

非線形光学効果を用いた次世代重力波検出器の要素技術開発

東京工業大学院 理工学研究科基礎物理学専攻 宗宮研究室

15M01095 片岡 優

平成 29 年 2 月 3 日

目次

第1章	重力波	6
1.1	一般相対性理論の直感的な理解	6
1.2	一般相対性理論	6
1.3	Einstein 方程式の線形化	7
1.4	重力波の伝搬	8
1.5	重力波の発生	10
1.6	重力波検出の原理	11
1.6.1	空間の重力波に対する応答	11
1.6.2	Michelson 干渉計の重力波に対する応答	11
1.6.3	FP-Michelson 干渉計の重力波に対する応答	13
1.6.4	RSE 干渉計	17
1.6.5	SR 干渉計	17
1.7	重力波の直接検出と本修士論文研究の意義	19
1.7.1	GW150914	19
1.7.2	GW150914 で分かったこと	19
1.7.3	GW150914 観測の問題点と高周波数帯の重力波を捉える意義	21
1.7.4	本修士論文研究の意義	21
第2章	重力波検出器の雑音	22
2.1	雑音の定式化	22
2.1.1	RMS	22
2.1.2	パワースペクトル密度	22
2.2	重力波検出器の主要な雑音源	24
2.2.1	地面雑音	24
2.2.2	輻射圧雑音	25
2.2.3	熱雑音	26
2.2.4	ショット雑音	27
第3章	次世代重力波検出器	28
3.1	重力波検出器の量子雑音	28
3.1.1	電磁場の量子化	28
3.1.2	光子の直交位相分解	29
3.2	Michelson 干渉計の量子雑音	31
3.2.1	サイドバンド描像	31
3.2.2	AS ポートから入射する真空場の各成分に対する Michelson 干渉計の応答	32
3.3	シグナルリサイクリング干渉計の量子雑音	35
3.4	非線型光学効果を用いた重力波検出器の理論感度の計算	40

第 4 章	実験系の設計	43
4.1	負帰還制御	43
4.1.1	負帰還制御の一般論	43
4.1.2	負帰還制御の安定性	44
4.1.3	負帰還制御の位相補償	45
4.2	光学系における変位信号取得 (PDH 法)	47
4.2.1	位相変調	47
4.2.2	復調	48
4.3	FP 共振器の制御	48
4.4	Michelson 干渉計の制御	49
4.4.1	PDH 法を用いた Michelson 干渉計の線型信号取得	49
4.4.2	アシンメトリー	51
4.5	SR 干渉計の制御	51
4.5.1	SR 共振器制御の問題点	51
4.5.2	サイドバンドの変調周波数を用いた解決方法	52
4.5.3	サブキャリアを用いた解決方法	53
4.5.4	SR 共振器が共振しているときの干渉計制御の問題点	55
4.6	干渉計の設計	57
4.7	第二高調波の作成 (SHG)	57
4.7.1	非線型光学効果	57
4.7.2	非線型光学媒質中の電磁波の伝搬と位相整合条件	58
4.7.3	第二高調波の生成条件	60
4.7.4	第二高調波に対する位相整合条件	60
4.7.5	第二高調波強度の理論計算	62
4.8	OPO と信号増幅	62
4.9	共振器の設計	64
4.9.1	ガウシアンビーム	64
4.9.2	ABCD 行列とガウシアンビームの伝搬	65
4.9.3	共振器の設計と自己無頓着方程式	65
4.10	検証実験の目標	67
第 5 章	実験	69
5.1	第二高調波作成実験	70
5.1.1	非線型光学結晶の特性調査	70
5.1.2	光共振器の作成	71
5.1.3	共振器への非線型光学結晶の挿入	75
5.1.4	PPKTP 挿入に伴うロス	75
5.1.5	SHG で得られた第二高調波の強度と理論曲線の比較	76
5.1.6	SHG 共振器のオープンループ伝達関数測定	78
5.1.7	第二高調波の強度雑音測定	79
5.2	Michelson 干渉計の制御	81
5.2.1	ミラマウントの共振と制御の不安定性	81
5.2.2	Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数の理論曲線	83
5.2.3	Michelson 干渉計制御の位相補償	84
5.3	SR 干渉計の制御	85
5.3.1	Michelson 干渉計の差動変位信号の取得	87

5.3.2	SR 共振器の制御信号の取得	87
5.3.3	SR 干渉計のオープンループ伝達関数	89
5.3.4	Michelson 干渉計との比較	91
5.3.5	信号分離比の測定	91
5.4	統合実験	93
5.4.1	SHG と SR 干渉計の同時制御	93
5.5	SR 共振器内に非線型光学結晶を挿入後の SR 干渉計の応答関数測定	95
5.5.1	非線型光学結晶とポンプ光のアライメント	95
5.5.2	考慮すべき自由度	95
5.5.3	時間掃引機能を用いた測定	96
5.5.4	ロックインアンプを用いた測定	98
第 6 章	議論	99
6.1	重力波検出器の量子雑音	99
6.2	実験	102
6.2.1	第二高調波生成実験	102
6.2.2	Michelson 干渉計制御実験	102
6.2.3	SR 干渉計制御実験	103
6.2.4	信号分離	104
6.2.5	結合実験	104
第 7 章	結論	107
付録 A	非線型光学結晶の位置調整と干渉計の感度	108
付録 B	干渉計の重力波に対する応答	110
B.1	Michelson 干渉計の応答	110
B.2	FP-Michelson 干渉計の応答	111
付録 C	制御用回路の開発	113
C.1	電気回路の雑音	113
C.1.1	熱雑音	113
C.1.2	オペアンプの入力換算雑音	113
C.2	ローパスフィルタの設計	114
C.3	その他考慮すべき特性	115
C.3.1	同相除去比	115
C.4	実際に使用した回路	116
C.5	RF フォトディテクタの開発	116
C.5.1	共振回路の選択	119
C.5.2	共振周波数の調整	120
C.5.3	オペアンプの選択	120
C.5.4	基板設計	120
C.5.5	RF フォトディテクタの回路図	121
付録 D	ファイバーアンプを用いたレーザーの増幅	123
D.1	レーザー強度増幅の実験面での利点	123
D.2	ファイバーカップリング	123

はじめに

2016年2月にアメリカの重力波検出機関 LIGO が重力波の世界初検出を発表した [1]。重力波は大質量天体の加速度運動によって発生する時空 (重力) の波である。重力波を用いればブラックホール近傍や初期宇宙観測できるため日本 [2] を始めとする世界各国で検出器の建設が進められているだけでなく、地面雑音の影響ない宇宙で重力波を検出するプロジェクトも進んでいる [3][4]。

重力波を観測に用いる最初の難関は重力波の直接検出であった。実際、重力波が理論的に提唱 [5] されてから直接検出 [1] が発表されるまで 100 年かかっている。これは重力波と物質との間の相互作用が極めて弱く、例えば重力波の起こす差動変位は 1m あたり 10^{-23} m と大変小さいためだ。しかし LIGO によってレーザー干渉計と現状の技術を組み合わせれば 10^{-23} m の差動変位を測定できること、さらにこの程度の感度をもつ検出器を用いれば重力波の直接検出が可能なが示された。

重力波を観測に用いるための次のステップは測定周波数帯域を広げることであり、そのためには検出器の雑音を抑える必要がある。LIGO を始めとする地上の重力波検出器は数 100Hz に最大感度をもち、低周波数帯は地面雑音によって、中から高周波数帯は輻射圧雑音とショット雑音によって制限される。地面雑音の影響は振り子を工夫したり検出器を宇宙に作ることで原理的には低減が可能である一方で、輻射圧雑音とショット雑音はレーザーの光子数揺らぎに起因する雑音であり、雑音の低減量は量子力学の不確定性原理によって制限される。これらの雑音は光子の量子性に起因することから量子雑音と呼ばれ、量子雑音による感度の制限を標準量子限界という。

本修士論文研究では高周波数帯の感度向上を目標に提案された、非線型光学効果を用いた次世代重力波検出器 [7] に注目した。提案された重力波検出器の感度は干渉計の内部に挿入した非線型光学結晶と共振器の離調を組み合わせることで、特に高周波数帯で標準量子限界を突破し重力波に対する感度が向上する。さらに検出器の構成も非線型光学結晶を用いる以外は従来の干渉計と変わらないため、既存の知識やインフラを活用できるという利点がある。

そこで本修士論文研究ではこの次世代重力波検出器の理論・実験的検証をおこなった。理論面では干渉計の信号増幅効果と雑音の減衰効果の関係を見直し、[7] で提案された検出器の感度向上には非線型光学結晶の信号増幅効果だけでなく、非線型光学結晶を挿入することで起こる量子雑音低減こそが重要であると結論した。実験面では本先行研究 [20] で課題であった干渉計の 2 自由度 (干渉計本体 + 内部の共振器の自由度) と、非線型光学結晶に必要なポンプ光の自由度を合わせた計 3 自由度の同時制御に、「AOM を用いた制御信号取得法に変更」し「アクチュエータの改良」、「制御用回路の改良」をすることで成功した。成功した多自由度同時制御は 30 分以上継続し、制御の引き込みから安定までの再現性もあり検証実験を進めて行く上で十分であった。測定帯域では干渉計の 2 自由度からの信号の分離比は 100 : 1 程度であり懸念されていた信号の混合を抑えられた。また本先行研究 [16] の 10 倍の強度をもつポンプ光の生成にも成功した。さらに非線型光学結晶を重力波検出器の内部に挿入した状態での制御に成功した。しかし雑音が大きすぎたために非線型光学結晶が重力波検出器に与える影響を測定するには至らなかった。

本修士論文では 1 章と 2 章で重力波と検出器の雑音に対する一般論を説明する。その後、3 章で提案された次世代重力波検出器の原理を解説し、4 章で検証実験に必要な実験理論と検証実験の目標を述べる。最後に 5 章でおこなった検証実験の結果を 6 章で議論し、7 章でまとめとする。

Abstract

On February 11th 2016, LIGO, one of the gravitational wave observatories, announced they succeeded in the first direct detection of gravitational wave[1]. The gravitational wave is a ripple in space-time generated by an accelerated motion of an astronomical object. With the gravitational one can directly test physics of a black hole and near its event horizon or physics of the early universe. Construction of gravitational wave observatories, not only on the ground but also in the space is progressing worldwide[2][3][4].

An issue to use the gravitational wave as an astronomical observation tool is its weak interaction between matter. A strain amplitude of gravitational wave is only 10^{-23} m per 1m. This physical property has prevented people from a direct measurement of a gravitational wave for 100 years after the theoretical prediction by Einstein[5]. However, LIGO showed gravitational wave was to be directly measured by using laser interferometer with current technologies.

The next step to use the gravitational wave for the astronomy is to expand the frequency band of observation, and it is needed to decrease background noise of a detector. Around 100Hz is a sweet spot of an on-ground detector like LIGO; seismic noise limits the sensitivity at low frequencies (< 1 Hz), radiation pressure noise and shot noise limit the sensitivity at middle and high frequencies. While seismic noise can be decreased by improving the isolation system or by making the detector in the space, reduction of radiation pressure noise and shot noise has a fundamental limit both kinds of noise are caused by a fluctuation of the number of photons. The sum of radiation pressure noise and shot noise is called quantum noise and the fundamental limit of quantum noise is called " Standard Quantum Limit ".

In my study, I focused on the high-frequency sensitivity of a next generation gravitational wave detector[7]. By using a nonlinear crystal and a detuning technique of an optical cavity inside the detector, the sensitivity can theoretically break the Standard Quantum Limit especially at high frequencies. This new detector does not have to change the interferometer configuration from current detector except for the nonlinear crystal inside the cavity, so existing knowledge and technologies can be used.

I performed theoretical and experimental validations of this new detector. In the theoretical side, I examined the relationship between the signal amplification effect and the noise reduction inside the detector, and I concluded that the noise reduction effect is more important than the signal amplification to improve the sensitivity of the detector. In the experimental side, I succeeded in controlling multiple degrees of freedom (the central interferometer, an optical cavity for the signal amplification) by 'using an AOM to acquire a robust control signal'. This multiple control was continued more than 30 minutes and the reproducibility of the control was high enough to claim the experimental validation of new detector. The signal mixing between the interferometer and the optical cavity was less than 1/100 in the measurement frequency band. The intensity of the pump beam was 10 times higher than previous result in our lab[17][16]. Although I could not observe the signal amplification using non-linear crystal, I have made much progress in designing and setting up the experimental system.

第1章 重力波

1.1 一般相対性理論の直感的な理解

1916年に Einstein 博士は一般相対性理論を提唱し、重力を時空という概念と幾何学を用いて理論的に説明した。一般相対論による重力の説明は以下の通りである：

まず、一般相対論では物理現象を x, y, z という位置と t という時間をワンセットにした 4 次元時空中の現象として説明する。質量のある物体 A が存在すると、この時空が歪む (曲率をもつ)。ここで物体 B が物体 A の近くを通過する際にどのような軌跡を描くかを考えてみる。物体 B は物体 A 周りの時空の測地線に沿って運動するが、時空は物体 A の質量によって歪められているため測地線も歪められる。このため物体 B の測地線は、物体 A が存在しない場合よりも物体 A に近づいたものとなる。つまり物体 B は物体 A に引き寄せられる。これが物体 A の引き起こす重力である。

たとえ物体 B が光子のような質量を持たない物体だったとしても、物体 A によって測地線が歪められ、運動の軌跡は質点に向かって引き寄せられたようなものとなる (重力レンズ効果)。物体 A の密度が十分大きいと、物体 A の引き起こす時空の歪みによって光子 (電磁波) であっても物体 A の近傍から出られない (事象の地平線)。このような領域をもつ大質量、高密度な天体をブラックホールと呼ぶ。

ブラックホールの事象の地平線からは電磁波でさえも抜け出せないため電磁波を用いたブラックホール単体の観測は不可能であった。ところが 2015 年 9 月 14 日にブラックホール連星から放出される重力波が直接検出され、ブラックホールが存在することだけでなくそれが連星として存在することが初めて観測された。

1.2 一般相対性理論

本節では一般相対性理論の基礎となる Einstein 方程式を説明し、続く節で重力波の理論的な説明をおこなう。

Einstein は 1916 年に一般相対性理論を発表し重力の理論的な説明をおこなった。それによると時空と物質は Einstein 方程式という二階のテンソル方程式で説明されている。Einstein 方程式の具体形は以下の通りであり、左辺に時空に由来する項が右辺に物質に由来する項が与えられる：

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

ここで右辺の G は万有引力定数であり、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。 $T_{\mu\nu}$ は時空に存在する物質によって与えられるテンソルであり、仮に時空が真空であるとする $T_{\mu\nu} = 0$ となる。一方、左辺の $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソルであり、より具体的には

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.2)$$

で与えられる。ここで $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル $g_{\mu\nu}$ は時空の計量テンソル R はリッチスカラーである。リッチテンソルとリッチスカラーは時空の曲率を表すリーマンテンソル $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ によって定義される：

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad , \quad R = R^{\mu}_{\mu} \quad (1.3)$$

リーマンテンソルの定義は以下で与えられる：

$$R^{\epsilon}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\epsilon}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\epsilon}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\delta}_{\sigma\nu}\Gamma^{\epsilon}_{\delta\mu} - \Gamma^{\delta}_{\sigma\mu}\Gamma^{\epsilon}_{\delta\nu} \quad (1.4)$$

リーマンテンソル中に現れる Γ はクリストッフェル記号であり、時空の計量テンソルを用いて次のように定義される：

$$\Gamma^{\epsilon}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\epsilon\sigma} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (1.5)$$

ここで表記を簡単にするために偏微分を以下のように省略して書いている：

$$A_{\mu,\nu} := \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A_{\mu} \quad (1.6)$$

1.3 Einstein 方程式の線形化

時空に物質が存在しないとき ($T_{\mu\nu} = 0$)、Einstein 方程式の解の一つはミンコフスキー時空となる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.7)$$

言い換えると真空中の時空は曲率をもたない平坦なものとなる。

そこに一次の摂動 $h_{\mu\nu}$ が加わったとして Einstein 方程式を一次の摂動の範囲内で書き下すと以下の形になる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (1.8)$$

$$G_{\nu\lambda} = \frac{\epsilon}{2} \left[h^{\delta}_{\lambda,\nu\delta} + h^{\delta}_{\nu,\lambda\delta} - \square h_{\nu\lambda} - h_{,\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} (h^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma} - \square h) \right] \quad (1.9)$$

ここで \square はダランベルシアンであり、 $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$ である。また $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ である。ここで摂動項を

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h \quad (1.10)$$

というトレースレス ($\tilde{h} = 0$) の形に定義し直す。すると Einstein テンソルは以下の形に書き直すことができる：

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\tilde{h}^{\delta}_{\lambda,\nu\delta} + \tilde{h}^{\delta}_{\nu,\lambda\delta} - \square \tilde{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} \tilde{h}^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma} \right) \quad (1.11)$$

ここで次のようなゲージ変換を考える：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x). \quad (1.12)$$

この変換により計量テンソルは、

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta^{\alpha}_{\mu} - \xi^{\alpha}_{,\mu}) (\delta^{\beta}_{\nu} - \xi^{\beta}_{,\nu}) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \end{aligned}$$

となり摂動項は

$$h'_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (1.13)$$

$$h' = \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} = h - 2\xi^{\sigma}_{,\sigma} \quad (1.14)$$

となる。これに伴い、

$$\tilde{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h' = \tilde{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^{\sigma}_{,\sigma} \quad (1.15)$$

なお、このゲージ変換に対しリーマン曲率テンソルは不変である。ここで

$$\tilde{h}'^{\mu}_{\nu,\mu} = \tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \square \xi_{\nu} \quad (1.16)$$

より、ゲージ変換の項 ξ^{μ} を波動方程式を満たすように選べば、常に $\tilde{h}'^{\mu}_{\nu,\mu} = 0$ (調和条件) とできる。以下では表記を簡単化するために ' をとり、摂動項が調和条件を常に満たすとする。

調和条件下では Einstein テンソルは摂動の一次の範囲で次のようになる：

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\tilde{h}_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

ゆえに摂動の一次の範囲内では Einstein 方程式は

$$\square\tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad \text{ただし} \quad \tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0 \quad (1.18)$$

となり¹、特に真空中では波動方程式になる：

$$\boxed{T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \square\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ただし} \quad \tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0} \quad (1.19)$$

この時空の一次の摂動が重力波である。

1.4 重力波の伝搬

重力波が真空中をどのように伝搬するかを考える。それには式 (1.19) を解けばよい。再掲すると、

$$\square\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.20)$$

また、調和条件を満たす必要がある ($\tilde{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$)。これとは別に

$$\square h = \square(-\eta^{\mu\nu}\tilde{h}_{\mu\nu}) = -\eta^{\mu\nu}\square\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.21)$$

を満たす。この方程式を解くことで真空中を伝搬する重力波を求めることができる。

波動方程式の解としてまず、単色平面波がある。以下では線形化した Einstein 方程式の解のうちとくに単色平面波解を導出する。単色平面波解として

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \quad (1.22)$$

を仮定する ($a_{\mu\nu}$ は定数)。これを式 (1.20) に代入すると

$$\begin{aligned} \square a_{\mu\nu} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) &= a_{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} \partial_{\lambda} \partial_{\sigma} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \\ &= \eta^{\lambda\sigma} k_{\lambda} k_{\sigma} a_{\mu\nu} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

から、

$$\eta^{\lambda\sigma} k_{\lambda} k_{\sigma} a_{\mu\nu} = 0 \quad (1.23)$$

となる。よって

$$\eta^{\lambda\sigma} k_{\lambda} k_{\sigma} = 0 \quad (1.24)$$

でないといけない。これは重力波の 4 次元波数ベクトルがヌルベクトル²であることを表している。また、調和条件に代入すると同様の計算により

$$\eta^{\lambda\nu} k_{\nu} a_{\mu\lambda} = 0 \quad (1.25)$$

となる。

次に解が常にトレースレス条件を満たすゲージ変換が存在することを示す。ゲージ変換 (式 (1.12)) の際に調和条件を満たすためには ξ_{ν} が波動方程式の解である必要があった。そこで定数 b_{μ} を用い、

$$\xi_{\mu} = b_{\mu} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \quad (1.26)$$

¹ $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ は万有引力定数である。

²電磁波と同じである。

とおく。なお 4 次元波数ベクトルは式 (1.22) で定義したものと同じであり、ヌルベクトルである。よって $\square\xi_\mu = 0$ が常に成り立つので解は常に調和条件を満足する。

ゲージ変換後の解は

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - i(b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \quad (1.27)$$

となる。また

$$\begin{aligned} h' &= h - i\eta^{\mu\nu} (b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -\tilde{h} - i\eta^{\mu\nu} (b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -(\eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} + i\eta^{\mu\nu} (b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu)) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \end{aligned}$$

であるから

$$\eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} + 2i\eta^{\mu\nu} b_\mu k_\nu = 0 \quad (1.28)$$

を満たすように b_μ を決めることで常に $h' = 0$ とできる。つまり常にトレースレス条件を満足する解が存在するということである。またトレースレス条件下では定義式から分かるように $h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu}$ となる。

ここから実際に解を求めることにする。以下では重力波が z 方向に伝搬する場合を考える。このとき $-k_0 = k_3 = k, k_1 = k_2 = 0$ である。解を式 (1.22) とし伝搬方向を z 方向だとすると、調和条件は

$$\eta^{\lambda\nu} k_\nu a_{\mu\lambda} = k(a_{\mu 0} + a_{\mu 3}) = 0 \quad (1.29)$$

であり、トレースレス条件 ($h = \tilde{h} = 0$) は

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \quad (1.30)$$

となる。ゲージ変換後でもトレースレス条件を保つには式 (1.28) より

$$\eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} + 2i\eta^{\mu\nu} b_\mu k_\nu = 0 \implies b_0 + b_3 = 0 \quad (1.31)$$

であればよい。

またこの条件の下で、 $h'_{0\mu} = 0$ とできる。つまり $h'_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda)$ として式 (1.27) に代入すると

$$a'_{00} = a_{00} + 2ib_0k, \quad (1.32)$$

$$a'_{01} = a_{01} + ib_1k, \quad (1.33)$$

$$a'_{02} = a_{02} + ib_2k, \quad (1.34)$$

$$a'_{03} = a_{03} - i(b_0k - b_3k) = a_{03} - 2ib_0k, \quad (1.35)$$

$$(1.36)$$

を得るので、 $a'_{0\mu} = 0$ となるように b_μ を決めれば良い。なお $a'_{00} = 0$ と $a'_{03} = 0$ はともに b_0 に対する条件であるが調和条件 $a_{00} + a_{03} = 0$ には矛盾しない。

以下では上で述べた条件を満足するゲージ変換後の解 $h'_{\mu\nu}$ を単に $h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda)$ と書く。上で述べた解に対する条件を解の係数に対する条件にまとめる直すと以下の通りとなる：

- $-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ (トレースレス条件)
- $a_{\mu 0} + a_{\mu 3} = 0$ (調和条件)
- $a_{\mu 0} = 0$
- $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ (対称条件³⁾)

³計量 $g_{\mu\nu}$ は対称である： $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

以上の条件から具体的に定数を決めていこう。まず $a_{0\mu} = 0$ と解対称性から

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz)$$

となる。つぎに調和条件と $a_{0\mu} = 0$ 、解の対称条件より

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz)$$

を得る。最後にトレースレス条件と解の対称条件から、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz)$$

となりこれが解である。通常、重力波を議論する際には次のように係数を表現する：

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz) . \quad (1.37)$$

この h_+ と h_\times は重力波の自由度を表す量である。

重力波の振動方向は進行方向に対して垂直な平面にある。すなわち重力波は横波である。真空を伝搬する重力波は適当なゲージをとることで、横波でかつトレースレス条件を満たすようにできる。このようなゲージ条件をトランスバース・トレースレスゲージ (Transverse Traceless Gauge=TT Gauge) という。

1.5 重力波の発生

物体から距離 r だけ離れた位置での重力波の振幅は TT ゲージ下で

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{\kappa}{4\pi c^2 r} \left(P_i^k P_j^l \ddot{I}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \ddot{I}_{kl} \right) \quad (1.38)$$

となる。[8]。ここで

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.39)$$

である。また I_{jk} の定義は

$$I_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I \quad (1.40)$$

$$I_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \int dV' T^{00} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}' \right) x'^i x'^j \quad (1.41)$$

であり、 P_{lm} は射影演算子

$$P_{lm} = \delta_{lm} - \hat{x}_l \hat{x}_m \quad (1.42)$$

である。式 (1.38) が I_{kl} の時間の二階微分に比例し、 I_{kl} がエネルギー運動量テンソルの 00 成分で定義されるので、重力波は物体の加速度運動によって発生することが分かる。

1.6 重力波検出の原理

1.4 節で示した通り、重力波は計量の一次の摂動項として現れ、波動方程式に従って伝搬する。以下では重力波をどのように検出するかについて説明する。なお、簡単のために重力波の + モードについてのみ言及する⁴。×モードについては座標を 45 度回転させることで + モードと同様な結果を得られる。

1.6.1 空間の重力波に対する応答

計量テンソル g は時空の長さを与える物理量である。例えば光の四次元線素 ds^2 はゼロであるから真空中において光が伝搬する空間の距離は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \Rightarrow (cdt)^2 = (dx^i)^2 \quad (1.43)$$

となる。重力波によって計量テンソルは一次の摂動を受けるので空間距離が変化する。実際、重力波が存在する場合の四次元線素 ds^2 は以下のように書き変わる：

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + (1 + h_+ \exp i(-\omega t + kz)) dx^2 + (1 - h_+ \exp i(-\omega t + kz)) dy^2 + dz^2 \quad (1.44)$$

どのような時空を考えたとしても光は四次元線素の値はゼロであるから、

$$0 = -(cdt)^2 + (1 + h_+ \exp i(-\omega t + kz)) dx^2 + (1 - h_+ \exp i(-\omega t + kz)) dy^2 + dz^2 \quad (1.45)$$

よって x 軸方向を進む光は微小時間 dt の間に

$$dx = \frac{c}{\sqrt{1 + h_+ \exp i(-\omega t + kz)}} dt \quad (1.46)$$

だけ進む。簡単のために重力波の位相が 2π であったとし $h_+ > 0$ とすると

$$dx = \frac{c}{\sqrt{1 + h_+}} dt \quad (1.47)$$

となり、このとき光が進む微小距離 dx は重力波が存在しないときに比べ縮んでいる。一方、 x 軸と 90 度なす y 軸方向に関しては

$$dy = \frac{c}{\sqrt{1 - h_+}} dt \quad (1.48)$$

となり重力波が存在しないときに伸びている。すなわち重力波によって x 軸方向は縮み、 y 方向は伸びる。言い換えると重力波は、互いが 90 度をなす空間の長さを差動に変化させる。

1.6.2 Michelson 干渉計の重力波に対する応答

重力波を捉えるには重力波の引き起こす差動変化を読み取ればよい。アメリカの LIGO をはじめ現在主流の重力波検出器はマイケルソン干渉計を用いてこの差動変化を測定する。以下では Michelson 干渉計の重力波に対する応答を求める。

Michelson 干渉計とはレーザー光源から出た光をビームスプリッタで互いに直交する方向に分け、それぞれの方向の先に鏡を置いて光を打ち返しビームスプリッタ上で再度結合させる実験装置である。打ち返された光はビームスプリッタ上で再結合する際に干渉する。重力波は互いが 90 度をなす空間の長さを差動に変化させるので、Michelson 干渉計の干渉条件を変化させる。このため Michelson 干渉計の干渉状態を常に測定していれば重力波が干渉計に入射した際の差動変化を捉えられる。

以下でより詳しく検出原理を説明する。図 1.1 のような Michelson 干渉計を考える。

⁴以降、言及しない限り重力波は z 方向から到来すると仮定し、特に h_+ モードのみを考えることにする。

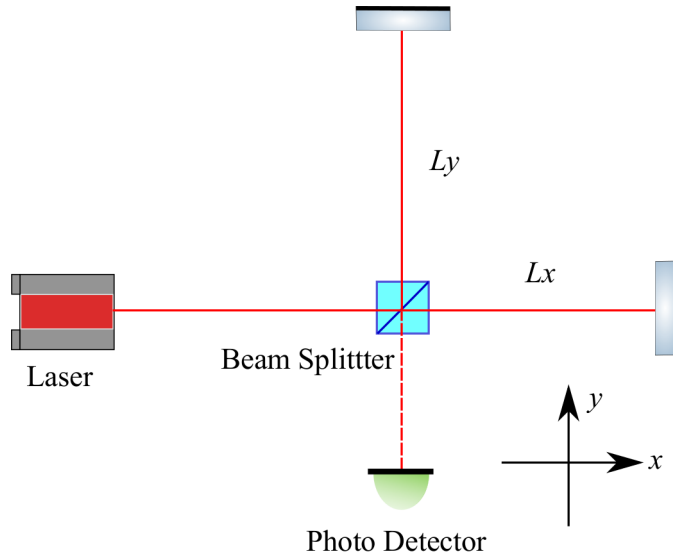


図 1.1: Michelson 干渉計の模式図

左側より入射したレーザー光はビームスプリッターで x 軸方向と y 軸に分けられる。ビームスプリッターの電場に対する反射・透過率の絶対値は $1/\sqrt{2}$ であり、裏面と表面との間で位相が π だけ異なる。また x 軸、 y 軸方向の基線長をそれぞれ L_x 、 L_y とおく。

ビームスプリッター (BS) を座標原点とし、干渉計の二光路が x 軸と y 軸に一致しているとする。また BS から x 軸にある鏡までの距離を L_x 、BS から y 軸にある鏡までの距離を L_y とする。重力波が存在しなければ x 軸方向の光路を往復してきた光と y 軸方向の光路を往復してきた光の位相差は以下の通りである：

$$\phi_x - \phi_y = \frac{2(L_x - L_y)}{c} \Omega_0 \quad (1.49)$$

ここで c は光速、 Ω はレーザーの角周波数である⁵。重力波が存在すると空間の長さが変化するので式 (1.49) は次のように変化する：

$$\phi_x - \phi_y = \frac{2(L_x - L_y)}{c} \Omega_0 + \phi_{\text{GW}} \quad (1.50)$$

ここで ϕ_{GW} は重力波による位相差⁶ である：

$$\phi_{\text{GW}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega H_{\text{MI}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} \quad (1.51)$$

$$H_{\text{MI}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \quad (1.52)$$

H_{MI} はマイケルソン干渉計の重力波に対する周波数応答関数である。なおここでは $L_x = L_y = L$ としている。これは角周波数 ω の重力波が入射した際に、その振幅が H_{MI} だけ増幅 (or 減衰) されて測定されることを意味している。

周波数応答関数を見るとレーザー干渉計のメリットが現れている。現在主流になっているレーザー干渉計は光源波長が 1064nm であり、その角周波数は約 10^{15} Hz である。一方、レーザー干渉計における重力波信号の帯域は約数百 Hz であるから、 $2\Omega/\omega \sim 10^{13}$ となり絶大な増幅効果を及ぼす。

式 (1.52) から角周波数 ω の重力波を Michelson 干渉計を用いて検出したいとき、その最適な基線長 L は以下の方程式で与えられる：

$$\frac{L\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = \frac{\pi c}{2\omega} \quad (1.53)$$

⁵ $c = 2.997 \times 10^8$ (m/s²) , $\Omega = 2\pi f_0$

⁶導出は付録 B 参照のこと。

仮に重力波の周波数が 100 Hz だったとすると基線長 L はおよそ 750km となり⁷、地上でこれだけの干渉計を建設するのは地球の曲率などからも不可能である。そこで考えられたのが干渉計の内部に共振器を組み込み、実効的に基線長を延ばすというアイデアである。

1.6.3 FP-Michelson 干渉計の重力波に対する応答

FP 共振器

始めに共振器の一般論をまとめる。光学分野で共振器とは鏡などを使用し、その内側に光を溜め込む装置のことである。共振器の内部には共振条件が成り立つ光が最も溜まる。以下では共振器の中でも基本的な Fabry-Perot 共振器 (FP 共振器) について説明する。

FP 共振器は図 1.2 のように向かい合った二枚の鏡で構成される。入射側の鏡の電場に対する反射率を r_F 透過率

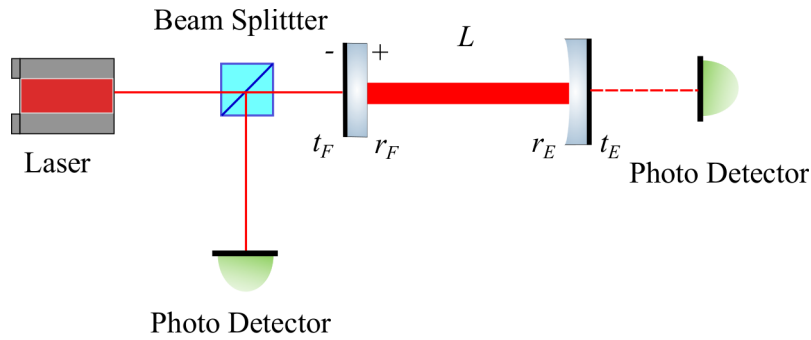


図 1.2: FP 共振器の模式図

左側よりレーザー光が入射する。共振器の左側の鏡をフロントミラー、右側の鏡をエンドミラーとよぶ。反射率と透過率の絶対値はそれぞれ r_F, t_F, r_E, t_E である。また反射率の位相は鏡の表裏で π だけ異なる。

を t_F とし、透過側の鏡の電場に対する反射率を r_E 透過率を t_E とする。鏡の表面と裏面では境界条件から反射率の位相が異なる。そこで鏡の表面の位相を正、裏面を負にとり表面を向かい合わせた二枚の鏡で共振器を構成する。また共振器の片道の長さを L とし、レーザーの角周波数を Ω とする。

入射電場、共振器内の電場、反射電場、透過電場の振幅をそれぞれ $E_{in}, E_{cav}, E_r, E_t$ と置くと、これらは以下の一次方程式で関係付けられる：

$$E_{cav} = t_F E_{in} + r_F r_E e^{i\frac{-2\Omega L}{c}} E_{cav} \quad (1.54)$$

$$E_r = -r_F E_{in} + t_F r_E e^{i\frac{-2\Omega L}{c}} E_{cav} \quad (1.55)$$

$$E_t = t_E e^{i\frac{-\Omega L}{c}} E_{cav} \quad (1.56)$$

$$(1.57)$$

これを解くことで各場所における電場の振幅を求めることができる。特に入射電場 E_{in} で規格化すると式は次の通りになる：

$$\frac{E_{cav}}{E_{in}} = \frac{t_F}{1 - r_F r_E e^{-\frac{2\Omega L}{c}}} \quad (1.58)$$

$$\frac{E_r}{E_{in}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-\frac{2\Omega L}{c}}}{1 - r_F r_E e^{-\frac{2\Omega L}{c}}} \quad (1.59)$$

$$\frac{E_t}{E_{in}} = \frac{t_F t_E e^{i\frac{-\Omega L}{c}}}{1 - r_F r_E e^{-\frac{2\Omega L}{c}}} \quad (1.60)$$

⁷これは直線距離にして東京駅から山口県の徳山駅までである。

パワーは電場の絶対値の二乗で定義される。各場所でのパワーをグラフにしたものが図 1.3 である。ここで横軸は $2L\Omega/c$ をまとめて Φ とした。

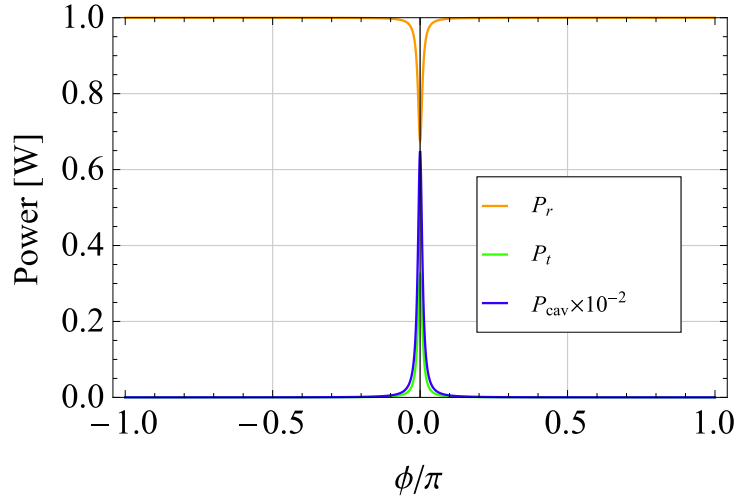


図 1.3: FP 共振器の各場所におけるパワー

FP 共振器の反射光、透過光および内部のパワーをプロットしたもの。縦軸はパワー [W] を表す。また縦軸は $2L\Omega/c$ をまとめて ϕ としている。

各場所でのパワーのグラフをみると透過光が最大な位相 ($\Phi = 2n\pi$) では、共振器内のパワーが最大になり反射光パワーが最小になっている。これは共振器内に光が蓄えられていることを示している。

式 (1.58) から共振器内パワーを計算すると次式をえる：

$$P_{\text{cav}} = \frac{t_F^2}{(1 - r_E r_F)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4r_F r_E}{(1 - r_E r_F)^2} \sin^2(\frac{\Phi}{2})} \quad (1.61)$$

特に共振器長が共振条件 $\Phi = 2n\pi$ を満足するとき共振器内パワーは次の通りである：

$$P_{\text{cav}} = \frac{t_F^2}{(1 - r_E r_F)^2} \approx \frac{4}{T_F} \quad (1.62)$$

$r_E, r_F \sim 1, r_F \ll r_E$ と考え近似をおこなった。ここで T_F は鏡のパワーに対する反射率である。式 (1.62) は共振器内のパワーが $T_F/4$ 倍されることを示している。共振器を組むことによって実効的にパワーを上昇させることができる。合わせ鏡にしたためにその中で光が何度も往復するため中に蓄えられる光が増加したとも言える。

最後に共振器の性能を示す言葉について定義する。共振器長 L の共振器が共振条件を満足する際に、次の共振条件を満足するまでの周波数をフリースpektralレンジ (FSR) という。共振条件から

$$\frac{2L(\Omega + \Delta\Omega)}{c} - \frac{2L(\Omega)}{c} = 2\pi \Rightarrow \Delta\Omega = 2\pi \frac{c}{2L} \quad (1.63)$$

が成り立つので

$$f_{\text{FSR}} = \frac{1}{2\pi} \Delta\Omega = \frac{c}{2L} \quad (1.64)$$

となる。一方、共振器内パワーの半値半幅 (HWHM) は式 (1.61) から

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_F r_E}{(1 - r_E r_F)^2} \sin^2(\frac{L\Omega_{\text{HWHM}}}{c})} = \frac{1}{2} \quad (1.65)$$

を満たす。これを $f_{\text{FSR}} \gg f_{\text{HWHM}}$ の条件下で解くと

$$f_{\text{HWHM}} = \frac{(1 - r_E r_F)}{2\pi \sqrt{r_F r_E}} \frac{c}{2L} \quad (1.66)$$

よって半値全幅 (FWHM) は

$$f_{\text{FWHM}} = \frac{(1 - r_{\text{E}}r_{\text{F}})}{\pi \sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}} f_{\text{FSR}} \quad (1.67)$$

となる。共振器のフリースペクトラムレンジと半値全幅の比はフィネス \mathcal{F} といい、共振器の性能を示す：

$$\mathcal{F} = \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}}{(1 - r_{\text{E}}r_{\text{F}})} \quad (1.68)$$

特に鏡の反射率が 1 に近く $r_{\text{F}} \ll r_{\text{E}}$ の場合、フィネスは

$$\mathcal{F} \approx \frac{2\pi}{T_{\text{F}}} \quad (1.69)$$

と近似できる。

次に共振器の分類を述べる。共振器に用いる鏡の反射率の大小関係によって三種類の分類がなされる。すなわち、

- $r_{\text{F}} < r_{\text{E}} \implies$ オーバーカップリング共振器
- $r_{\text{F}} = r_{\text{E}} \implies$ クリティカルカップリング共振器
- $r_{\text{F}} > r_{\text{E}} \implies$ アンダーカップリング共振器

各共振器における違いをみるために共振条件から共振器長が微小変化した際の反射率の変化について考える。式 (1.59) を微分すると

$$dr_{\text{cav}} \approx -\frac{r_{\text{E}}(-1 + r_{\text{F}}^2)}{(-1 + r_{\text{E}}r_{\text{F}})^2} \frac{2i\Omega\delta L}{c} \quad (1.70)$$

となり共振器調が微小変化した際の反射率の変化が求まる。

極端なオーバーカップリング ($r_{\text{F}} \ll r_{\text{E}}$) の場合

$$r'_{\text{cav}} = r_{\text{cav}} + dr_{\text{cav}} \approx -1 - \frac{4}{T_{\text{F}}} \frac{2i\Omega L}{c} \quad (1.71)$$

となり、共振器長の変化が $4/T_{\text{F}}$ 倍されたかのように振る舞う。

クリティカルカップリングの場合

$$r'_{\text{cav}} = r_{\text{cav}} + dr_{\text{cav}} \approx 0 - \frac{1}{T_{\text{F}}} \frac{2i\Omega L}{c} \quad (1.72)$$

となり、共振器長の変化が $1/T_{\text{F}}$ 倍されたかのように振る舞う。

極端なアンダーカップリングの場合

$$r'_{\text{cav}} = r_{\text{cav}} + dr_{\text{cav}} \approx -1 + 0 \quad (1.73)$$

となる。

干渉計の制御のために共振器をあえてクリティカルカップリングさせる場合がある。これは制御用の信号を透過光から取得する際に、サイドバンド⁸を透過させるためである。

FP-Michelson 干渉計

FP 共振器を用いれば実効的な光路長を延ばすことができる。これを干渉計型重力波検出器に応用したのが FP-Michelson 干渉計である。

FP-Michelson 干渉計は Michelson 干渉計の腕⁹に FP 共振器を組み込み、実効的な基線長を延ばし重力波の引き起こす差動変化を増幅する。重力波に対する応答は Michelson 干渉計の場合と同様に伝達関数で書ける¹⁰：

$$\phi_{\text{GW}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega H_{\text{FPMI}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} \quad (1.74)$$

⁸4.2 章参照のこと。

⁹Michelson 干渉計のビームスプリッタからエンド鏡までを腕 (arm) といい、光源から見てビームスプリッタを透過する方向の腕を Xarm、ビームスプリッタを反射する方向の腕を Yarm と表現する。

¹⁰導出は付録 B 参照のこと

$$H_{\text{FPMI}}(\omega) = \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{-r_{\text{F}} + (r_{\text{F}}^2 + t_{\text{F}}^2)r_{\text{E}}} \frac{1}{1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}}e^{-2i\frac{L\omega}{c}}} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \quad (1.75)$$

鏡にロスがなく ($r_{\text{F}}^2 + t_{\text{F}}^2 = 1$) 鏡の反射率が 1 に近いとし、さらに重力波の位相遅れが十分小さい ($\frac{L\omega}{c} \ll 1$) とすると、

$$|H_{\text{FPMI}}(\omega)| \approx \frac{4L\Omega}{c(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}{(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})^2} \frac{4L^2\omega^2}{c^2}}} \quad (1.76)$$

となる。カットフ周波数 f_c を次のように定義する：

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})}{\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}} \frac{c}{2L} = \frac{c}{4L\mathcal{F}} \quad (1.77)$$

このとき FP-Michelson 干渉計の重力波に対する応答は

$$|H_{\text{FPMI}}(\omega)| \approx \frac{4L\Omega}{c(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})} \frac{1}{\sqrt{1 + f^2/f_c^2}} \quad (1.78)$$

となる。特に Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答関数と比較すると、

$$|H_{\text{FPMI}}(\omega)| \approx \frac{4}{T_{\text{F}}} \frac{1}{\sqrt{1 + f^2/f_c^2}} |H_{\text{MI}}(\omega)| \quad (1.79)$$

となりゲイン $4/T_{\text{F}}$ をもった一次のローパスフィルタに似た挙動をしめす。言い換えると重力波の引き起こす差動変位は検出器内の共振器で増幅されるが、カットオフ周波数 f_c よりも速い周波数の重力波に対しては共振器内で差動変位の位相が反転し減衰されてしまう。この周波数 f_c のことをキャビティポールと言い、共振器をもつ干渉計の帯域を決める一つの指標となる。

