったときの透過光およびエラー信号。このときはエラー信号の形状確認のため、OMC の共振器としての安定性は考えずにサーボの設定を行った。

過光の約 50% が基本モードである。また、OMC のフィネス実測値と式 (1.42) に示した関係から、共振器を構成するミラーにそれぞれ 0.3% の光学ロスがあった場合、基本モードは OMC 後で約 15% になる。ここまでの過程で、約 12 mW あった MI の透過光は、OMC 後で約 0.7 mW となる。

$$\text{MI の透過光} \times \text{基本モードの比率} \times (1 - \text{光学ロス} \times \text{折り返し回数}) \sim \text{OMC の透過光}$$

$$1.2 \times 0.5 \times (1 - 0.88) \times 75 \sim 0.7 [\text{mW}] \tag{5.2}$$

### 5.3 OMC の性能テスト

OMC の前後で MI から AS ポートへ出てきた光を比較し、高次モードが低減されているかを確認した。今回はビームプロファイラーによる波面確認と、FFT アナライザーによる周波数解析の2つの方法を用いた。

#### ビームプロファイル

図 5.19 は、MI をダークフリンジにロックした後、OMC 前後でビームプロファイルした結果である。上部分はビームを光軸方向から見た強度分布であり、下部分は水平方向と垂直方向に分けて見たものである。上部分において、OMC 前では中心の基本モード周りにぼんやりと高次モードが確認できるが、OMC 後では基本モードのみが透過してきていることが分かる。また、下部分においても、OMC 前では基本モードによるガウス分布の端にもう一つ緩やかなピークが見えるが、OMC 後では基本モードのガウス分布だけが確認できる。

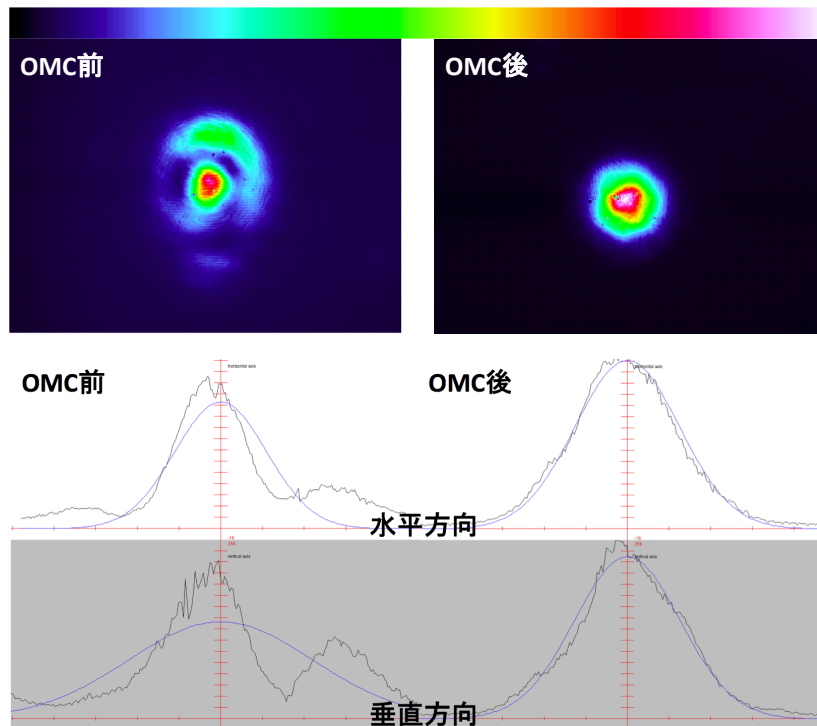


図 5.19 OMC 前後のビームプロファイラー結果。上図は光軸方向から見たビームの強度分布を示しており、下図は水平方向および垂直方向の強度分布をそれぞれ示している。下図の黒線が測定値であり、青線は Gaussian ビームの式でフィッティングしたものである。ビームプロファイラーに入射するレーザーパワー最大値が下図での範囲内に収まるように、ND フィルター等を用いてパワーの調整を行ったため、バックグラウンドの強度が異なっている。