Michelson 干渉計と FP-Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答関数 (伝達関数) を模式的に描くと図 1.4 のようになる。

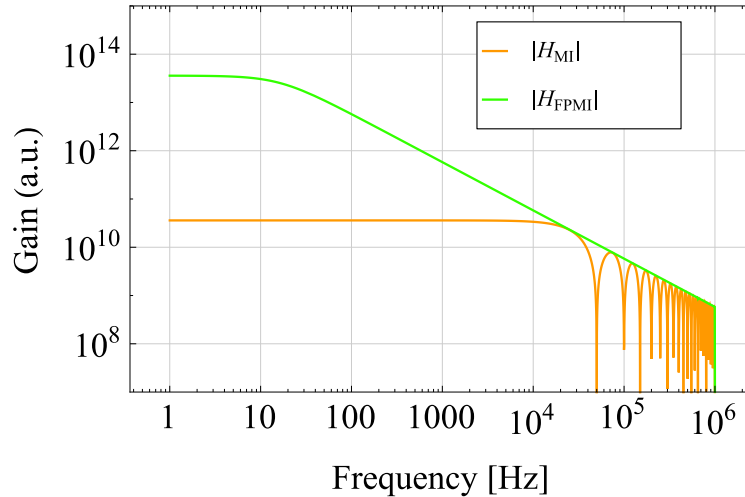


図 1.4: Michelson 干渉計と FP-Michelson 干渉計の伝達関数の比較

パラメータは $L = 3000\text{m}$, $T_{\text{F}} = 0.004$ とした。これは KAGRA のパラメータと同じである。FP-Michelson 干渉計の伝達関数はカットオフ周波数以下ではフラットな応答でカットオフ周波数以上では周波数の一次に比例して減少する。高周波数帯で現れるディップは干渉計の位相遅れの効果である。

1.6.4 RSE 干渉計

例えば KAGRA¹¹ のパラメータを用いキャビティポールを計算すると約 16Hz となり、重力波検出器の観測帯域としてはやや狭く観測帯域を広げる必要がある。帯域が制限される原因は重力波による差動信号が腕にある共振器の中を何度も往復するために発生する信号の減衰であった。ゆえに帯域を広げるためには高周波数帯の重力波信号を干渉計の腕から効率的に取り出す必要がある。

この問題を解決するために考案されたのが RSE 法 (Resonant Sideband Extraction¹²) であり、これを用いることで信号を取り出す際に増幅効果を犠牲にするが帯域を広げることに成功した。RSE 干渉計では干渉計の出力側に鏡を挿入し干渉計との間で複合共振器を構成する。この共振器を反共振に制御することで効率的な信号取り出しが可能となる。

1.6.5 SR 干渉計

RSE 法は主に FP-Michelson 干渉計に用いられる技術である。一方でドイツにある GEO のように腕に共振器を用いない Michelson 干渉計タイプの重力波検出器もある。このような検出器では干渉計の腕に共振器が無いために腕の中で重力波信号の増幅ができない。これを補うために開発されたのが SR 干渉計である。SR 干渉計は RSE 鏡と同じ位置に SR 鏡を置き、出力側に現れた重力波信号を再度干渉計に打ち返すことで重力波信号の増幅をおこなう。RSE 干渉計と SR 干渉計の重力波信号に対する伝達関数をグラフにすると図 1.5 の通りになる。

SR 干渉計は干渉計の腕に共振器が必要ないので、RSE 干渉計に比べ制御すべき自由度が減り作成が容易だ。本研究では SR 干渉計を作成し、これを用いて次世代重力波検出器の要素技術の実証実験をおこなうことを目標とした。

LIGO や KAGRA、Virgo は腕に共振器を挿入した RSE 干渉計方式を、GEO¹³ は SR 干渉計方式を採用している。

¹¹ $T_F = 0.004, L = 3 \times 10^3 \text{ m}, c = 2.997 \times 10^8 \text{ m/s}$

¹² Sideband の説明は後述の参照

¹³ GEO は腕に共振器が無いタイプの重力波検出器である。

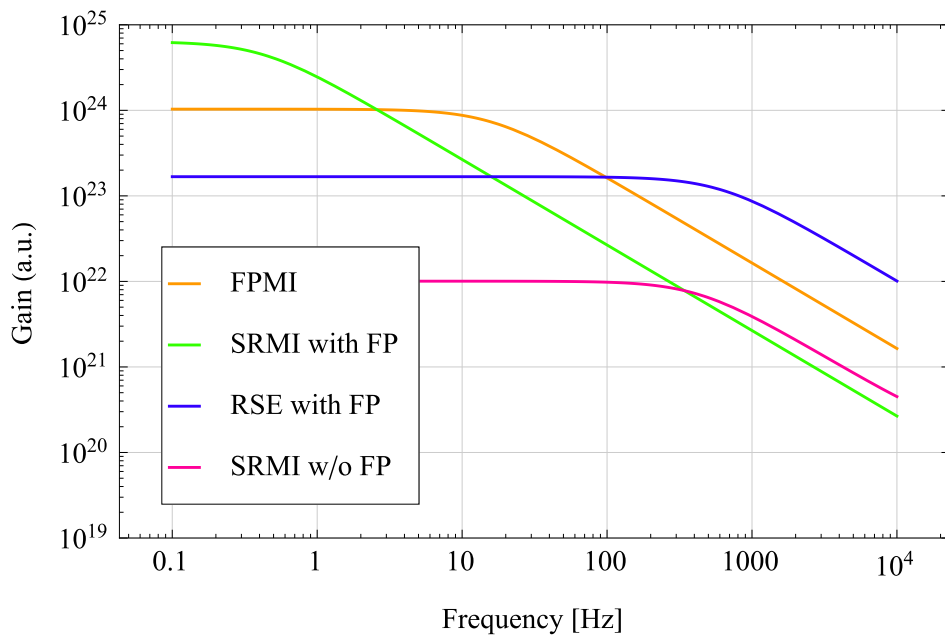


図 1.5: RSE 干渉計と SR 干渉計の伝達関数の比較

FP-Michelson 干渉計、RSE 干渉計、SR 干渉計の伝達関数を比較した。SR 干渉計には腕に共振器を組み込んだタイプと組み込んでいないタイプの二種類がある。SR 干渉計では差同信号を共振器内で増幅するため低周波側のゲインが大きくなる一方でキャビティポールが低周波数側にシフトするため高周波数帯でゲインが低下している。それに対し RSE 干渉計は SR 干渉計に比べ低周波数帯のゲインが小さいがキャビティポールが移動しないため高周波数帯でもゲインが大きい。パラメータは $L = 3000\text{m}$ 、 $R_s = 0.9$ とし腕に共振器が組み込まれている場合はその透過率を $T = 0.004$ とした。

1.7 重力波の直接検出と本修士論文研究の意義

2016年における物理学の大成果と言えばアメリカの重力波検出器 LIGO による重力波の初検出であろう。本節ではこの発見を概観しつつ、本修士論文でおこなった研究の意義を明確にする。

1.7.1 GW150914

2015年9月14日アメリカにある二台の重力波検出器 LIGO が、地球から 410Mpc 離れた場所で発生したブラックホール連星合体からの重力波を捉えた。連星を構成していたブラックホールの質量は 36 太陽質量と 29 太陽質量であり、そのうち 2 太陽質量に相当するエネルギーが重力波として放出された。これにより重力波が宇宙空間を伝搬すること、またブラックホール連星が存在することが初めて証明された。その後の 12 月 26 日にも別のブラックホール連星合体により発生した重力波が捉えられた。

1.7.2 GW150914 で分かったこと

LIGO が重力波を捉える以前は、より軽い連星天体すなわち中性子星連星合体によって発生する重力波が初検出のターゲットであった。これは、(1) 中性子星の質量は理論的にほぼ決まった範囲内に収まる点、(2) 連星パルサー¹⁴ や GRB 観測¹⁵ により中性子星連星のおおよその分布やその合体頻度が求められていた点¹⁶、(3) 発生する重力波の理論波形が(理論の範囲内で)正確に求められておりデータ解析が容易¹⁷ だった点。の3点が主な理由である。このような理由から重力波検出器の感度を議論する際には観測機の雑音スペクトルの他に、中性子星連星合体によって生じた重力波をどれくらい離れた位置で測定できるかを指標にする。しかし実際に捉えられたのはブラックホール連星から発生した重力波であった。これは LIGO の鏡が KAGRA で使われているもの¹⁸ に比べ重く、観測帯域が低周波側に有利だったことが挙げられる(図 1.6)。

LIGO が捉えた重力波の波形はその後のデータ解析で理論波形と 94% も一致していた(図 1.7)。これはブラックホール連星合体という強い重力場においても Einstein の一般相対論が正しいことを意味する。

¹⁴中性子星や白色矮星とその他の星が連星となったもの。中性子星や白色矮星はある方向に電磁波を放出する。それが地球の視線方向と周期的に重なることでパルス上の電波を放出しているように見えるためこのように名付けられた。ハルスとテラーは連星パルサーの観測から重力波の存在を証明し、1993年にノーベル物理学賞を受賞している。

¹⁵GRB=Gamma Ray Burst のこと。正確な原因が分かっておらず、中性子星連星合体や中性子星ブラックホール連星合体が有力だと考えられている。

¹⁶KAGRA の最終感度でおおよそ年に 10 回程度、中性子星連星合体由来の重力波が捉えられる計算であった。

¹⁷重力波のような微小信号を長期観測したデータから発見するのは難しい。このため重力波のデータ解析には膨大な観測データから理論波形に合うデータを探し出すマッチドフィルタという手法が用いられている。マッチドフィルタ法には正確な理論波形が必要になる。

¹⁸KAGRA は世界初の低温重力波検出器である。これは鏡を冷やすことで熱雑音の低減を狙っているためだ。鏡を冷やす目的から鏡の材質に熱伝導がよく熱変形の少ないサファイアが用いられており、このため鏡自体の質量が小さくなっている。

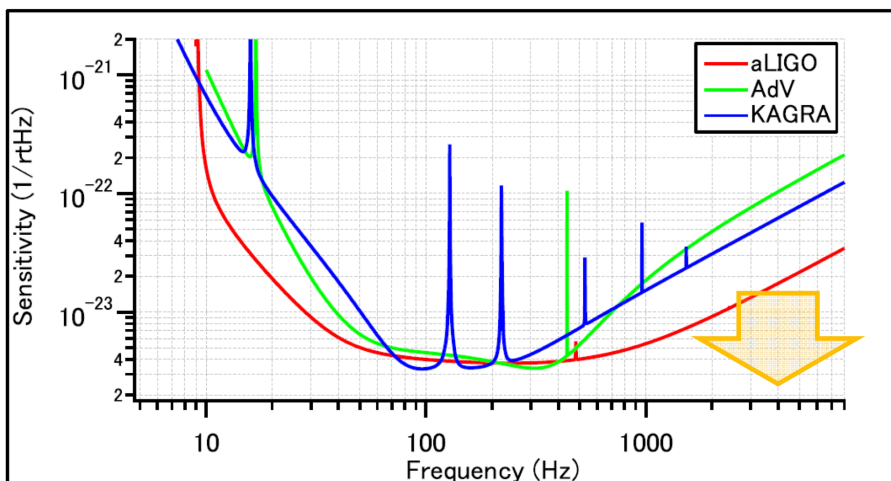


図 1.6: LIGO、KAGRA、Virgo の目標感度の比較

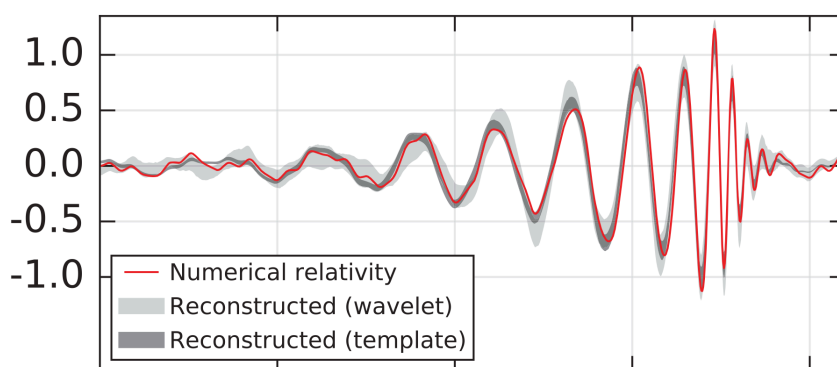


図 1.7: GW150914 の測定結果と理論から予想された波形の比較 [1]

縦軸は 10^{-21} で規格化されたストレインである。横軸は時間である。赤線が測定されたパラメータを元に数値相対論で計算された重力波の波形である。異なる 2 つの解析方法を用いて波形を解析しており信頼度 90%以上の範囲を灰色の陰で表している。

1.7.3 GW150914 観測の問題点と高周波数帯の重力波を捉える意義

一方で高周波数側においては検出器の感度が不十分であった。このためブラックホール連星の合体後に放出される高周波数帯の重力波を捉えられなかった。ブラックホール連星合体後には新たなブラックホールが誕生するが、このブラックホールの表面は合体時の衝撃で固有振動すると予想されている。この重力波を捉えられればよりブラックホール近傍の強重力場における重力理論に迫れる。しかしながら GW150914 とその後の GW151226 においても検出器の高周波数帯における感度が不十分でブラックホールの固有振動を捉えられなかった。

また中性子星連星といったより軽い天体から放出される重力波も捉えられていない。これも検出器の感度が高周波数帯で不十分なために軽い星から放出される高周波数帯の重力波を捉えられなかったためである。中性子星連星から放出された重力波を捉えられれば中性子星の半径と質量に対する制限をかけられ、中性子星の内部の情報が得られる。もし中性子星連星から放出される重力波を捉えられれば、核物理理論の進歩に貢献できる。

1.7.4 本修士論文研究の意義

高周波数帯の重力波源には「中性子星連星合体」、「パルサーグリッチ¹⁹」、「超新星爆発」があり、さらなる一般相対論の検証および天文学の発展にはこれらを測定することが重要となる。

しかしながら高周波数帯の検出感度は量子雑音のうちショット雑音によって制限されている。検出感度を上げるには信号雑音比を改善しなければならず、そのためには雑音を下げるか信号を増幅する必要がある。雑音を下げる研究は GEO や LIGO でも行われているが、この方法は検出器のロスに弱いという弱点がある。

逆に、信号を増幅するにはレーザー強度を上げることが挙げられる。しかしレーザー強度を上げると光学素子の損傷閾値や熱レンズ効果、制御が難しくなるといった問題が発生する。本研究では非線型光学素子と光バネを組み合わせレーザー強度を上げることなく重力波信号を増幅し、信号雑音比を改善することを目標にした。これによりレーザー強度を上げたことで起きる問題なしに高周波数帯の検出器感度の向上が狙える。

¹⁹中性子星の自転が不規則に速くなる物理現象であるが原因は不明である。パルサーの観測から存在が証明されたのでパルサーグリッチという。パルサーグリッチから発生する重力波を捉えられれば中性子星の内部構造に迫れる。

第2章 重力波検出器の雑音

本章では現在主流となっているレーザー干渉計型重力波検出器の雑音について述べる。重力波検出器の感度スペクトルとは信号雑音比が1となる重力波の差動変位の値である。すなわち、

$$\text{sensitivity}(\omega) := \frac{S_n(\omega)}{G_{\text{GW}}(\omega)} \quad (2.1)$$

ここで $S_n(\omega)$ は雑音の振幅スペクトル密度を表し、 $G_{\text{GW}}(\omega)$ は重力波信号の周波数応答関数 (伝達関数) を表す。

このため検出器の感度を計算するためには雑音のパワースペクトルを理解する必要がある。以下ではまず雑音のパワースペクトルを定式化したのち、重力波検出で問題となる主要な雑音を説明する。

2.1 雑音の定式化

2.1.1 RMS

不規則に現れる物理量を定量的に評価するために二乗平均平方 (Root Mean Square) という計算手法がある¹。これは、ある物理量 $x(t)$ を測定した際に、値の二乗²の時間平均をとったのち平方するという計算である³：

$$\text{RMS} := \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x^2(t)} \quad (2.2)$$

これは時間空間で定義された値である。重力波検出器の感度を周波数空間で議論するためにはこの概念を周波数空間へ拡張する必要がある。

2.1.2 パワースペクトル密度

周波数空間で議論するためにフーリエ変換と逆フーリエ変換を次のように定義する：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt x(t) e^{-i\omega t} \quad (2.4)$$

測定値が実数であると仮定すると、 $x(t) = x^*(t)$ が成り立つ。このことから、

$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\tilde{X}(\omega) - \tilde{X}^*(-\omega)) e^{i\omega t} = 0 \quad (2.5)$$

となる。よってフーリエ係数について

$$\tilde{X}(\omega) = \tilde{X}^*(-\omega) \quad (2.6)$$

が成り立つ。

¹物理量の期待値がゼロの場合、RMS は分散と等しくなる。

²測定可能な物理量は実数である。

³アナログ回路の業界ではこの値を実効値と呼ぶことがある。

時系列データに対する条件

時系列データは $-\infty < t < \infty$ の範囲で定義される。しかしながら実際のデータ取得を考えると測定時間を T とし、次のように定義する方が自然である：

$$x(t; T) = \begin{cases} x(t) & (|t| \leq T/2) \\ 0 & (|t| > T/2) \end{cases} \quad (2.7)$$

当然ながら

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x(t; T) \quad (2.8)$$

が成り立つ。 $x(t; T)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega; T) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t; T) e^{-i\omega t} \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。

RMS とパワースペクトル密度との関係

式 (2.7) で定義された時系列データに対して RMS を計算する。式 (2.2) の定義より、

$$\text{RMS}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t; T)^2 \quad (2.10)$$

フーリエ変換より

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T)^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{X}(\omega; T) e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

が成り立つので、式を整形して

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T)^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{X}(\omega; T) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T) e^{-i\omega t} \right)^* \quad (2.12)$$

ゆえに

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{|\tilde{X}(\omega; T)|^2}{T} \quad (2.13)$$

スペクトル解析の分野では式 (2.13) の被積分関数のことをパワースペクトル密度 $P(\omega; T)$ とよぶ：

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega P(\omega; T) \quad (2.14)$$

$$P(\omega; T) = \frac{|\tilde{X}(\omega; T)|^2}{T} \quad (2.15)$$

パワースペクトル密度⁴ は測定した実効値のうちある周波数成分がどれくらい寄与しているかを表している。また時間平均をとることで、例えば定常的な雑音 (50Hz のライン雑音など) が計算上発散しないようになっている。

⁴パワーという名前はある値の二乗を計算しているためだ。電気回路業界では電圧や電流のパワースペクトル密度を計算することが多く、計算結果は抵抗で消費されるパワーに比例するためこのように名付けられた。

振幅スペクトル密度

パワースペクトル密度の平方根を振幅スペクトル密度という：

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega; T)^2 \quad (2.16)$$

$$A(\omega; T) := \sqrt{P(\omega; T)} = \frac{|\tilde{X}(\omega; T)|}{\sqrt{T}} \quad (2.17)$$

このときの $A(\omega; T)$ を振幅スペクトル密度といい、単位は $[\cdot/\sqrt{\text{Hz}}]$ である⁵。

特に測定時間 T が十分に長かった際には以下の式が成り立つ：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega)^2 \quad (2.18)$$

さらに、角周波数を周波数に変換すると $\omega = 2\pi f$ より

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t; T)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} df A'(f)^2 \quad (2.19)$$

となる⁶。または、測定する帯域を制限すれば

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt (x(t; T)^2)_{f_L \leq f \leq f_H} = \int_{f_L}^{f_H} df A(f)^2 \quad (2.20)$$

となる。

2.2 重力波検出器の主要な雑音源

本節では重力波検出器の主な雑音源をまとめる。重力波は物質との相互作用が極めて小さいため雑音に弱い。重力波検出器の感度を制限する雑音は低周波数帯側から順に「地面雑音」「輻射圧雑音」「熱雑音」「ショット雑音」である。

2.2.1 地面雑音

地面雑音は地上にある重力波検出器の低周波数帯の感度を制限する。地面は常に振動しており、これが雑音となる。典型的な地面振動の振幅スペクトル密度は次の通りである⁷：

$$\delta x(f) \sim 10^{-7} \times \left(\frac{1[\text{Hz}]}{f} \right)^2 [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (2.21)$$

重力波検出器では鏡を振り子で吊ることで地面雑音の影響を小さくしている。簡単のために一段の振り子を考える。鏡を質点近似し、その質量を $m[\text{kg}]$ とする。また振り子の全長を $L[\text{m}]$ とし、重力加速度を $g[\text{m/s}^2]$ 、振り子のダンピング係数を $\Gamma_m[\text{N}/(\text{m/s})]$ とする。振り子の固定点が微小距離 $x[\text{m}]$ だけ変位したときの質点の変位 $y[\text{m}]$ を求める(図 2.1)。このときの質点の運動方程式は

$$m\ddot{y} = \frac{mg}{L}(x - y) - \Gamma_m(\dot{x} - \dot{y}) \quad (2.22)$$

ここで $\gamma_m = \Gamma_m/2m$, $\omega_m^2 = g/L$ と定義して式を書き直すと

$$m\ddot{y} = m\omega_m^2(x - y) - 2m\gamma_m(\dot{x} - \dot{y}) \quad (2.23)$$

⁵ には左辺の被積分関数の次元が入る。例えば雑音電圧を測定したのであれば $[\text{V}]$ である。

⁶ $A'(f)^2 = A(2\pi f)^2$ である。以下では特に区別せずに用いる。

⁷ これは測定結果から求めた経験則である。一方で KAGRA のある神岡鉱山内部ではこの値よりもさらに二桁ほど地面雑音が小さい。

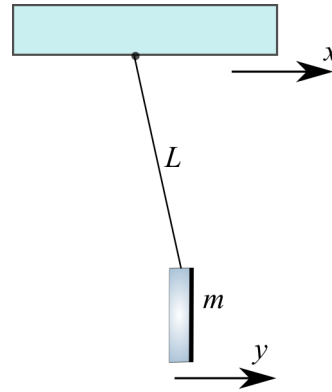


図 2.1: 振り子の運動の模式図

振り子の支点の座標を x 、吊られた質点の座標を y とおく。振り子の長さを L とし、質点の質量を m とする。質点には重力の他に減衰力 Γ_m が加わる。減衰力は速度に比例する場合 (viscous model) と速度によらず一定になる場合 (structure model) とがある。

式 (2.23) をフーリエ変換し整理すると

$$Y(\omega) = \frac{m\omega_m^2 + 2im\gamma_m\omega}{m(-\omega^2 + \omega_m^2) + 2im\gamma_m\omega} X(\omega) \quad (2.24)$$

さらに $Q_m = \omega_m/2\gamma_m$ と定義すると、

$$Y(\omega) = \frac{\omega_m^2 + i\frac{\omega_m\omega}{Q_m}}{-\omega^2 + i\frac{\omega_m\omega}{Q_m} + \omega_m^2} X(\omega) \quad (2.25)$$

測定している周波数帯が振り子の共振周波数に比べ十分に大きく ($\omega \gg \omega_m$)、振り子の Q 値が十分に大きいと ($Q_m \gg \omega_m\omega$)

$$Y(\omega) \approx -\frac{\omega_m^2}{\omega^2} X(\omega) \quad (2.26)$$

よって測定周波数帯が振り子の共振周波数よりも十分高ければ地面振動の影響は

$$|\delta y(f)| \approx \frac{f_m^2}{f^2} \times 10^{-7} \times \left(\frac{1[\text{Hz}]}{f}\right)^2 \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (2.27)$$

となり、振り子の効果によって周波数の二乗分の軽減効果がつく。

重力波検出器のテストマス⁸はこの振り子を何段も用いた防振をおこない防振性能を高めている。振り子による防振は干渉計の質を決めるといっても過言でなくらい重要である。

2.2.2 輻射圧雑音

光子は運動量をもつので光子数が変化すると鏡が受ける反作用が変わり鏡を揺らす。これが光子の引き起こす輻射圧雑音である。重力波検出器における輻射圧雑音の振幅スペクトル密度は次式の通りである：

$$x_{\text{RP}}(f) = \frac{2\mathcal{F}}{\pi m f^2} \sqrt{\frac{2\hbar I}{\pi^3 c \lambda}} \quad (2.28)$$

ここで m は鏡の質量であり、 I は干渉計に入射したレーザー強度、 λ はレーザーの波長、 \mathcal{F} は干渉計の腕のフィネスを表す。輻射圧雑音は周波数の二乗で減衰し、鏡の質量が大きいくほど小さくなる。LIGO では鏡が重いために輻射圧雑音が小さく低周波数帯の感度がよい。このためブラックホール連星合体から放出される重力波の検出に成功できた。

⁸干渉計の腕にある4枚の鏡のこと

2.2.3 熱雑音

振り子や鏡はある温度の場所に設置されており熱浴と接していることと同じである。このため熱浴から熱振動子が流入し振動が励起され干渉計の差動長を変化させる。これが熱雑音である。

まず振り子の熱雑音を説明する。熱浴から物体に熱振動子が流入する過程は、物体が外部に熱振動子を放出する過程（散逸）の逆である。すなわち、減衰の大きな振動子は外部からの熱振動子の流入が大きくなる。これを揺動散逸定理といい、外部から流入する熱振動子の引き起こす力のパワースペクトル密度は

$$S_{f,th}(\omega) \approx 4k_B T \gamma_m m, (\hbar\omega \ll k_B T) \quad (2.29)$$

ここで簡単のために減衰力が速度に比例すると仮定し⁹ 振り子の運動方程式を考えると、

$$m\ddot{x} = -m\omega_m^2 x + \Gamma_m \dot{x} + F_{th} \quad (2.30)$$

$\Gamma_m = 2m\gamma_m$ を用い、さらにフーリエ変換して整理すると、

$$X(\omega) = \frac{1}{m(\omega_m^2 - \omega^2 + 2i\gamma_m\omega)} \tilde{F}_{th}(\omega) \quad (2.31)$$

$\chi_m(\omega) := 1/m(\omega_m^2 - \omega^2 + 2i\gamma_m\omega)$ を力に対する変位の感受率ともいう。熱振動子の引き起こす力に感受率を乗じることで熱振動子の引き起こす変位の振幅スペクトル密度が求まる：

$$S_{x,th} = |\chi_m(\omega)|^2 S_{f,th}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{4k_B T \gamma_m}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_m^2 \omega^2} \quad (2.32)$$

とくに測定帯域が共振周波数と比べ十分に小さい場合¹⁰ は

$$\delta x_{th} = \sqrt{2S_{x,th}} \approx \sqrt{\frac{4k_B T}{m\omega_m^3 Q}} \omega \ll \omega_m \quad (2.33)$$

逆に測定帯域が共振周波数に比べ十分に大きい場合は

$$\delta x_{th} = \sqrt{2S_{x,th}} \approx \sqrt{\frac{4k_B T \omega_m}{m\omega^4 Q}} \omega \gg \omega_m \quad (2.34)$$

また、減衰力が速度によらず一定な場合¹¹ の熱雑音の表式は次の通りである：

$$\delta x_{th} \approx \sqrt{\frac{4k_B T \phi_k(\omega)}{m\omega_m^2 \omega}} \omega \ll \omega_m \quad (2.35)$$

逆に測定帯域が共振周波数に比べ十分に大きい場合は

$$\delta x_{th} \approx \sqrt{\frac{4k_B T \omega_m^2 \phi_k(\omega)}{m\omega^5}} \omega \gg \omega_m \quad (2.36)$$

ここで ϕ_k は複素バネ定数である。

経験的に振り子の熱雑音は structure model に従うことが知られている。また実際の重力波検出器では振り子の共振周波数が数 Hz、鏡の基材の弾性振動が数十 kHz、観測帯域が数百 Hz であるから振り子の熱雑音は

$$\delta x_{th,sus} \approx \sqrt{\frac{4k_B T \omega_m^2 \phi_k(\omega)}{m\omega^5}} \quad (2.37)$$

⁹これを viscous model という。

¹⁰片側変位スペクトルに直すために両側変位スペクトルを二倍した。

¹¹これを structure model という。

となり、鏡の基材の熱雑音はモデルに応じて

$$\delta x_{\text{th,mirror}} \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{4k_{\text{B}}T}{m\omega_{\text{m}}^3 Q}} & \text{viscus model} \\ \sqrt{\frac{4k_{\text{B}}T\phi_{\xi}(\omega)}{m\omega_{\text{m}}^2\omega}} & \text{structure model} \end{cases} \quad (2.38)$$

となる。

熱浴から流入する熱振動子は振り子や鏡の基材の振動が励起するだけでなく、鏡表面のコーティングのブラウン運動を引き起こす。KAGRA ではこのブラウン運動による雑音を小さくするために鏡を冷やす工夫がされる予定である。

2.2.4 ショット雑音

光子数が増加すると鏡の受ける反作用が増加するだけでなく（輻射圧雑音）、検出器の干渉状態をモニタする光検出器に入る光子の数が変わる。すなわち光子数の変化が鏡の反作用を介することなく干渉状態の変化として誤検出される。これが光のショット雑音である。ショット雑音の大きさは地面雑音や輻射圧雑音、熱雑音と異なり周波数によらず一定となるため、高周波数帯の感度を制限する雑音となる。

第3章 次世代重力波検出器

本章では非線型光学素子を用いた重力波検出器の理論と、実際のパラメータを用いて計算した検出器の感度について説明する。はじめに重力波検出器の量子雑音で制限された感度を計算し、そのあとで非線型光学素子を用いた重力波検出器の感度を計算する。

3.1 重力波検出器の量子雑音

重力波検出器の輻射圧雑音とショット雑音は光の粒子性に由来する雑音であり量子雑音と呼ばれる。レーザー強度を上げることでショット雑音に対する信号雑音比を改善できる一方で、輻射圧雑音はレーザー強度を上げると信号雑音比が悪化してしまう(式 2.28)。このトレードオフのために検出器の感度はある値に制限される。この感度の限界を標準量子限界 (Standard Quantum Limit = SQL) という。

重力波検出器の感度は量子雑音に制限されはじめており、標準量子限界を超えた検出器の開発が進んでいる。以下では重力波検出器の量子雑音に絞ったより詳しい説明する。

3.1.1 電磁場の量子化

レーザー光は電磁波であり Maxwell 方程式に従う：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

ここで ρ は電荷密度、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度、 \mathbf{j} は電流密度、 μ_0 は真空の透磁率、 ϵ_0 は真空の誘電率、 c は光速を表す。ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを使えば次のように書き換えられる：

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.6)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.7)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

式 (3.14) はゲージに対する条件である。

真空では上式はさらに

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.11)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad (3.12)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.14)$$

と簡略化される。スカラーポテンシャルおよびベクトルポテンシャルが波動方程式の解になっている。

Maxwell 方程式を量子化すると電磁場の方程式を得られその解が量子化した電磁波、すなわち光子となる¹。量子化されたベクトルポテンシャル、電場、磁場は次の通りである：

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} (a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e}_k + H.C.) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} (a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e}_k - H.C.) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \mathbf{k} \times (a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e}_k - H.C.) \quad (3.17)$$

ここで、 V は考えている系の体積であり、 \mathbf{e}_k は波数ベクトルを規格化したものである。また $a(\mathbf{k})$ は光子の消滅演算子、そのエルミート共役は $a^\dagger(\mathbf{k})$ 光子の生成演算子である。これらは交換関係

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (3.18)$$

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.19)$$

を満たす。

重力波検出器ではレーザーを使用するのでただ一つの波数のみを取り出すと(シングルモード近似)、

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0}} (a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e}_k - H.C.) \quad (3.20)$$

となり、交換関係は

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})] = 1 \quad (3.21)$$

となる。

3.1.2 光子の直交位相分解

上で得た量子化された電磁場は無限個の調和振動子の集合と解釈できる。ところで調和振動子を量子化するには位置と運動量という直交する2つの物理量から生成消滅演算子を定義した。電場に対してこれと逆のことにする。すなわち、「位置」と「運動量」として

$$x(\mathbf{k}) := \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})) \quad (3.22)$$

$$p(\mathbf{k}) := -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} (a(\mathbf{k}) - a^\dagger(\mathbf{k})) \quad (3.23)$$

¹ 詳細な量子化の過程は [] や [20] 参照

を定義する。このとき交換関係は式 (3.21) から

$$[x(\mathbf{k}), p(\mathbf{k})] = i\hbar \quad (3.24)$$

となり力学における位置と運動量に対応した物理量だと確認できる。これを用いて書き直した電場の表式は以下の通りである：

$$E(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \left(\frac{p(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \frac{\omega_k x(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \mathbf{e}_k \quad (3.25)$$

運動量に対応する物理量が $\cos(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ に比例した成分に、位置に対応する物理量が $\sin(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ に比例した成分に現れる。sin と cos が直交することからも、位置と運動量に対応していると分かる。

レーザー光学の分野では運動量に対応する成分を振幅成分と呼び、位置に対応する成分を位相成分と呼ぶ。特にベクトルの第一成分 a_1 を振幅成分に第二成分 a_2 を位相成分にまとめて表記することが多い：

$$E(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \left(\frac{a_1(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \frac{\omega_k a_2(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \mathbf{e}_k \quad (3.26)$$

さらに消滅演算子 $a_1(\mathbf{k}), a_2(\mathbf{k})$ の複素数の期待値をそれぞれ $\alpha_1(\mathbf{k}), \alpha_2(\mathbf{k})$ とおくと式 (3.26) は期待値とその揺らぎという形でかける：

$$E(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{k}) + \delta a_1(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \frac{\omega_k (\alpha_2(\mathbf{k}) + \delta a_2(\mathbf{k}))}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \mathbf{e}_k \quad (3.27)$$

これを図示したものを Phaser-Diagram(図 3.1) と呼び重力波検出器の量子雑音や光子の量子状態を議論する際に用いられる。なお通常 Phaser-Diagram を用いて議論する際に図を回転させ、期待値が x 軸方向に一致するように描く：

$$E(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{k}) + \delta a_1(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \frac{\omega_k \delta a_2(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \mathbf{e}_k \quad (3.28)$$

物理的には古典的な電場の、位相の自由度を使っていることに一致する。

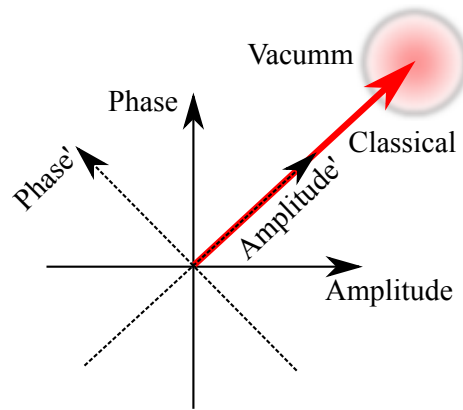


図 3.1: Phaser Diagram

光子を直交位相分解した図であり Phaser Diagram と呼ぶ。コヒーレントな真空場による雑音を円(最小不確定状態)で表しており、その大きさは1に規格化されている。信号と雑音をより議論しやすくするために以降では、実軸を古典光に一致させた座標系 (Amplitude', Phase' 座標系) を用いる。

古典的な電場との対応

古典的な電場を式 (3.10)~(3.14) から導くと、

$$E_{\text{cla}}(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \left(\frac{E(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \mathbf{e}_k \quad (3.29)$$

となる。ここで $E(k)$ は電場の振幅を表し、位相の自由度を用いて実数とする。すなわち、古典的な電場は運動量に対応した物理量に現れる²。古典的な電場と量子的な電場を次のようにまとめると、古典的な電場に対する量子雑音の影響を計算する際に見通しがよい：

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_{\text{cla}}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{E}_{\text{qua}}(t, \mathbf{x}) \quad (3.30)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} (E(\mathbf{k}) + a_1(\mathbf{k})) \cos(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \frac{\omega_k a_2(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \mathbf{e}_k \quad (3.31)$$

このとき a_1, a_2 は式 (3.28) の揺らぎの項に一致し、真空場の消滅演算子と解釈される。また $E(k)$ は式 (3.28) の $\alpha_1(k)$ に一致する。言い換えると、レーザーの古典的な電場が $E(k)$ 量子化された電場の期待値を表し、その揺らぎを真空場の演算子 a_1, a_2 が表している。なお真空場による微小項を全く無視すれば (0 次近似)、電場の二乗期待値は古典的な電場のそれに一致する：

$$\langle |\mathbf{E}(t, \mathbf{x})|^2 \rangle \sim \langle |\mathbf{E}_{\text{cla}}(t, \mathbf{x})|^2 \rangle \quad (3.32)$$

3.2 Michelson 干渉計の量子雑音

Michelson 干渉計の量子雑音を議論する。以下、議論を簡単にするために (3.31) で用いた $a_1(\mathbf{k})$ と $a_2(\mathbf{k})$ を a_1 と a_2 と書くことにし (シングルモード近似)、さらに分散関係 $\Omega = ck$ を用いて波数から角周波数の関数にし式を扱いやすくするため適当な規格化をおこなった。電場が x 軸方向にのみ成分をもつとすると表式は以下の通りになる³：

$$E(t, x) = \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\epsilon_0}} ((E(\Omega) + a_1) \cos(\Omega t - kx) + a_2 \sin(\Omega t - kx)) \quad (3.33)$$

ここで (3.22) と (3.23) で定義した光子の位相と振幅の定義を変更している：

$$a_1 := -i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a(\mathbf{k}) - a^\dagger(\mathbf{k})) \quad (3.34)$$

$$a_2 := \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})) \quad (3.35)$$

なお交換関係は (3.24) と同じである。

以下ではマイケルソン干渉計の腕を折り返した形を考える (図 3.2)。これは本修士論文で作成したマイケルソン干渉計がこの形になっていた点、また次世代重力波検出器の感度曲線を計算した際にドイツの重力波検出器 GEO の構成を参考にした点からである。

3.2.1 サイドバンド描像

重力波や雑音によって Michelson 干渉計の鏡が動かされた際の応答を考える。このときサイドバンド (Side-Band: 側帯波) を用いると計算が容易となる。

原点から距離 x_0 だけ離れた鏡に当たって帰ってきた電場を考える。電場の古典的な表式は式 (3.33) より

$$E(t, x) = \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\epsilon_0}} E(\Omega) \cos(\Omega(t - 2x_0/c)) \quad (3.36)$$

であった。いま鏡が微小距離 $\delta x(t)$ だけ変動したとすると、

$$E(t, x) = \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\epsilon_0}} E \cos(\Omega(t - 2x_0/c)) + \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\epsilon_0}} \frac{2\Omega E}{c} \delta x(t) \cdot \sin(\Omega(t - 2x_0/c)) \quad (3.37)$$

となり位相方向に成分をもつ電場が生じる。元々ある振幅成分の電場をキャリアと呼び、位相成分に現れる電場をサイドバンドとよぶ。鏡が動いた情報はキャリアのサイドバンドに現れるので干渉計の制御ではいかにサイドバンドを取り出すかが重要となる (4.1 節参照)。

² E_k を純虚数とすれば位置に対応した物理量に現れる。なお表記を合わせるために係数がついている

³ 本来、物理の分野では波を $\cos(-\Omega t + kx)$ と表すのだが、などに従い $\cos(\Omega t - kx)$ とした。

3.2.2 ASポートから入射する真空場の各成分に対する Michelson 干渉計の応答

ASポート⁴から入射する真空場(光子)の各成分に対する Michelson 干渉計の応答を考えるために、図 3.2 の状況を考える。

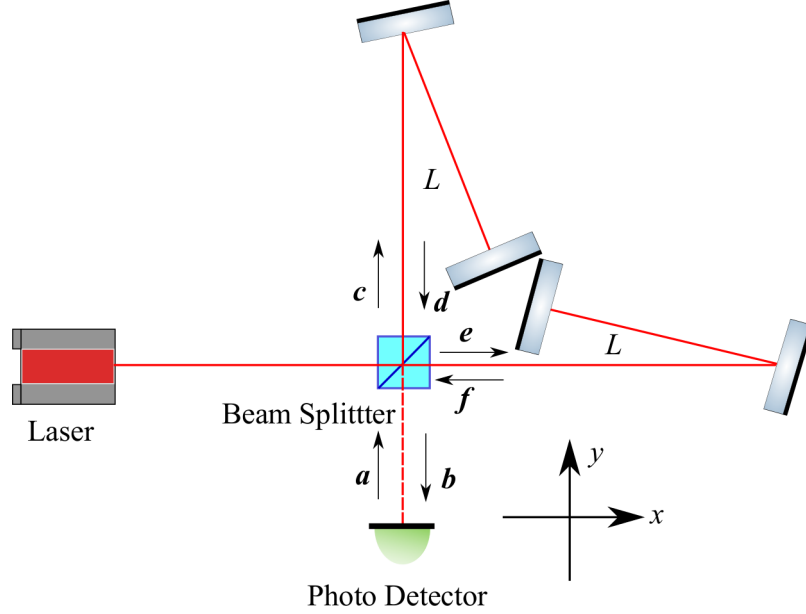


図 3.2: 腕に折り返し鏡を搭載した Michelson 干渉計の図

腕に折り返し鏡を搭載している以外は図 1.1 と同じである。真空場の振幅を小文字のアルファベットで表現している。基線長を L とし、折り返し鏡はその半分の位置に置いた。折り返し鏡の位置を y_1 、エンド鏡の位置を y_2 とし、どちらも基線長を延ばす方向を正にとる。

ここで小文字はビームスプリッタ上での真空場の各成分の複素振幅を表す。鏡が固定され輻射圧の効果を受けないとするとダークポートに現れる真空場 b とダークポートから入射する真空場 a との関係は

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(d - f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c - e)e^{2i\omega \frac{L}{c}} = ae^{2i\omega \frac{L}{c}} \quad (3.38)$$

となる。なお真空場の成分をまとめて表現した：

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{\text{amp}} \\ a_{\text{phase}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

鏡が固定されている場合、真空場の雑音は元々の真空場と同じ値となる。

鏡が吊られている場合、周波数帯によってはダークポートに現れる真空場とダークポートから入射した真空場は異なる。これは Michelson 干渉計のダークポートから入射した真空場の輻射圧が鏡を揺らし、サイドバンドを発生させるためだ(輻射圧雑音)。

鏡が重力波と光の輻射圧によって動いたときに発生するサイドバンドを計算する。はじめに y 軸方向の腕の内部で発生するサイドバンドを考える。折り返し鏡の座標を y_1 、エンド鏡の座標を y_2 とし、折り返し鏡の入射角は十分小さいとする。鏡が動いた際に発生するサイドバンドは式 (3.37) より

$$E_{\text{SB},y} = \frac{2\Omega E}{c}(\delta Y_1(\omega)e^{i\omega \frac{L}{2c}} + \delta Y_1(\omega)e^{i\omega \frac{3L}{2c}} + \delta Y_2(\omega)e^{i\omega \frac{L}{c}}) \approx \frac{2\Omega E}{c}(2\delta Y_1(\omega) + \delta Y_2(\omega))e^{i\omega \frac{L}{c}} \quad (3.40)$$

⁴Michelson 干渉計の出力側のこと。Anti-Symmetric port の略称である。反対にマイケルソン干渉計の入力側を Symetric-Port と呼ぶが単に RFL(レフル)ポートと呼ぶこともある。

ここで $\omega L/2c \ll 1$ を用いて近似した。次に重力波と真空場の輻射圧による鏡の微小変位を求める。定常状態では鏡にかかる古典的な輻射圧と振り子の復元力が釣り合っているので運動方程式は次の通りである：

$$m \frac{dy_1(t)}{dt^2} = 2f_{\text{rad}} - f_{\text{res},1}(=0) \quad (3.41)$$

$$m \frac{dy_2(t)}{dt^2} = f_{\text{rad}} - f_{\text{res},2}(=0) \quad (3.42)$$

折り返し鏡では光が二度反射するので輻射圧の効果を二倍にしている。また鏡の質量は鏡 1 と鏡 2 で同じとしている。光子 1 つあたりの運動量は $\hbar k$ であるから単位時間あたりの運動量変化 (=力) はレーザー光のパワー P を用いて次のように書ける：

$$f_{\text{rad}} = 2\hbar k \times \frac{P}{\hbar\Omega} = \frac{2P}{c} \quad (3.43)$$