#### 周波数解析

図 5.20 は、OMC 前後でのビームを、セットアップを示した図中のフォトディテクター PDtest を用いて検出し、周波数解析したものである。このとき、2kHz の信号を MI のピエゾに入れて比較しやすい



ようにした。数百 Hz の信号を用いると、100 Hz 以下が制御帯域である MI で信号自体が抑えられてしまう可能性があるため、今回は信号周波数に 2 kHz を選んだ。規格化した後の測定結果を見ると、OMC 前に比べて OMC 後では雑音レベルの低減は見られない。高次モードによる雑音の影響が、別起源の雑音に隠れて見えていないと考えられる。2 kHz の信号の前後約 100 Hz にピークがある。実際 180 Hz 付近にピークが存在する。このピークは OMC 前でも見られることから、OMC を構成しているピエゾ等ではなく、MI を構成しているピエゾ起源のものであると考えられる。MI のピエゾによる 180 Hz のピークが、2 kHz のピークによって引き上げられたのではないだろうか。そこで MI のピエゾホルダーを他社製のものに変えてみたが、ピエゾホルダーによる個体差は見られなかった。

Michelson 干渉計 (MI) から出てくる光に含まれる高次モード光を増やすため、X アームの中にアイリスを設置してビームを絞った。図 5.21 は、使用するフォトディテクターの種類を Tholabs 製のものに替え、より高周波まで測定した場合のグラフである。低周波の様々なピークは、データ点数の関係から見えなくなったが、やはり OMC 前後で雑音レベルの低減は見られない。

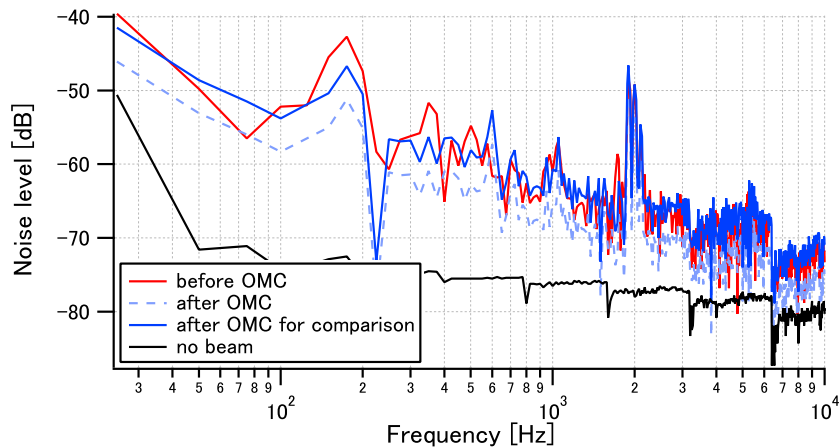


図 5.20 OMC 前後の周波数解析結果。赤線が OMC 前、青点線が OMC 後の測定値で、青線は 2kHz の値に合わせて OMC 後の結果を OMC 前に合わせたものである。また、黒線はフォトディテクターに光を入れていない状態でのデータである。