レーザー光のパワー P は式 (3.36) で定義した E の二乗が古典的な光子の数を表すことから⁵

$$P = \frac{1}{2} \hbar\Omega E^2 \quad (3.44)$$

よって

$$f_{\text{rad}} = \frac{\hbar\Omega E^2}{c} \quad (3.45)$$

ここに真空場が侵入した場合を考える。真空場の輻射圧によって f_{rad} は

$$\delta f_{\text{rad}} = \frac{2\hbar\Omega E}{c} \delta E = \frac{2\hbar\Omega E}{c} c_1 \quad (3.46)$$

だけ変化する。 δE は真空場の振幅成分であることを用いた。よって運動方程式 (3.41)、(3.42) は以下とおりである：

$$m \frac{dy_1(t)}{dt^2} = \frac{2\hbar\Omega E}{c} c_1 e^{i\omega \frac{L}{2c}} + \frac{2\hbar\Omega E}{c} c_1 e^{i\omega \frac{3L}{2c}} \approx \frac{4\hbar\Omega E}{c} c_1 e^{i\omega \frac{L}{c}} \quad (3.47)$$

$$m \frac{dy_2(t)}{dt^2} = \frac{2\hbar\Omega E}{c} c_1 e^{i\omega \frac{L}{c}} \quad (3.48)$$

さらに y_1 には重力波による変位も加わるので、運動方程式は

$$\frac{dy_1(t)}{dt^2} = \frac{4\hbar\Omega E}{mc} c_1 e^{i\omega \frac{L}{c}} + \frac{L}{4} \frac{dh(t)}{dt^2} \quad (3.49)$$

となる。これをフーリエ変換し周波数空間で解くと

$$Y_1(\omega) = -\frac{4\hbar\Omega E}{mc\omega^2} c_1 e^{i\omega \frac{L}{c}} + \frac{L}{4} h(\omega) \quad (3.50)$$

$$Y_2(\omega) = -\frac{2\hbar\Omega E}{mc\omega^2} c_1 e^{i\omega \frac{L}{c}} \quad (3.51)$$

となる。ゆえに式 (3.40) に代入することで重力波と真空場が発生させるサイドバンドが得られる：

$$E_{\text{SB},y} = \frac{2\Omega E}{c} \left(-\frac{10\hbar\Omega E}{mc\omega^2} c_1 e^{i\omega \frac{L}{c}} + \frac{L}{2} h(\omega) \right) e^{i\omega \frac{L}{c}} \quad (3.52)$$

同様の計算により x 軸方向で発生するサイドバンドを計算できる：

$$E_{\text{SB},x} = \frac{2\Omega E}{c} \left(-\frac{10\hbar\Omega E}{mc\omega^2} e_1 e^{i\omega \frac{L}{c}} - \frac{L}{2} h(\omega) \right) e^{i\omega \frac{L}{c}} \quad (3.53)$$

ここで重力波が差動の変位を引き起こすことを用いた。ゆえに AS ポートに現れる真空場 b は

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (c - e) e^{i\omega \frac{2L}{c}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{20\hbar\Omega^2 E^2}{mc^2\omega^2} (c_1 - e_1) e^{i\omega \frac{2L}{c}} e_{\text{phase}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\Omega EL}{c} h(\omega) e^{i\omega \frac{L}{c}} e_{\text{phase}}$$

⁵ ビームスプリッターで元のレーザーパワーの半分のみが y 軸方向にいくことに注意

より

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}e^{i\omega\frac{2L}{c}} - \frac{20\hbar\Omega^2 E^2}{mc^2\omega^2} a_1 e^{i\omega\frac{2L}{c}} \mathbf{e}_{\text{phase}} + \frac{\sqrt{2}\Omega EL}{c} h(\omega) e^{i\omega\frac{L}{c}} \mathbf{e}_{\text{phase}} \quad (3.54)$$

を得る。ここで $\mathbf{e}_{\text{phase}}$ は位相方向の単位ベクトルである：

$$\mathbf{e}_{\text{phase}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

これをさらにまとめると次式を得る：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{a}e^{2i\omega\frac{L}{c}} + \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}}{h_{\text{SQL}}} h(\omega) e^{i\omega\frac{L}{c}} \mathbf{e}_{\text{phase}} - \mathcal{K} a_1 e^{i\omega\frac{2L}{c}} \mathbf{e}_{\text{phase}} \\ &= e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}}{h_{\text{SQL}}} e^{i\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ h(\omega) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ここで、 \mathcal{K} 、 h_{SQL} 、 β は以下のように定義される：

$$\mathcal{K} = \frac{20\Omega P}{mc^2\omega^2} \quad (3.57)$$

$$h_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{20\hbar}{m\omega^2 L^2}} \quad (3.58)$$

$$\beta = \frac{\omega L}{c} \quad (3.59)$$

鏡が真空場の輻射圧によって揺らされ、AS ポートに出てくる真空場が変化する。

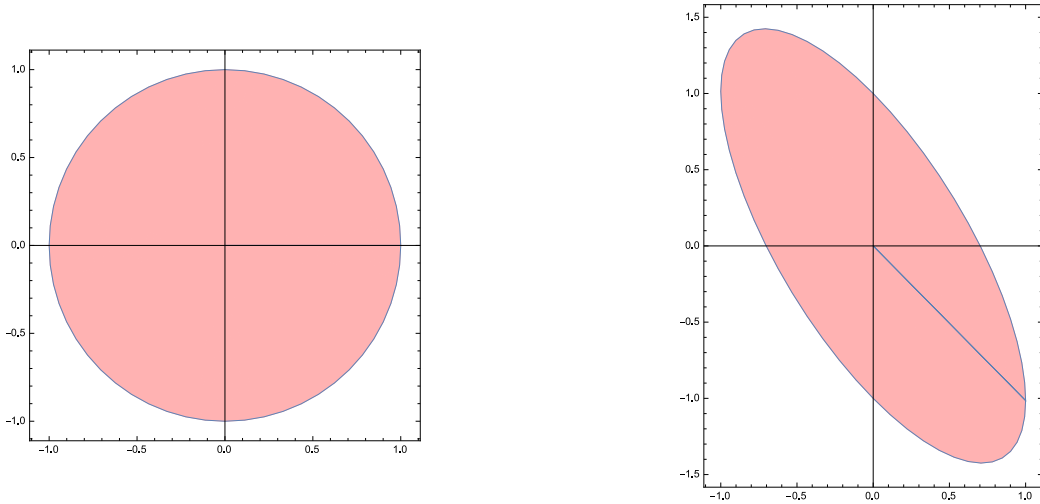


図 3.3: Michelson 干渉計における輻射圧雑音の影響

左：鏡が吊られていない際に AS ポートに現れる真空場。右：鏡が吊られている際に AS ポートに現れる真空場。鏡が吊られている際には輻射圧雑音の影響で真空場の形状が変化している。いずれの図も 0.1Hz で入射パワーが 1W、鏡の質量 1g で計算している。また真空場の大きさは AS ポートから入射する真空場の大きさで規格化している。

特に h_{SQL} は Michelson 干渉計による差動変位の測定限界を表す。式 (3.56) から量子雑音に対する差動変位の感度 $\sqrt{S_h}$ を計算すると

$$\sqrt{S_h} = \sqrt{\frac{1 + \mathcal{K}^2}{2\mathcal{K}}} h_{\text{SQL}}^2 \geq h_{\text{SQL}} \quad (3.60)$$

が得られる。すなわち Michelson 干渉計を用いて測定すると、この値よりも小さい差動変位は量子雑音に埋もれてしまい測定できない(図 3.4)。量子雑音によって制限される感度であるために h_{SQL} は標準量子限界⁶(Standard Quantum Limit=SQL) と呼ばれる。

⁶入射する真空場がコヒーレントだと仮定したので「標準」という名前が付く。

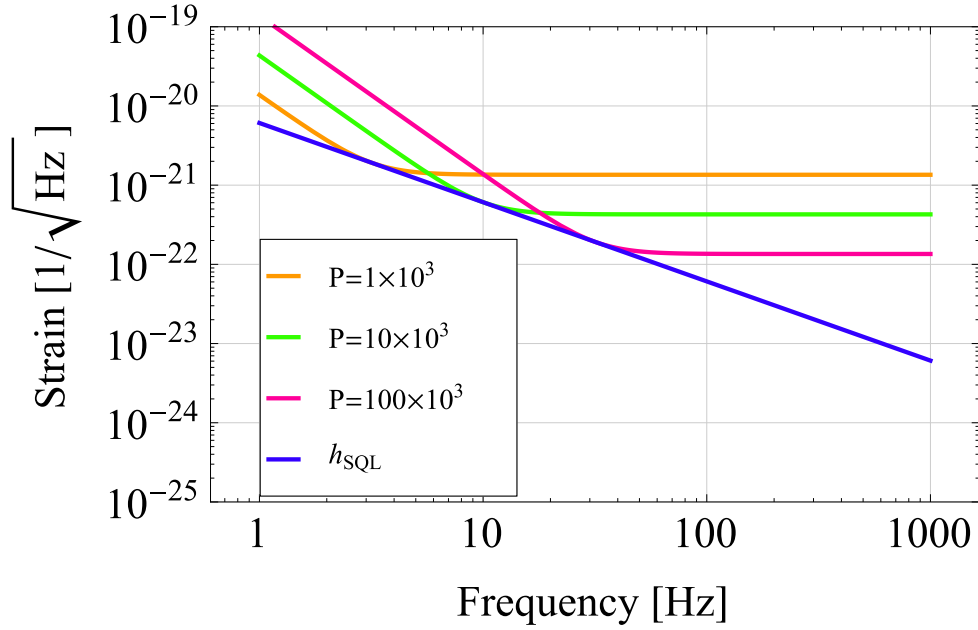


図 3.4: Michelson 干渉計の感度曲線と SQL の関係

Michelson 干渉計の感度を計算した。簡単化のために量子雑音のみを考慮にいたした。レーザー強度を変更すると感度の最もよい周波数帯は変化するが SQL を超えることはない。

3.3 シグナルリサイクリング干渉計の量子雑音

前節で真空場の Michelson 干渉計における入出力関係を求めた。この関係を用いてシグナルリサイクリング干渉計の量子雑音を計算する。Michelson 干渉計に SR 鏡を付け加える (図 3.5)

式 (3.56) から真空場の Michelson 干渉計における入出力の関係は次式で与えられていた：

$$\mathbf{d} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\text{SQL}}} e^{i\beta} h(\omega) \mathbf{e}_{\text{phase}} \quad (3.61)$$

一方でサイドバンドが BS と SR 鏡間を進む際に干渉計内部で定義された振幅・位相成分と共振器内を往復した後の振幅・位相成分の定義の間にズレが生じる。このズレは回転行列に対応する：

$$\mathbf{b} = t_s e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \mathbf{d} - r_s \mathbf{a} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{c} = r_s e^{2i\alpha} \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \mathbf{d} + t_s e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \mathbf{a} \quad (3.63)$$

$$\alpha := \frac{\omega l_s}{c} \quad (3.64)$$

SR 共振器が共振している際は回転行列の位相 2ϕ が SR 共振器内で 2π となるので位相成分は位相成分となって干渉計に再入射する。一方で SR 共振器が共振条件から離調されると真空場の周波数成分に振幅成分が混入する。

式 (3.61)~(3.63) を解いた結果は次式の通りである：

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} \left\{ e^{2i(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \mathbf{a} + \sqrt{2\mathcal{K}} t_s e^{i(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \frac{h(\omega)}{h_{\text{SQL}}} \right\} \quad (3.65)$$

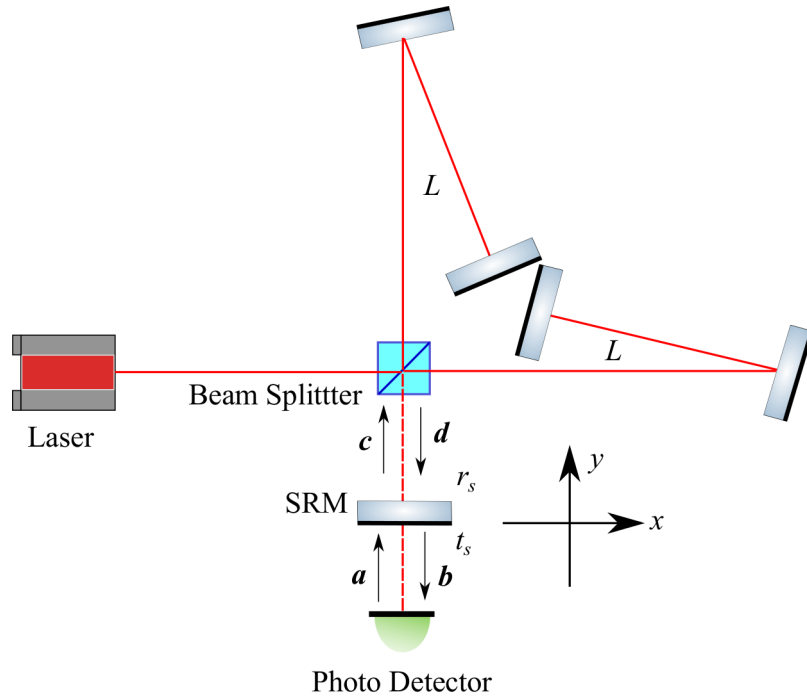


図 3.5: SR 干渉計の図

AS ポートに SR 鏡が付け加えられている以外は図 3.2 と同じである。SR 鏡の裏面から侵入する真空場を a としたために各場所における真空場の名前付けを変更した。SR 鏡の反射・透過率を r_s, t_s としキャリア光に対する SR 鏡から BS までの位相を ϕ とおいた。

行列およびベクトルの成分は次式で与えられる：

$$M = 1 + r_s^2 e^{4i(\alpha+\beta)} - 2e^{2i(\alpha+\beta)} r_s \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) \quad (3.66)$$

$$A_{11} = A_{22} = -2r_s \cos(2(\alpha + \beta)) + (1 + r_s^2) \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) \quad (3.67)$$

$$A_{12} = -t_s^2 (\sin 2\phi + \mathcal{K} \sin^2 \phi) \quad (3.68)$$

$$A_{21} = t_s^2 (\sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi) \quad (3.69)$$

$$H_1 = -(1 + r_s e^{2i(\alpha+\beta)}) \sin \phi \quad (3.70)$$

$$H_2 = (1 - r_s e^{2i(\alpha+\beta)}) \cos \phi \quad (3.71)$$

SR 共振器が共振している ($\phi = 2\pi$) とし、式 (3.65) から SR 干渉計の感度を計算すると次式を得る：

$$\sqrt{S_h} = \sqrt{\frac{|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2}{2T_s |H_2|^2 \mathcal{K}}} h_{\text{SQL}} \quad (3.72)$$

なお、SR 鏡がないとすると ($r_s = 0, t_s = 1$)、

$$A_{21} = -\mathcal{K}, A_{22} = 1, H_2 = 1 \quad (3.73)$$

となり式 (3.72) は式 (3.60) に一致する。図 3.6 で同一パラメータの Michelson 干渉計と SR 干渉計の感度曲線を比較した。

SR 干渉計では SR 共振器を離調することで狭帯域ながら感度をさらに向上させられる。図 3.7 では同一パラメータでの離調した SR 干渉計、離調しない SR 干渉計、Michelson 干渉計を比較した。狭帯域ながら 50Hz 付近の感

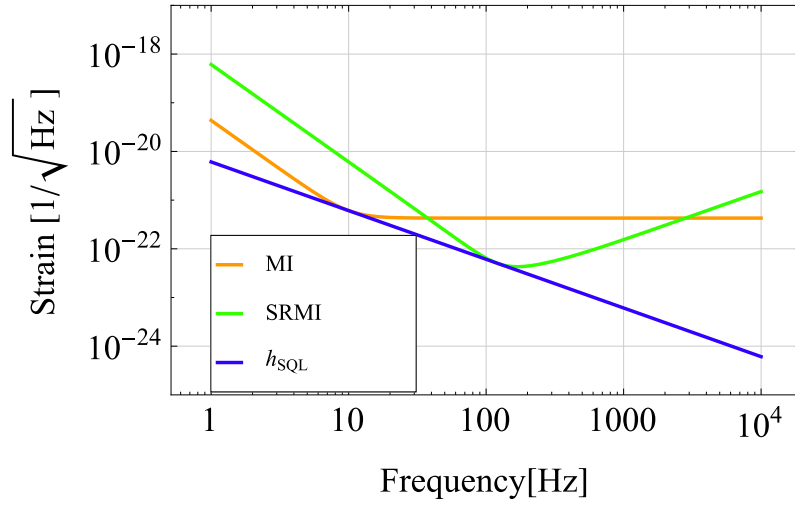


図 3.6: Michelson 干渉計、SR 干渉計の感度曲線と SQL との関係

同一パラメータにした Michelson 干渉計と SR 干渉計の感度曲線。SR 干渉計は SR 共振器で信号を打ち返すため 100Hz 付近での感度が改善されている。一方高周波数帯では SR 共振器内で信号が弱め合うために感度が悪化している。いずれの干渉計の感度も SQL を超えられない。パラメータは $L = 1200\text{m}$ 、 $R_s = 0.98$ 、 $m = 1\text{kg}$ 、 $P = 10^4\text{W}$ とした。

度が改善され、SQL も超えている。これは SR 共振器の離調によって真空場の周波数成分と振幅成分の混合が生じ、干渉計のダイナミクスが変わったためである。物理的には低周波数側のディップの周波数は SR 共振器と干渉計からなる複合共振器の光パネの共振周波数に近く、高周波数側は離調による信号サイドバンドの共振周波数の変化に対応している [9]。

特に SQL を超えている低周波側のディップの周波数を求める。 $|H_2|$ は式 (3.71) からディップをもたない。そこで $|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2$ に注目する。入射した真空場の周波数成分由来の量子雑音が最小になる周波数、すなわち $|A_{21}| = 0$ の解は式 (3.69) から

$$T_s |\sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi| = 0 \quad (3.74)$$

より

$$f_{|A_{21}|=0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10P\Omega}{mc^2 \tan \phi}} \quad (3.75)$$

一方、 $|A_{22}| = 0$ 解は式 (3.67) から

$$\left| -2r_s + (1 + r_s^2) \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) \right| = 0, \quad (\alpha, \beta \ll 1) \quad (3.76)$$

より

$$f_{|A_{22}|=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{10P\Omega(1 + r_s^2) \sin 2\phi}}{\sqrt{mc^2(2r_s - (1 + r_s^2) \cos 2\phi)}} \quad (3.77)$$

式 (3.77) はさらに $r \sim 1$ と近似すると式 (3.75) に一致する：

$$f_{|A_{22}|=0} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{10P\Omega(1 + 1^2) \sin 2\phi}}{\sqrt{mc^2(2 - (1 + 1^2) \cos 2\phi)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10P\Omega}{mc^2 \tan \phi}} \quad (3.78)$$

$f_{|A_{21}|=0}$ と $f_{|A_{22}|=0}$ の間にわずかな差が生じるため図 3.7 のディップの鋭さがなまる。式 (3.77) の分母を r_s に対して平方完成すると

$$\sqrt{mc^2(2r_s - (1 + r_s^2) \cos 2\phi)} = \sqrt{mc^2 \cos 2\phi} \sqrt{-\left(r_s - \frac{1}{\cos 2\phi}\right)^2 + \tan^2 2\phi} \quad (3.79)$$

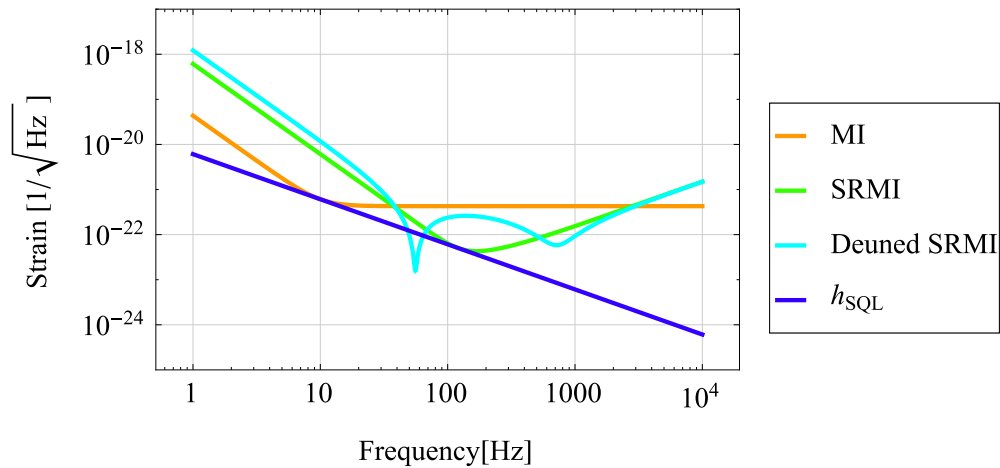


図 3.7: Michelson 干渉計、Detuned SR 干渉計、SR 干渉計の感度曲線と SQL との関係

同一パラメータにした Michelson 干渉計、Detuned SR 干渉計、SR 干渉計の感度曲線。Detuned SR 干渉計は 50Hz 付近での感度が狭帯域ながら SR 干渉計に比べ向上しており、SQL を超えた差動検出が可能である。パラメータは $L = 1200\text{m}$ 、 $R_s = 0.98$ 、 $m = 1\text{kg}$ 、 $P = 10^4\text{W}$ とし、Detuned SR 干渉計では SR 共振器を $1/360$ 波長分離調している。

となる。よって式 (3.77) が実解をもつためには SR 鏡の反射率 r_s と離調の間に以下の関係が成り立つ必要がある：

$$r_s > \frac{\cos \phi - \sin \phi}{\cos \phi + \sin \phi} \quad (3.80)$$

反射率を小さくしすぎると $f_{|A_{22}|=0}$ が実解をもたなくなり、それに応じて干渉計の感度曲線からディップが消失する (図 3.8)。これは光バネに減衰力が働き、共振の Q が低下したとも言える。

低周波側のディップは SQL を超えるのでこれを高周波側に移動させられれば、高周波数帯の感度向上を実現できる。そのためには離調角 ϕ を変更すればよい。図 3.9 に離調角を変更した際の感度曲線の変化を描いた。離調角の変化に応じて低周波数側のディップが高周波数側に移動している様子が見て取れる。

しかし離調角を大きくしてもディップは低周波数側にシフトするのみであり、ディップを高周波数側にシフトさせるためにはレーザーパワーを大きくする、鏡の質量を軽くするといった措置が必要になる。ただレーザーパワーを大きくした上で安定的に干渉計を動作させるのは鏡の熱雑音や共振器の不安定性などの点から困難であり、そもそも光源の作成も大変である。そこで既存のシステムを大きく変更することなく高周波数帯の感度を向上する手法として提案されたのが非線型光学結晶を用いた重力波検出器である [7]。

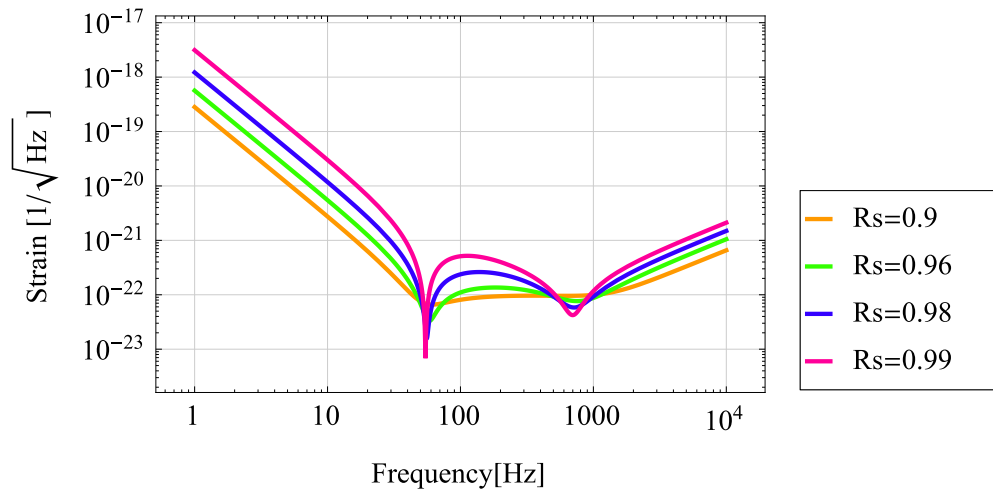


図 3.8: SR 鏡の反射率と Detuned SR 干渉計の感度曲線の関係

SR 鏡の反射率を変化させたときの感度曲線。反射率が高くなるにつれディップは鋭くなる。反対に反射率が低くなるとディップの鋭さが消えていく。パラメータは $L = 1200\text{m}$ 、 $m = 1\text{kg}$ 、 $P = 10^4\text{W}$ とし、SR 共振器を $1/360$ 波長分離調している。

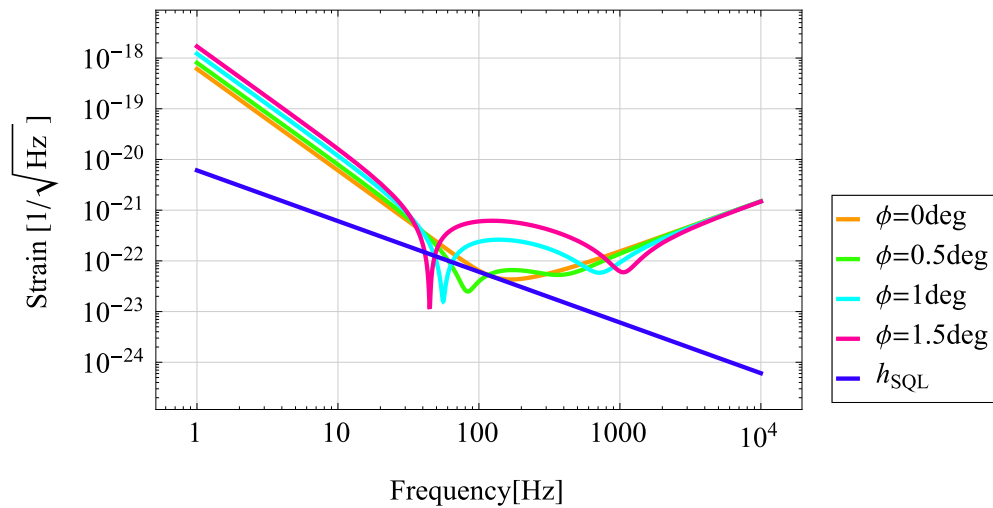


図 3.9: SR 共振器の離調角と Detuned SR 干渉計の感度曲線の関係

SR 鏡の離調角を変化させたときの感度曲線。離調角が大きくなるにつれディップは鋭くなり低周波数側に移動する。パラメータは $L = 1200\text{m}$ 、 $R_s = 0.98$ 、 $m = 1\text{kg}$ 、 $P = 10^4\text{W}$ としている。

3.4 非線型光学効果を用いた重力波検出器の理論感度の計算

3.3 節で示した通り、SR 共振器と離調を用いれば干渉計の感度は SQL を超える。しかし離調角を変えてディップの周波数をシフトさせても高周波数帯の感度は向上できない(図 3.9)。本節ではこの問題を解決するために提案された非線型光学効果を用いた重力波検出器 [7](図 3.10) を説明する。

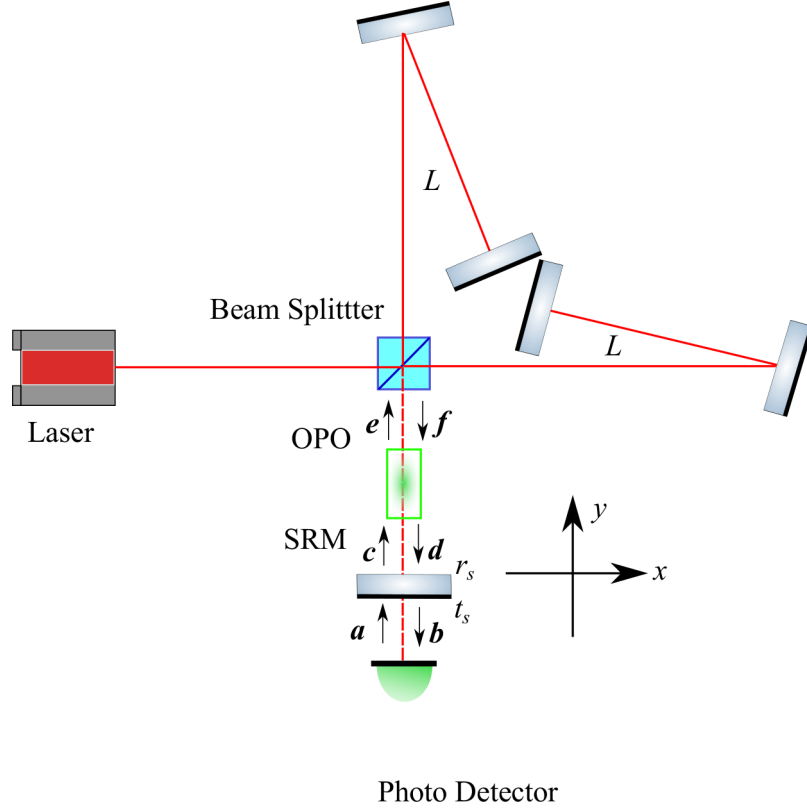


図 3.10: 非線型光学素子を用いた重力波検出器の模式図

SR 共振器内に非線型光学素子を挿入している。非線型光学素子は光子の統計的な揺らぎを変更させられるので(スクイーミング)、干渉計のダイナミクスをさらに変化させられる。各場所における真空場の名前付けを変更している。

非線型光学素子は共振器内の真空場の揺らぎを変える。具体的にはスクイーミングファクタ s を用いて、

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

となる。この結果、真空場の揺らぎはある成分が最大になりそれと直交する成分最小となる。式 (3.81) では位相成分か振幅方向成分の揺らぎが小さくなる代わりに、それとは直交する成分の揺らぎが大きくなる。非線型光学結晶を透過した真空場の揺らぎを図 3.3 のように図示すると楕円になる(スクイーミング)。ただし面積はコヒーレントな真空場と同じである。残りの真空場の関係は次式で与えられる：

$$\mathbf{f} = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{e} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\text{SQL}}} e^{i\beta} h(\omega) \mathbf{e}_{\text{phase}} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{c} = r_s e^{2i\alpha} \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \mathbf{d} + t_s e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \mathbf{a} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{b} = t_s e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \mathbf{d} - r_s \mathbf{a} \quad (3.84)$$

非線型光学素子は方向依存性があるので SR 鏡で打ち返された光に対しては変化を起こさない：

$$\mathbf{e} = \mathbf{c} \quad (3.85)$$

式 (3.81)~ 式 (3.85) を解くと次式が得られる：

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} \left\{ e^{2i(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \mathbf{a} + \sqrt{2\mathcal{K}} t_s e^{i(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \frac{h(\omega)}{h_{\text{SQL}}} \right\} \quad (3.86)$$

ここで行列およびベクトルの各成分は以下の通りである：

$$M = s + sr_s^2 e^{4i(\alpha+\beta)} - r_s e^{2i(\alpha+\beta)} ((1+s^2) \cos 2\phi + \mathcal{K} \sin 2\phi) \quad (3.87)$$

$$A_{11} = (1+r_s^2) \left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2sr_s \cos(2(\alpha+\beta)) - \frac{1-s^2}{2} t_s^2 \quad (3.88)$$

$$A_{12} = -t_s^2 \left(\frac{1+s^2}{2} \sin 2\phi + \mathcal{K} \sin^2 \phi \right) \quad (3.89)$$

$$A_{21} = t_s^2 \left(\frac{1+s^2}{2} \sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi \right) \quad (3.90)$$

$$A_{22} = (1+r_s^2) \left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2sr_s \cos(2(\alpha+\beta)) + \frac{1-s^2}{2} t_s^2 \quad (3.91)$$

$$H_1 = -(1+sr_s e^{2i(\alpha+\beta)}) \sin \phi \quad (3.92)$$

$$H_2 = -(-1+sr_s e^{2i(\alpha+\beta)}) \cos \phi \quad (3.93)$$

式 (3.86) から干渉計の感度を計算すると次式を得る：

$$\sqrt{S_h} = \sqrt{\frac{|A_{12}+A_{22}|^2 + |A_{11}+A_{21}|^2}{2T_s(|H_1|^2 + |H_2|^2)\mathcal{K}}} h_{\text{SQL}} \quad (3.94)$$

ここで信号の検出角度 (ホモダイン・アングル) を 45 度にした。この理由については 6.2 章を参照とする。図 3.11 で OPO のゲインを変えたときの感度曲線の変化をプロットした。OPO のゲインは

$$G_{\text{OPO}} := -20 \log_{10} s \text{ [dB]} \quad (3.95)$$

で定義している。OPO のゲインが上がると左側のディップが高周波側に移動し高周波数帯の感度が向上する。これにより高周波数帯であっても原理上 SQL を超えた検出が可能となる。

低周波側のディップの周波数を求める。式 (3.75) と式 (3.77) を求めたときと同様に $|A_{12}+A_{22}| = 0$ と $|A_{11}+A_{21}| = 0$ となる周波数を別々に求め比較する。結果は

$$f_{|A_{12}+A_{22}|=0} = \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{2 \sin \phi ((1-r^2) \sin \phi - (1+r^2) \cos \phi)}{(1-r^2)(1-s^2) - (1+s^2)((1-r^2) \sin 2\phi - (1+r^2) \cos 2\phi) - 4rs}} \quad (3.96)$$

$$f_{|A_{11}+A_{21}|=0} = \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{2 \cos \phi ((1-r^2) \cos \phi - (1+r^2) \sin \phi)}{-(1-r^2)(1-s^2) + (1+s^2)((1-r^2) \sin 2\phi + (1+r^2) \cos 2\phi) - 4rs}} \quad (3.97)$$

式 (3.75) と式 (3.77) 同様に $r \approx 1$ の極限では式 (3.96) と式 (3.97) は一致する：

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_{|A_{12}+A_{22}|=0} = \lim_{r \rightarrow 1} f_{|A_{11}+A_{21}|=0} = \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{\sin 2\phi}{-(1+s^2) \cos 2\phi + 2s}} \quad (3.98)$$

実際、SR 共振器に用いる鏡の反射率程度では $f_{|A_{12}+A_{22}|=0}$ と $f_{|A_{11}+A_{21}|=0}$ の値はほとんど同じである (図 3.12 参照)。OPO ゲインを増やせるのであれば左側のディップをより高周波数帯に移動させられる。

このように非線型光学結晶を用いれば従来の干渉計の構成をほとんど変えずに重力波検出器の高周波数帯の感度を改善させられる。

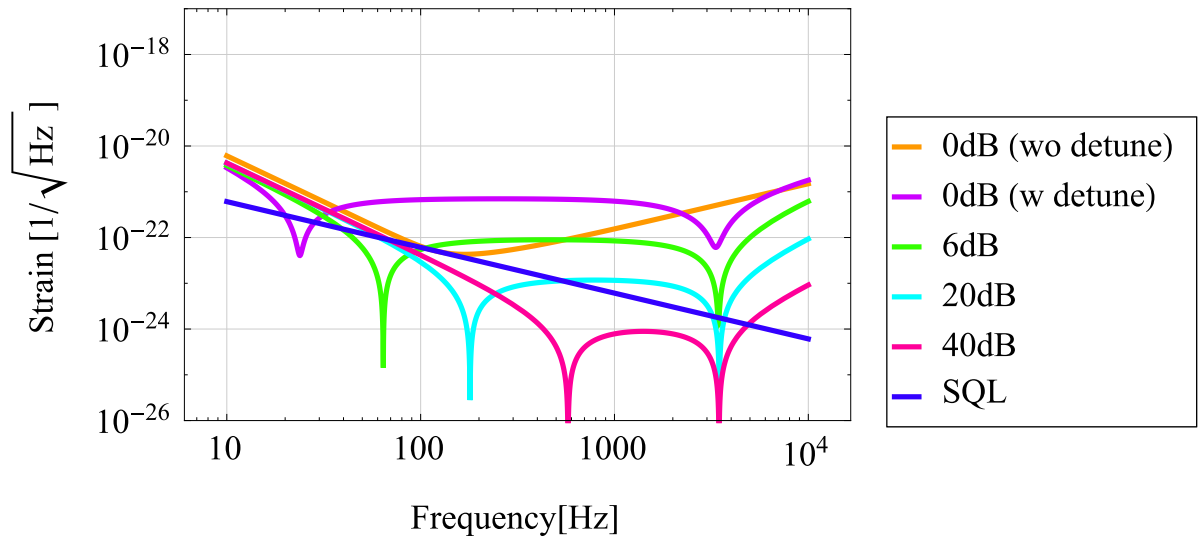


図 3.11: 非線型光学素子を挿入した重力波検出器の感度曲線

SR 共振器内に OPO を挿入し、さらにホモダイン角を 45deg に設定した。OPO のゲインと離調角を変更すると低周波数側のディップが高周波数移動に移動する様子が見て取れる。干渉計のパラメータは $L = 1200\text{m}$ 、 $R_s = 0.98$ 、 $m = 1\text{kg}$ 、 $P = 10^4\text{W}$ とし離調角は高周波数側のディップが一致するように調節した。

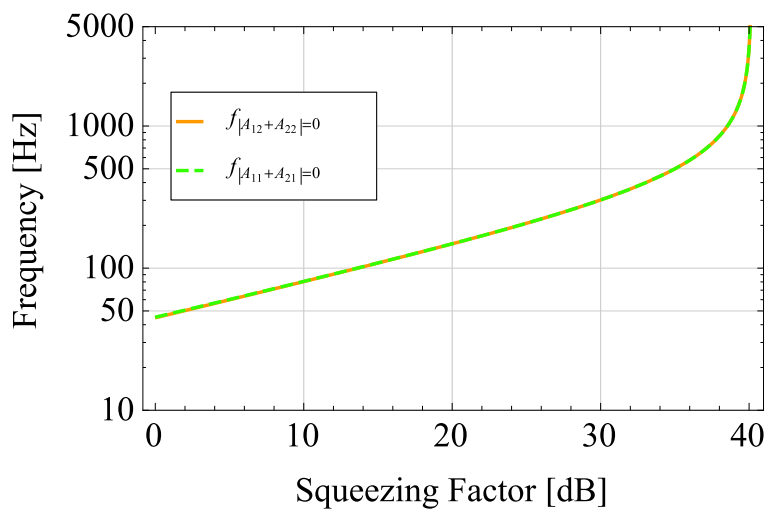


図 3.12: $f_{|A_{12}+A_{22}|=0}$ と $f_{|A_{11}+A_{21}|=0}$ の比較

両者の値に大きな違いはない。原理的には数 kHz まで左側のディップを移動させられるが右側のディップがそれを制限する。干渉計のパラメータは $L = 1200\text{m}$ 、 $R_s = 0.98$ 、 $m = 1\text{kg}$ 、 $P = 10^4\text{W}$ とし離調角は図 3.11 で示した OPO ゲインが 40dB のときの値を用いた。

第4章 実験系の設計

3章で離調と非線型光学結晶を用いた次世代重力波検出器の感度曲線を計算し、非線型光学効果を利用すれば高周波数帯であってもSQLを超えた差動変位検出が可能だと示した。実際に重力波検出器に用いるためにはSR共振器内で非線型光学効果を起こせるか、計算に用いたほどの精度で共振器を離調できるのかを検証しなければならない。本修士論文研究ではこれらの実験的検証を目標にした。本章でまず実験を理解する上で必要な理論をまとめ、続く5章で検証実験の結果についてまとめる。

4.1 負帰還制御

4.1.1 負帰還制御の一般論

光共振器や干渉計といった実験系を組むためには鏡の変位を波長以下まで制御する必要がある。一方で式(2.21)に示した通り地面はたえず振動しておりその振幅スペクトル密度は

$$\delta x(f) \sim 10^{-7} \times \left(\frac{1\text{Hz}}{f}\right)^2 \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

であった。本実験では1064nmのNd:YaGレーザーを用いており、0.1Hz以下の地面雑音の大きさは波長を上回る。このため鏡の変位を読み取り、それを打ち消すように鏡の位置を戻す必要がある。これを負帰還制御という。本節では負帰還制御の一般論を述べ続く4.2節で変位信号の取得法を説明する。

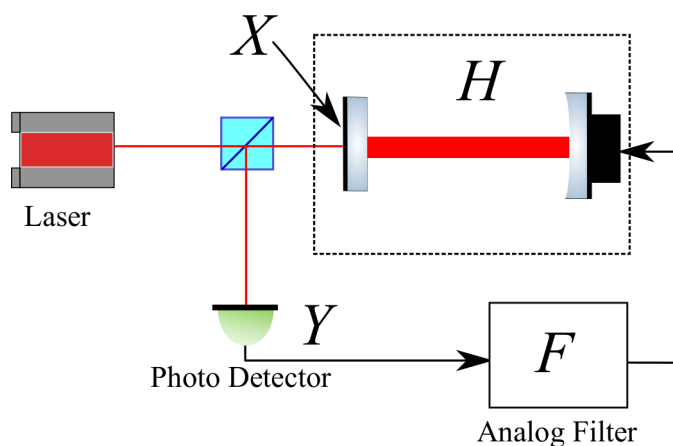


図 4.1: 負帰還制御のブロック図

負帰還制御を一般化した図。この図では H は光学系の伝達関数、 F は制御に用いるフィルターの伝達関数を示している。すなわち地面の振動 $X(\omega)$ が光学系を伝わり出力 $Y(\omega)$ に現れている。なお負帰還制御によって変位信号は再び光学系に返される。これにより実効的な入力 $X(\omega)$ は制御された場合とされない場合で異なる。 H 、 F はともに周波数空間の関数であり一般的には複素数である。

図 4.1 で負帰還制御のブロック図を示した。ここで H は光学系の伝達関数、 F は制御に用いるフィルターの伝

達関数を示している。伝達関数 $Z(\omega)$ とはある系における信号の入出力の関係である：

$$Y_{\text{out}}(\omega) = Z(\omega)X_{\text{in}}(\omega) \quad (4.1)$$

連続する 2 つの系の伝達関数は各々の伝達関数の積となる：

$$Y_{\text{out}}(\omega) = Z_{12}(\omega)X_{\text{in}}(\omega) = Z_2(\omega) \cdot Z_1(\omega)X_{\text{in}}(\omega) \quad (4.2)$$

以上を踏まえて図 4.1 の入力 X_{in} に対する出力 Y_{out} を求めると次式を得る：

$$Y_{\text{out}} = \frac{H}{1 + FH} X_{\text{in}} \quad (4.3)$$

FH をまとめて G と書き、これをオープンループゲイン (OLG) と呼ぶ。オープンループゲインが十分大きい周波数帯域では

$$Y_{\text{out}} \approx \frac{1}{F} X_{\text{in}} \quad (4.4)$$

となり出力信号は入力信号をフィルターの伝達関数で割った値となる。また被制御下では実効的な入力信号は次式となる：

$$X_{\text{actual, in}} = \frac{1}{1 + G} X_{\text{in}} \quad (4.5)$$

すなわち被制御下 ($|G| \gg 1$) では地面振動といった光学系を崩す雑音をオープンループゲイン分だけ小さくできる：

$$X_{\text{actual, in}} \approx \frac{1}{G} X_{\text{in}}, |G| \gg 1 \quad (4.6)$$

適切なオープンループゲインをもつ負帰還制御系を用いれば実効的な地面雑音を小さくできるので光共振器や干渉計を用いた実験が可能となる¹。

4.1.2 負帰還制御の安定性

光学系やフィルターの伝達関数の値は周波数に対し一定ではない。このためオープンループゲイン G の値も周波数に対して一定にはならない。オープンループゲインは一般には複素数であり次式で与えられる：

$$G(\omega) = |G(\omega)|e^{i\theta(\omega)} \quad (4.7)$$

$|G(\omega)| = 1$ を満たす周波数をユニティゲイン周波数 (Unity Gain Frequency) と呼び、被制御下と非制御下を分ける指標となる。またこの周波数でオープンループゲインの位相が π だけ遅れると制御が不安定となりユニティゲイン周波数で発振する。これは式 (4.5) よりユニティゲイン周波数で位相が π のとき

$$X_{\text{actual, in}} = \frac{1}{1 - 1} X_{\text{in}} = \frac{1}{\infty} X_{\text{in}} \quad (4.8)$$

となり実効的な入力信号が発散するためだ。

複素空間を図示する方法として Bode 線図がある。これはゲインと位相を分けてプロットしたグラフであり任意の周波数でのゲインを計算したり制御の安定性を議論する上で便利である。図 4.2 で 100Hz にカットオフ周波数をもつ一次のローパスフィルタ (式 (4.9)) の Bode 線図を示した。

$$F(f) = \frac{1}{1 + if/100[\text{Hz}]} \quad (4.9)$$

ローパスフィルタの位相は $f = 0\text{Hz}$ では 0 度であり、高周波数になるにつれ位相が遅れ $f \gg 1$ では $-\pi/2 (= -90)$ 度となる。図 4.2 はそれを視覚的に表現している。ユニティゲイン周波数での位相 θ が 180 度からどれくらい離れているかを位相余裕と呼び安定な制御ではこれを十分に取る必要がある。

¹ただし重力波信号のような取りたい信号も小さくなる (SN は変わらない)。

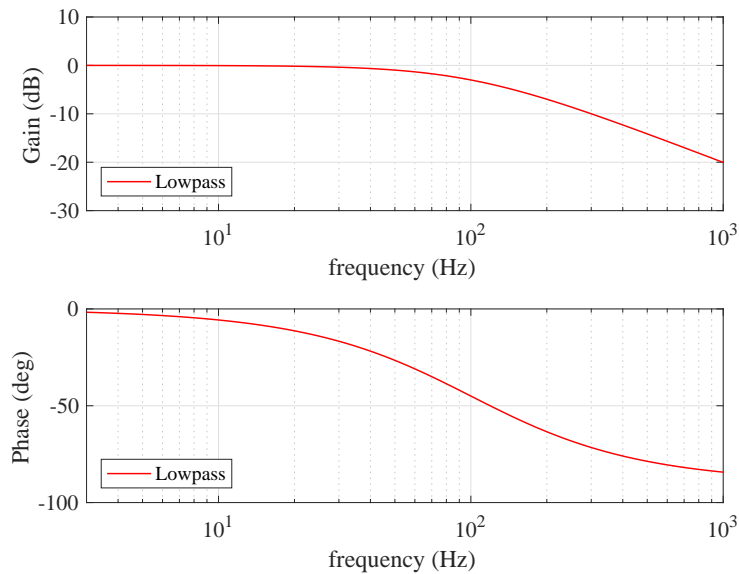


図 4.2: 一次のローパスフィルタの Bode 線図

100Hz にカットオフ周波数をもつゲイン 1 の一次のローパスフィルタの Bode 線図。上. ローパスフィルタのゲインをプロットした。ゲインは dB 表記 ($\text{dB} = 20 \log_{10} |F(f)|$) にしている。下. ローパスフィルタの位相をプロットした。位相は度数表記にしている。

4.1.3 負帰還制御の位相補償

光学系によってはユニティゲインで位相が 180 度回るのを避けられない。これは光学系の伝達関数自体に位相遅れが生じる (キャビティポール) 他に、鏡を動かすために用いるアクチュエータに位相遅れが発生するためだ。本実験ではアクチュエータに電圧をかけると伸び縮みする piezoelectric 素子を用いた。この piezoelectric 素子には浮遊容量があるためかけた電圧 V_{in} と変位 X_{PZT} の間の関係は一次のローパスフィルタと同じになる：

$$\delta X_{PZT}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega/\omega_c} V_{in}(\omega) \quad (4.10)$$

このような位相遅れによって系の位相余裕が減少し最悪の場合発振する。

位相遅れによる発振を防ぐためにはフィルタ回路のゲインやカットオフ周波数を変更する (図 4.3) 他に補償回路を加える方法がある。位相補償には位相進み補償と位相遅れ補償とがあり以下ではこの二例を説明する。

位相進み補償

位相進み補償はハイパスフィルタなどの位相を進める効果のある回路を用いて遅れた位相を戻す補償方法である。ただしハイパスフィルタを用いると高周波数帯でゲインが発散するので通常は 1 ゼロ・1 ポールフィルタを用いる：

$$F_{comp}(f) = \frac{1 + if/f_z}{1 + if/f_p} \quad (4.11)$$

ここでゼロの周波数を f_z 、ポールの周波数を f_p とおき、位相を進ませるために $f_z < f_p$ とし²。この補償方法では位相を戻せる分、高周波数帯のゲインが上がってしまう。このため振り子のような二次のローパスフィルタの挙動をする制御系に有効である。

²1 ポール 1 ゼロ回路の回路例は付録 C 参照。Michelson 干渉計の制御フィルタの二段目のフィルタがそれである。

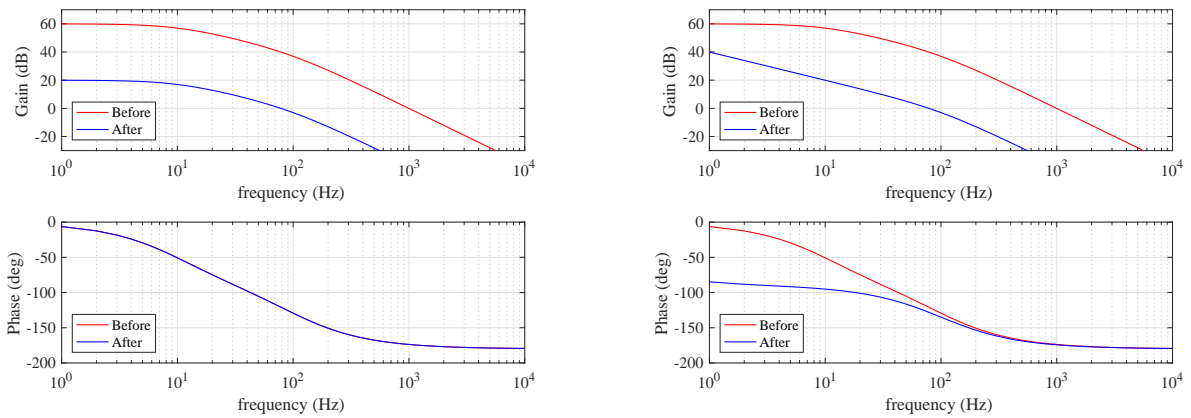


図 4.3: 左. ゲインを変更することで発振を防ぐ例、右. カットオフ周波数を変えることで発振を防ぐ例
いずれの場合も位相余裕が回復している。しかしユニティゲイン周波数以下でのゲインも減少しており系を安定化するために必要なゲインを得られない場合がある。

位相遅れ補償

位相遅れ補償は 1 ゼロ・1 ポール回路を用いてユニティゲイン周波数を低周波数側にシフト移動させる補償方法である。ゼロとポールの間の周波数で位相が遅れるのでこう呼ばれている。位相遅れ補償に用いる 1 ゼロ・1 ポール回路の伝達関数は

$$F_{\text{comp}}(f) = \frac{f_z}{f_p} \frac{1 + if/f_z}{1 + if/f_p} \quad (4.12)$$

である。ただし位相進み補償と異なり $f_z > f_p$ である。 $f \ll 1$ および $f \gg 1$ での位相の遅れは 0 度である一方でポールとゼロの間で一次のローパスフィルタのようにふるまう。このためゲインを落とすことができ、安定な制御が実現できる。図 4.4 では位相遅れ補償によるオープンループゲインの変化をプロットした。ゲインを落とすことでユニティゲインが移動し安定性条件を満たすようになる。本修士論文ではこちらの補償方法を主に利用した。

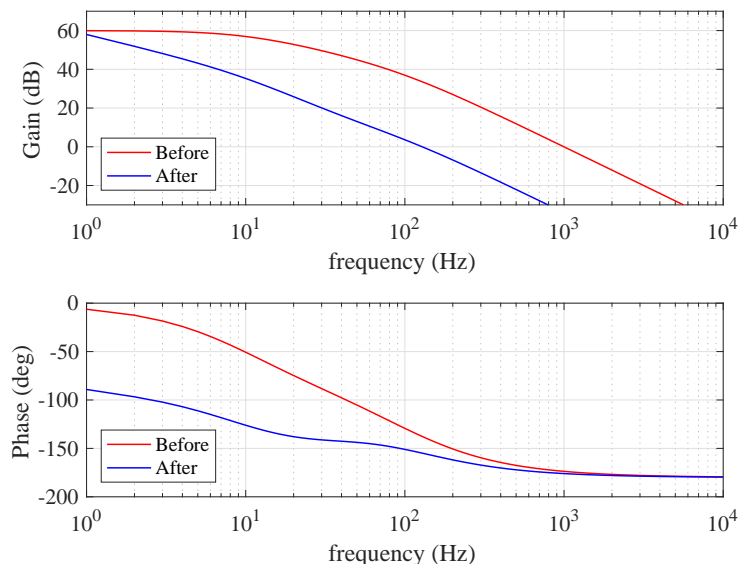


図 4.4: 位相遅れ補償前後の OLG

位相補償をおこなうことで制御の安定性が回復している。パラメータは $f_p = 0.1\text{Hz}$ 、 $f_z = 40\text{Hz}$ とした。またこれとは別にゲインを調整し 1Hz でのオープンループゲインを等しくした。

4.2 光学系における変位信号取得 (PDH 法)

干渉計や光共振器を制御するためには鏡の変位を読み取る必要がある。例えば光共振器の反射光強度を測れば、光共振器が共振状態かそうでないかを判断できる。しかし光の強度を測るだけでは鏡がどちらに動いたかは分からない。すなわち共振器の反射光強度は式 (1.59) から

$$P_r = \left| \frac{-r_F + r_E e^{i\phi}}{1 - r_F r_E e^{i\phi}} \right|^2 = \frac{r_F^2 + r_E^2 - 2r_F r_E \cos \phi}{1 - r_F^2 r_E^2 - 2r_F r_E \cos \phi} \quad (4.13)$$

となり鏡の変位 $\delta\phi$ に対し二次の応答となるので光の強度では負帰還制御が成り立たない。これは干渉計の制御でも同じである³。

鏡の変位の線型信号を取得するために開発されたのが Pound-Drever-Hall 法 (PDH 法) である。これはあらかじめ発生させたサイドバンドを参照光 (ローカルオシレータ) として使い、鏡の変位の情報を得る手法である。

4.2.1 位相変調

本実験ではサイドバンドを発生させるために EOM (Electro Optical Modulator) と呼ばれる位相変調器を用いた。EOM 結晶は印可電圧に応じて屈折率が変化する。これにより結晶の光路長が変わり、レーザーに位相変調がかかる。印可電圧によって EOM の光路長が $x(t) = X_0 \cos \omega_m t$ だけ変化したとすると、結晶を透過した電場 $E(t)$ は

$$E(t) = E_0 \exp\left(i\Omega t + i\Omega \frac{X_0 \cos \omega_m t}{c}\right) = E_0 e^{i(\Omega + m_m \cos \omega_m t)t} = E_0 e^{i\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_m) i^n e^{in\omega_m t} \quad (4.14)$$

となる。 $J_n(x)$ はベッセル関数である。なお ω_m は変調周波数、 m_m は変調指数と呼ばれ EOM の性能を表す指標の 1 つである。ベッセル関数は以下の等式が成り立つ：

$$J_{-n}(m_m) = (-1)^n J_n(m_m) \quad (4.15)$$

$$J_n(m_m) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{m_m}{2}\right)^n \quad (m_m \ll 1) \quad (4.16)$$

そこで変調指数が十分に小さいと仮定し、式 (4.14) を近似すると

$$E(t) = E_0 \left(J_0(m_m) e^{i\Omega t} + iJ_1(m_m) e^{i(\Omega + \omega_m)t} + iJ_1(m_m) e^{i(\Omega - \omega_m)t} \right)$$

改めて係数を定義し直し次式を得る：

$$E(t) = E_0 e^{i\Omega t} + E_1 e^{i(\Omega + \omega_m)t} + E_{-1} e^{i(\Omega - \omega_m)t} \quad (4.17)$$

この電場のパワーは

$$P = |E(t)|^2 = |E_0|^2 + |E_1|^2 + |E_{-1}|^2 + 2\Re \left[(E_0^* E_1 + E_0 E_{-1}^*) e^{i\omega_m t} \right] + 2\Re \left[E_1 E_{-1}^* e^{2i\omega_m t} \right] \quad (4.18)$$

となり、線型信号は $e^{i\omega_m t}$ に比例した項に現れる。実際には電場のパワーは光検出器上で電流となり、それを電圧に変換して測定する。いま、光検出器の効率が 1 とすると光検出器からの信号 $v(t)$ は

$$v(t) = |E_0|^2 + |E_1|^2 + |E_{-1}|^2 + 2\Re \left[(E_0^* E_1 + E_0 E_{-1}^*) e^{i\omega_m t} \right] + 2\Re \left[E_1 E_{-1}^* e^{2i\omega_m t} \right] \quad (4.19)$$

となる。

³ただし制御信号にオフセットを加える、レフルポートと AS ポートからとった光の強度を引き算するなど工夫をすれば負帰還制御は可能である。

4.2.2 復調

線型信号を含む $e^{i\omega_m t}$ に比例した成分を取り出すために復調をおこなう。復調するには位相変調に用いた発振波と同じ周波数の局部発振波 (Local Oscillator) を上で求めた光検出器からの信号 (4.19) に乗じればよい。図 4.5 で変調と復調を用いた実験系を図示した。局部発振波を位相変調器 (EOM) とかけ算器 (ミキサ) に入力している。一方、共振器からの反射光を光検出器で検出し、それをミキサの中で局部発振波に乗じている。

このとき、加えた変調と全く同じ位相をもつ発振波で復調する方法 ($\cos \omega_m t$ を用いる方法) と、90 度だけずらした発振波で復調する方法 ($\sin \omega_m t$ を用いる方法) の二通りがあり、それぞれ I phase (in phase) と Q Phase (quadrature phase) と呼ばれる。得られる信号は次式で与えられる：

$$v_I = \Re [E_0(E_1 + E_{-1})^*] , \text{ if LO} = \cos \omega_m t \quad (4.20)$$

$$v_Q = \Im [E_0(E_1 - E_{-1})^*] , \text{ if LO} = \sin \omega_m t \quad (4.21)$$

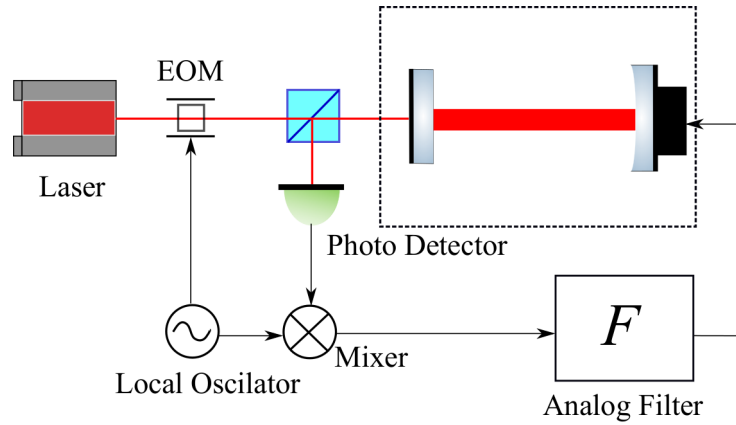


図 4.5: 変調および復調の模式図

レーザーはまず位相変調器 (EOM) に入射しそこで位相変調される。その後、共振器に入射しその反射光を光検出器で検出し電圧に変換される。検出した電圧をミキサ内部で局部発振波に乗じて復調し線型信号 (エラー信号) を得ている。

4.3 FP 共振器の制御

PDH 法を用いた FP 共振器の線型信号取得を考える。共振器長を L_m とし共振器のフロント鏡の反射率を r_F 、エンド鏡の反射率を r_E とする。式 (1.59)、式 (1.60) で FP 共振器の反射率 r_{cav} と透過率 t_{cav} を導いた：

$$r_{\text{cav}}(\Omega) = \frac{-r_F + r_E e^{\frac{2i\Omega L}{c}}}{1 - r_F r_E e^{\frac{2i\Omega L}{c}}}$$

$$t_{\text{cav}}(\Omega) = \frac{t_F t_E e^{\frac{i\Omega L}{c}}}{1 - r_F r_E e^{\frac{2i\Omega L}{c}}}$$

共振器にはサイドバンドを含む電場が入射したとする：

$$E(t) = E_0 e^{i\Omega t} + E_1 e^{i(\Omega + \omega_m)t} + E_{-1} e^{i(\Omega - \omega_m)t}$$

このとき反射光は：

$$E(t) = E_{r,0} e^{i\Omega t} + E_{r,1} e^{i(\Omega + \omega_m)t} + E_{r,-1} e^{i(\Omega - \omega_m)t}$$

であり、各電場の振幅は次式で与えられる：

$$E_{r,0} = \frac{-r_F + r_E e^{i\phi}}{1 - r_F r_E e^{i\phi}} E_0 \quad (4.22)$$

$$E_{r,1} = \frac{-r_F + r_E e^{i\phi + \frac{2i\omega_m L}{c}}}{1 - r_F r_E e^{i\phi + \frac{2i\omega_m L}{c}}} E_1 \quad (4.23)$$

$$E_{r,-1} = \frac{-r_F + r_E e^{i\phi - \frac{2i\omega_m L}{c}}}{1 - r_F r_E e^{i\phi - \frac{2i\omega_m L}{c}}} E_{-1} \quad (4.24)$$

ここで $\phi = 2L\Omega/c$ とおいた。サイドバンドの周波数はキャリア光に対して $\pm\omega_m$ だけシフトしており、その分共振器の反射率が変化している。

図 4.6 で式 (4.20) と式 (4.21) に従って計算した線型信号を図示した。I Phase で復調するか Q Phase で復調するかで線型信号の形が変化しており、適切な復調位相の選択が重要だとわかる。

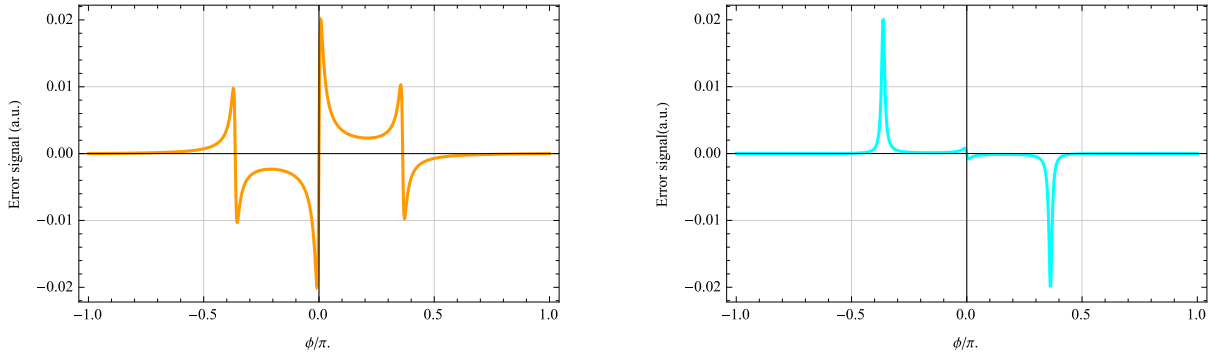


図 4.6: 左.I Phase で復調した際の線型信号、右.Q Phase で復調した際の線型信号

I Phase で復調するか、Q Phase で復調するかで線型信号の概形が異なり I Phase では共振器の共振付近で鋭い線型信号が得られているのに対し Q Phase では線型信号が小さい。共振周り以外で見られるピークはサイドバンドの共振である。パラメータは共振器長 1.2m とし変調周波数を 22.7MHz、変調指数を 0.01 とした。

4.4 Michelson 干渉計の制御

4.4.1 PDH 法を用いた Michelson 干渉計の線型信号取得

PDH 法を用いれば鏡の変位に対する線型信号が得られるので Michelson 干渉計の制御が可能となる。Michelson 干渉計にキャリア光 $E(t)$ が入射したとする：

$$E(t) = E_0 e^{i\Omega t}$$

マイケルソン干渉計の x 軸 y 軸方向に沿った基線長の長さを L_x 、 L_y とすると AS ポートに現れる電場 $E_{AS}(t)$ は

$$E_{AS}(t) = \frac{1}{2} E_0 e^{i\Omega t} \left(e^{2i\frac{\Omega L_y}{c}} - e^{2i\frac{\Omega L_x}{c}} \right) \quad (4.25)$$

ここで同相長 l と差動長 d を定義する：

$$l := L_x + L_y \quad (4.26)$$

$$d := -L_x + L_y \quad (4.27)$$

これを用いて式 (4.25) を書き直すと次式を得る：

$$E_{AS}(t) = iE_0 e^{i\Omega t} \exp\left(i\frac{\Omega l}{c}\right) \sin\left(\frac{\Omega d}{c}\right) \quad (4.28)$$

同様に RFL ポートでは

$$E_{\text{RFL}}(t) = E_0 e^{i\Omega t} \exp\left(i\frac{\Omega l}{c}\right) \cos\left(\frac{\Omega d}{c}\right) \quad (4.29)$$

となる。差動長が半波長の整数倍であれば AS ポートには電場が漏れ出ない(ダークフリンジ)。反対に RFL ポートには全ての電場が反射してくる。

次に入射電場がサイドバンドが入射したとする。

$$E_{\text{SB}}(t) = E_{\pm 1} e^{i(\Omega \pm \omega_m)t} \quad (4.30)$$

キャリア光と同様の計算が成り立つので AS 及び RFL ポートでのサイドバンドの電場は以下の通りとなる：

$$E_{\text{SB,AS}}(t) = iE_{\pm 1} e^{i(\Omega \pm \omega_m)t} \exp\left(i\frac{\Omega \pm \omega_m}{c} l\right) \sin\left(\frac{\Omega \pm \omega_m}{c} d\right) \quad (4.31)$$

$$E_{\text{SB,RFL}}(t) = E_{\pm 1} e^{i(\Omega \pm \omega_m)t} \exp\left(i\frac{\Omega \pm \omega_m}{c} l\right) \cos\left(\frac{\Omega \pm \omega_m}{c} d\right) \quad (4.32)$$

式 (4.20) と式 (4.21) を用い RFL ポートで取得される線型信号を計算すると

$$v_{\text{RFL,I}} = |E_0||E_1| \sin\left(\frac{\omega_m l}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega_m d}{c}\right) \sin\left(\frac{2\Omega d}{c}\right) \quad (4.33)$$

$$v_{\text{RFL,Q}} = |E_0||E_1| \cos\left(\frac{\omega_m l}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega_m d}{c}\right) \sin\left(\frac{2\Omega d}{c}\right) \quad (4.34)$$

全く同様にして AS ポートで取得される線型信号を計算すると次式を得る：

$$v_{\text{AS,I}} = -|E_0||E_1| \sin\left(\frac{\omega_m l}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega_m d}{c}\right) \sin\left(\frac{2\Omega d}{c}\right) \quad (4.35)$$

$$v_{\text{AS,Q}} = -|E_0||E_1| \cos\left(\frac{\omega_m l}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega_m d}{c}\right) \sin\left(\frac{2\Omega d}{c}\right) \quad (4.36)$$

符号は異なるが AS と RFL ポートで同じとなる。図 4.7 に Michelson 干渉計の RFL ポートにおける制御信号を図示した。

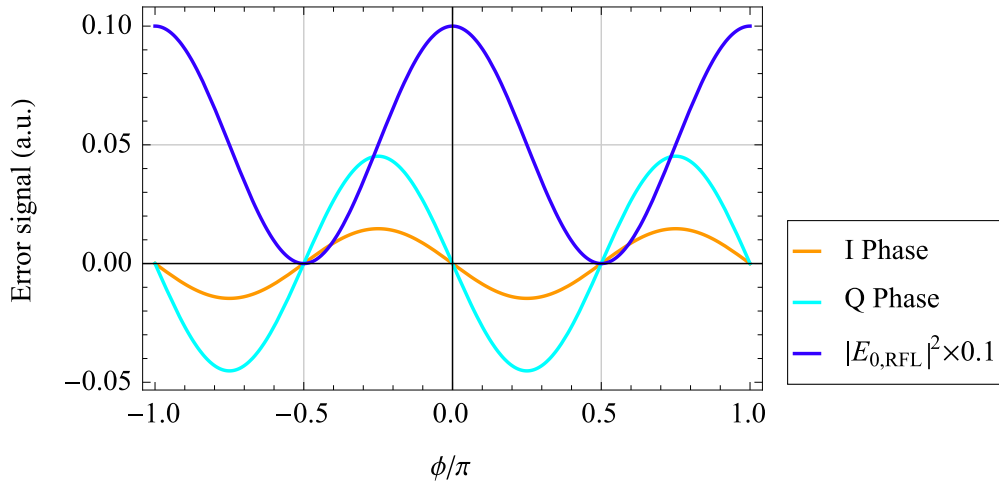


図 4.7: Michelson 干渉計の線型信号

Michelson 干渉計の RFL ポートで取得した線型信号を図示した。比較のため RFL ポートで取得したキャリア光も一緒に図示した。横軸は Michelson 干渉計のエンド鏡の差動変位を示している。RFL ポートのキャリア光が最大になるとき ($\phi/\pi = 0$) AS ポートでは最小になる。この状態をダークフリンジという。反対に RFL ポートでキャリア光が最小になるとき ($\phi/\pi = \pm 0.5$) AS ポートでは最大になる。これをブライトフリンジという。簡単のために入射光のパワーを 1W とし、変調周波数を 22.7MHz、変調指数を 0.01 とした。

4.4.2 アシンメトリー

差動長 d は干渉計をダークフリンジにするため、半波長の整数倍である必要がある。しかし半波長の整数倍という条件を崩さずに波長よりもずっと大きな値 (例えば数 cm から数 m) にもできる。こうすることでサイドバンドに対する Michelson 干渉計の反射率を変更させられる。すなわち仮にキャリアに対して Michelson 干渉計がダークフリンジに保たれているとしても式 (4.31) と式 (4.32) から

$$E_{SB,AS}(t) = iE_{\pm 1}e^{i(\Omega \pm \omega_m)t} \exp\left(i\frac{\Omega \pm \omega_m}{c}l\right) \sin\left(\frac{\pm \omega_m}{c}d\right) \quad (4.37)$$

$$E_{SB,RFL}(t) = E_{\pm 1}e^{i(\Omega \pm \omega_m)t} \exp\left(i\frac{\Omega \pm \omega_m}{c}l\right) \cos\left(\frac{\omega_m}{c}d\right) \quad (4.38)$$

が成り立ちこれはサイドバンドに対して Michelson 干渉計の反射率が $\cos(\omega_m d/c)$ となったのと同値であり、基線長の差 d を変えれば取得される信号の大きさを変えられる。このような信号を取得するためにつける基線長の非対称性をアシンメトリー (Schnupp Asymmetry) という。

4.5 SR 干渉計の制御

4.3 節で PDH 法を用いた FP 共振器の制御を、4.4 節で Michelson 干渉計の制御を述べた。SR 共振器も PDH 法を用いた制御が可能だが、工夫が必要である。本節では SR 共振器制御の問題点とその解決方法を述べる。

4.5.1 SR 共振器制御の問題点

重力波検出器では干渉計の差動長を干渉計の出力側に光が漏れでないように制御する (ダークフリンジ制御)。言い換えるとキャリア光に対する Michelson 干渉計の反射率が 1 となり共振器がアンダーカップリングとなる。このため SR 共振器の内部にキャリアが入れず、SR 共振器長の情報を取得できないという問題があった (図 4.8)。

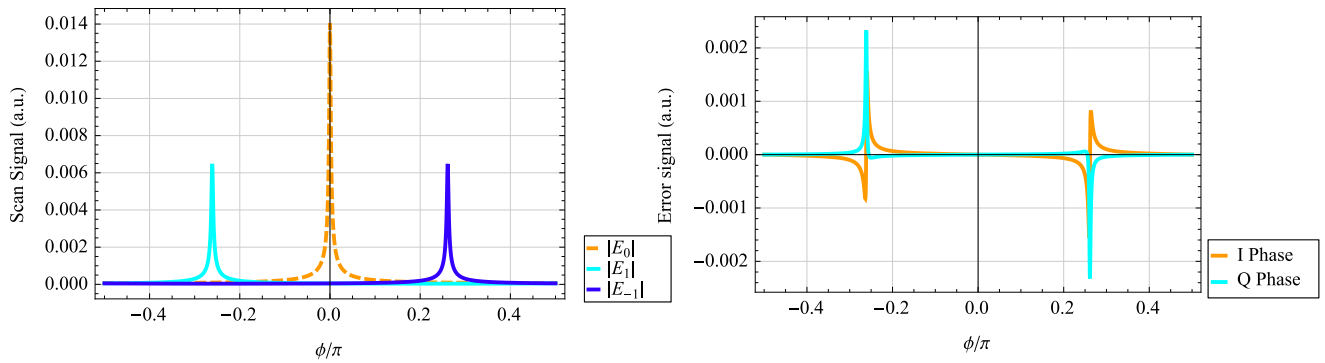


図 4.8: SR 共振器の透過光と SR 共振器の線型信号

左.Michelson 干渉計をダークフリンジにした状態での SR 共振器の透過光。キャリア光は Michelson 干渉計を透過できないので点線で表した。右.Michelson 干渉計をダークフリンジにした状態での SR 共振器の線型信号。SR 共振器の内部にキャリアが不在のため共振周りで線型信号が取得できていない。なお I Phase ではサイドバンドの共振周りでは線型信号が得られている。

4.5.2 サイドバンドの変調周波数を用いた解決方法

図 4.8 から分かるようにサイドバンドの共振では線型信号が取れる。よって SR 共振器長を調整しサイドバンドを共振させられれば SR 鏡の変位に対する線型信号が得られる。サイドバンドを SR 共振器内で共振させるには変調周波数を共振器の FSR に一致させればよい：

$$f_m = \frac{c}{2l_s} \quad (4.39)$$

SR 共振器長をテーブルトップ実験 (5 章で述べる) と同じ 1.725m とすると

$$f_m = \frac{c}{2l_s} \approx 86.95 \text{ [MHz]} \quad (4.40)$$

となる。変調周波数の変化と線型信号の関係を図 4.9 に示した。サイドバンドが共振器内で共振するよう変調周波数を調整すれば共振点周りで線型信号が得られる。

しかし変調周波数が高いと光検出器の作成が難しいという問題が発生する。式 (4.19) から線型信号を得るためには光検出器で $e^{\omega_m t}$ に比例する項を検波する必要がある。実験では効率的な信号検出のために共振回路を組み込んだ光検出器を用いたが、変調周波数が高くなるにつれ共振回路の作成が難しくなる。

また SR 共振器長を長くすれば FSR を小さくでき変調周波数を抑えられる。実際、共振器長が 10m の SR 共振器を作成すれば変調周波数は 15MHz となり光検出器の作成が容易となる。しかしテーブルトップ実験ではスペースに限りがあり難しい。

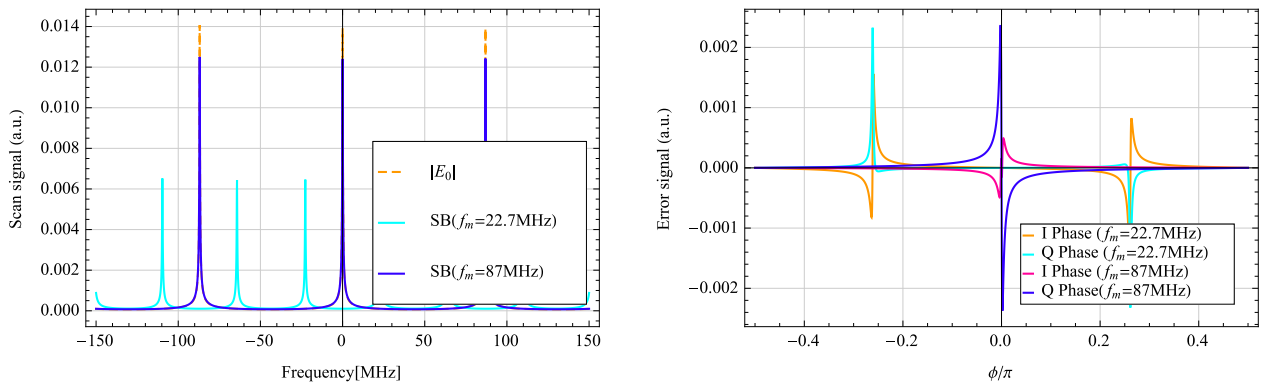


図 4.9: 変調周波数と RFL ポートで取得した線型信号の関係

左. キャリア光とサイドバンドの共振器に対する応答。横軸はキャリア光の周波数を中心とした周波数である。変調周波数を変えることで共振器内でサイドバンドが共振する様子が見て取れる。右. 変調周波数を変えた時の線型信号の変化。サイドバンドを共振器内で共振させられれば、キャリア光の共振点付近で線型信号が得られる。パラメータは SR 共振器長を 1.725m としている。

4.5.3 サブキャリアを用いた解決方法

サイドバンドの変調周波数を変更するのではなく、AOM(Acousto Optical Modulator) を用いて周波数を変更した別のキャリア (サブキャリア) を使い線形信号を得るという方法がある (AOM については 5.3 節を参照)。式 (4.38) から干渉計の腕にアシンメトリが存在すると、 ω_{aom} だけ周波数がシフトしたサブキャリアに対する干渉計の反射率は

$$r_{\text{MI}} = \exp\left(i\frac{\Omega + \omega_{\text{aom}}}{c}l\right) \cos\left(\frac{\omega_{\text{aom}}}{c}d\right) \quad (4.41)$$

よって Michelson 干渉計がキャリア光に対しダークフリンジだったとしても、サブキャリアは Michelson 干渉計を透過し SR 共振器内に侵入できる。

図 4.10 に実験系の模式図を示した。PBS(偏光ビームスプリッタ) を用いて光源の一部を取り出し AOM に入射させ周波数を変えたのち、再度 PBS を用いてキャリア光に合流させている。 f_{aom} を SR 共振器の FSR に設定すれば SR 共振器内でサブキャリアが共振するので、EOM で発生したサイドバンドと合わせれば SR 共振器の制御が可能となる。

図 4.11 でサブキャリアを用いた際に得られる線型信号を図示した。キャリア光の共振周りで線型信号が得られており、SR 共振器の制御が可能である。

一方、この制御方法では異なる偏光の光を同一共振器内で共振させる必要がある。FP 共振器のような直線型の共振器ではレーザー光が鏡に垂直に入射するため偏光の違いは問題にならない。しかし 4.7 節で説明するようなりング型の共振器や基線長をアライメントのために折り返し鏡を使用した共振器では、レーザー光が鏡に対し垂直に入射しないので鏡表面の境界条件により S 偏光と P 偏光で位相差と反射率差が生じる。このため異なる偏光をもつ光を同時に共振させられない⁴。本修士論文でおこなったテーブルトップ実験では異なる偏光の間で発生する位相差を AOM の周波数シフトで補償した。詳しくは 5.3 節を参照とする。

⁴この事実を積極的に用いて共振器を制御する方法が Hansch-Couillaud 法である。共振しない偏光を参照光として用い共振器の変位信号を得る。

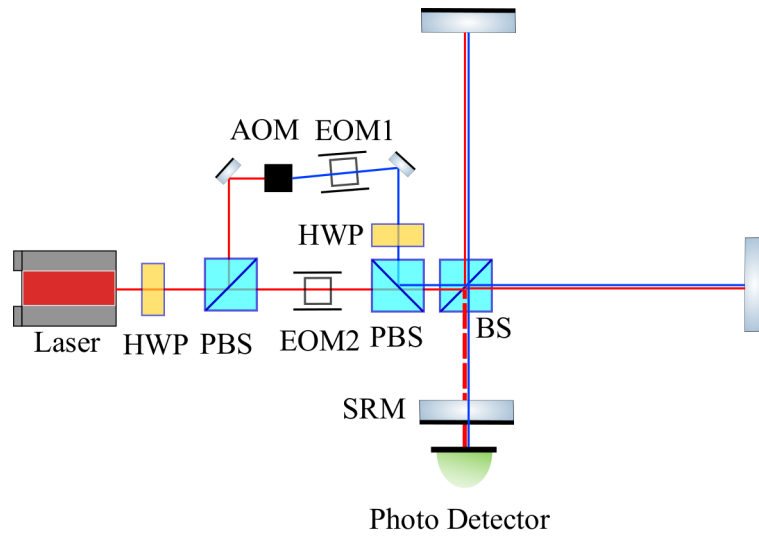


図 4.10: サブキャリアを用いた実験系

光源から出た光を PBS を用いて分離し、AOM、EOM1 の順に入射させている。これによりキャリアに対して f_{aom} Hz だけ周波数がシフトしたサブキャリアと、その両側に周波数 $\pm f_m$ のサイドバンドが生成される。EOM を出た光は PBS を用いて再度メインの光路に合流させている。PBS は S 偏光を反射し P 偏光を透過させる結晶であるからその手前に 1/2 波長板 (HWP) を置きサブキャリアのパワーを調整している。なお EOM2 はキャリアの周波数変調に用いている。

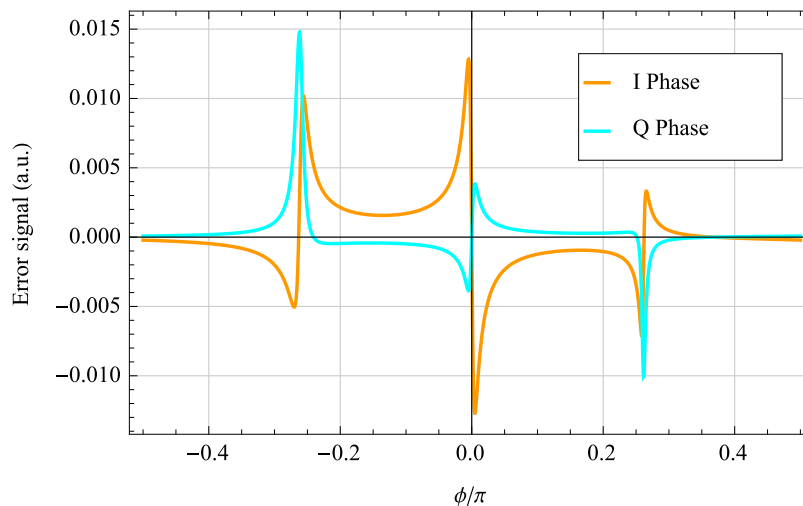


図 4.11: サブキャリアを用いた際に RFL ポートで取得される線型信号

パラメータは $l_s = 1.725\text{m}$ 、 $f_{\text{aom}} = 86.95\text{MHz}$ とし図 4.10 で AOM 直後に置かれた EOM の変調周波数を 15MHz とした。またアシンメトリーを 11cm とした。

4.5.4 SR 共振器が共振しているときの干渉計制御の問題点

サブキャリアを用いれば SR 共振器を制御できる。あとは Michelson 干渉計の差動変位を制御すれば SR 干渉計を制御できるが以下の問題が発生する：

- SR 共振器の共振状態によっては Michelson 干渉計の差動変位の信号が得られない
- Michelson 干渉計からの線型信号がダークフリンジ以外で最大になる

図 4.12 で SR 共振器が共振しているときの Michelson 干渉計の差動変位に対する線型信号を示した。SR 共振器が無い場合はブライトフリンジとダークフリンジでの線型信号の大きさが同じで傾きが異なっている一方、SR 共振器があるとブライトフリンジでの線型信号はダークフリンジでの線型信号にくらべ大きくなり、その傾きは一致している。このためダークフリンジでは安定な制御もブライトフリンジではゲインが大きすぎて不安定になる。すなわち式 (4.5) で求めた $G = FH$ が大きくなり位相余裕がなくなる。このような制御系では制御への引き込みが難しい。

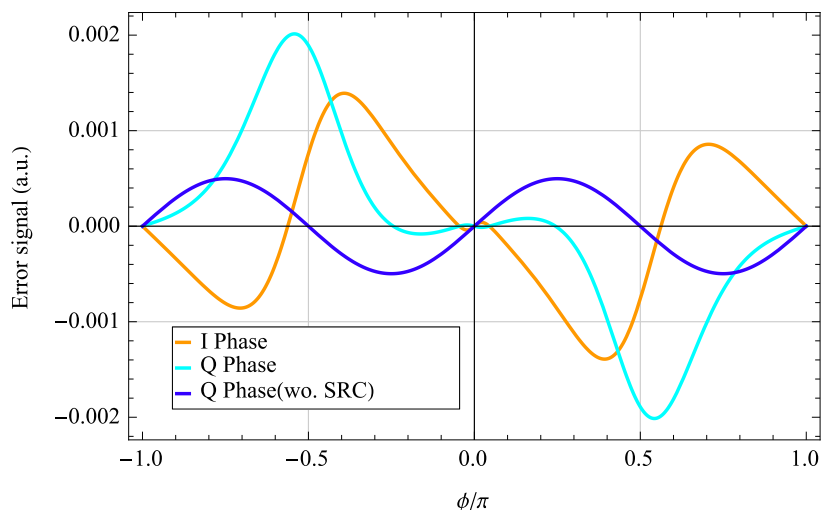


図 4.12: RFL ポートで取得した SR 干渉計の線型信号

SR 共振器が無い場合に比べ SR 共振器がある場合はブライトフリンジ ($\phi/\pi = 0.5$) 付近での線型信号がダークフリンジ ($\phi = 0$) よりも大きくなっている。またこのときの線型信号の傾きがダークフリンジでの傾きに一致している。

AS ポートでも同様な問題が発生する。図 4.13 で SR 共振器の共振状態と AS ポートで取得される線型信号の関係を図示した。SR 共振器が共振状態では復調位相を I Phase にすることでダークフリンジ周りの線型信号が取得できる。一方で SR 共振器長が共振からずれるとダークフリンジ周りの線型信号は消失し、ブライトフリンジ周りの線型信号が大きくなる。これにより RFL ポートのときと同様に制御が不安定になる。

この問題を解決するために RFL ポートで取得した線型信号と AS ポートで取得した線型信号を足し合わせた上で鏡にフィードバックした。図 4.14 に実際にフィードバックした線型信号の計算結果を図示した。線型信号は次式で計算した：

$$v_{\text{error}} = 100v_{\text{I,AS}} + v_{\text{I,RFL}} + v_{\text{I,RFL}} \quad (4.42)$$

図 4.13 で問題になったブライトフリンジ周りの線型信号が消失しており SR 共振器を共振に引き込むまでの制御の安定性が確保されている。

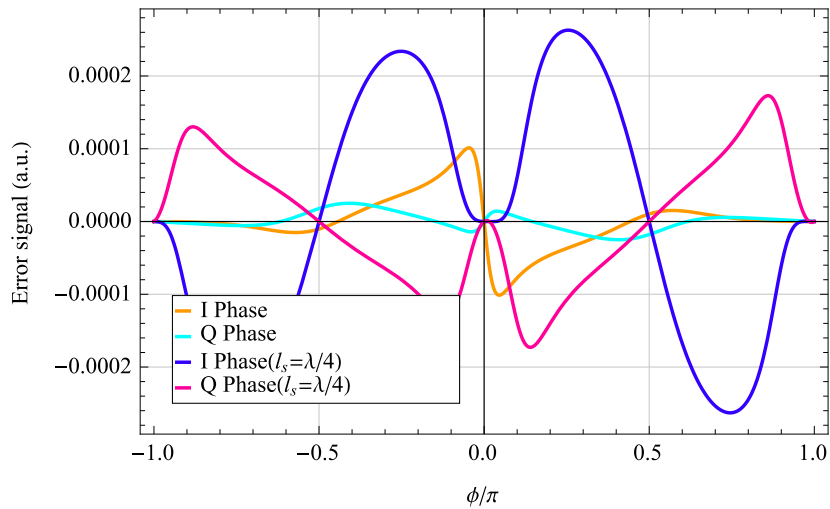


図 4.13: AS ポートで取得した SR 干渉計の線型信号

SR 共振器が共振していれば I Phase でダークフリンジ ($\phi/\pi = 0$) 周りの線型信号が得られる。しかし SR 共振器が共振以外では線型信号の形が崩れダークフリンジ周り以外の線型信号がダークフリンジ周りの線型信号より大きくなり、さらに傾きも一致する。