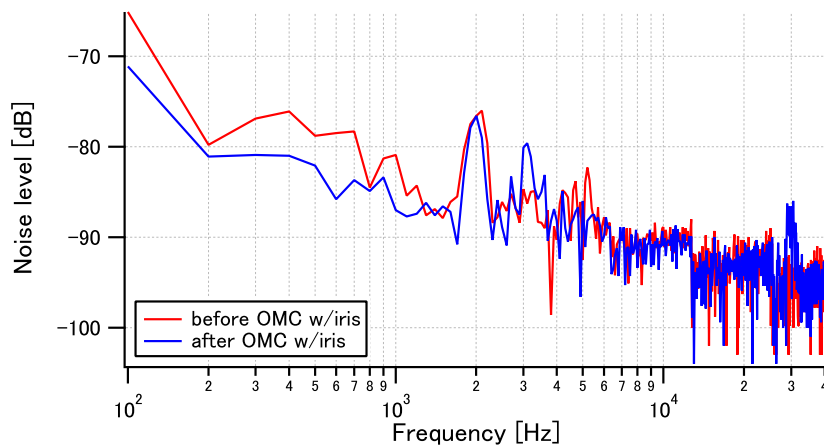


図 5.21 OMC 前後の周波数解析結果。赤線が OMC 前、青点線が 2kHz の値に合わせて OMC 後の結果を OMC 前に合わせたものである。40kHz まで測定範囲を広げたため、図 5.20 に対して低周波のデータ点数は少なくなっている。

## 第6章

# 結論

日本の重力波望遠鏡 KAGRA にとって、重力波の世界初検出を達成するために量子雑音の低減が必要不可欠である。したがって、干渉計から信号検出ポートに出てくる高次モードを取り除くアウトプットモードクリーナー (OMC) の設計は非常に重要な意味を持つ。

本研究では、KAGRA 用 OMC のデザイン研究、およびプロトタイプ制御実験を行った。デザイン研究においては、まずミラーマップを導入した FINESSE シミュレーションを通して、KAGRA の AS ポートに出てくる高次モード光の分布を見積もった。干渉計から出てくる光は 2 次と 10 次のモードを多く含み、我々はその結果から各高次モードの重み付けを行った。そして OMC の最適な共振器長を 75 cm、Gouy 位相を 55.4 deg と求めることができた。また、決定した光学パラメータを用いて、FINESSE 上で OMC の性能評価を行った。その結果、ミラーマップの組み合わせ 24 通り中 19 通り (約 79%) で KAGRA の要求値を満たすことがわかった。ミラーマップの組み合わせによっては AS ポートに漏れ出てくる DC readout 用のオフセット光が 1 mW を下回ってしまうため、KAGRA ではミラーの設置の組み合わせを慎重に選ぶ必要がある。

プロトタイプ制御実験においては、KAGRA で用いる OMC が 2 枚の曲率つきミラーと 2 枚のフラットミラーで構成される予定であるのに対し、今回は 1 枚の曲率つきミラーとフラットミラー 3 枚で構成される OMC を組んだ。そして OMC をブレッドボードごとサスペンションで吊りながら、Michelson 干渉計と同時に制御することに成功した。また、OMC が実際に高次モードを除去できているかどうか、ビームプロファイラと周波数解析を用いて性能テストを行った。周波数解析では OMC を通った光の高周波の一部で雑音レベルの低減が見られたが、比較用使用した 2 kHz の信号の倍波により、OMC の性能を十分に確認できたとは言い難い。しかし、ビームプロファイラでの測定では、OMC 前後で高次モードが取り除かれていることを確認できた。

## 付録 A

# 光線行列

モードマッチングとは、実験において必要なビーム半径や曲率を、レンズ等の光学素子を用いて調整することである。最適なビーム半径や曲率を作るためには、Gaussian ビームがレンズに対してどのような変化をするかを考えなければならない。

いま、光軸方向を  $z$  方向にとったとき、波長  $\lambda$  の Gaussian ビームを記述する要素として、次のように定義される  $q$  パラメータを用意する。

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_R} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $z_R$  は Rayleigh レンジ、 $R(z)$  は等位相面での曲率半径、 $\omega(z)$  はビーム径である。このとき、 $z = 0$  で初期値が  $q_0$  のビームが  $z$  方向に伝播するときの  $q$  の発展は次のように書ける。

$$q(z) = \frac{\cos(gz)q_0 + \sin(gz)/g}{-\sin(gz)gq_0 + \cos(gz)} \quad (\text{A.2})$$