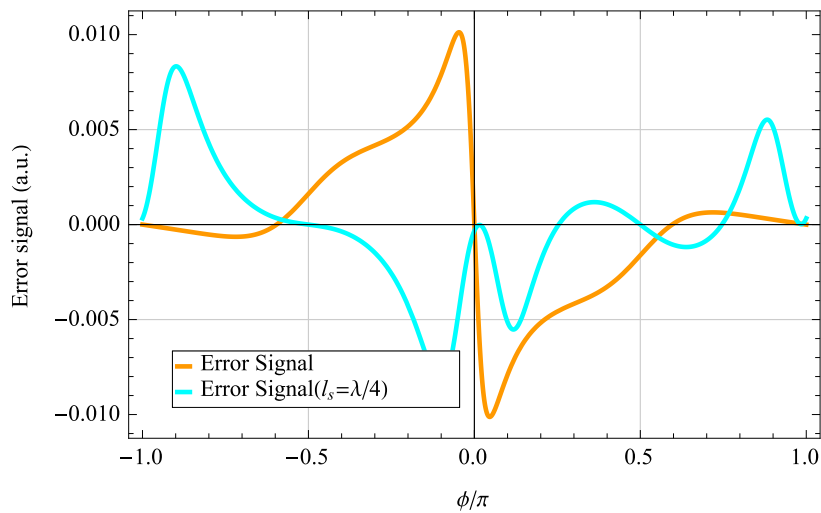


図 4.14: 加算器を用いて作成した SR 干渉計の制御信号

各ポートで取得した制御信号を足し合わせた結果。計算は式 (4.42) に従った。SR 共振器が共振では Michelson 干渉計のダークフリンジ ($\phi/\pi = 0$) 周りで線型信号が得られている。また信号を足し合わせたために SR 共振器が共振から外れた際に問題になったブライトフリンジ周りの大きな線型信号が消失しており、制御に引き込まれるまでの安定性が確保されている。

4.6 干渉計の設計

以上を踏まえて干渉計の設計をおこなった。まず SR 共振器内でキャリア光とサブキャリア光を同時共振させる必要がある。本研究で使用した AOM の周波数シフト範囲は 85MHz から 135MHz であり、ここから SR 共振器長の範囲が定まる：

$$85 [\text{Hz}] \leq f_{\text{aom}} \leq 130 [\text{Hz}] \Rightarrow 1.11 [\text{m}] \leq l_s \leq 1.76 [\text{m}] \quad (4.43)$$

なお SR 共振器内には OPO を組むスペースが必要である。特に OPO 結晶内では増幅効率を高めるためビームを絞る必要があり、結晶自体もオープン内に設置する必要がある。このため SR 共振器長はできるだけ長い方が良い。

次に Michelson 干渉計のアシンメトリに対する条件がある。サブキャリアに対して SR 共振器がアンダーカップリングになってはならない：

$$r_s \geq \cos\left(\frac{\omega_{\text{aom}}d}{c}\right) \quad (4.44)$$

$\omega_{\text{aom}}d/c \ll 1$ を用いて近似すると、

$$d \geq \frac{c}{\omega_{\text{aom}}} \sqrt{2(1 - r_s)} = 7.8 [\text{cm}] \quad (4.45)$$

となる。

最後に入手可能な鏡の曲率等を考慮にいれ SR 干渉計の基本的なパラメータを以下の通りに定めた。なお共振器のデザイン (特に鏡の曲率選定) に関しては 4.9 節で説明する。

パラメータ名	略称	値	条件
AOM 周波数	f_{aom}	87[MHz]	$85[\text{MHz}] \leq f_{\text{aom}} \leq 135[\text{MHz}]$
変調周波数 1	$f_{m,1}$	22.7[MHz]	入手可能か
変調周波数 2	$f_{m,2}$	15[MHz]	入手可能か
差動長	d	0.11[m]	$d \geq 0.078[\text{m}]$
同相長	l	0.66[m]	$l_s := l/2 + l_{\text{BS to SRM}}$ を考慮
SR 長	l_s	1.725[m]	$1.11[\text{m}] \leq l_s \leq 1.76[\text{m}]$
SR 鏡の反射率	R_s	0.98	入手可能か

表 4.1: SR 干渉計の基本パラメータ

4.7 第二高調波の作成 (SHG)

非線型光学結晶を駆動するためには結晶にエネルギーを供給するポンプ光が必要である (4.8 節参照)。ポンプ光は増幅したい光とコヒーレントでかつ半分の波長をもつ光でなければならない。このような光を生成する機構を SHG(Second Harmonic Generation) と呼ぶ。本節では SHG の原理について述べる。なお非線型光学効果の原理に関しては参考文献 [13] による。

4.7.1 非線型光学効果

一般に媒質中に電場 E が入射すると、電場 E に比例した分極 P が発生する：

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} \quad (4.46)$$

χ は電気感受率とよばれる物理量である。よって物質内部の電束密度 D は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi^{(1)}) \mathbf{E} \quad (4.47)$$

となり物質中の誘電率

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi^{(1)}) \quad (4.48)$$

を得る。

強誘電体物質に強電場をかけると式 (4.46) の比例関係が満たされなくなり、より高次の電場に比例した分極が発生する：

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\chi^{(1)}\mathbf{E} + \chi^{(2)}\mathbf{E}^2 + \chi^{(3)}\mathbf{E}^3 + \dots) \quad (4.49)$$

式 (4.46) を線型分極と呼ぶのに対し、より高次の電場に比例した分極を非線型分極と呼ぶ。以降では簡単化のため非線型分極は二次までとし一軸方向のみに注目する：

$$P = P^L + P^{NL} \quad (4.50)$$

$$P^L = \epsilon_0\chi^{(1)}E \quad (4.51)$$

$$P^{NL} = \epsilon_0\chi^{(2)}E^2 \quad (4.52)$$

角周波数 ω の十分強い電場 $E(t) = E_0 \cos \omega t$ が入射したとする。このとき発生する非線型分極 P^{NL} は式 (4.52) より

$$P^{NL}(t) = \frac{\epsilon_0}{2}\chi^{(2)}E_0(\cos 2\omega t + 1) \quad (4.53)$$

よって誘電体中では元の電場に対して二倍の角振動数をもつ分極電場が励起される。これを第二高調波 (Second Harmonic) とよぶ。 $\cos(2\omega t)$ に比例係数 d は非線型光学係数 (nonlinear optical coefficient) と呼ばれ、物質の非線型光学効果を表す 1 つの指標となる：

$$d := \frac{1}{2}\epsilon_0\chi^{(2)} \quad (4.54)$$

4.7.2 非線型光学媒質中の電磁波の伝搬と位相整合条件

非線型光学媒質中での電磁波の伝搬を考える。媒質中の Maxwell 方程式は式 (3.1) から式 (3.4) であたえられる：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.58)$$

ここで真電荷が存在しないとし $\rho = 0$ 、 $j = 0$ とおいた。また二次の非線型分極が発生するので電束密度 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \epsilon_0\chi^{(2)}\mathbf{E}^2 = \epsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}^{NL} \quad (4.59)$$

である。式 (4.55) から式 (4.58) を用いて媒質中を伝搬する電場の方程式を求めると

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2} \quad (4.60)$$

が得られる。簡単化のため電場および非線型分極が z 軸方向のみに値をもつとする：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \epsilon\mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P^{NL}}{\partial t^2} \quad (4.61)$$

非線型分極および媒質中の電場が次式で表されたとする：

$$P^{NL}(z, t) = \frac{1}{2}P^{NL}(z)e^{i(\omega t - k_p z)} + \text{c.c} \quad (4.62)$$

$$E(z, t) = \frac{1}{2} E(z) e^{i(\omega t - k_r z)} + \text{c.c} \quad (4.63)$$

二次の非線型分極がない場合 ($p^{\text{NL}} = 0$) に $E(z, t) = E(0) \exp(i(\omega t - k_r z))$ となるには分散関係

$$k_r^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2 \quad (4.64)$$

が満たされる必要がある。さらに位置 z に対する電場振幅の変化があまり大きくないという近似 (緩包絡波近似)

$$\left| \frac{d^2 E(z)}{dz^2} \right| \ll \left| k_r \frac{dE(z)}{dz} \right| \quad (4.65)$$

をすると、方程式 (4.61) は

$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{i\mu_0 \omega^2}{2k_r} p^{\text{NL}}(z) \exp(i\Delta k z) \quad (4.66)$$

$$\Delta k := k_p - k_r \quad (4.67)$$

となる。非線型誘電分極が位置によらないと近似し ($p^{\text{NL}}(z) = p^{\text{NL}}$)、さらに境界条件 $A(0) = 0$ を考慮すると誘電体端における電場の振幅 $E(L)$ は

$$E(L) = \frac{i\mu_0 \omega^2 p^{\text{NL}} L}{2k_r} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) \exp\left(\frac{i\Delta k L}{2}\right) \quad (4.68)$$

となる。ここで L は結晶長である。 $\text{sinc}(x)$ は $x = 0$ で最大値をとり幅 π を持つ関数である。式 (4.66) で $\Delta k = 0$ であれば結晶長 L に比例して媒質中の電場の振幅 E が増加する。反対に $\Delta k \neq 0$ であれば媒質中の電場は増減を周期的に繰り返す。

$\Delta k = 0$ を位相整合条件といい、効率的に非線型光学効果を起こさせるにはこの条件が満たされている必要がある。図 4.15 に位相整合条件が満たされた場合と満たされない場合の媒質中の電場の振幅を図示した。なお、 $\Delta k \neq 0$ で電場が減少に転じる距離 l_c をコヒーレント長と呼ぶ：

$$l_c = \frac{\pi}{|\Delta k|} \quad (4.69)$$

これは l_c までは発生した電場の位相がそろい互いに強め合うと解釈されるためだ。

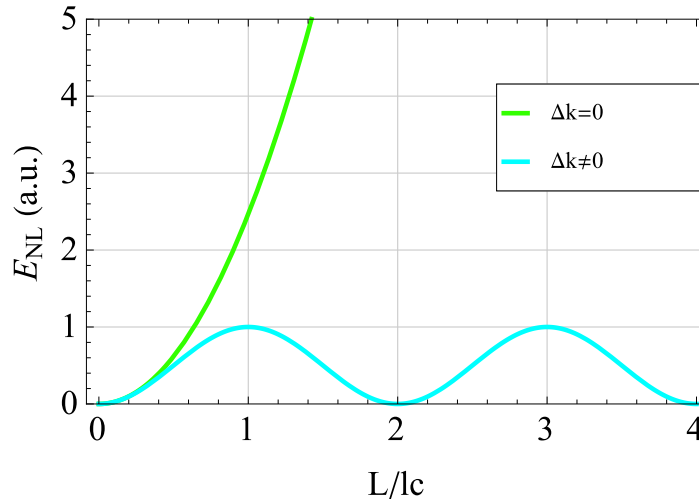


図 4.15: 位相整合と非線型光学媒質中で発生する電場の振幅の関係

$\Delta k = 0$ の場合と $\Delta k \neq 0$ の場合の非線型媒質中の $|E(L)|^2$ を図示した。横軸は $\pi/|\Delta k|$ で規格化した。 $\Delta k = 0$ では電場が単調に増加するのに対し、 $\Delta k \neq 0$ では周期的に増減を繰り返す。

4.7.3 第二高調波の生成条件

第二高調波の生成に必要な条件をまとめる。基本波の電場を

$$E_1(z, t) = \frac{1}{2} E_1(z) e^{i(\omega t - k_1 z)} + c.c. \quad (4.70)$$

とおく。非線型分極のうち角周波数 2ω の成分は式 (4.53) から

$$P^{NL}(z, t) = \frac{d}{2} E_1^2(z) e^{2i\omega t - 2ik_1 z} + c.c. \quad (4.71)$$

となる。二次の非線型分極によって発生する角周波数 2ω の電場を

$$E_2(z, t) = \frac{1}{2} E_2(z) e^{2i\omega t - ik_2 z} + c.c. \quad (4.72)$$

とおくと第二高調波の振幅 $E_2(z)$ は式 (4.66) より

$$\frac{dE_2(z)}{dz} = \frac{i\mu_0(2\omega)^2}{2k_2} dE_1^2(z) \exp(i\Delta k z) \quad (4.73)$$

の解となる。ここで Δk は次式を満たす：

$$\Delta k = k_p - k_r = 2k_1 - k_2 \quad (4.74)$$

第二高調波の影響が少ない場合は $E_1(z)$ の位置依存性が小さくなるので $E_1(z) = E_1(0)$ と近似できる。よって、式 (4.73) を積分すると

$$E_2(z) = \frac{2i\mu_0\omega^2 z}{k_2} dE_1^2(0) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k z}{2}\right) \exp\left(\frac{i\Delta k z}{2}\right) \quad (4.75)$$

が得られる。ゆえに第二高調波のパワー I_2 は

$$I_2 \propto |E_2(z)|^2 \propto I_1^2 z^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k z}{2}\right) \quad (4.76)$$

となる。すなわち強い第二高調波を得るためには、結晶長 L はコヒーレント長 l_c よりも短い位相整合条件 $\Delta k = 0$ が満たされている必要がある。

4.7.4 第二高調波に対する位相整合条件

次に位相整合条件を考える。媒質中の電場の波数は媒質の屈折率を用いて以下のように書ける：

$$k_1 = n(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (4.77)$$

$$k_2 = n(2\omega) \frac{2\omega}{c} \quad (4.78)$$

よって Δk は次式となる：

$$\Delta k = 2k_1 - k_2 = \frac{2\omega}{c} (n(\omega) - n(2\omega)) \quad (4.79)$$

すなわち位相整合条件を満足するには、媒質中の基本波の屈折率と第二高調波の屈折率が一致する必要がある：

$$\Delta k = 0 \Rightarrow n(\omega) - n(2\omega) = 0 \quad (4.80)$$

ただし屈折率は周波数依存性があり、SHG に用いるような透明な物質では $n(2\omega) > n(\omega)$ (正常分散) となり、このままでは位相整合条件が満たされない。

複屈折物質を用いた位相整合

簡単のために結晶が一軸結晶だと仮定し、その軸を c 軸と呼ぶ。結晶軸に対し角度 θ で電場が入射したとする。このとき偏光成分を c 軸に垂直な面と c に平行な面に分解できる。 c 軸に垂直な電場に対する屈折率は入射角 θ によらない。このような光線を常光線 (ordinary wave) と呼ぶ。これに対しもう一方を異常光線 (extraordinary wave) と呼ぶ。それぞれの屈折率を $n_o(\theta)$ 、 $n_e(\theta)$ とすると

$$n_o(\theta, \omega) = n_o(\omega) \quad (4.81)$$

$$\frac{1}{n_e^2(\theta, \omega)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2(\omega)} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2(\omega)} \quad (4.82)$$

を満たす。 n_o と n_e の大小によって、 $n_e > n_o$ の場合を正の複屈折性、 $n_e < n_o$ の場合を負の複屈折性という。

$n_e > n_o$ の場合は入射角によっては

$$n_e(\theta, \omega) = n_o(\theta, 2\omega) \quad (4.83)$$

とできる。このときの入射角 θ は次式で与えられる：

$$\sin^2 \theta = \frac{n_o^2(\omega) - n_o^2(2\omega)}{n_o^2(\omega) - n_e^2(\omega)} \left(\frac{n_e(\omega)}{n_o(2\omega)} \right)^2 \quad (4.84)$$

反対に $n_e < n_o$ の場合は入射角 θ によっては

$$n_o(\theta, \omega) = n_e(\theta, 2\omega) \quad (4.85)$$

とできる。このときの入射角 θ は次式で与えられる：

$$\sin^2 \theta = \frac{n_o^2(2\omega) - n_o^2(\omega)}{n_o^2(2\omega) - n_e^2(2\omega)} \left(\frac{n_e(2\omega)}{n_o(\omega)} \right)^2 \quad (4.86)$$

すなわち入射角を調整すると、媒質が正の複屈折物質のときは基本波として異常光線の偏光をもつ光を入射させれば常光線の偏光をもつ第二高調波が、媒質を負の複屈折物質のときは基本波に常光線もつ光を入射させれば異常光線の偏光をもつ第二高調波が発生する⁵。上で述べた例は結晶中の光の進行方向による位相整合であり、角度位相整合と呼ばれる。このほかにも温度による屈折率の変化を利用した温度位相整合もある。

なお位相整合条件は

$$\hbar k_1 + \hbar k_1 = \hbar k_2 \quad (4.87)$$

から光子の運動量保存則に対応している。

分極反転構造を用いた位相整合

分極反転構造を用いた擬似的な位相整合法もある。位相整合条件が満たされない場合に強い第二高調波を得られない理由は、コヒーレント長で第二高調波の位相が反転し発生した第二高調波どうしが弱め合ってしまうからであった (図 4.15)。そこで周期的に結晶の分極を反転させ位相の反転を解消し強い第二高調波を得る手法が考案された。これが疑似位相整合法 (OPM) である。

疑似位相整合法ではコヒーレント長ごとに結晶の分極を反転させ擬似的に位相整合条件を満たさせる。これにより第二高調波どうしが弱め合わなくなるので強い第二高調波が得られる。なお実験で使用する際には基本波に対して反転分極の周期を最適値にするために結晶自体をオープンで加熱し、結晶をわずかに膨張させる。

本修士論文でおこなった実験では KTP 結晶に分極反転構造 (Periodically Poled structure) を組み込んだ PP-KTP を使用した。

⁵なお常光線・異常光線の両方の偏光成分をもつ基本波を用いておこなう位相整合もある。

4.7.5 第二高調波強度の理論計算

強い第二高調波を得るためには強い基本波を入射させる必要がある。このため一般的に SHG では共振器の中に非線型光学結晶を挿入する。これにより実効的に基本波の強度を上げることができる。以下では共振器内で発生する第二高調波の強度を計算する。

第二高調波の変換効率を α とする。このとき基本波の強度が P_0 だとすると第二高調波の強度 P_{SHG} は

$$P_{\text{SHG}} = \alpha P_0^2 \quad (4.88)$$

となる。

共振器が共振しているときの共振器内の電場 E は式 (1.58) より

$$E_{\text{cav}} = \frac{t_{\text{F}}}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}}} E_{\text{in}} \quad (4.89)$$

である。ここに非線型光学結晶を挿入すると共振器内の電場の二乗 E_{cav}^2 に比例して第二高調波が発生しエネルギー保存則から E_{cav} が減少する。第二高調波が発生することによる基本波のロス

$$\frac{P_{\text{SHG}}}{P_0} = \sqrt{\alpha P_{\text{SHG}}} \quad (4.90)$$

である。またこれとは別に結晶を一回通過する際のロスを L とする。これらのロスはエンド鏡にロスがある場合と同じであるから式 (4.89) は

$$E_{\text{cav}} = \frac{t_{\text{F}}}{1 - r_{\text{F}} \sqrt{1-L} \sqrt{1 - \sqrt{\alpha P_{\text{SHG}}}}} E_{\text{in}} \quad (4.91)$$

となる。ここで $r_{\text{E}} \approx 1$ とした。よって生成される第二高調波のパワーは

$$P_{\text{SHG}} = \alpha |E_{\text{cav}}|^4 = \frac{\alpha t_{\text{F}}^2}{\left(1 - r_{\text{F}} \sqrt{1-L} \sqrt{1 - \sqrt{\alpha P_{\text{SHG}}}}\right)^4} P_{\text{in}}^2 \quad (4.92)$$

この式は解析的に解けないので 5.1 節では数値的に解いた式 (4.92) と実験結果を比較した。実際には鏡の第二高調波に対する透過率 T_{out} を考慮に入れなければならない：

$$P_{\text{SHG}} = \alpha |E_{\text{cav}}|^4 = \frac{\alpha T_{\text{F}}^2 T_{\text{out}}^2}{\left(1 - r_{\text{F}} \sqrt{1-L} \sqrt{1 - \sqrt{\alpha P_{\text{SHG}}}}\right)^4} P_{\text{in}}^2$$

しかし、本実験で使用した鏡は第二高調波に対して $T_{\text{out}} \approx 1$ でありその影響は小さい。

4.8 OPO と信号増幅

第二高調波の生成のように 2 つの光子から 1 つの光子が生成される過程だけでなく、1 つの光子が 2 つに別れる過程もある。これを光パラメトリック過程 (Optical Parametric Process) と呼ぶ。

図 4.16 に光パラメトリック過程を図示した。角周波数 ω_{pump} の光から差周波 $\omega_{\text{idolar}} = \omega_{\text{pump}} - \omega_{\text{idolar}}$ の光に分裂したとする。このときエネルギー保存則

$$\hbar\omega_{\text{idolar}} = \hbar\omega_{\text{pump}} - \hbar\omega_{\text{signal}} \quad (4.93)$$

から、ポンプ光のエネルギーが $\hbar\omega_{\text{idolar}}$ と $\hbar\omega_{\text{signal}}$ の割合で移る。すなわち差周波の生成と低周波側の入射光の増幅が同時に起きる。このような増幅作用を光パラメトリック増幅 OPA (Optical Parametric Amplification) という。

共振器内で光パラメトリック増幅をおこなうと増幅された光を再び非線型光学媒質に入射させられる。これによりさらなる増幅が可能となる。増幅効果が損失を上回れば発振が起きる。これを光パラメトリック発振 OPO (Optical

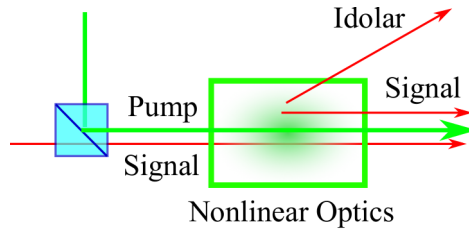


図 4.16: 光パラメトリック過程の模式図

非線型光学物質に左側からポンプ光 ω_{pump} とシグナル光 ω_{signal} が入射している。非線型光学物質中で差周波 ω_{idolar} が発生し、同時にシグナル光 ω_{signal} の増幅も起きる。

Parametric Oscillator) という。入射光の角度を変えることで位相整合条件を変えられるので OPO の発振波長を変えられる。

増幅効果はスキューニングファクタ s を用いて表現される。 s は以下で定義される [11] :

$$s := e^r \quad (4.94)$$

$$r := \frac{L}{2c} \cdot \frac{\Omega}{n} |\chi^{(2)} E_{\text{pump}}| \quad (4.95)$$

ここで L 、 n 、 $\chi^{(2)}$ はそれぞれ非線型光学結晶の長さ、屈折率、二次の電気感受率であり、 c は光速、 Ω はシグナル光の角周波数、 E_{pump} はポンプ光の複素電場である。

非線型光学結晶を共振器に挿入すれば実効的に結晶長を延ばせる。実際、共振器のフィネスと平均光路長の間には

$$L_{\text{actual}} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} L \quad (4.96)$$

の関係があるので共振器中に非線型光学結晶を挿入すれば

$$r = \frac{\mathcal{F}L}{\pi c} \cdot \frac{\Omega}{n} |\chi^{(2)} E_{\text{pump}}| \quad (4.97)$$

となる。図 4.17 にポンプ光強度を変えたときのスキューニングファクタの様子を図示した。共振器のフロント鏡の反射率は $R_s = 0.98$ を仮定した。ここからポンプ光強度が 100mW 程度あれば 18dB 程度のスキューニングファクタが期待できる。ただし実際には結晶のロスや測定のロスなどでこの値を得るのは難しい。なお振幅方向を増幅するスキューニングでは 15dB のスキューズド光子の測定に成功した例がある [15]。

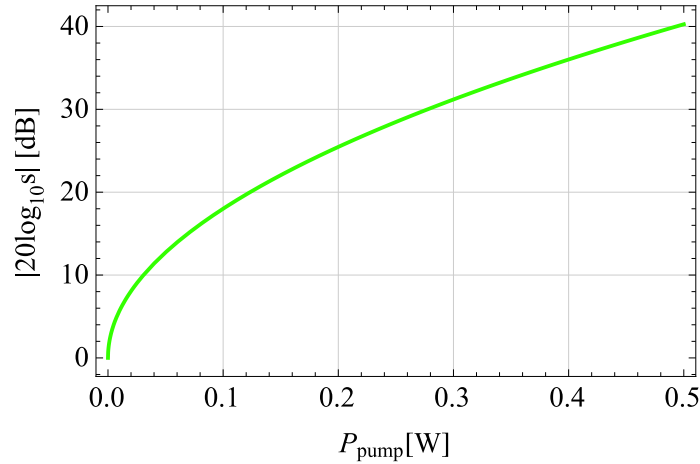


図 4.17: ポンプ光強度とスクイーミングファクタの関係

横軸をポンプ光強度 P_{pump} W、縦軸をスクイーミングファクタ $20 \log_{10} s$ とした。ポンプ光が 100mW 程度あれば 18dB 程度のスクイーミングが期待できる。パラメタは鏡の反射率 $R = 0.98$ とし、結晶長を 0.1cm、基本波の波長を 1064nm とした。また二次の電気感受率は PPKTP のデータシートが無かったため [14] で紹介されている値 $d_{\text{eff}} = 10.3\text{pm/V}$ を用いた。

4.9 共振器の設計

SR 干渉計を作成するには SR 共振器を設計する必要がある。また強い第二高調波を生成するには強い基本波が必要である。このため SHG では共振器を用いて基本波を実効的に増やし、そこに非線型光学結晶を挿入することで強い第二高調波の生成する。共振器を設計するにはレーザーの空間モードまで考える必要がある。以下ではレーザーの空間モードまで考慮にいれた共振器の設計理論と、実際に設計した共振器のパラメタについて説明する。

4.9.1 ガウシアンビーム

レーザー光が z 軸方向を進んでいるとする。このときレーザー光の電場を空間モード $U(x, y, z)$ まで考える：

$$E(t, x, y, z) = U(x, y, z)E_0 e^{i\omega t} \quad (4.98)$$

空間モード $U(x, y, z)$ が Hermite 多項式 $H_l(x)$ と Gaussian の積で表されるモードを Hermite-Gaussian モードと呼びその具体的な表式は次式である：

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp[-ikz + i(l+m+1)\zeta(z)] \quad (4.99)$$

$$U_l(x, z) := \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R(z)}\right] \quad (4.100)$$

$U_l(x, z)$ は x 軸方向の電場の広がりを表しており $U_l(y, z)$ は y 軸方向の電場の広がりを表している。 $l = m = 0$ の場合を基本モードとよび、それ以外の場合を高次モードと呼ぶ。ここで各パラメータは次式で定義される：

$$z_R := \frac{kw_0^2}{2} \text{ Rayleigh レンジ} \quad (4.101)$$

$$w(z) := w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \text{ ビーム半径} \quad (4.102)$$

$$R(z) := z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right] \text{ ビームの曲率半径} \quad (4.103)$$

$$\zeta(z) := \arctan \frac{z}{z_R} \text{ Gouy 位相} \quad (4.104)$$

また w_0 はビームの最小スポット径を表しビーム waist と呼ばれる。なお式 (4.100) と式 (4.101)~式 (4.104) からレーザの空間モードは Rayleigh レンジ z_R とビーム waist からの距離 z だけで記述できる。次にガウシアンビームの伝搬について考える。

4.9.2 ABCD 行列とガウシアンビームの伝搬

ABCD 行列は幾何光学の分野で用いられる、軸対称な光線がレンズや鏡といった光学素子を通過したあとにどのような軌跡を描くかを行列を用いて表現した手法である。光線はベクトルで表現され、第一成分は光軸からの距離 x を第二成分は光軸に対する傾き p を表す。すなわち、ある ABCD 行列で表現された光学素子を通過した後の光線は

$$\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

で表される。表 4.2 に ABCD 行列の具体例を示した。

光学素子	ABCD 行列	補足
伝搬	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	距離 d
凸レンズ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$	焦点距離 f
曲率付き鏡	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$	曲率 R

表 4.2: ABCD 行列の具体例

レーザー光学の分野ではこれをガウシアンビームの伝搬の解析に応用する。ガウシアンビームは Rayleigh レンジ z_R とビーム waist からの距離 z だけで記述できる。そこで任意の点 z におけるビームパラメタ q を以下のように定義する：

$$q(z) = z + iz_R \quad (4.106)$$

なおビームパラメタ q の逆数は次の通りである：

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (4.107)$$

あるビームパラメタ q をもつ光がある ABCD 行列をもつ光学素子を通過したとする。なお簡単のために光は真空中を伝搬するとし、光学素子の屈折率を 1 とする。このとき通過後のビームパラメタ q' は

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (4.108)$$

を満たすので光学素子の ABCD 行列が分かれば、ガウシアンビームの伝搬を解析できる。

4.9.3 共振器の設計と自己無頓着方程式

共振器内でビームが共振するためには共振器長が波長の整数倍だけでなく、共振器内を一周してきたビームの空間モードが元の空間モードに一致している必要がある。すなわち、共振器を一周したあとのビームパラメタ q' が元のビームパラメタ q に一致している必要がある：

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (4.109)$$

これを共振器の自己無頓着方程式 (Self Consistent equation) と呼ぶ。なお A 、 B 、 C 、 D は共振器一周分の ABCD 行列の成分である。特に共振器内のビーム waist の大きさは ABCD 行列の成分を用いて

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{|B|}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}} \quad (4.110)$$

と書ける。

次に式 (4.110) を用いておこなった SHG 共振器の設計を説明する。図 4.18 で SHG に用いた 4 枚鏡の共振器を図示した。図下部のビーム waist を起点に一周した際の ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = L(d/2)M(R)L(l)M(R)L(d/2) \quad (4.111)$$

ここで $L(l)$ と $M(R)$ はそれぞれ伝搬および曲率つき鏡の ABCD 行列を表す：

$$L(l) = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.112)$$

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

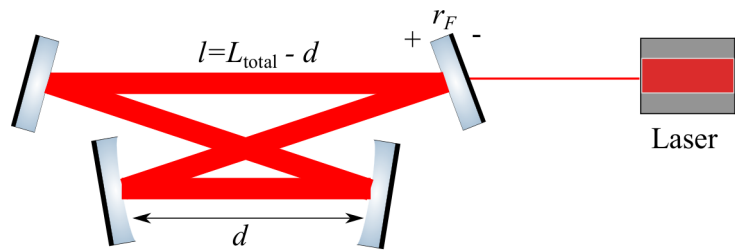


図 4.18: SHG に用いた四枚鏡の共振器

基本波を実効的に増幅するために用いた光共振器。設計を容易にするため 4 枚鏡で構成し鏡の曲率も対称にした。図上部の鏡は曲率のない平面鏡であり、図下部の鏡はともに曲率 R をもつ。なお対称共振器の場合、ビーム waist は図上部の二枚の鏡および図下部の二枚の鏡の中心の計二カ所になる。この図の構成の共振器は下部に小さなビーム waist をもつのでそこに非線型光学結晶を挿入した。

鏡の曲率は 150mm とした。これは非線型光学結晶を加熱するオープンを置くスペースを確保し、かつ共振器をできるだけコンパクトにしたためだ。これとは別に共振器の要求として次の二点があった：

- オープン内のクリップを考慮し waist 径を小さくし過ぎない⁶($w_0 \geq 50\mu\text{m}$)
- 非点収差を考え曲率付き鏡へのビームの入射角をできるだけ小さくする (l を小さくし過ぎない)

共振器長さを決定するため式 (4.110) に式 (4.111) を代入し、ビーム waist 半径を求めた。図 4.19 にその結果を図示した。図 4.18 から $l = 1.2\text{m}$ 、 $d = 0.155\text{m}$ とし、 w_1 を $580\mu\text{m}$ にすれば $w_2 = 50\mu\text{m}$ となり目的の共振器が得られると分かる。SR 共振器に対しても同様の手法を用い共振器の設計をおこなった。

⁶変換効率を考えると絞った方が良い。しかしオープンが結晶に比べ長いのであまり絞りすぎるとオープンでクリップしてしまう。

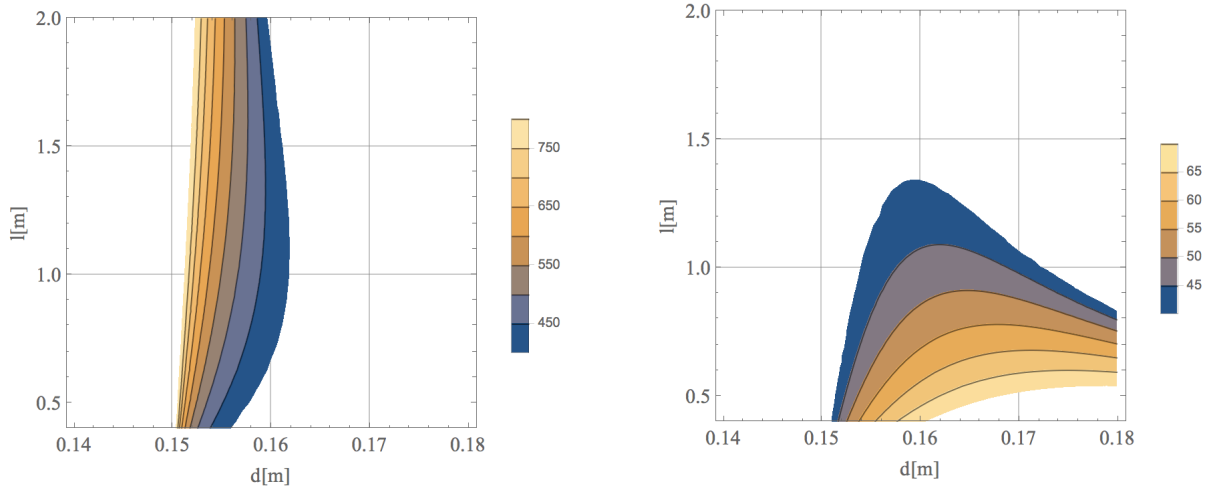


図 4.19: SHG 共振器の長さとはみ waists の関係

左. 図 4.18 で上側に現れるはみ waists 径 (w_1)、右. 図 4.18 で下側に現れるはみ waists 径 (w_2). 共振器長とはみ waists 径の関係を二次元プロットした。共に単位は μm である。ここから $d = 0.155\text{m}$ 、 $l = 1.2\text{m}$ の共振器長をもつ共振器に、 $w_1 = 580\mu\text{m}$ をもつはみを入射させれば非線型光学結晶の位置で $w_2 = 50\mu\text{m}$ 程度のはみ 径をもつはみが作れる。

4.10 検証実験の目標

図 3.11 の感度曲線は量子雑音のみを考えている。このため 3.4 節で示した理論を実験で直接証明するのは難しい。これは通常のテーブルトップ実験では地面雑音やレーザーの古典的な強度・周波数雑音のために量子雑音限界まで感度を高めること自体が大変難しいためだ。

一方で信号のみに注目すると鏡の差動変位の伝達関数 $H_{\text{diff}}(\omega)$ は式 (3.86) から

$$H_{\text{diff}}(\omega) = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}_s} H_2}{h_{\text{SQL}} M} \quad (4.114)$$

であった。このうちスキューニングファクタに関する項は M と H_2 であり、それは次式で与えられた：

$$M = s + sr_s^2 e^{4i(\alpha+\beta)} - r_s e^{2i(\alpha+\beta)} \left[(1 + s^2) \cos 2\phi + \mathcal{K} \sin 2\phi \right]$$

$$H_2 = -(1 + sr_s e^{2i(\alpha+\beta)}) \cos \phi$$

すなわち伝達関数 H_{diff} を測定すれば、OPO を SR 共振器に組み込んだ影響を見られるので、間接的だが理論の検証が可能である。

図 4.20 に予想されるスキューニングファクタを変えた際の伝達関数の変化を SR 共振器を離調しない場合と離調した場合に分けて図示した。SR 共振器を離調しないと差動変位の伝達関数はある s でピークをもちその後は減少する。このピークは SR 干渉計で差動変位信号が増幅される比と取り出される比が最適になる値、すなわちインピーダンス整合がとれた値である。SR 共振器を離調すると光バネの共振ピークが現れそれがスキューニングファクタの増加にともない高周波側にシフトする。なお実験系に合わせるため鏡の質量を 200mg とし光バネの共振周波数を大きくした⁷。

本修士論文研究では SR 共振器内で非線型光学結晶を組んだ際の鏡の差動変位の伝達関数を測定し、3.4 節の理論の間接的な検証をすることを目標にした。

⁷離調しない場合は輻射圧の効果がないので伝達関数は鏡の質量によらない。

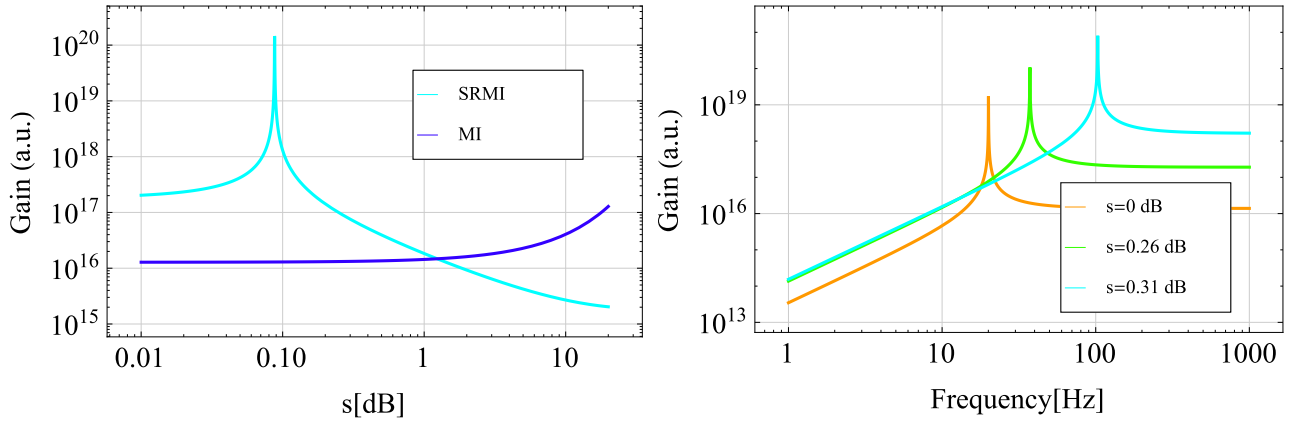


図 4.20: SR 共振器の OPO による差動変位の伝達関数の変化

左：離調なしの場合 (10 Hz)。右：離調した場合。離調しない場合の伝達関数は信号がインピーダンスマッチングした s でピークを持ちその後は単調減少する。一方で離調すれば光バネの共振によるピークが現れそれがスキューニングファクタに応じてシフトする。パラメタは実験に近づけるため、 $L = 1\text{m}$ 、 $R_s = 0.98$ 、 $m = 200\text{mg}$ とした。

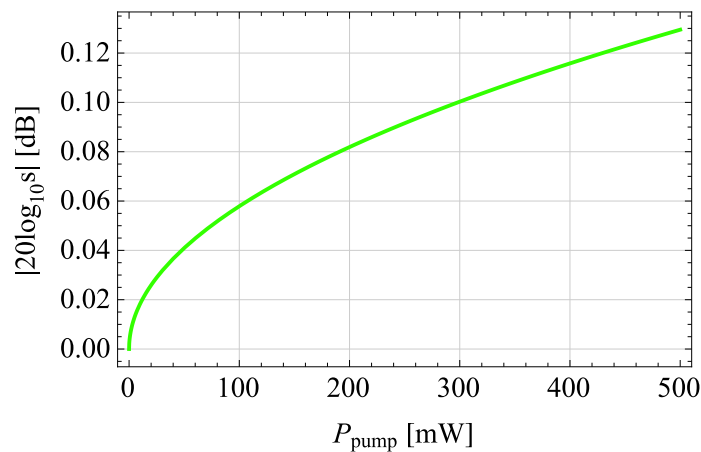


図 4.21: シングルパスでのスキューニングファクタとポンプ光強度の関係

シングルパス (共振器無し) ではわずかなスキューニングファクタしか期待できない。このため先にブロードバンド干渉計 (離調無し) で検証実験をおこなう方が良いと結論した。なお共振器を離調し光ばねをみるのも難しい。問題点や課題については [20]

第5章 実験

本章では理論の検証のためにおこなった各ステップの実験とその結果を示す。図 5.1 に実験系全体の模式図を表し、表 5.1 に図中に現れる実験機器の一覧をまとめた。また 5 章で用いた測定装置の一覧を表 5.2 にまとめた。とくに以下では言及しない限りこれらの実験装置を使用した。

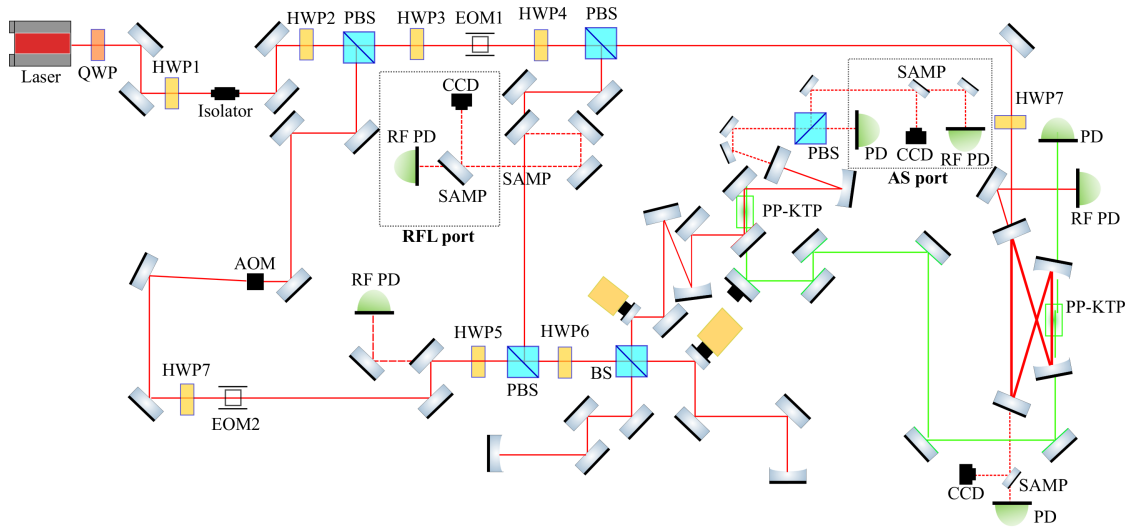


図 5.1: 実験系の全体図

製の光学定盤の上に SR 干渉計と SHG 共振器を組んだ。各光学素子の略称は表 5.1 参照とする。

光学素子名	呼称・略称	メーカー	補足
レーザー	L	87[MHz]	最大出力 600mW
AOM	AOM	Indeco	$85\text{MHz} \leq f_{\text{aom}} \leq 135\text{MHz}$
EOM	EOM	Thorlabs/Indeco	15MHz : Thorlabs、22.7MHz : Indeco 製
鏡	M	LayerTech/Autex/Thorlabs	場面に応じて使用
光学フィルタ	$M_{532\text{nm}/1064\text{nm}}$	Thorlabs	コーティングにより透過光の波長を選べる
1/4 波長板	QWP	Thorlabs	
1/2 波長板	HWP	Thorlabs	
ビームスプリッタ	BS	LayerTech	偏光による反射率差は 10%以下
偏光 BS	PBS	Thorlabs	
ビームサンブラ	SAMP	Thorlabs	反射率 10%程度の鏡
フォトディテクタ	PD	Thorlabs	モニタ用
共振型フォトディテクタ	RFPD	自作	制御信号取得用
CCD カメラ	CCD	秋月電子	モニタ用
温調	oven	0.98	結晶加熱用

表 5.1: 実験機器一覧

5.1 第二高調波作成実験

非線型光学結晶には Ricol Crystal 社製の PPKTP を用いた。使用した PPKTP は高さ 1 mm、幅 2 mm、長さ 10 mm の透明な結晶で、それをオープンで適切な温度に加熱して使用した。なおオープンには基本波と第二高調波が通る穴 (高さ 1 mm、幅 2 mm 程) が空いている。