ただし、 $g$  は媒質固有の実数の定数である。

$q(z)$  は光線行列の要素を用いるともっと簡単に考えることができる。光軸からビームまでの距離である光線距離  $r$  と、光軸に対するビームの傾きである光線角  $r' = dr/dz$  からなる 2 要素の列ベクトルを、光線ベクトルと呼ぶ。光線ベクトルを用いると、様々な光学素子の前後での光線の変化をより分かりやすく記述することができる。光線ベクトルと、光学素子によって異なる 2 行 2 列の光線行列を使って、光学素子前後でのビームの変化は

$$\begin{pmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

と書ける。ただし  $AD - BC = 1$  である。例えば幾何光学において、焦点距離  $f$  のレンズ前後での光線ベクトルの変化は次のように考えればよい。

$$\begin{pmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

それぞれの光学素子における光線行列の要素  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  を求めれば、媒質の屈折率の変化によるビームの変化を知ることができる。

光線行列の要素を用いると、パラメータ  $q$  の変換式は次のように書ける。

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{A.5})$$

いま、図 A.1 のような焦点距離  $f$  のレンズ前後での Gaussian ビームの変化を考える。

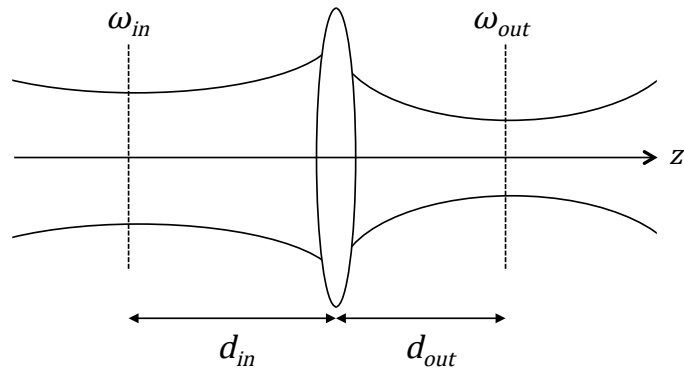


図 A.1 レンズによる Gaussian ビームの変化は光線行列を用いて計算できる。

このときレンズの光線行列は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - d_2/f & d_1 + d_2 - d_1 d_2/f \\ -1/f & 1 - d_1/f \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

これから、入射ビームに対する出射ビームのパラメータを求めることができる。

$$\omega_2^2 = \frac{d_2 - f}{d_1 - f} \omega_1^2 \tag{A.8}$$

$$d_2 - f = \frac{f^2}{z_1^2 + (d_1 - f)^2} \omega_1^2 \tag{A.9}$$

主な光学素子等の光線行列をまとめておく [16]。

レンズ (焦点距離  $f$ ):  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$

曲率つきミラー (曲率  $R$ ):  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$

誘電体媒質界面 (屈折率  $n_1, n_2$ ):  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{pmatrix}$