5.1.1 非線型光学結晶の特性調査

共振器内に非線型光学結晶を挿入する前に最適な結晶の加熱温度およびシングルパスでの第二高調波への変換効率を実験で確かめた。

最適結晶温度の測定

PPKTP 結晶を入れたオープンの入力側から波長 1064 nm をもつ基本波を入射し、オープンの温度を変えながら出力側で発生した第二高調波のパワーを測定した。なお出力側には第二高調波の他に変換されずに透過した基本波も含まれるので光学フィルタを 3 枚用い第二高調波のみを透過させた。結果、35 度で変換効率の最大値を得た。

基本波の強度密度と変換効率

第二高調波の変換効率 α は次式で定義される：

$$\alpha := \frac{P_{\text{SHG}}}{P_{\text{in}}^2} \quad (5.1)$$

しかしレーザーから出る電場は空間的な広がりをもつ (4.9 節参照) ので実際の変換効率はビームの強度密度 $[W/w_0^2]$ に依存する。ここで w_0 はビーム半径である。基本波の強度密度を変化させた際の第二高調波の強度変化を測定した。図 5.2 に実験系とその結果を示した。これによりビームをより絞れば高い変換効率が見られると分かった。

光学素子名	呼称・略称	型番	メーカー	補足
パワーメータ	パワーメータ	PM100D	Thorlabs	受光部には S121C を使用
発振器	発振器	AFG3022C	Tektronix	22.7MHz の変調用
発振器	発振器	AFG31	Sony	15MHz の変調用
発振器	発振器	AFG-2025	GW INSTEK	PZT 加振用
デジタルオシロスコープ	オシロスコープ	DSO-X-2004A	Agilent Technologies	SHG 実験で使用
デジタルオシロスコープ	オシロスコープ	Tektronix	TBS1064	SHG 実験以降で使用
ミキサ	ミキサ	ZEM-2B+	Mini Circuits	復調用
パワーディバイダ	パワーディバイダ	ZFRSC-2075+	Mini Circuits	信号分離用
ブリアンプ	SR560	SR560	Stanford Reserch	ゲイン・ポール可変フィルタ
ピエゾドライバ	PZT Driver	SVR 500/3	Piezomechanik	SHG 用
ピエゾドライバ	PZT Driver	SPD-410		干渉計用
FFT アナライザ	FFT アナライザ	CF350Z	小野測器	伝達関数測定用
FFT アナライザ	FFT アナライザ	CF5200	小野測器	振幅スペクトル密度測定用
ロックインアンプ	SR510	SR510	Stanford Reserch	
加速度計	加速度計	不明	Pico Techology	3 軸の加速度計

表 5.2: 測定装置一覧

しかしビームを絞りすぎると結晶を加熱するオープンの中でクリップが発生し効率が低下する。実際にオープンの中で半径 $30\mu\text{m}$ のビームはその入り口付近¹で $250\mu\text{m}$ となる。経験的にビームをクリップさせないためには光軸から半径の 3 倍のスペースが必要であるので光軸から $750\mu\text{m}$ のスペースが必要となる。しかしオープンの穴が結晶に合わせて作成されており高さが 1mm しかないうえに、結晶の特性が最も良い位置 (Sweet Spot) を選ぶ自由度も減ってしまう。

そこで本実験では結晶内のビーム半径を $50\mu\text{m}$ とし、このときの変換効率を $3 \times 10^{-3} \text{W}^{-1}$ と見積もった：

$$\alpha = 3 \times 10^{-3} [\text{W}^{-1}] \quad (5.2)$$

なおこの要求値を元にして 4.9 節で SHG 共振器の設計をおこなっている。

5.1.2 光共振器の作成

次に非線型光学結晶を共振器に入れ強い第二高調波を得る実験をおこなった。図 5.3 はその実験系である。フロント鏡の反射率は 95% であり、そこから見積もられる共振器のフィネスは

$$\mathcal{F} = 126 \quad (5.3)$$

である。曲率付き鏡には LayerTech 製を用いた。この鏡は特別なコーティングがされており $R_{1064\text{nm}} > 99.9\%$ 、 $R_{532\text{nm}} < 5\%$ であり生成した第二高調波のみを透過させる。

モードマッチング

共振器内で共振するレーザーの空間モードは決まっている。入射ビームの空間モードを共振器の共振モードに一致させる手法をモードマッチングという。実際には式 (4.100) からビームの空間モードはビーム waist の値 w_0 とビーム waist からの距離 z で決まる。このためモードマッチングは入射ビームのビーム waist の大きさと位置をレンズを変更しおこなう。モードマッチングの手順は以下の通りである。

¹オープンの全長は 4cm である。

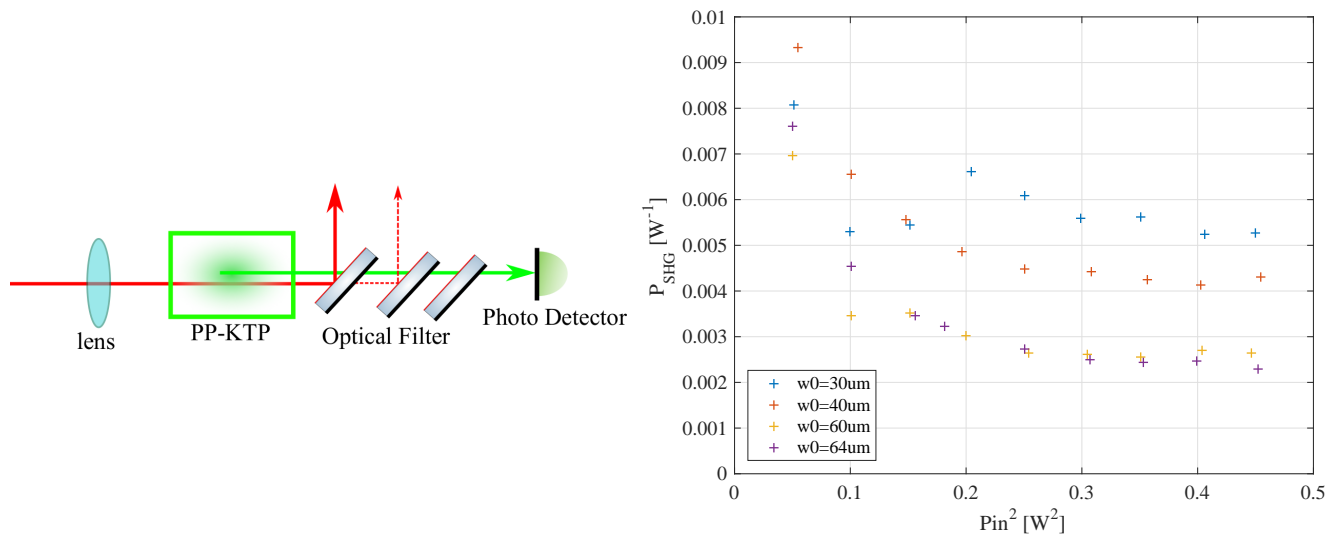


図 5.2: レーザーの強度密度と変換効率の関係

左図：測定方法. 右図：測定結果.PPKTP の手前に置いたレンズの焦点距離を変え PPKTP 内のビーム半径を変化させた。なおレンズの手前でビームをコリメートさせレンズの焦点距離でビームが最も絞られるようにした。 $P_{in} = 0$ で零点を交差しない理由としては基本波が小さいと第二高調波が小さくなるために測定誤差が大きくなるためだ。

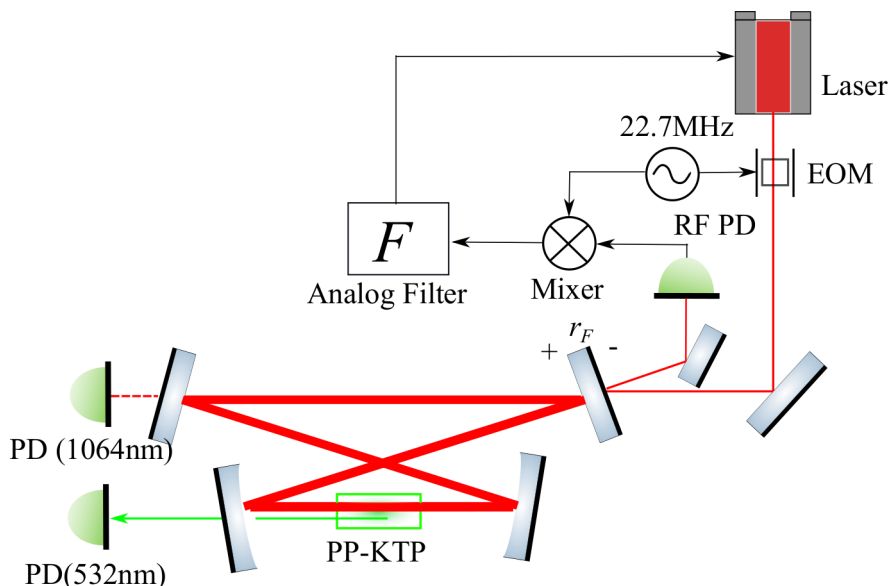


図 5.3: 第二高調波作成の実験系

非線型光学結晶を共振器に挿入している。共振器のフロント鏡の反射率 $R_F = 95\%$ とした。また曲率付き鏡は特別なコーティングがされており $R_{1064nm} > 99.9\%$ 、 $R_{532nm} < 5\%$ であり、発生した第二高調波を効率的に取り出せる。共振器長は約 1.5m であり、発生した第二高調波が最大になるよう調整した。結晶は小型オープンで 35 度に加熱し分極反転周期を調整した。

はじめにビームプロファイラを用いて数 10cm の範囲のビーム半径を 2.5cm 間隔で測定する。その結果を waist 位置からのビーム半径を表す式 (4.102) でフィッティングしビームの初期 waist の大きさと位置を求める。なおビーム半径は x 軸と y 軸で異なる場合があるので別々に測定してフィッティングする。

図 5.4 で図 5.3 の EOM1 透過後のビームプロファイリングの結果を図示した。横軸は PBS2 からの距離である。 x 軸と y 軸でビーム waist の大きさと位置が異なるため、空間の共振モードが一致しない。これをモードミスマッチと呼ぶ。ただし光学シミュレーションソフトで計算した結果、このモードミスマッチの効果は小さいと結論付けられたため補正はおこなわなかった。

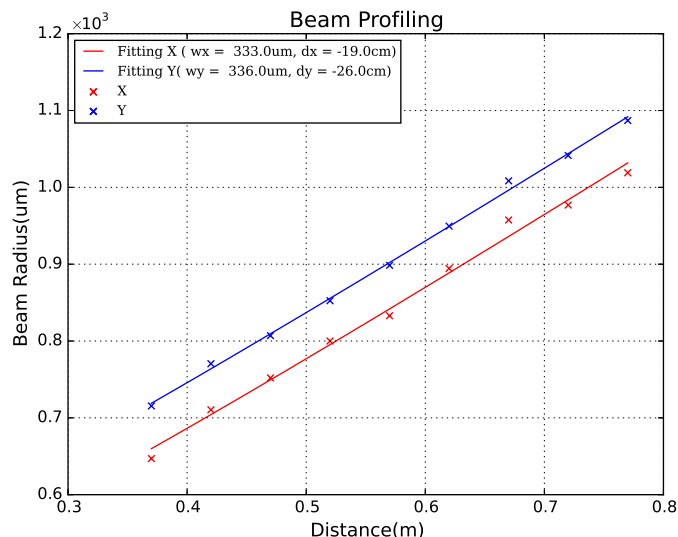


図 5.4: ビームプロファイリングの具体例

ビームプロファイリングにより初期ビームのビーム waist とその位置が求まったので、この結果をもとにどの位置にどのような焦点距離をもつレンズを置けば目的のビームが得られるかを計算した。計算には Jammmt と呼ばれるソフトを用いた。このソフトを使用すると目的のビームを得るために必要なレンズの焦点距離と設置位置を計算できる。計算した位置に正しくレンズを設置できたかはある一点でのビーム径をモニターし判断した。これは計算した位置にレンズが置かれていれば計算結果に合致したビーム径が得ること、ビームがレンズの中心を透過していればビームの中心はレンズの挿入前後で変化しないことに注目したためだ。

図 5.5 はモードマッチング後に組んだ光共振器の透過光である。レーザー本体のピエゾに三角波の電場を印可してレーザー自体の周波数をスイープさせている。このため横軸はレーザー周波数に対応している。図に現れたピークは共振器が共振した際の透過光ピークである。よって透過光強度のピーク間を FWHM で割れば共振器のフィネスが得られる。図から値を読み取った結果は

$$\mathcal{F} = \frac{0.0046}{0.000036} = 128 \tag{5.4}$$

であり設計値 (式 (5.3)) に一致する。

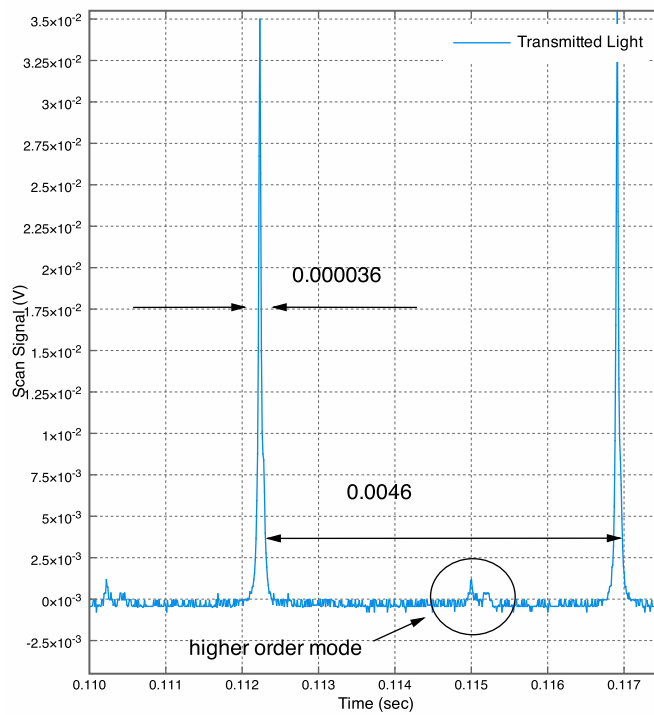


図 5.5: 光共振器の透過光

作成した光共振器の透過光をフォトディテクタで検出した。レーザー本体のピエゾに三角波の電圧を印可しレーザー周波数を掃引した。共振時に透過光強度が最大になっており、そのときのレーザーの空間モードは00であった。一方、わずかだが高次モードも現れている。

5.1.3 共振器への非線型光学結晶の挿入

作成した共振器に非線型光学結晶を挿入し基本波の強度 200mW に対し 35mW の第二高調波を得た。共振器長さや結晶の位置を微調整し、第二高調波への変換効率が最適になるようにした。非線型光学結晶を挿入すると結晶自体のロスおよび非線型光学効果によるロスから共振器のフィネスが低下する。図 5.6 で PPKTP 挿入後の共振器の透過光をプロットした。結晶挿入に伴いフィネスが低下している。実際、図 5.6 から読み取った PPKTP 挿入後の共振器のフィネスは

$$\mathcal{F} = 61 \tag{5.5}$$

である。

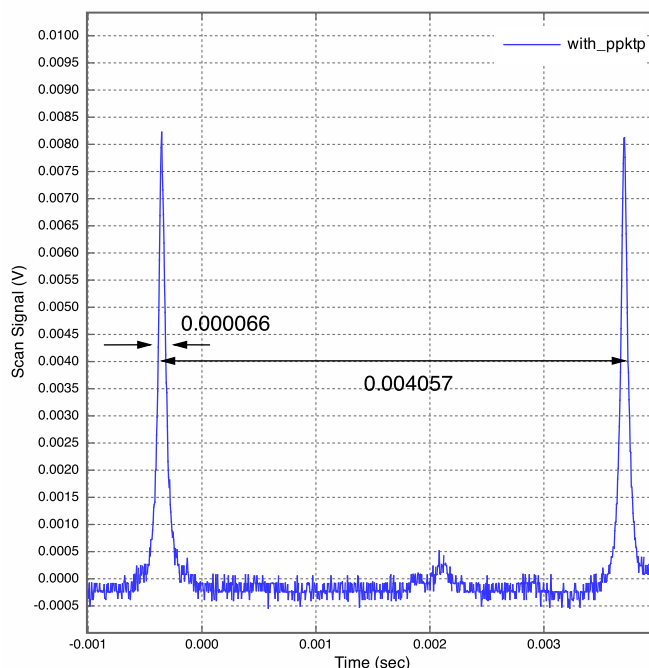


図 5.6: PPKTP 挿入後の光共振器の透過光

光共振器に PPKTP を挿入したあとの共振器の透過光である。挿入前に比べフィネスが減少している。なお結晶挿入前後で共振器長の微調整をおこない得られる第二高調波を最大にした。入射光量を 200mW である。

5.1.4 PPKTP 挿入に伴うロス

SHG の効率を理論と比較するために測定結果から結晶挿入に伴うロスを見積もった。

フィネスの低下から見積もられるロス

PPKTP でロスが生じるとフィネスが低下する。フィネス \mathcal{F} は定義式 (1.68) から

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E}$$

であった。PPKTP のロス L_{PPKTP} はエンド鏡のロスとみなせるので、PPKTP 挿入後のフィネスは

$$\mathcal{F}' = \frac{\pi \sqrt{r_F r_E \sqrt{1 - L_{\text{PPKTP}}}}}{1 - r_F r_E \sqrt{1 - L_{\text{PPKTP}}}} \tag{5.6}$$

測定結果 (5.5) とパラメータ $r_F = \sqrt{0.95}$ 、 $r_E \approx 1$ よりロス L は

$$L_{\text{PPKTP}} = 5.0 \times 10^{-2} \quad (5.7)$$

と求まる。以下ではこのロスの由来を実験的に求めた。

結晶の吸収およびオープンでのクリッピングロスの実測

パワーメータを用い、非線型光学結晶の前後のパワーを測定し結晶の吸収およびオープンでのクリッピングロスと求めた。結晶の吸収によるロスとオープンによるクリップロスのみを測定するため結晶を加熱せず、入射させる基本波の強度も小さくし非線型光学効果を見逃すようにした。測定から PPKTP 前のパワー 8.45mW に対し、PPKTP 後のパワーは 8.26mW であった。ゆえに非線型光学結晶のロス L_0 は

$$L_{\text{PPKTP},0} = \frac{8.45 - 8.26}{8.45} = 2.2 \times 10^{-2} \quad (5.8)$$

と見積もられた。

この値は Raicol Crystal 社で公表されているカタログ値と比較して 2 ~ 3 桁程度悪い (KTP 結晶の吸収率 $\alpha < 10^{-5} \text{cm}^{-1}$ 、結晶の AR コーティングの反射率 $R < 0.2\%$)。本実験ではこの理由を特定できなかったが、PPKTP に数%のロスが存在すると本研究室の先行研究 [16]² で報告されており、特別に実験系がおかしい訳ではない。また別のメーカー [18] から公表されている PPKTP の吸収率は $\alpha < 1\%$ である。その他の類似研究をみても PPKTP のロスを 1%程度と仮定しており、本実験では測定値が妥当だと考え PPKTP のロスを 2%と結論づけた。

その他のロス

式 (5.8) だけでは式 (5.7) のロスを説明しきれない。

PPKTP のロスは吸収に伴う線型ロスに加え第二高調波のパワーに比例した成分が報告されている [19]。また、第二高調波生成に伴うロス L' も存在する (式 (4.90)) :

$$L' = \sqrt{1 - \sqrt{\alpha P_{\text{SHG}}}} \quad (5.9)$$

すなわち、正しいロスは次式で与えられる :

$$L_{\text{PPKTP}} = (L_0 + \alpha P_{\text{SHG}}) \sqrt{1 - \sqrt{\alpha P_{\text{SHG}}}} \quad (5.10)$$

ただし係数 $a[\text{W}^{-1}]$ を直接測るのは難しく、多くの場合、実験結果から推定される。シングルパスの変換効率 $\alpha = 1.76 \times 10^{-3} \text{W}^{-1}$ と生成された第二高調波のパワー $P_{\text{SHG}} = 35 \text{mW}$ および結晶の線型ロス $L_0 = 2.2 \times 10^{-2}$ を用いて $a[\text{W}^{-1}]$ を計算すると

$$a = 8.1 \times 10^{-2} \text{W}^{-1} \quad (5.11)$$

と求まる。これは参考文献 [19] で報告された値 ($4 \times 10^{-2} \text{W}^{-1}$) に比べ 2 倍ほど悪い。

5.1.5 SHG で得られた第二高調波の強度と理論曲線の比較

以上の結果から PPKTP のロスを

$$L_{\text{PPKTP}} = (L_0 + \alpha P_{\text{SHG}}) \sqrt{1 - \sqrt{\alpha P_{\text{SHG}}}}$$

とし、各係数を表 5.3 にまとめた。

²正確には実験ノートに記載されていた。

係数	実験値	先行研究・データシートの値
L_0	2.2×10^{-2}	$< 10^{-2}$ [16],[18]
a	$8.1 \times 10^{-2} \text{ W}^{-1}$	$4 \times 10^{-2} \text{ W}^{-1}$ [19]
α	$3 \times 10^{-3} \text{ W}^{-1}$	$5 \times 10^{-3} \text{ W}^{-1}$ [16]

表 5.3: 実験から見積もられた PPKTP のロスと先行研究との比較
先行研究の α は基本波のビーム径をより絞ったために大きくなっている

図 5.7 で生成された第二高調波の測定値と式 (4.92) を使い求めた理論式をプロットした。第二高調波の曲率付き鏡の等価率 95% も考慮に入れた。基本波の強度が 600mW となるまでは実験値は理論曲線に対し完全に一致したわけではないが近い値となった。。一方で基本波の強度が 1W のときは理論曲線と実験結果の差が大きい。これは SHG 共振器に入れる前にファイバーアンプを用いて基本波の強度を 1W まで増幅しているためロスの条件が異なるためだと推測される。しかしファイバーアンプが不調になってしまったため、ファイバーアンプを通したあとの光が SHG にどのような影響を与えるかを測定できなかった。

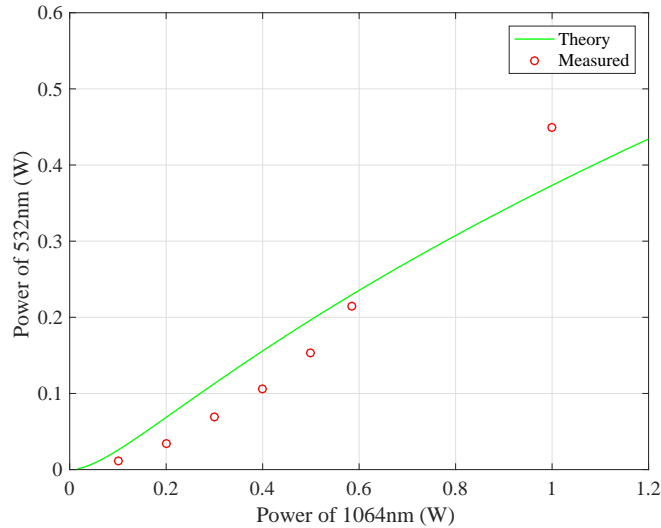


図 5.7: 生成した第二高調波の強度と理論曲線との比較

基本波の強度が 600mW になる前までは実験結果に理論曲線が合致している。一方、ファイバーアンプを用いて基本波の強度を 1W にした際には実験結果と理論曲線の差が大きくなる。これはファイバーアンプを使う際にセットアップを変更したため PPKTP のロスの条件が変わってしまったためだと推測される。

5.1.6 SHG 共振器のオープンループ伝達関数測定

図 5.8 にオープンループ伝達関数測定の模式図を示した。\$H\$ は光学系の伝達関数を \$F\$ はフィードバックフィルターの伝達関数を表している。加算器から入った信号 \$X(\omega)\$ を図の位置で測定すると出力 \$Y(\omega)\$ は

$$Y(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 + G(\omega)}X(\omega) \quad (5.12)$$

となる。ここで

$$C(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 + G(\omega)} \quad (5.13)$$

をクローズドループ伝達関数という。クローズドループ伝達関数とオープンループ伝達関数の関係は次式で与えられる：

$$G(\omega) = \frac{C(\omega)}{1 - C(\omega)} \quad (5.14)$$

よって入力した信号 \$X(\omega)\$ が既知ならばオープンループ伝達関数 \$G(\omega)\$ を測定できる。

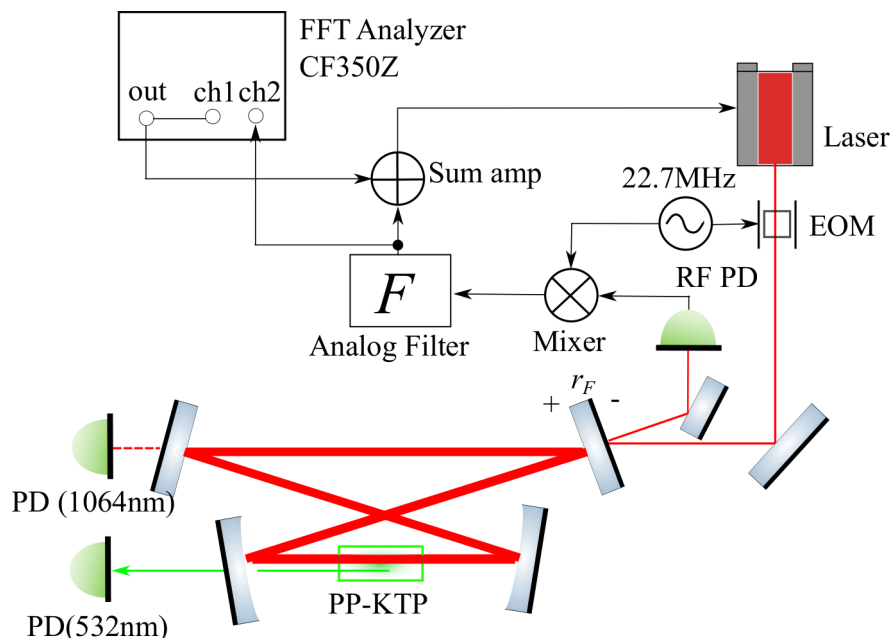


図 5.8: 伝達関数測定の模式図

伝達関数測定には FFT アナライザ CF350Z を用いた。FFT アナライザは発振器が内蔵された 1 出力 2 入力 の測定装置であり発振器から既知の信号 \$X(\omega)\$ を生成し、装置内で \$Y_2(\omega)/Y_1(\omega)\$ を計算する。このとき \$Y_1(\omega)\$ に対する \$Y_2(\omega)\$ の位相遅れも測定できるので、\$Y_1(\omega)\$ に \$X(\omega)\$ を接続すれば伝達関数を測定できる。

図 5.9 に SHG 共振器のオープンループ伝達関数の測定結果をプロットした。測定結果から SHG 制御のユニティゲイン周波数 15 kHz はでそのときの位相余裕が 40 度だと見積もられた。なお SHG 共振器をより安定に制御するため、補助的にレーザーの温調にも制御信号を返している。ただし今回の測定範囲よりも低周波数帯のみを制御しているので本測定には影響しない。

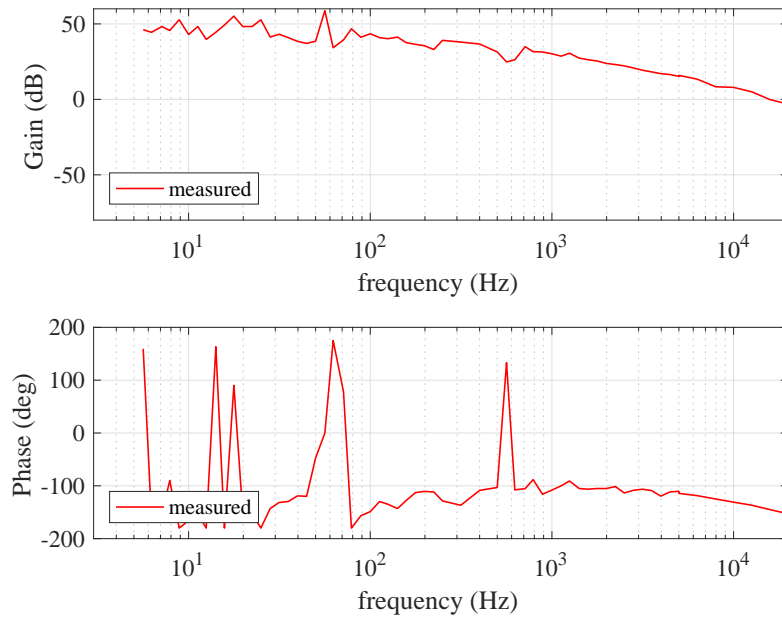


図 5.9: SHG 共振器の伝達関数の測定結果

5.1.7 第二高調波の強度雑音測定

第二高調波は OPO のポンプ光に用いられるのでその強度雑音は重要である。そこで生成された第二高調波の一部をフォトディテクタに入射させ強度雑音スペクトルを測定した。図 5.10 でその結果をプロットしており、ユニティゲイン付近で強度雑音が増えている。これはユニティゲイン付近では実効的な雑音

$$X_{\text{actual}}(\omega) = \frac{1}{1+G} X(\omega)$$

が増幅するためである。さらに 600Hz 付近に鋭い雑音ピークが立っている。この雑音ピークの原因を特定するためにミラーマウントの共振周波数測定をおこなった。

ミラーマウントの共振周波数

SHG 共振器の共振器長の変化は第二高調波の強度雑音を生む。本実験では図 5.11 のようにして鏡を光学定盤に固定しており、光学定盤上の地面雑音はミラーマウントの脚を経由して鏡を揺らす。仮にミラーマウントに共振があった際にはより大きな変位を生むので結果として共振周波数で大きな強度雑音が発生する。

そこでミラーマウントに加速度計を接着しミラーマウントの脚、固定具、光学定盤のそれぞれに軽い撃力を与えミラーマウントの共振周波数を測定した。図 5.12 で各場所に撃力を与えた際の加速度計の出力のスペクトルを示した。第二高調波の強度雑音のピークの周波数付近に振動のピークが立っている。なお加速度計は鏡に比べ重いので加速度計で測定したミラーマウントの共振周波数に比べ実際に現れる強度雑音のピークは高周波側にシフトしている。

第二高調波の強度雑音の実験の要求値を満たさない場合はフィルタ回路の構成を工夫するか、鏡の固定方法を工夫したり実験系を工夫しそもそもの雑音レベルを低下させなければならない。

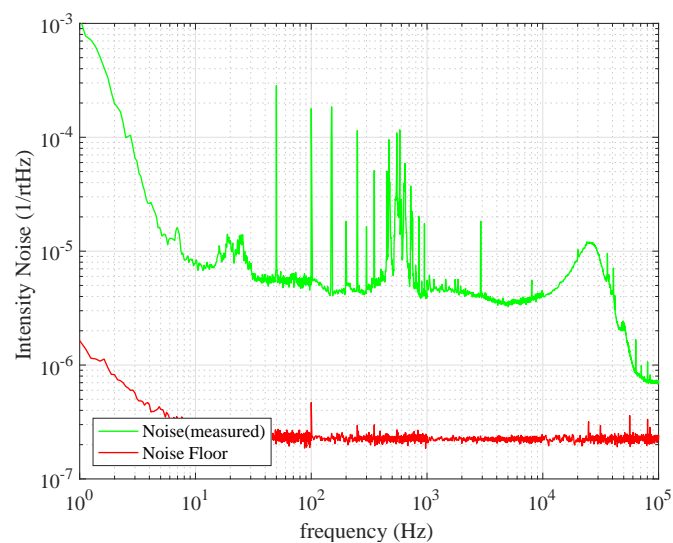


図 5.10: 第二高調波の強度雑音

noise floor は使用した FFT アナライザの雑音レベルを示している。測定の際には入力に 50Ω 終端回路を接続した。なお強度雑音は入射光量に応じて変化するので、入射光量 (DC 成分) で規格化した。

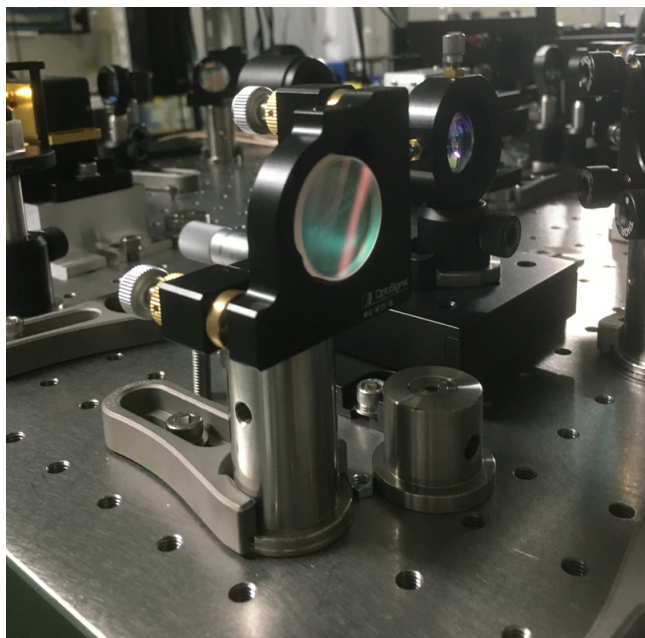


図 5.11: 鏡の固定方法

本実験系では鏡を樹脂製のミラーマウントに装着し、それを高さ調整用の金属の円筒 (ペDESTAL) にネジで固定し用いている。円筒は光学定盤とクランプと呼ばれる金属製の道具で固定されている。

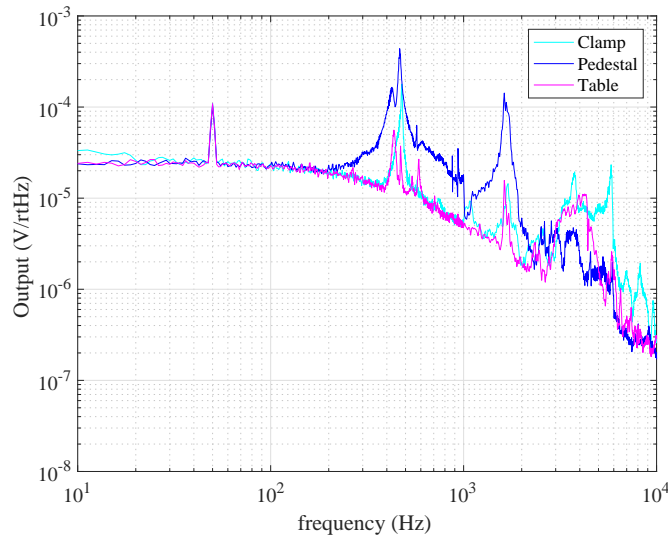


図 5.12: ミラーマウントに取り付けた加速度計のスペクトル

加振した場所毎のスペクトルを載せた。加速度計の電気雑音が大きく雑音スペクトルのノイズフロアは加速度の電気雑音である。

5.2 Michelson 干渉計の制御

図 5.13 に Michelson 干渉計制御の実験系を示した。Michelson 干渉計の制御信号を RFL ポートから取得した。腕の折り返し鏡は piezo 素子に接着されており、線型信号を返すことで鏡の位置が制御されている。折り返し鏡をアクチュエートした理由はすぐあとで記述する。Michelson 干渉計に入射するビームの空間モードはこの後の実験でおこなった SR 干渉計に合うようモードマッチングした。

干渉計の性能を評価する指標にコントラストがある。これは干渉計のダークフリンジでのパワー P_{\min} とブライトフリンジでのパワー P_{\max} を用いて

$$\text{contrast} = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} \quad (5.15)$$

で定義される。コントラストの値が 1 に近いほど良い干渉計である。モードマッチング後の Michelson 干渉計のコントラストは 98% であった。コントラスト悪化の原因としては、腕につけたアシンメトリ、モードマッチングの誤差、エンド鏡に用いた曲率付き鏡の表面誤差が挙げられる。

5.2.1 ミラーマウントの共振と制御の不安定性

はじめ y 軸方向のエンド鏡に線型信号を返し鏡の位置制御を試みた。これは鏡に対するレーザーの入射角度を θ 、piezo の変位を δx とすると光路長変化 δx_{actual} は

$$\delta x_{\text{actual}} = 2 \cos \theta \cdot \delta x$$

となるのでエンド鏡 ($\theta = 0$) をアクチュエートした方が piezo のレンジを十分に使えるためだ。ただしエンド鏡は反射光を入射光に一致させるため pitch と yaw を調整する必要がある。このため図 5.14 にある写真の piezo と一体となったミラーマウントを使用した。しかしこのミラーマウントを用いゲインを上げると発振してしまい制御が不安定となった。

図 5.14 の左図はこの系における Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数である。250Hz 付近に共振ピークが現れている。このためユニティゲインをピークの周波数以下に調整したとしても、ピーク付近でオープンループゲインがゼロを交差してしまう。ゲインがゼロを交差する周波数で位相遅れが 180 度を上回れば、制御の安定性が崩れ発振してしまう。

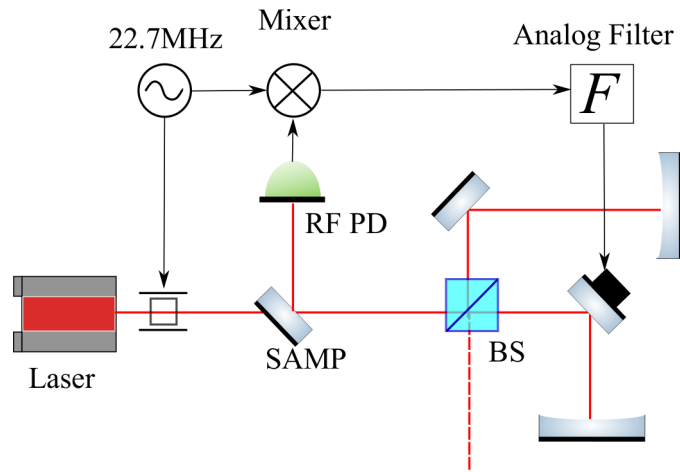


図 5.13: Michelson 干渉計制御の実験系

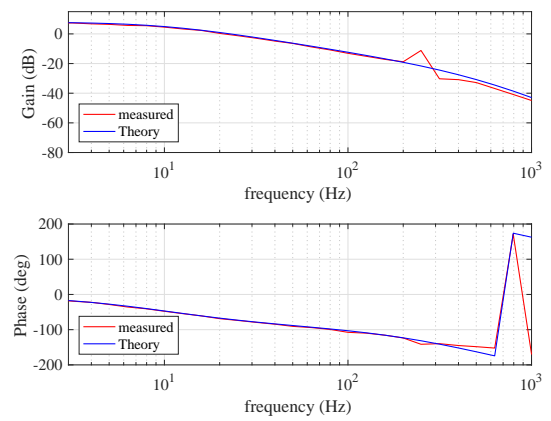
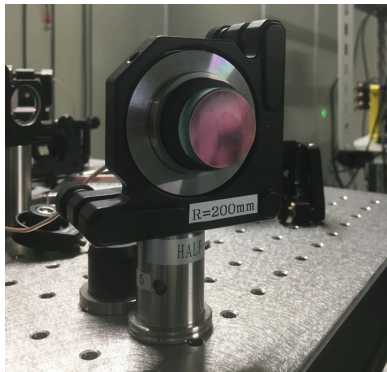


図 5.14: 改善前の Michelson 干渉計の伝達関数

左：エンド鏡に用いたアクチュエータ付属のミラーマウント。右：改善前の Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数。pitch と yaw を調整するためピエゾとミラーマウントが一体となったアクチュエータを用いている。オープンループ伝達関数を見ると 250Hz 付近にピークが見える。このピークのために 1Hz 付近のゲインは 10dB 以下と小さくなっている。なおピーク付近の測定は難しく点数も十分にとれていないのでピークの正しいゲインと位相は測定できなかった。

本研究室でおこなわれた先行研究 [20] でもこの不安定性が指摘され問題であった。このピークは 5.1 節でも測定されたミラーマウントの共振ピークである³。そこでミラーマウントを改善し⁴、ミラーマウントの共振を取り除いた。図 5.15 は改善したミラーマウントとそれを用いた際のオープンループ伝達関数の測定結果である。図 5.14 に現れた共振ピークが消失し、ゲインを上げられている。なお piezo 素子とフィルター回路を新しくしているためオープンループ伝達関数が異なる。オープンループ伝達関数の理論曲線の計算は次項を参照とする。

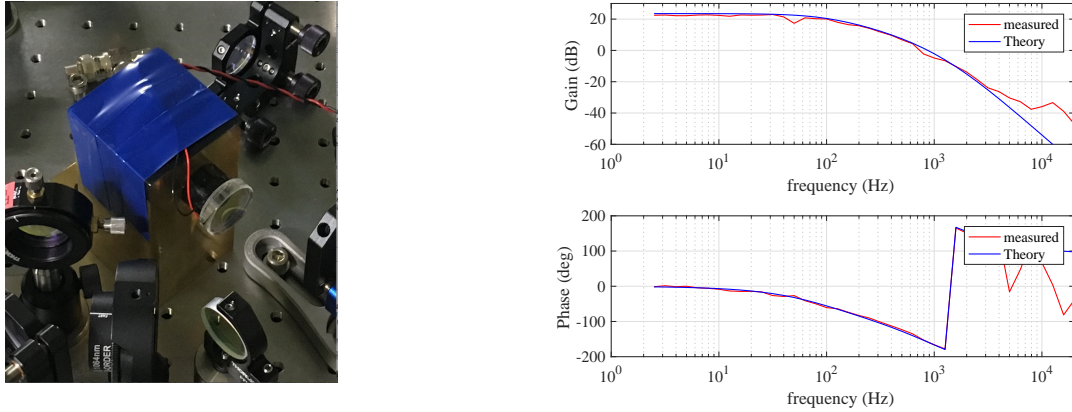


図 5.15: 改善後の Michelson 干渉計の伝達関数

左：折り返し鏡に用いたアクチュエータ。右：改善後の Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数。piezo とフィルター回路を新しくしておりオープンループ伝達関数の形が変化している。アクチュエータの改善により共振ピークが消失した。フィルター回路のゲインは 1000 でカットオフ周波数は 100Hz である。

5.2.2 Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数の理論曲線

オープンループ伝達関数の理論式 G は光学系の伝達関数 H とフィルター回路の伝達関数 F を用いて

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

であった。よって Michelson 干渉計の伝達関数 H_{MI} は

$$H_{MI}(\omega) = \frac{G_{MI}(\omega)}{F(\omega)} \quad (5.16)$$

で求まる。また $H_{MI}(\omega)$ はフィルター回路の伝達関数 $F(\omega)$ によらないので、フィルター回路のゲインとカットオフ周波数が異なるオープンループ伝達関数を測定すれば、正確に $H_{MI}(\omega)$ を求められる。図 5.16 でフィルター回路のゲインを変化させた場合の Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数の変化を図示した。これと図 5.15 で示したオープンループ伝達関数の測定結果を合わせて求めた Michelson 干渉計の伝達関数⁵ は

$$H_{MI}(f) = 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{1}{1 + i\frac{f}{750[\text{Hz}]}} \frac{1}{1 + i\frac{f}{1800[\text{Hz}]}} \quad [\text{V/V}] \quad (5.17)$$

³ただし 5.1 節で用いたミラーマウントは Michelson 実験で用いたものより小型であったため共振周波数が 250Hz に比べて高い。

⁴以前 OMC[21] 実験用に Janis Woehler 氏に設計・制作して頂いたものを使用した。真鍮を用いているためマウントの共振の Q 値が低い。

⁵ H_{MI} は真の干渉計の伝達関数、piezo の伝達関数、フォトディテクタの伝達関数の積となる。このため次元が [V/V] となる。

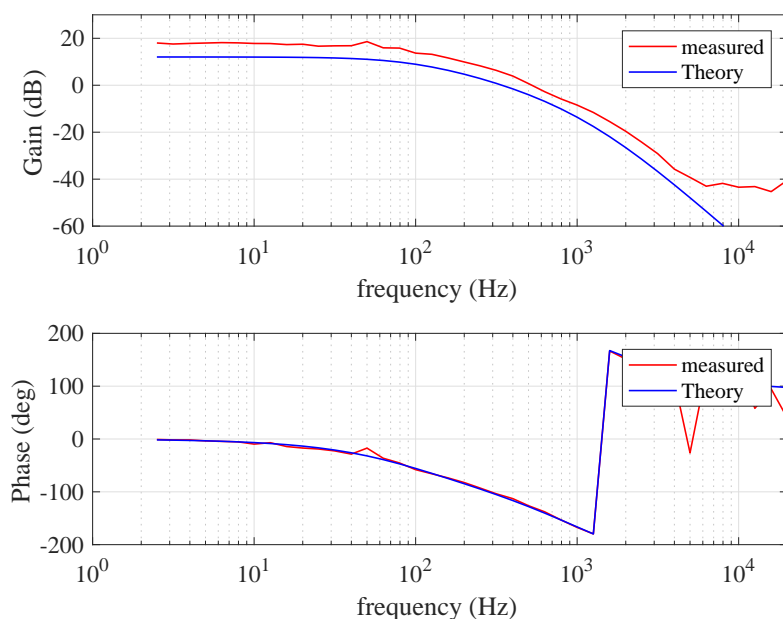


図 5.16: フィルター回路を変えた場合の Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数の変化
 フィルター回路のゲイン 500、カットオフ周波数 100Hz. フィルター回路には SR560 を用いた。位相は測定結果と理論曲線で合致しているがゲインは異なっている。この他に色々なゲイン、カットオフ周波数で測定し、最も合う $H_{MI}(\omega)$ を決定した。

5.2.3 Michelson 干渉計制御の位相補償

図 5.15 から改善後のオープンループゲインは 1Hz 付近で 20dB (= 10 倍) となった。この制御により干渉計にの実効的な雑音は元の雑音の 1/10 程度に押さえ込まれる。固定鏡をもちいた場合は地面雑音の大きさが

$$\delta x(1) \approx 10^{-7} \approx \frac{1}{10} \lambda$$

より

$$\delta x(1)_{\text{actual}} \approx 10^{-8} \approx \frac{1}{100} \lambda$$

となるのでこのゲイン程度で安定である。

ただし将来的には干渉計の鏡を振り子で吊り、離調角を調整して光パネをもつ干渉計にアップグレードする必要がある。離調角を 0.1 度の精度で制御するには実効的な雑音を波長の 1/3600 倍程度まで抑える必要がある。すなわち 1Hz で 50dB 程度のオープンループゲインで制御しなければならない。また先行研究 [20] では、使用した振り子が 1Hz の共振周波数付近で常に 2λ 程度振動すると報告されていた。よって仮に同じ振り子を使用した場合には 1Hz で 70dB 程度のオープンループゲインで制御しなければならない。しかし現状の制御系ではさらにゲインを上げようとする、ユニティゲイン周波数で位相が 180 度以上回ってしまい制御が不安定になる。このような場合には位相補償が必要である (4.1 節の位相補償参照)。本項ではオープンループ伝達関数の低周波側のゲインを上げるためにおこなった位相補償を説明する。

フィルター回路の要求値

Michelson 干渉計の伝達関数の測定結果は式 (5.17) から

$$H_{MI}(f) = 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{1}{1 + i \frac{f}{750[\text{Hz}]}} \frac{1}{1 + i \frac{f}{1800[\text{Hz}]}} [\text{V/V}]$$

であった。よってフィルタ回路の伝達関数 $F(f)$ を用いると、

$$G_{\text{MI}}(f) = F(f) \cdot H_{\text{MI}}$$

となる。ここに 1Hz で のゲインの要求値 70dB を代入すると、

$$20 \log_{10} |F(f)| \approx 106 \text{ dB} \quad (5.18)$$

を得る。これは 2.1×10^5 倍のゲインと等しくハイゲインフィルタが必要だとわかる。

本実験ではハイゲインフィルタに積分回路を用いた⁶。積分回路の伝達関数 F_{int} は

$$F_{\text{int}}(f) = \frac{1 + if/f_{\text{int}}}{if/f_{\text{int}}} \quad (5.19)$$

を満たすと DC ($f = 0 \text{ Hz}$) でゲインが無大となる。実際の DC ゲインはオペアンプのオープンループゲインで制限されるので本実験ではオープンループゲイン 120dB をもつ OP27 を使いゲインを確保した。また、回路の同相雑音を避けるために回路構成を対称化した (付録 C.1 節を参照)。このため実際の積分回路の伝達関数は

$$F_{\text{int}}(f) = \frac{f_{\text{int}}}{if} \quad (5.20)$$

さらに回路内の負帰還抵抗に最大 $1\text{M}\Omega$ の可変抵抗器をつけゲインをコントロールできるようにした。

位相補償

ハイゲインフィルタとは別に位相遅れ補償回路を用い Michelson 干渉計のユニティゲイン周波数を低周波側にシフトさせた。位相遅れ補償回路の伝達関数 F_{comp} は式 (4.12) から

$$F_{\text{comp}}(f) = \frac{f_p}{f_z} \frac{1 + if/f_z}{1 + if/f_p}$$

である。位相余裕が十分取られるように f_z と f_p を調整した。

位相補償後の測定結果

以上にフラットなゲインを与える回路 F_{gain} を付け加え Michelson 干渉計の制御フィルタ回路を作成した。伝達関数の理論式は次式となる：

$$F(f) = F_{\text{gain}}(f) \cdot F_{\text{comp}}(f) \cdot F_{\text{int}}(f) \quad (5.21)$$

図 5.17 に作成したフィルタ回路の伝達関数と、それを用いた際の Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数をプロットした。理論曲線は式 (5.17) と式 (5.21) から求めた。ゲインに関しては結果が理論曲線とよく一致している一方、低周波数帯で位相の測定値と理論値にズレがある。これは低周波数帯はゲインが大きいため正しく波形を読み込めていないためだと考えられる。

このように実験系のオープンループ伝達関数の測定結果と既知の伝達関数から個別のシステムの伝達関数を求められ、またその結果を用いて制御系をより安定にできた。

5.3 SR 干渉計の制御

Michelson 干渉計に SR 鏡を導入した SR 共振器の制御実験を説明する。図 5.18 にその実験系の模式図を示した。入射ビームの空間モードは 5.2 節で作成した Michelson 干渉計のものと同じである。Michelson 干渉計の AS ポート側の計算した位置に曲率付き鏡を設置し SR 干渉計を組んだ。曲率つき鏡の曲率と位置は 4.9 節で説明した手法で定めた。

⁶付録 C の Michelson 干渉計制御用フィルタの最終段の回路である。

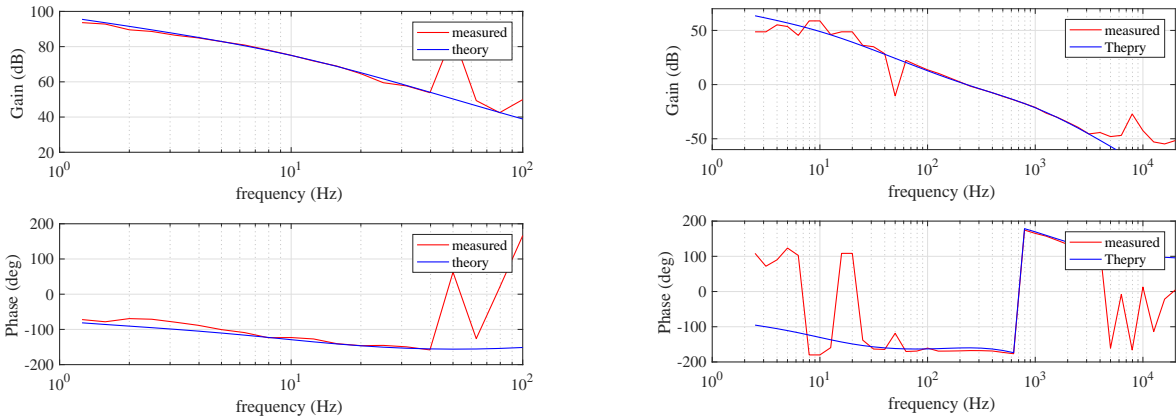


図 5.17: 自作のフィルタ回路を用いた際の Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数
 左: フィルタ回路の伝達関数. 右 Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数. どちらも理論式と一致している. なお測定にはアッテネータを使用し FFT アナライザからの信号を 1 桁程度落として測定した。フィルタ回路のパラメータは $f_p = 10\text{Hz}$ 、 $f_z = 0.015\text{Hz}$ 、 $f_{\text{int}} = 170\text{Hz}$ で $F_{\text{gain}} = 20\text{dB}$ とした。

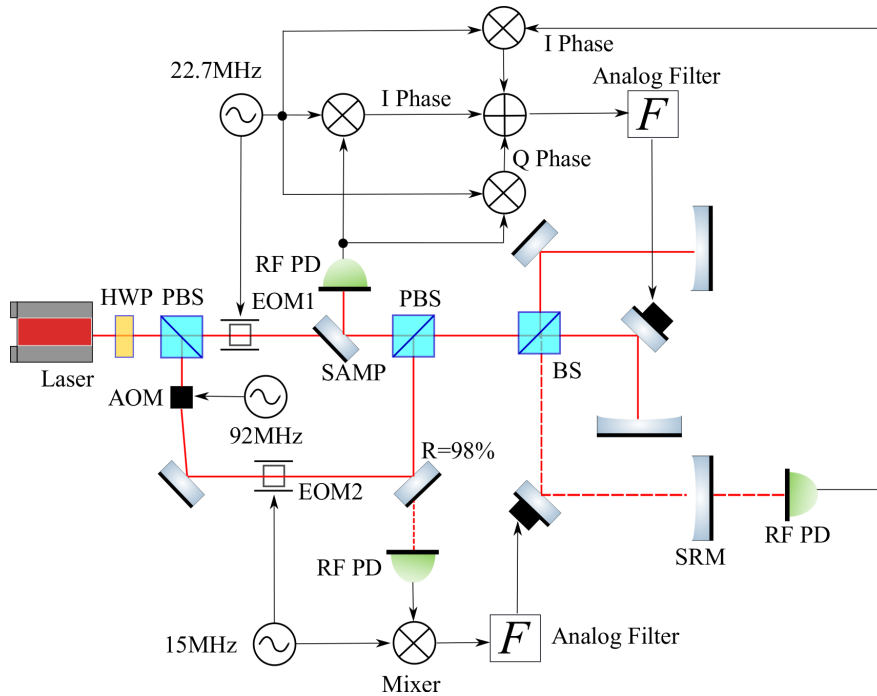


図 5.18: SR 干渉計実験の模式図

5.3.1 Michelson 干渉計の差動変位信号の取得

SR 干渉計の制御信号取得に伴う問題点は 4.5 節で述べており、その解決策として加算器を用い

$$v_{\text{error}} = 100v_{\text{AS,I}} + v_{\text{RFL,I}} + v_{\text{RFL,Q}}$$

を考案した。ただしこれは RFL ポートに現れる全ての信号を取得した場合の表式であり、実際にはサンプラを用いて RFL ポートのビームの 10%程度を取得するので各ポートで取得される信号のゲインを

$$v_{\text{error}} = 10 \times (5v_{\text{AS,I}} + v_{\text{RFL,I}} + v_{\text{RFL,Q}}) \quad (5.22)$$

とするのが良かった。なお取得するビームを制限したのはフォトディテクタに使用したフォトダイオードの損傷閾値⁷と共振回路の飽和条件を考慮したためであり、10 倍のゲインはフィルタ回路に入れる前に信号を増幅し信号雑音比を改善する必要があったためだ。

復調位相の調整方法

4.2 節で復調位相を説明したとおり I Phase と Q Phase の定義は式 (4.20)、(4.21) より次式であった：

$$v_I = \Re(E_0(E_1 + E_{-1})^*) \text{ , if LO} = \cos \omega_m t$$

$$v_Q = \Im(E_0(E_1 - E_{-1})^*) \text{ , if LO} = \sin \omega_m t$$

ただし変調は $\cos \omega_m t$ でおこなったとする。よって復調位相を調整すれば取り出したい位相の信号が得られる。

本実験ではケーブル長の自由度を使い復調位相を調整した⁸。変調周波数が 15MHz の場合、その波長は約 20m である。すなわち、ケーブル長を 1m 変えることで位相を 18 度変えられる。本実験ではフォトディテクタからミキサまでのケーブル長と発振器からミキサまでのケーブル長を延ばしたり縮めたりして復調位相を調整し、欲しい quadrature の信号を取得した。

I Phase と Q Phase の識別方法

Michelson 干渉計のみでは I Phase で取得される信号も Q Phase で取得される信号も同じ形となる (式 (4.33)、式 (4.34))。そこでより信号を区別しやすい Michelson 干渉計の片腕をブロックした際の SR 共振器の線型信号を用い、復調位相を調整した。図 5.19 に計算で求めた制御信号プロットした。実験では図 5.19 と測定された制御信号を見比べながら復調位相を調整した。

5.3.2 SR 共振器の制御信号の取得

SR 共振器の制御信号は AOM で周波数をシフトさせたサブキャリアを用いて取得した。以下でその手順と結果を示す。

AOM アライメント

AOM(Acousto Optical Modulator) は回折格子を用いて周波数をシフトさせる光学素子である [22]。ある媒質に音響波が存在すると回折格子のように作用する屈折の波が発生する。そこに光が入射すると音響波の周波数と同じ値だけ周波数がシフトした回折光が発生し、回折角度 θ は

$$\theta = \frac{\lambda f_{\text{aom}}}{v_{\text{aom}}} \quad (5.23)$$

⁷使用したフォトダイオードの損傷閾値は 50mW である。

⁸2 出力のデジタル発振器を使い出力間に位相差をつけても良い。

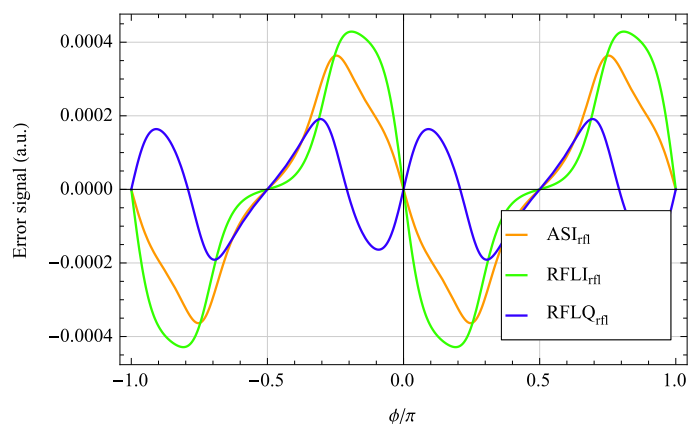


図 5.19: Michelson 干渉計の片腕をブロックした際の SR 共振器の制御信号

となる。ここで λ , f_{aom} , v_{aom} はそれぞれ空気中のレーザーの波長、音響波の周波数、音響波の速度である。したがって AOM でシフトさせる周波数を変化させると出力光の角度も変化する。また最大出力の一次光を得るためには結晶を適切な角度に傾ける必要がある。このため図 5.20 で示したマウントを用い、角度の微調整をおこなった。アライメント後の一次光の変換効率は 90% 以上であった。

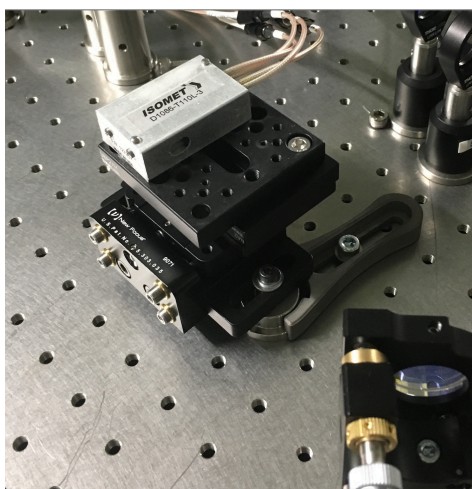


図 5.20: AOM のアライメント用マウント

調整台上に置かれた銀色の直方体の内部に AOM 結晶が入っている。直方体から伸びるケーブルは RF ドライバに接続されており、ドライバによって増幅された RF 信号を伝える。調整台は pitch と yaw の自由度を 4 つのネジを回すことで調整できる。

キャリアとサブキャリアの同時共振

4.5 節で説明した通りサブキャリアとキャリアでは偏光が異なる。鏡に垂直入射する場合を除いて S 偏光と P 偏光では鏡の境界条件が異なるので位相差が発生する。P 偏光と S 偏光の間で発生する位相差をそれぞれ次のように定義する：

$\theta_{BS,r}$: BS の反射

$\theta_{BS,t}$: BS の透過

θ_{MI} : Michelson の腕

θ_{SRC} : SR 共振器

なお Michelson 干渉計の腕で発生する位相差は x 軸 y 軸 方向で同じ鏡を同じ入射角でかつ同じ枚数用いたので、等しくなる。また複数枚の折り返し鏡で発生する位相差はまとめた。このとき SR 干渉計の透過光の電場は

$$E_t'(\Omega) = \frac{2i \sin\left(\frac{d\Omega}{c}\right) t_s \exp\left(\frac{i(l_s+l)\Omega}{c}\right) e^{i(2\theta_{MI}+\theta_{BS,r}+\theta_{BS,t}+\theta_{SRC})}}{2 + r_s \exp\left(\frac{i(l+2l_s)\Omega}{c}\right) \left(\exp\left(\frac{id\Omega}{c}\right) e^{2i\theta_{BS,t}} + \exp\left(-\frac{id\Omega}{c}\right) e^{2i\theta_{BS,r}}\right) e^{2i(\theta_{MI}+\theta_{SRC})}} E_{in}(\Omega) \quad (5.24)$$

となる。位相差がない場合は式 (1.60) から

$$E_t(\omega) = \frac{i \sin\left(\frac{d\Omega}{c}\right) t_s \exp\left(\frac{i(l_s+l)\Omega}{c}\right)}{1 + r_s \cos\left(\frac{d\Omega}{c}\right) \exp\left(\frac{i(l+2l_s)\Omega}{c}\right)} E_{in}(\Omega) \quad (5.25)$$

であり、位相差のため共振条件が変化する。そこで $\theta_{BS,r} = \theta_{BS,t}$ を仮定し、サブキャリアのシフトさせる周波数 $\delta\Omega$ を、

$$\frac{l + 2l_s}{c} \delta\Omega = -2(\theta_{MI} + \theta_{SRC} + \theta_{BS,r}) \quad (5.26)$$

を満たすようにすれば偏光の間に位相差があっても SR 共振器長に対する共振条件を変化させない。すなわち SR 共振器内でキャリアとサブキャリアを同時に共振させられる。

しかし、サブキャリアの周波数をシフトさせると Michelson 干渉計のサブキャリアに対する反射率も変化してしまう。またビームスプリッタの透過と反射で発生する位相差に差があれば完全には補償しきれず、離調に似た効果を残す。

実験では SR 共振器の折り返し鏡につけたアクチュエータを振動させ共振器長を変化させつつ、SR 共振器の透過光強度をモニタすることでサブキャリアの最適周波数を調整した。この結果、シフトさせる周波数は表 4.1 の設計値 87MHz から 92MHz へ変更された。なおこれに伴い差動長の制限は

$$d \geq 0.073 \text{ m}$$

に変化するが、設計段階で 0.11m にしており問題なかった。

5.3.3 SR 干渉計のオープンループ伝達関数

SR 干渉計と SR 共振器を制御し、オープンループ伝達関数を取得した。以下ではその測定結果を説明する。

SR 干渉計の伝達関数

SR 干渉計の一方の基線長さをアクチュエータを用いて変化させ SR 干渉計のオープンループ伝達関数を測定した。なお使用したアクチュエータは 5.2 節で使用したものと同一である。最適フィルタの設計が間に合わなかったのでフィルタ回路には SR560 を使用し、ゲインを 100 倍カットオフ周波数を 3Hz とした。

図 5.21 に測定結果を図示した。図から 100Hz 付近にユニティゲイン周波数があり 1Hz 付近のゲインは 40 ~ 50dB 程度である。このため固定鏡を用いた実験には十分なゲインであるが、将来的にはフィルタ回路を改善しあと一桁程度ゲインをあげる必要がある。

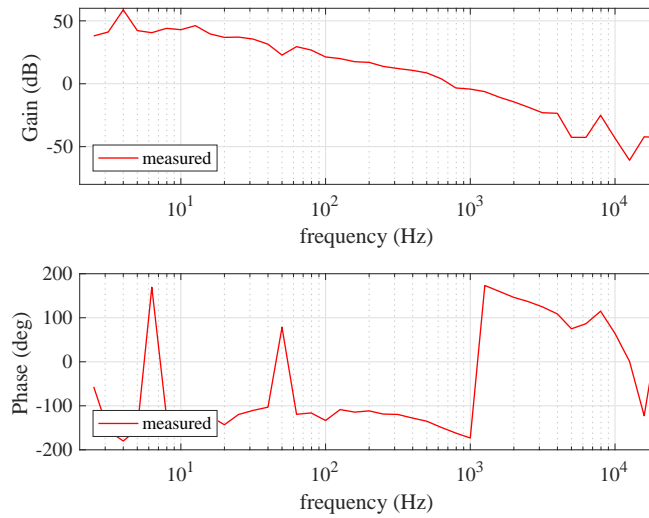


図 5.21: SR 干渉計のオープンループ伝達関数

ユニティゲイン周波数は 700Hz で 1Hz 付近のゲインは 40dB 以上である。フィルタは SR560 を使用しゲインを 100 倍カットオフ周波数を 3Hz とした。

SR 共振器の伝達関数

SR 共振器の基線長をアクチュエータを用いて変化させ、SR 共振器のオープンループ伝達関数を測定した。図 5.22 にその結果をプロットした。SR 共振器の制御には自作のフィルタ回路を用い⁹、適切な位相補償をおこなった。ユニティゲイン周波数は 180Hz で 1Hz 付近のゲインは伝達関数の概形から 50dB を超えていると推測できる。しかし低周波帯での測定は難しくうまく値が取れていない。

図 5.23 に SR 共振器と SR 干渉計を同時に制御した際の時系列データをプロットした。制御の平均継続時間を測っていないが、30 分以上継続することは確認しており本実験では十分であった。

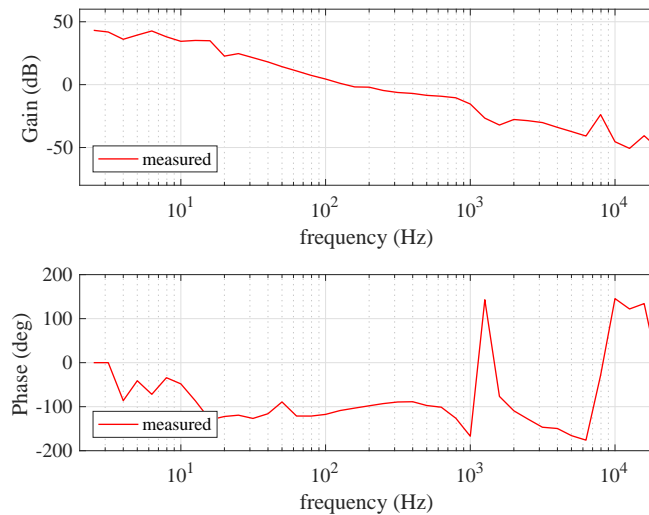


図 5.22: SR 共振器のオープンループ伝達関数

⁹付録 C.8 参照

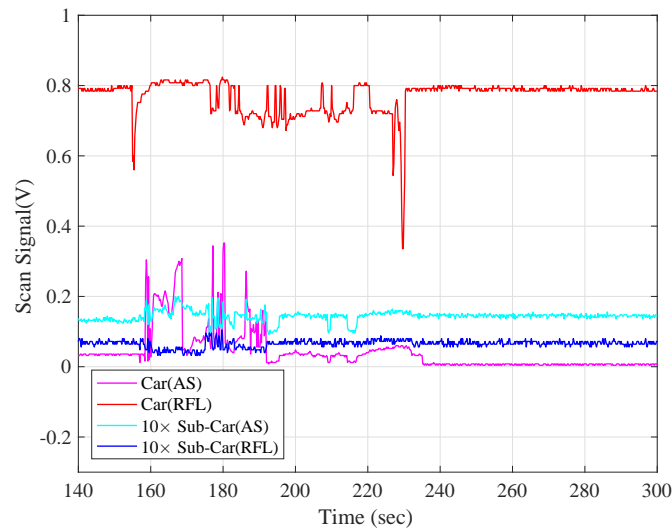


図 5.23: SR 共振器と SR 干渉計の同時制御時の時系列データ

160 秒付近で制御を外し 230 秒付近で制御を再稼働させた。制御が稼働しないと地面雑音などによって鏡が揺らされるため透過光および反射光が揺らぐ。一方で制御が成立していると鏡の変位を打ち消すようにアクチュエータが動くので透過光および反射光は一定の強度を保つ。なお、制御を落とさなければ 30 分以上、制御状態で安定することを確認している。

5.3.4 Michelson 干渉計との比較

測定された SR 干渉計のオープンループ伝達関数から SR 干渉計の伝達関数 $H_{SRMI}(f)$ を計算し、Michelson の伝達関数 (式 (5.17)) と比較した。制御信号はフィルタ回路に入る前に式 (5.22) に従って加算されていた。ダークFRINGE では SR 干渉計の制御信号は AS ポートで取得したものが支配的になる。よって

$$v_{\text{error}} = 50v_{\text{AS,I}} \quad (5.27)$$

以上からこのフィルタ回路を用いて SR 共振器の無い Michelson 干渉計を制御した際のオープンループ伝達関数は

$$H'_{\text{MI}}(f) = H_{\text{MI}}(f) \cdot F(f) \cdot 50v_{\text{AS,I}}$$

であるが、式 (5.17) は RFL ポートの Q Phase で測定した伝達関数であるから¹⁰ 実際に比較すべきは次式となる

$$H'_{\text{MI}}(f) = H_{\text{MI}}(f) \cdot F(f) \cdot \tan\left(\frac{2\pi f_m l}{c}\right) \cdot 50v_{\text{AS,I}} \quad (5.28)$$

図 5.24 に測定された SR 干渉計の伝達関数と式 (5.28) を仮定した際の Michelson 干渉計の伝達関数をプロットした。図 5.24 をみると全体的にオープンループ伝達関数のゲインが上昇している。SR 干渉計のオープンループ伝達関数と Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数の比を光学ゲイン (Optical Gain) とよぶ。測定結果から求めた光学ゲインは 10 ~ 30 dB 程度であった。

5.3.5 信号分離比の測定

本実験ではアクチュエータの関係で干渉計の差動長変位を干渉計の片方の基線長にしか返していない。このため干渉計の差動変位にカップルして SR 共振器長も動いている。また SR 共振器と干渉計のカップルも懸念される。そこでアクチュエータにフィードバックする信号の大きさを測定し、信号の分離比を求めた。

¹⁰Michelson 干渉計単体の制御を RFL ポートでおこなう際に信号の大きさを最適化した。このとき Q Phase が最適な信号取得角度になるため。

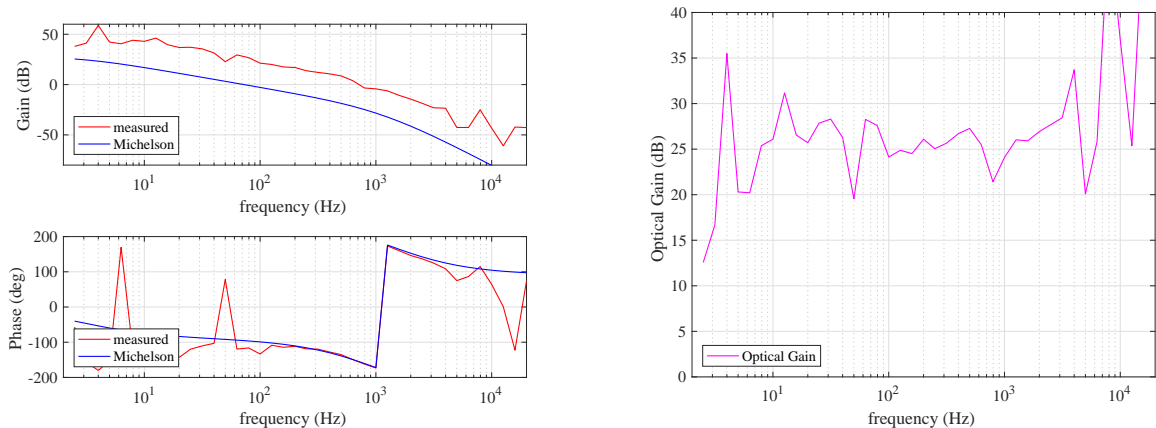


図 5.24: SR 干渉計と Michelson 干渉計のオープンループ伝達関数の比較

左: Michelson 干渉計と SR 干渉計のオープンループ伝達関数の比較. 右. 両者の差. SR 共振器により SR 干渉計のゲインが 10dB から 30dB 上昇している。

アクチュエータ前後で伝達関数を測定したとき、入力 x と出力 y の間には次の関係が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} y_{mi} \\ y_{srm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{mi} \\ x_{srm} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

理想的な制御系では信号のカップリングは無いので、式 (5.29) の行列は対角行列となり ($C_{21} = C_{12} = 0$)、対角成分は系の伝達関数 (クローズドループ伝達関数) に一致する。

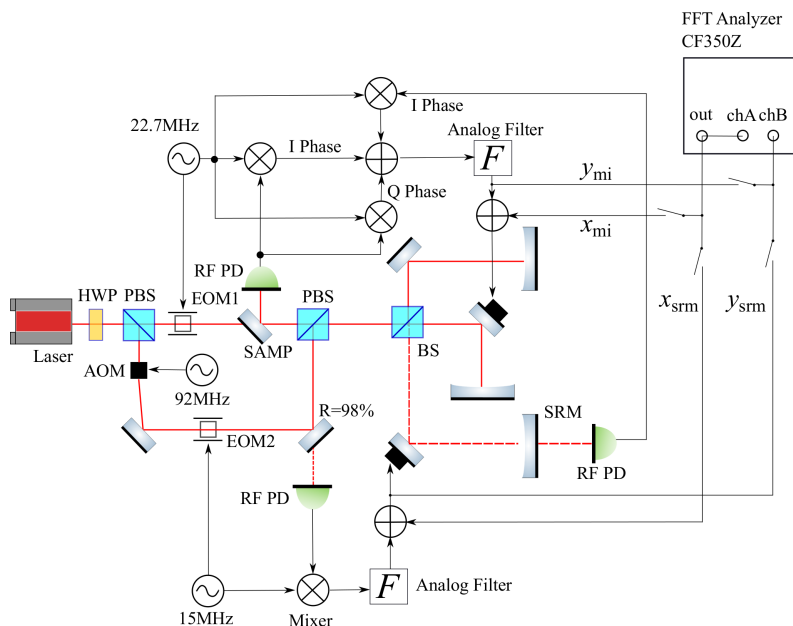


図 5.25: SR 共振器と SR 干渉計の信号混合比の測定

図 5.25 は式 (5.29) の行列を測定するために組んだ実験系である。FFT アナライザの出力を干渉計の折り返し鏡に接続するか SR 鏡に接続するかを切り替え、アクチュエートする鏡を選択した。それと同時に信号の取得場所を干渉計直前にするか SR 鏡直前にするかを切り替えた。入力する信号はいずれの場合も 0.02 V にし、結果は入力信号の大きさと規格化した。

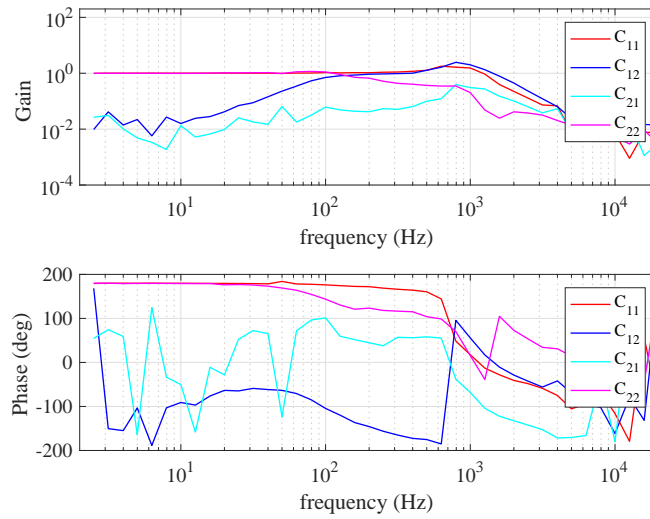


図 5.26: センシング行列の測定結果

5.4 統合実験

非線型光学結晶を SR 共振器に挿入し光学ゲインに変化があるか測定した。はじめに HG 制御時の SR 干渉計の同時制御実験の結果を示し、最後に非線型光学結晶を SR 共振器に挿入したときの実験結果を示す。

5.4.1 SHG と SR 干渉計の同時制御

SR 共振器と SHG の同時制御に成功した。図 5.27 で SR 干渉計と SHG の同時制御に成功した際の写真を載せた。CCD カメラの映像から、Michelson 干渉計は AS ポートが暗く REL ポートが明るいダークフリッジに制御されていると分かる。また SHG から発生した強い第二高調波が見えており、SHG の透過側に置いた CCD カメラの映像からキャリアが SHG 共振器内で共振している様子が確認できる。

SHG 制御時の SR 干渉計の周波数雑音

5.1 節で示した通りアクチュエータの関係から SHG を共振器長の変位をレーザーの周波数に戻して制御した。このため SHG の雑音がレーザー周波数に戻るのそれが雑音となる。

図 5.28 で SHG 制御時に測定した SR 干渉計の雑音スペクトルと SHG 制御していないときに測定した SR 干渉計の雑音スペクトルを比較した。測定ポートは SR 干渉計のフィルタ回路直後である。SHG の制御に伴って低周波側で雑音スペクトルが改善する場合と悪化する場合とがあった。

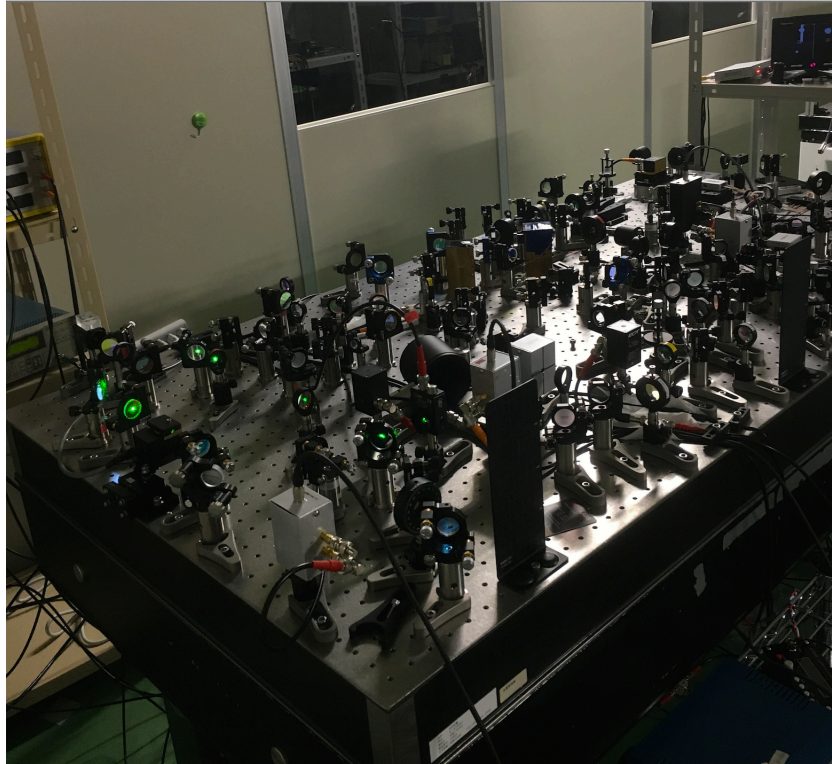


図 5.27: SR 干渉計と SHG の同時制御

写真左手前が SHG 共振器である。SHG 共振器が制御され第二高調波が生成されている様子が見て取れる。画面右奥が CCD カメラの映像であり、それぞれ左端が SHG 共振器の透過光、左下が SR 共振器の透過光 (AS ポート)、右上が Michelson 干渉計の反射光 (RFL ポート) である。

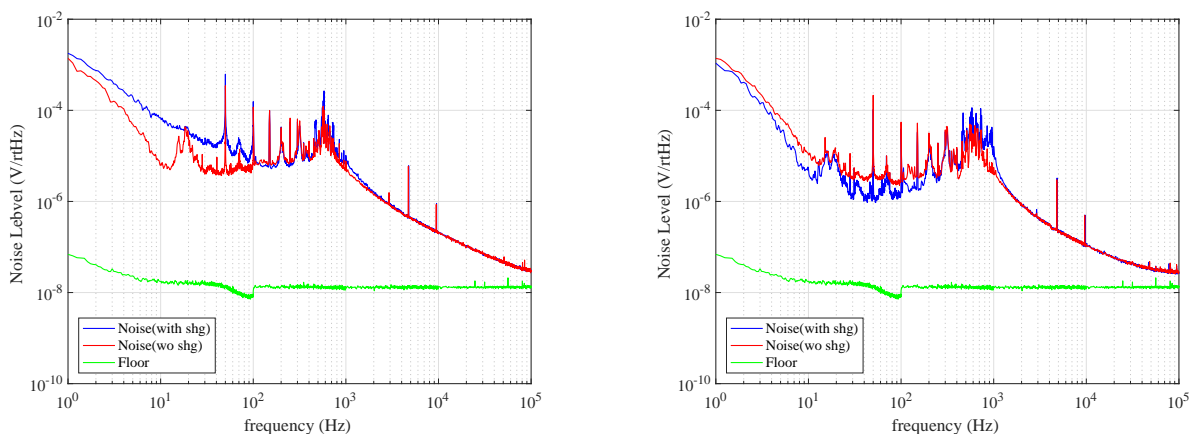


図 5.28: SHG 制御時における SR 干渉計の雑音スペクトル

左.SHG 共振器の制御に伴って雑音スペクトルが悪化している例。右.SHG 共振器の制御に伴って雑音スペクトルが改善している例。いずれも高周波数帯では一致している。

5.5 SR 共振器内に非線型光学結晶を挿入後の SR 干涉計の応答関数測定

非線型光学結晶を SR 共振器内に挿入し SR 干涉計の応答関数が変化するかを測定した。この実験系は図 5.1 である。ポンプ光には SHG で生成した第二高調波を用い、その出力は 40 mW であった。

5.5.1 非線型光学結晶とポンプ光のアライメント

非線型光学結晶を干涉計内部に挿入した際のアライメント手順を示す。非線型光学結晶なしの状態では干涉計のアライメントをおこない、その後干涉計の片腕をブロックした。次に SR 共振器のピエゾに三角波を印可し SR 共振器調を周期的に変化させた。この状態で SR 共振器の透過光が最大になり、かつ挿入した非線型光学結晶で生成される第二高調波¹¹が最大になる位置に非線型光学結晶の挿入位置と角度を微調整した。その後、Michelson 干涉計の片腕ブロックを外した。

図 5.29 に挿入した非線型光学結晶の写真を載せた。ポンプ光を遮っているのにも関わらず写真左上の鏡が緑色に光っているため、SR 共振器内部でも第二高調波が生成している様子が確認できた。ここから非線型光学結晶挿入後も SR 共振器内部でのキャリアの共振が示された。

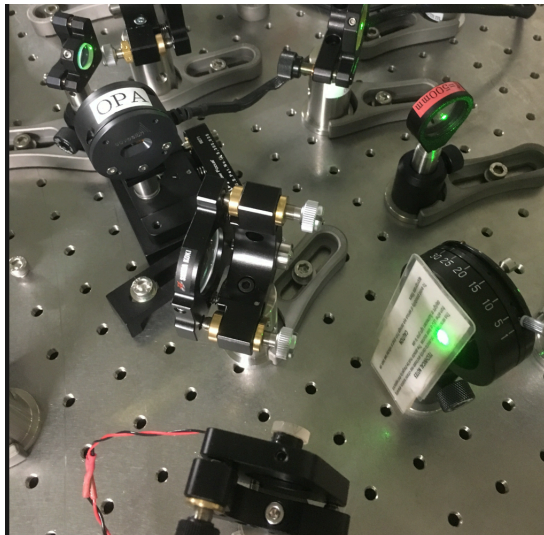


図 5.29: アライメント後の非線型光学結晶

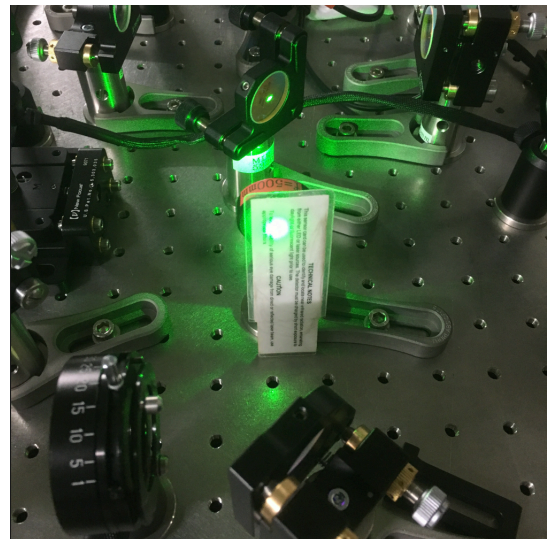


図 5.30: ポンプ光のアライメントの様子

次に非線型光学結晶に入射させるポンプ光のアライメントをおこない、ポンプ光の光軸を SR 共振器内の基本波の光軸に一致させた。レファレンスには SR 共振器内に挿入した非線型光学結晶で生成された第二高調波の光線を用いた (図 5.30)。これは生成された第二高調波の光軸が SR 共振器内の基本波の光軸に一致するためだ。付録 D.2 でおこなったファイバカップリングと同じ手法で光軸を一致させたのち、非線型光学結晶が干涉計に及ぼす効果を測定した。なおポンプ光の引き回しの途中に置いたレンズの位置を、非線型光学結晶内で干涉計内のキャリアの waist とポンプ光の waist が一致するよう調整した。

5.5.2 考慮すべき自由度

非線型光学結晶には結晶設置位置とスクイーミング角の二自由度が存在する。すなわち結晶をビームスプリッターからどれだけ離れた位置に設置するか、また増幅 (or 減衰) させる光子の位相空間上の軸をどこにするかである。

¹¹非線型光学結晶には第二高調波生成で用いたのと同じ種類の結晶 (PPKTP) を使用した。このため基本波の強度が大きい (Michelson 干涉計がブライトフリンジのとき) と第二高調波が生成する。これをレファレンスにし設置位置を調整した。

結晶がビームスプリッタから離れていると、重力波信号(差動変位によるサイドバンド)が位相空間上を回転したのち結晶に入射するので増幅効果が変わる(図 5.31)。またスクイーミング角の選び方でも増幅効果が変わる(図 5.32)。

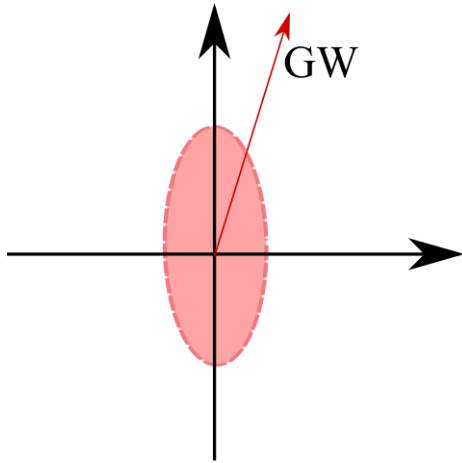


図 5.31: 非線型光学結晶設置位置の自由度

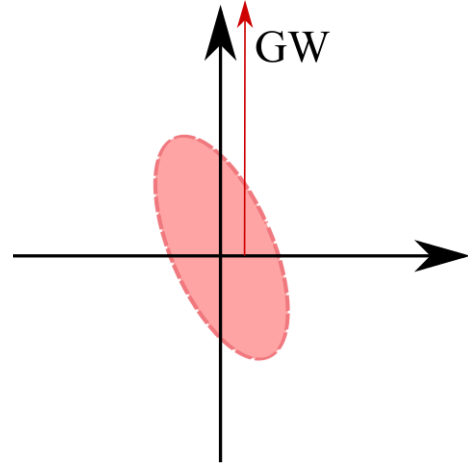


図 5.32: スクイーミング角の自由度

SR 共振器内では干渉計の差動変位が位相空間内を回転するので(図 5.31)、結晶の設置位置によっては期待する効果が得られない。一方、スクイーミング角の自由度(図 5.32)を制御しなければ増幅したい成分を増幅できない。スクイーミング角はポンプ光と干渉計内部のキャリア光の相対位相差によって調整できるので、本修士論文研究ではポンプ光を干渉計に引き込むために使用した折り返し鏡にピエゾを接着し、この鏡をアクチュエートすることでスクイーミング角の調整を試みた。