空間 (距離  $L$ ):  $\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 参考文献

- [1] 中村 卓史, 三尾 典克, 大橋, 正健 (1998) ”重力波をとらえる : 存在の証明から検出へ” 京都大学学術出版会.
- [2] K. Somiya (2004) ”Investigation of radiation pressure effect in a frequency-detuned interferometer and development of the readout scheme for a gravitational-wave detector” Doctor thesis Tokyo University.
- [3] The LIGO Scientific Collaboration (2011) ”A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit” *Nature Physics* 7, 962-965.
- [4] J Aasi, J Abadie, B P Abbott, et al. (2012) ”The characterization of Virgo data and its impact on gravitational-wave searches” *Class. Quantum Grav* 29 155002.
- [5] 佐藤和也, 平元 和彦, 平田 研二 (2010) ”初めての制御工学” 講談社.
- [6] Kentaro Somiya, for the KAGRA Collaboration (2012) ”Detector configuration of KAGRA - the Japanese cryogenic gravitational-wave detector”. *Class Quantum Grav* 29 124007.
- [7] K. Somiya (2010) ”LCGT and the global network of gravitational-wave observation” WIAS Discussion Paper No.2010-001.
- [8] A. Kumeta, C. Bond, and K. Somiya (2015) ”Design study of the KAGRA output mode-cleaner” *Optical Review* 22 149-152.
- [9] A. Freise, G. Heinzl, H. Lueck, et al (2004) ”Frequency-domain interferometer simulation with higher-order spatial modes” *Class. Quantum Grav* 21 S1067-S1074.
- [10] H. Yamamoto (2011) ”LCGT test mass surface specification” Technical Report JGW-T1100351.
- [11] S. Waldman (2011) ”Output Mode Cleaner Design” Technical Report LIGO-T1000276-v4.
- [12] K. Arai, S. Barnum, P. Fritschel, J. Lewis, and S. Waldman (2013) ”Output Mode Cleaner Design” Technical Report LIGO-T1000276-v5.
- [13] K. Somoiya (2015) ”Gouy phase calculation for KAGRA OMC” Technical Report JGW-T1503608-v1.
- [14] K. Arai (2013) ”On the accumulated round-trip Gouy phase shift for a general optical cavity” Technical Report LIGO-T1300189-v1.
- [15] 桑田 綾香 (2015) ”重力波検出器 KAGRA の感度向上に向けたアウトプットモードクリーナーの開発” 修士論文 東京工業大学大学院.
- [16] Amnon Yariv, and Pochi Yeh (2010) ”光エレクトロニクス 基礎編” 丸善株式会社.

# 謝辞

*"When a man sits with a pretty girl for an hour, it seems like a minute.  
But let him sit on a hot stove for a minute - and it's longer than any hour. That's relativity."*

Einstein が相対性の説明に用いたとされる言葉です。私が宗宮研究室で過ごした3年間はまるで、好きな女性と一緒に座っている時間のようにあっという間でした。あっという間過ぎて、これまで多くの方々に感謝の言葉を送れずに来ていたと思います。

指導教官の宗宮先生には、私が研究室に所属してからこの3年間、大変お世話になりました。本論文に関わる研究室内での実験はもちろんのこと、研究室外での実験や国内外での KAGRA 関連会議への参加、そして KAGRA サイトでの作業と、非常に貴重な機会を何度もいただきました。私の人間形成において宗宮先生が与えた影響は計り知れません。本当にありがとうございました。

宗宮研究室のメンバーにも感謝しています。博士課程の須佐さんは、私が宗宮研で最も長い時間を共に過ごした学生であり、コーヒーの作り方から PC の使い方まで、非常に幅広い知識を私にもたらしくれました。ありがとうございました。修士課程の熱田さんと片岡くんは、実験の共同作業をはじめ、シミュレーションコードの作成等、本当に助けられました。特に KAGRA サイト作業の際には良い支えとなってくれました。2人にこれ以上無用な言葉はいらないかと思います。頼りない先輩を最後まで支えていただき、本当にありがとうございました。学部生の粕谷さんと柳沼くんは、宗宮研究室に新しい風をもたらしてくれました。1年という短い間でしたが、2人に出会わなければ得られなかった価値観がたくさんあります。ありがとうございました。

また、大学院入試やゼミでお世話になった藤本先生、そしてもうすでに宗宮研究室を卒業していかれた先輩方の存在も、私にとってなくてはならないものでした。本当にありがとうございました。

宗宮研究室外の方にも感謝しています。本論文の完成には山本博章氏、Janis Woehler 氏の協力が必要不可欠でした。ありがとうございました。

このまま感謝を書き続けていくと、本論文の主題を大きく超えるページ数になってしまうと考えられるため、心苦しいですが、まとめて感謝の意を述べさせていただきます。KAGRA をはじめとした重力波研究者の皆様、東工大物理学科の友人方、そして私の家族、本当にありがとうございました。