反対に結晶設置位置の自由度の調整は手法の開発が間に合わなかったので本修士論文研究ではおこなわなかった。

5.5.3 時間掃引機能を用いた測定

非線型光学結晶は 4.20 節で示した通り、干渉計の差動変位に対する伝達関数 $H(\omega)$ を変化させる。しかし本修士論文研究ではスクイーミング角の制御までは至らなかった。このためスクイーミング角の時間変化が、干渉計の差動変位に対する伝達関数 $H(\omega)$ の変化を引き起こすので 5.3 節と同様にオープンループ伝達関数から干渉計の伝達関数を実験的に求めても、それが非線型光学結晶によるものなのか否かを断言できなかった。

一方で測定系を工夫すればある時刻のある周波数における干渉計の伝達関数を直接測定できる。図 5.33 にその実験系を示した。

加算器を用いてフィルター回路の直後に信号 V_{sig} を加え干渉計の差動変位を起こす。この差動変位によって生じる線型信号をフィルター回路の直前で取得すると出力 V_{out} は干渉計の伝達関数 H とフィルタの伝達関数 F を用いて

$$V_{\text{out}} = \frac{H}{1 + FH} V_{\text{in}} \quad (5.30)$$

と書ける。干渉計のオープンループゲイン $|G| = |FH|$ が十分小さい領域では式 (5.30) は

$$V_{\text{out}} \approx H V_{\text{in}} \quad (5.31)$$

と近似される。すなわち干渉計のユニティゲイン周波数以上の周波数をもつ信号を干渉計に入力しそれを取得すれば干渉計の伝達関数のゲイン $|H(\omega)|$ を測定できる¹²。スクイーミング角の時間変化によって $|H(\omega)|$ は時間変化

¹²スクイーミング角が時間変化するため位相は測定できない。

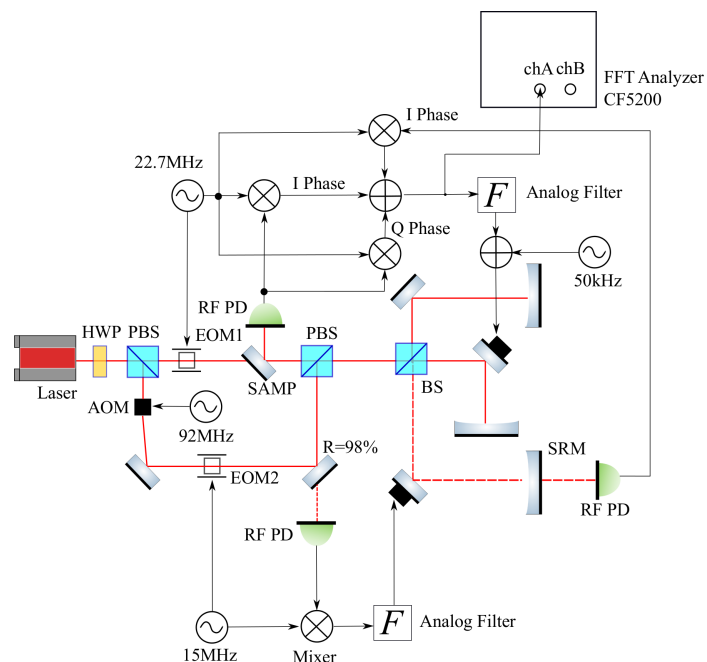


図 5.33: 干渉計の伝達関数を直接測定する実験系

するので、 $|H(\omega)|$ のある周波数成分を測定し続ければ非線型光学結晶が干渉計の伝達関数に与える影響を測定できる。

そこで SR 干渉計の腕あるピエゾに振幅 0.1 V 周波数 50 kHz の電圧を印可し (図 5.34) 出力 V_{out} のうち 50 kHz 成分を FFT アナライザの時間掃引機能を用いてモニタした。測定結果を 5.35 に示した。ポンプ光を入射させた場合とさせない場合で全く変化が現れなかった。

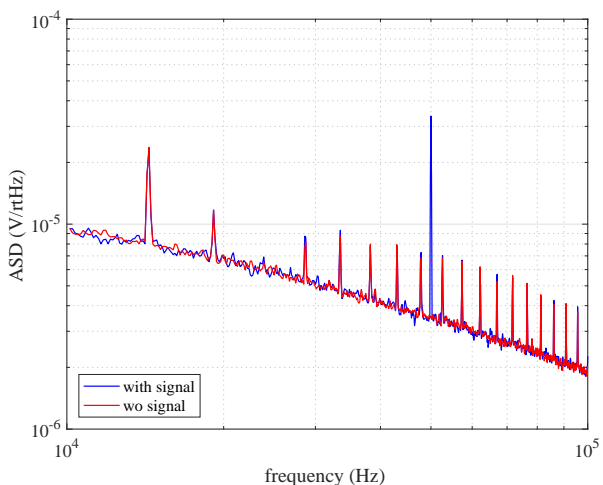


図 5.34: 信号の入力前後の振幅スペクトル (ASD) の比較

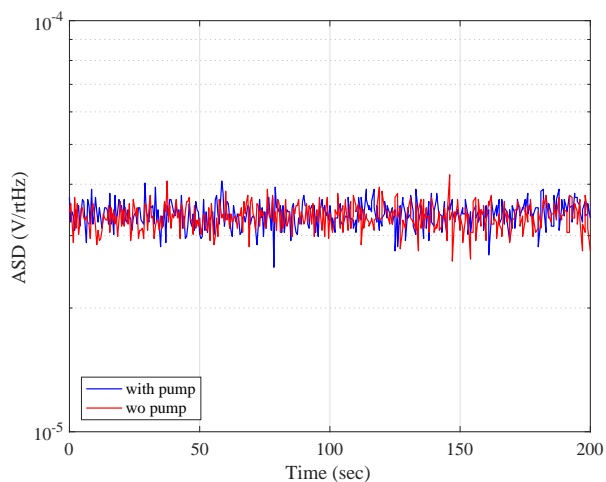


図 5.35: 出力 V_{out} の 50 kHz 成分の比較

5.5.4 ロックインアンプを用いた測定

FFT アナライザの時間掃引では測定間隔が最短で 0.5 秒であった。このためキャリア光とポンプ光の相対位相変化はこの測定間隔よりも速かったため非線型光学結晶の影響を測定できなかった可能性があった。そこでロックインアンプを使用し、50 kHz 成分をさらに短い間隔で測定した。

しかしロックインアンプからの雑音が大きく、FFT アナライザを使用しても干渉計の伝達関数 $H(\omega)$ の変化を測定できなかった。

第6章 議論

本章では研究の過程で得られた実験・理論の結果を議論する。

6.1 重力波検出器の量子雑音

非線型光学結晶を用いた次世代重力波検出器の感度 $\sqrt{S_h}$ を議論する。非線型光学結晶を用いた場合の検出器の真空場および差同変位に対する伝達関数は次式で与えられた：

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} e^{2i\beta} & A_{11} & A_{12} \\ & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \mathbf{a} + \sqrt{2\mathcal{K}} t_s e^{i\beta} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \frac{h(\omega)}{h_{\text{SQL}}} \quad (6.1)$$

$$M = s + sr_s^2 e^{4i\beta} - r_s e^{2i\beta} [(1 + s^2) \cos 2\phi + \mathcal{K} \sin 2\phi] \quad (6.2)$$

$$A_{21} = t_s^2 \left(\frac{1 + s^2}{2} \sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi \right) \quad (6.3)$$

$$A_{22} = (1 + r_s^2) \left(\frac{1 + s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2sr_s \cos 2\beta + \frac{1 - s^2}{2} t_s^2 \quad (6.4)$$

$$H_2 = -(-1 + sr_s e^{2i\beta}) \cos \phi \quad (6.5)$$

$$\mathcal{K} = \frac{20\Omega P}{mc^2 \omega^2} \quad (6.6)$$

$$h_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{20\hbar}{m\omega^2 L^2}} \quad (6.7)$$

$l_s \ll L$ より SR 共振器内の位相差を無視した。簡単化のためにホモサイン角を調整しない場合の感度を考えると

$$\sqrt{S_h} = \sqrt{\frac{|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2}{2T_s |H_2|^2 \mathcal{K}}} h_{\text{SQL}} \quad (6.8)$$

となる。式 (6.1) から $M = 0$ を満たす周波数では真空場との差動変位の伝達関数はともに発散する。すなわち何かしらの共振現象が発生している。物理的にはこれは光バネ (Optical Spring) の共振と解釈される¹。

$M = 0$ となる周波数を解析的に解くと次式を得る：

$$f_{\text{OS}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20\Omega P}{mc^2 s}} \sqrt{\frac{\sin 2\phi}{-(s + 1/s) \cos 2\phi + (r_s + 1/r_s)}} \quad (6.9)$$

一方、真空場の雑音が最小になる周波数も存在する。 $|A_{21}| = 0$ および $|A_{22}| = 0$ となる周波数を解析的に解くと次式を得る：

$$f_{|A_{21}|=0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2 s}} \sqrt{\frac{\cos \phi}{(s + 1/s) \sin \phi}} \quad (6.10)$$

$$f_{|A_{22}|=0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2 s}} \sqrt{\frac{(1 + r_s^2) \sin 2\phi}{(1 - r_s^2)(s - 1/s) - (1 + r_s^2)(s + 1/s) \cos 2\phi + 4r_s}} \quad (6.11)$$

¹光バネの説明は [20]

$r_s \rightarrow 1$ かつ $s \rightarrow 1$ の極限では式 (6.9)、式 (6.10)、式 (6.11) は一致する。しかし一般に光バネの共振周波数とは一致しない。

本研究室の先行研究 [16][20] では光バネの共振周波数で信号が増幅するため信号雑音比が改善し検出器の感度が改善すると指摘し、 f_{OS} が実解をもたなくなる周波数まで検出器の最良感度周波数をシフトさせられると主張していた。すなわちスキューニングファクタとして

$$s = \frac{1 + r_s^2 - \sqrt{(1 + r_s^2)^2 - 4r_s^2 \cos^2 2\phi}}{2r_s \cos 2\phi} \quad (6.12)$$

を選べば f_{OS} が無限大となる干渉計が実現でき、その結果狭帯域ではあるが高周波数帯の感度を改善できるとした²。

しかし信号雑音比には M は関与せず、 $M = 0$ の周波数と最良感度の周波数も異なる。よって非線型光学結晶を用いた重力波検出器の感度向上は信号増幅の効果というよりはむしろ雑音が減る効果によると言える。

さらに通常の干渉計構成 (ホモダイン角が 0 度) においては $|A_{21}|$ すなわち、真空場の振幅成分が周波数成分に現れる項が干渉計の高周波数帯の最良感度を制限する。式 (6.10) と式 (6.11) から

$$f_{|A_{22}|=0}^2 - f_{|A_{21}|=0}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{20P\Omega}{mc^2 s} \frac{2(-1 + sr_s)^2 \cos 2\phi}{s[(1 - r_s^2)(s - 1/s) - (1 + r_s^2)(s + 1/s) \cos 2\phi + 4r_s](s + 1/2) \sin \phi} \quad (6.13)$$

が成り立つ。 $f_{|A_{21}|=0}$ と $f_{|A_{22}|=0}$ が実解を持つ範囲では式 (6.13) は必ず正となり、さらにアンチスキューニング ($s < 1$) では $sr_s < 1$ となるので

$$f_{|A_{22}|=0} > f_{|A_{21}|=0} \quad (6.14)$$

ゆえにスキューニングファクタを用いて最良感度をシフトさせたとしても $|A_{21}|$ によって制限される。言い換えると高周波数帯の感度は $|A_{21}|$ によって制限される。

$f_{|A_{21}|=0}$ は式 (6.10) と $s^2 + 1 \geq 1$ より

$$f_{|A_{21}|=0} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{\cos \phi}{\sin \phi}} \quad (6.15)$$

であり右辺はスキューザーを用いていない場合の $\sqrt{2}$ 倍の周波数となる。すなわち OPO を用いてアンチスキューニングをおこなったとしても最良感度の周波数は OPO が無い場合の $\sqrt{2}$ 倍にしかならない。またこの周波数を超えて $f_{|A_{21}|=0}$ を高周波数帯にシフトさせても感度は $|A_{21}|$ によって制限され、そのときの値は

$$h_{\text{lim}} = \sqrt{S_h} = \frac{T_s(1 + s^2) \sin \phi}{1 - sr_s} \cdot \frac{h_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}} \quad (6.16)$$

となる。図 6.1 で式 (6.16) で求めた限界感度とスキューニングファクタを変えた際の感度曲線との関係を示した。図から式 (6.16) は標準量子限界では求められなかった感度限界を高周波数帯で与えていると分かる。

高周波数帯で h_{lim} を超えた感度を実現するためにはホモダイン角を変えられるような測定をしなければならない。

²実際には位相遅れの効果が現れるので無限大にはできないが、それでも高周波数まで持っていける。

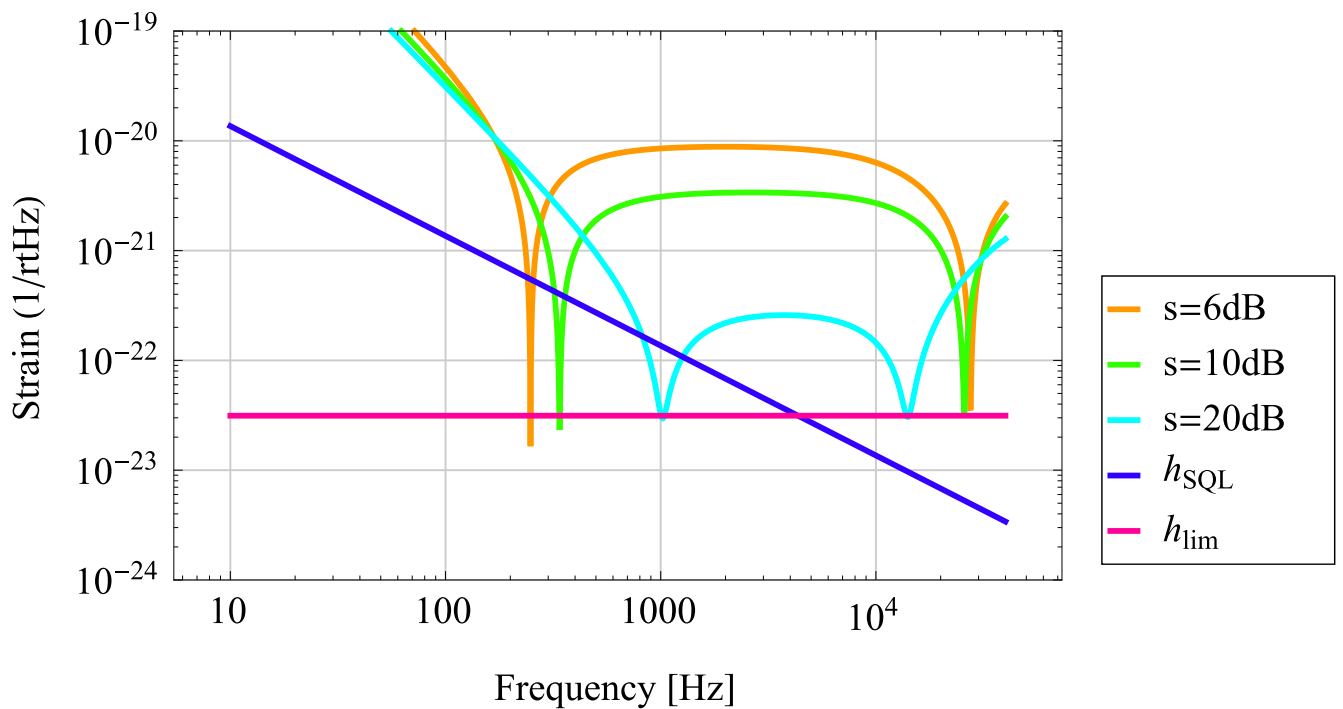


図 6.1: 考案された次世代重力波検出器の限界感度

スクイージングファクタが小さいときは $f_{|A_{21}|=0}$ と $f_{|A_{22}|=0}$ がほとんど同じ値となるので感度のディップが鋭くなっている。スクイージングファクタの増加に伴って両者の周波数差が大きくなりディップはなだらかになる。十分高い周波数では式 (6.16) によって感度は制限される。なおスクイージングファクタが小さい場合の限界感度は h_{lim} よりもよくなる。ただしこのような感度を実現する最大周波数はスクイージングをおこなっていないときの $\sqrt{2}$ 倍にしかならない。

6.2 実験

6.2.1 第二高調波生成実験

第二高調波の生成に成功しその変換効率は入射パワー 200mW でおおよそ 25%であった。さらに第二高調波の入射パワー依存性は実験で測定した PPKTP の特性から計算した理論曲線に一致した。本項ではどうすれば変換効率を改善できるかを議論する。

SHG の変換効率の改善には、シングルパスでの変換効率 $\alpha[1/W]$ の改善とロスの改善がある。本実験では結晶を加熱するオープンの関係で w_0 を $50\mu\text{m}$ 程度までしか絞れなかったが、オープンを改善しビームをより絞れるようになれば変換効率を改善できる。原理的には結晶の中心にビーム waist をもち、結晶端(中心から 5mm)でのビーム径が $0.5/3 = 0.17\text{mm}$ 以下となるものが本実験系で最も絞られたビームとなる。よって式 (4.102) からビーム waist は $10\mu\text{m}$ と計算される：

$$w_0 \geq 10 \mu\text{m} \quad (6.17)$$

実験的には $w_0 = 30\mu\text{m}$ の結果の変換効率が最大であるのでこの値 ($\alpha = 6 \times 10^{-3} \text{W}^{-1}$) を用いて変換効率を計算した (図 6.2)。図から SHG の変換効率が全体的に改善している様子が分かる。

また図 6.2 に結晶のロスを改善した場合の変換効率をプロットした。図から線型ロスの改善改善はシングルパスの変換効率の改善と同様に SHG の変換効率を全体的に良くすると分かる。一方、 a の改善は第二高調波のパワーに依存するロスの改善につながるので強い基本波をいれた際に効いてくる。

ゆえに強い第二高調波を得るには結晶のロスの改善が有効で、特に第二高調波のパワーに依存した項を小さくする必要があると結論できる。

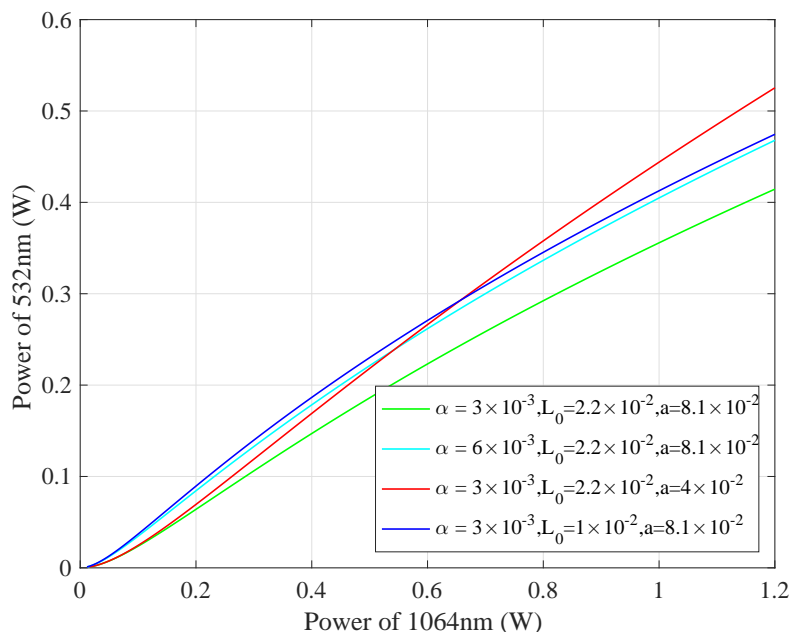


図 6.2: SHG の変換効率の改善例

シングルパスの変換効率 $\alpha[\text{W}^{-1}]$ を改善した例とロスを参考文献 [19] の値まで下げた例をプロットした。なお本実験系の理論曲線と比較するため変換効率とロスを改善していない理論曲線も同時にプロットした。

6.2.2 Michelson 干渉計制御実験

Michelson 干渉計を制御し、さらに理論通りの伝達関数を得られた。これにより電気回路を用いた位相補償によって制御の安定性確保が可能だと示された。しかし十分なオープンループゲインを得るためにハイゲインの電

気回路を使用した。これは干渉計の基線長の非対称性 (アシンメトリ) が最適化されていないためだ。式 (4.34) より制御信号は $\sin(\omega_m d/c)$ に比例する。よってサイドバンドに対するアシンメトリが存在する。この場合、

$$\frac{\omega_m d}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (6.18)$$

を満たすアシンメトリが最適値であり、それは 3.3m である。ただこのようなアシンメトリをつけるのはテーブルトップ実験ではかなり難しいうえに本実験では SR 干渉計にする必要があったので、それも踏まえたアシンメトリの設計となっていた。

ハイゲインの電気回路を用いた制御は雑音を生むので出来るだけ光学ゲインを確保するのが好ましい。

6.2.3 SR 干渉計制御実験

SR 干渉計のオープンループ伝達関数の正当性を評価する。SR 干渉計の差動変位の伝達関数は式 (4.114) であった：

$$H_{\text{SRMI}} = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}t_s} e^{i\beta} H_2}{h_{\text{SQL}} M} \quad (6.19)$$

$$M = 1 + r_s^2 e^{4i\beta} - 2r_s e^{2i\beta}$$

$$H_2 = 1 - r_s e^{2i\beta}$$

実験と比較するため離調はゼロとした ($\phi = 0$)

$r_s = 0$ が Michelson 干渉計の差動変位に対する伝達関数である：

$$H_{\text{MI}} = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}t_s} e^{i\beta}}{h_{\text{SQL}}} \quad (6.20)$$

すなわち、

$$H_{\text{SRMI}}(\omega) = \frac{H_2(\omega)}{M(\omega)} H_{\text{MI}}(\omega) = \sqrt{\frac{1+r_s}{1-r_s}} \frac{1}{1 - i \frac{2r_s L}{c(1-r_s)} \omega} H_{\text{MI}}(\omega) \quad (6.21)$$

ここで $\beta \ll 1$ と近似した。Michelson 干渉計と SR 干渉計の伝達関数の比はゲイン G 、カットオフ周波数 f_c をもつ 1 次のローパスフィルタに一致する：

$$\frac{H_{\text{SRMI}}(\omega)}{H_{\text{MI}}(\omega)} = \frac{G}{1 - i \frac{f}{f_c}} \quad (6.22)$$

$$G = \sqrt{\frac{1+r_s}{1-r_s}} \quad (6.23)$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r_s}{r_s} \cdot \frac{c}{2L} \quad (6.24)$$

カットオフ周波数を実験のパラメータを用いて計算すると³、 $f_c = 1.2 \times 10^5 \text{ Hz}$ となる。よって本実験の測定範囲 $2 \leq f \leq 2 \times 10^4 \text{ Hz}$ では Michelson 干渉計と SR 干渉計の伝達関数の比は周波数によらず一定となり、その比は

$$G = \sqrt{\frac{1+r_s}{1-r_s}} = 14 \Rightarrow 20 \log_{10} G = 23 \text{ dB}$$

これは実験結果 (図 5.24) に概ね一致している。

より正確にオプティカルゲインを評価するためにはサイドバンドの透過率と AS ポートに漏れ出てくるキャリア光の強度を考慮に入れる必要がある。一方で実験では Michelson 干渉計単体をダークフリンジ制御した場合と SR 干渉計をダークフリンジ制御した場合とで AS ポートで取得した DC 光の強度に大差はなかった。このためオプティカルゲインを正確に見積もられた可能性が高いと結論した。

³ $R_s = 0.98$ 、 $L = 2\text{m}$ 。なお L は SR 共振器長も考慮にいれた。

6.2.4 信号分離

結果(図 5.26) から 100 Hz 以上の周波数帯域では、SR 共振器長を変化させると干渉計にもフィードバックされ、その大きさは SR 共振器長のオープンループ伝達関数が小さくなるにつれ大きくなることが示された。すなわち、SR 共振器長が制御がされている周波数帯域では SR 共振器長変化が抑制されるので干渉計に与える影響が小さくなり、反対に SR 共振器長が制御がされていない周波数帯、つまりユニティゲイン周波数以上では SR 共振器長変化がそのまま干渉計に影響を与えてしまう。このため SR 共振器長から干渉計へのカップルを小さくするには、最適なフィルタを設計するなどし目的の周波数帯域で SR 共振器長制御に十分なゲインを持たせればよい。一方で干渉計の片方の基線長を変えた際に現れる SR 共振器長へのフィードバック信号は、SR 共振器長を同じだけ変化させたときの 1/100 程度であった。よって干渉計の差動変位を測定するために干渉計の片方の基線長のみを変化させたが、これに伴う同相長変化は無視してよいと結論された。すなわち図 5.24 で示した結果は確かに SR 干渉計の差動変位に対する光学ゲインであると結論できた。

なおいずれの場合も 10 Hz 以下では自由度のカップルにより現れる信号はフィードバックしたい信号の 1/100 程度であった。[7] の理論を間接的に検証するには非線型光学結晶を光ばねの共振周波数シフトをみるのがよい。ただし光ばねの共振周波数は非線型光学結晶を用いない場合は、本実験系で用いたレーザー強度 (≤ 600 mW) では 10 数 Hz が限界である。ゆえに測定帯域は 10 数 Hz となるので本修士論文研究で実現した制御系は [7] の実験的検証の次の光ばねの共振周波数シフト測定に対しても有効だと言える。

6.2.5 結合実験

SHG 制御時の SR 干渉計のノイズスペクトル

SHG の制御雑音が SR 干渉計に与える影響を議論する。本実験ではアクチュエータの関係で SHG 共振器の制御信号をレーザーの周波数に返した。このため SHG 共振器の雑音がレーザーの周波数雑音となりうる。まず SHG 共振器の雑音が周波数雑音を発生させる機構を述べる。

SHG の伝達関数を次式のとおり伝達関数を分けて考える：

$$H_{\text{SHG}}(\omega) = H_{\text{cav}}(\omega) \cdot H_1(\omega) \quad (6.25)$$

ここで $H_1(\omega)$ [Hz/V] は印可電圧に対するレーザー周波数変化の伝達関数であり、 H_{cav} [V/Hz] はレーザー周波数変化に対する共振器長の変化とそれに伴う制御信号の変化を合わせた伝達関数である。

SHG 共振器の雑音を考える。このとき SHG 共振器に与える地面雑音 $X_n(\omega)$ の影響は負帰還によって実質的に

$$X_{\text{act,SHG}}(\omega) = \frac{1}{1 + G(\omega)} X_n(\omega)$$
$$G(\omega) = H_{\text{cav}}(\omega) \cdot H_1(\omega) \cdot F(\omega)$$

となる(式(4.5)参照)。ここで $F(\omega)$ はフィルタ回路の伝達関数である。

一方で SHG の雑音がフィードバックを通じてレーザー周波数に影響を与える：

$$X_{\text{act,freq}}(\omega) = \frac{H_{\text{cav}}(\omega) \cdot F(\omega)}{1 + H_{\text{cav}}(\omega) \cdot H_1 \cdot F(\omega)} X_n(\omega) \approx \frac{1}{H_1(\omega)} X_n(\omega)$$

すなわち、 $H_1(\omega)$ の大きさによっては周波数雑音を増加させる。周波数変化が共振器長の変化と区別できないため、周波数雑音は SR 干渉計の雑音を増加させる。このため SHG 共振器で発生した雑音(例えば電源系のパルス雑音や非線型光学結晶のオープンの温度揺らぎ)が、レーザー周波数を介して SR 干渉計の雑音となった可能性がある。またこれとは別に第二高調波の散乱光が影響した可能性もある。

周波数雑音を増加させないためには雑音レベルを下げる工夫の他に、アクチュエータをもう一台使用し SHG 共振器長制御を、レーザー周波数を用いた間接的な制御から直接制御に変更するというのがある。本研究ではアクチュエータの関係で本研究室の先行研究 [16][17] に従ったが、多くの類似研究では SHG 長を直接制御している。また本研究の過程で本研究室の先行研究 [20] で問題であったミラーマウントの共振によりユニティゲインを上げられない問題も解決しており、制御法を変えるのは有望だと言える。

非線型光学素子を挿入した際の干渉計の伝達関数変化

非線型光学結晶を SR 共振器内部に挿入しても同様の制御方法が有効だと示された。また干渉計をブライトフリンジに制御した際に SR 共振器内の非線型光学結晶から第二高調波が生成されたことから、キャリアの SR 共振器内での共振を間接的に示された。

一方で非線型光学が干渉計の伝達関数に与える影響は測定できなかった。この理由として次の2つが上げられる：

- ポンプ光のアライメントが不十分であった
- 非線型光学結晶が干渉計の伝達関数 $H(\omega)$ に与える影響が小さく、その他のロスに埋もれてしまった

ポンプ光のアライメントの際に SR 共振器内で発生した第二高調波をレファレンスにした。しかしこれはあくまで疎調であり、当初の計画では $H(\omega)$ の変化を測定しながら光軸やレンズの位置を微調する予定であった。ところが本修士論文研究では $H(\omega)$ の変化を測定できなかったので微調のためのレファレンスが無く、結果として疎調しかおこなえなかった。このため非線型光学結晶の内部でキャリア光と第二高調波の間の相互作用が十分でなく信号の増幅が起きなかった可能性がある。

非線型光学素子にロスがあった場合となかった場合の非線型光学結晶が干渉計の伝達関数 $H(\omega)$ に与える影響を式 (4.95) と式 (4.114) から計算した。図 6.3 でその結果を示した。非線型光学結晶挿入後の $H(\omega)$ と挿入前の $H(\omega)$ の比をプロットしている。計算結果からロスの増加に伴って非線型光学効果が測定しにくくなると示された。仮に結晶挿入に伴って 5% のロスが加わったとすると、非線型光学結晶の挿入により増加する信号のゲインは 1.1 倍 (約 0.8 dB) 以下であり、その他の雑音の影響を受けやすい周波数帯では測定が不可能となる。仮にロス無しだったとしても増加する信号のゲインは 1.5 倍 (3.5 dB) 程度でありこの場合も雑音の影響が大きいと測定が難しい。

類似研究では光子のスケーリングの測定する際には雑音の影響を小さくするために、本修士論文研究でおこなった測定よりも 2 桁高い周波数帯 (数 MHz 帯) でおこなう [11][15]。本修士論文研究で使用した FFT アナライザは 100 kHz が測定限界⁴ であり、今後実験を進める上では雑音を下げるだけでなく、測定周波数帯を見直すことも必要だといえる。

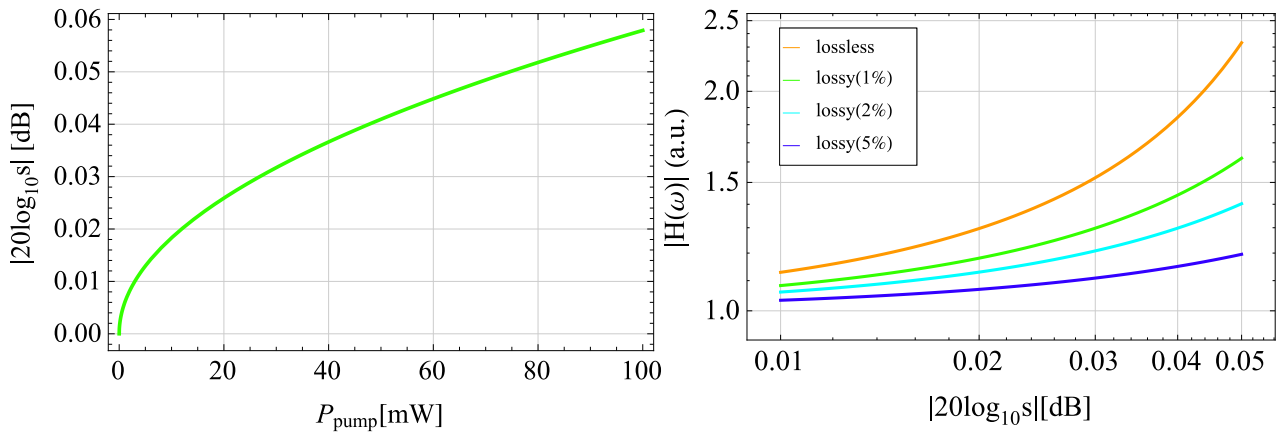


図 6.3: 左：期待されるスケーリングファクタの見積もり、右： $H(\omega)$ のロスの影響

図 6.3 では非線型光学結晶を挿入した場合と挿入しない場合の伝達関数の比をプロットした。ロスがあると非線型光学結晶による伝達関数の変化が測定しづらくなる。なお非線型光学結晶のロスにより SR 鏡の反射率が低下するとして計算した ($R_s = \sqrt{0.98 \times \sqrt{1 - L_{\text{loss}}}}$)。

⁴RF フォトディテクタ作成に使用した FFT アナライザは 1GHz まで測定可能だが、データの取り出しや値の校正をおこなっておらず今回は使用を見送った。

結晶の設置位置

より高効率な SHG や OPO を作成するためにはビームを絞るために共振器の小型が重要である。この目的を達成するために非線型光学結晶の面を加工し鏡のようにする技術がある [15]。この技術を用い SR 鏡を非線型光学結晶で作成すれば、結晶の設置自由度をある程度制限できる。

ただし、結晶のどの位置で非線型光学効果が発生するかは厳密には分かっておらず結晶設置位置の不定性は残る。また必然的に SR 鏡でのビーム径が小さくなるため、大型干渉計やハイパワー干渉計には向かないといった課題も残る。

第7章 結論

非線型光学結晶を用いた次世代重力波検出器の感度改善には信号増幅の効果だけでなく量子雑音を減らす効果がより重要である。また感度が最も良くなる周波数は光バネの共振周波数 [7][16] というよりは量子雑音が最も減る周波数である。このため通常の測定方法ではたとえ非線型光学結晶のスケーリングファクタを自由に換えられたとしても、[20] で指摘された重力波検出器の最良感度の周波数を発散させるような効果は得られない。また最良感度は非線型光学結晶を使わないときの $\sqrt{2}$ 倍までしか高周波数帯へシフトせず、高周波数帯の感度は式 (6.16) によって制限される。この感度限界の式は標準量子限界を超える検出器の新たな感度限界となっており、今後の研究で物理的な解釈が与えられると期待される。一方光バネの共振周波数 (信号が増幅される周波数) と量子雑音が最も減る周波数の解析解は近い値となった。信号が増幅されれば感度が量子測定の大敵であるロスの影響を受けにくくなるので将来的にロスの影響を評価すれば本研究の意義がより明確化すると予想される。

テーブルトップ実験においては本研究室の先行研究 [20] で課題であった SR 干渉計における SR 共振器と Michelson 干渉計の同時制御に成功し、SR 干渉計の伝達関数と Michelson 干渉計の伝達関数の比較から設計通りのものを作成した可能性が高いという結論に至った。また制御のゲインおよび信号の分離は検証実験を進めていくのに十分であった。さらに本研究室の先行研究 [16][17] で課題となっていた検証実験で用いるための強い第二高調波の生成にも成功し、その変換効率も理論曲線に合うことが確認された。

非線型光学結晶を SR 共振器の内部に挿入した状態での干渉計制御には成功したが、SR 干渉計の伝達関数変化は測定時の雑音が大きすぎたために測定できなかった。測定には雑音源の特定が必要なだけでなく、測定方法も再考する必要がある。また [7] の理論を実験的に検証する実験的な課題として、非線型光学効果の 2 自由度 (スケーリング角と結晶設置位置) の制御方法を考案する必要がある。

付録A 非線型光学結晶の位置調整と干渉計の感度

干渉計感度を計算した際に BS と非線型光学結晶の間に距離を設けなかった。すなわち干渉計から出た重力波信号をそのまま OPO に入射させた。この設定では感度が最も良くなる周波数 f_{optimal} は $f_{|A_{21}|=0}$ に一致し、さらにその最大値は OPO を挿入しない場合の $\sqrt{2}$ 倍しか改善しなかった：

$$f_{\text{optimal}} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} = \sqrt{2} \times f_{|A_{21}|=0, s=1} \quad (\text{A.1})$$

しかし実際には OPO を置く位置の自由度がある。すなわち重力波信号が OPO に入射する前に Phaser Diagram 上で角度 ψ だけ回転し、デチューン角の合計は $\psi + \phi$ となる。以下ではこの自由度を用いたとしても、 f_{optimal} が $\sqrt{2} \times f_{|A_{21}|=0, s=1}$ を超えないことを証明する。

BS と OPO の間に距離を設け、それが Phaser Diagram 上で角度 ψ の回転を生むとする。このとき、デチューン角の合計 $\phi + \psi$ は

$$0 \leq \phi + \psi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.2})$$

とする。このとき、 $|A_{21}| = 0$ および $|A_{22}| = 0$ となる周波数はそれぞれ

$$f_{|A_{21}|=0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{2 \cos(\phi + \psi) [\cos \phi \cos \psi - s^2 \sin \phi \sin \psi]}{\sin 2\psi + \sin 2(\phi + \psi) - s^2(\sin 2\psi - \sin 2(\phi + \psi))}} \quad (\text{A.3})$$

$$f_{|A_{22}|=0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{-2(1 - r_s^2) \cos(\phi + \psi)(\sin \phi \cos \psi + s^2 \cos \phi \sin \psi) + (1 - s^2) \sin 2\phi + (1 + s^2) \sin 2(\phi + \psi)}{4sr_s - (1 - r_s^2)(1 - s^2) \cos 2\psi - (1 + s^2)(1 + r_s^2) \cos 2(\phi + \psi)}} \quad (\text{A.4})$$

となる。さらに計算をすすめると

$$f_{|A_{22}|=0} - f_{|A_{21}|=0} \propto \frac{[2(-1 + sr_s) \cos \phi \cos \psi + 2s(-r_s + s) \sin \phi \sin \psi]^2}{[\sin 2\psi + \sin 2(\phi + \psi) - s^2(\sin 2\psi - \sin 2(\phi + \psi))] [4sr_s - (1 - r_s^2)(1 - s^2) \cos 2\psi - (1 + s^2)(1 + r_s^2) \cos 2(\phi + \psi)]} \quad (\text{A.5})$$

が示せる。ここで式 (A.3) と式 (A.5) が実となる範囲のみを考える。まず (式 (A.3) に注目すると $\sin \phi \sin \psi \geq 0$ なので

$$2 \cos(\phi + \psi) [\cos \phi \cos \psi - s^2 \sin \phi \sin \psi] \geq 2 \cos^2(\phi + \psi) \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

である。よって式 (A.3) が実解を持つのならば

$$\sin 2\psi + \sin 2(\phi + \psi) - s^2(\sin 2\psi - \sin 2(\phi + \psi)) \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

次に式 (A.4) に注目すると

$$\begin{aligned} & -2(1 - r_s^2) \cos(\phi + \psi)(\sin \phi \cos \psi + s^2 \cos \phi \sin \psi) + (1 - s^2) \sin 2\phi + (1 + s^2) \sin 2(\phi + \psi) \\ & \geq -2 \cos(\phi + \psi)(\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) + \sin 2(\phi + \psi) = 0 \end{aligned}$$

ゆえに

$$4sr_s - (1 - r_s^2)(1 - s^2) \cos 2\psi - (1 + s^2)(1 + r_s^2) \cos 2(\phi + \psi) \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

よって式 (A.5) から

$$f_{|A_{22}|=0} \geq f_{|A_{21}|=0} \quad (\text{A.9})$$

が示される。

次に $f_{|A_{21}|=0}$ の上限値を求める。はじめに式 (A.3) は $s = 0$ とした値を超えられないことを示す。実際、

$$\frac{\cos \phi \cos \psi - 0^2 \sin \phi \sin \psi}{\sin 2\psi + \sin 2(\phi + \psi) - 0^2(\sin 2\psi - \sin 2(\phi + \psi))} - f_{|A_{21}|=0} = \frac{s^2 \cos(\phi + \psi) \csc(\phi + 2\psi) \sin \phi}{(1 - s^2) \sin 2\phi + (1 + s^2) \sin 2(\phi + \psi)}$$

いま考えている離調角の範囲では分母、分子はともに正であるから

$$f_{|A_{21}|=0} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{2 \cos(\phi + \psi) \cos \phi \cos \psi}{\sin 2\psi + \sin 2(\phi + \psi)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\cos(\phi + \psi) \csc(\phi + 2\psi) \cos \psi} \quad (\text{A.10})$$

さらにいま考えている離調角の範囲では

$$\frac{\cos(\phi + \psi)}{\sin(\phi + \psi)} - \cos(\phi + \psi) \csc(\phi + 2\psi) \cos \psi = \frac{\cos(\phi + \psi) \sin \psi}{\tan(\phi + \psi) \sin(\phi + 2\psi)} \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

が成り立つ。よって

$$\cos(\phi + \psi) \csc(\phi + 2\psi) \cos \psi \leq \frac{\cos(\phi + \psi)}{\sin(\phi + \psi)} \quad (\text{A.12})$$

から

$$f_{|A_{21}|=0} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20P\Omega}{mc^2}} \sqrt{\frac{\cos(\phi + \psi)}{\sin(\phi + \psi)}} = \sqrt{2} f_{|A_{21}|=0, s=1} \quad (\text{A.13})$$

となり、結局改善できるのは OPO を挿入しなかった場合の $\sqrt{2}$ 倍の周波数までである。

付録B 干渉計の重力波に対する応答

本付録は [10] に従う。

B.1 Michelson 干渉計の応答

重力波が z 軸方向を進み、干渉計に入射したとする。簡単のために h_+ モードのみを考え x 軸 y 軸方向を干渉計の 2 つの基線長に沿って設定する。また背景時空はミンコフスキー時空であるとする。すなわち

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

はじめに x 軸方向を進む光を考える。四次元線素の定義より、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h_+) dx^2 \quad (\text{B.2})$$

を満たす。光では $ds^2 = 0$ なので

$$\sqrt{1 - h_+(t)} c dt = dx \quad (\text{B.3})$$

(B.3) を積分し、干渉計の腕を往復するのにかかる時間を計算する。まず光がエンド鏡に到達するまでの時間を計算すると、干渉計の x 軸方向の基線長は L_x なので

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - h_+(t)} = \frac{L_x}{c} \quad (\text{B.4})$$

重力波の引き起こす基線長変化の大きさが小さいとする：

$$|h_+| \ll 1 \quad (\text{B.5})$$

このとき、式 (B.4) は

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right) = \frac{L_x}{c} \quad (\text{B.6})$$

次にエンド鏡から戻ってくるまでにかかる時間を計算する。このとき、光の進行方向が変化しているため、

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right) = \frac{L_x}{c} \quad (\text{B.7})$$

ゆえに往復にかかる時間 $t_2 - t_0$ は

$$t_2 - t_0 = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} dt h_+(t) \quad (\text{B.8})$$

という積分方程式の解となる。ここで再び $|h_+(t)| \ll 1$ から、式 (B.8) 右辺の積分区間に現れる t_2 を $t_0 + 2L_x/c$ と近似する。これにより

$$\Delta t_x = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L_x}{c}} dt h_+(t) \quad (\text{B.9})$$

が求まる。同様に重力波が差動変化を引き起こすことに注意すると y 軸方向の腕では

$$\Delta t_y = \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L_y}{c}} dt h_+(t) \quad (\text{B.10})$$

ゆえに重力波が存在する際に発生する干涉計の腕間の位相差は

$$\delta\phi = \Omega(\Delta t_x - \Delta t_y) = \frac{2\Omega}{c}(L_x - L_y) + \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L}{c}} dt h_+(t) \quad (\text{B.11})$$

ここで $L_x \approx L_y \approx L$ とおいた。ゆえに重力波によって引き起こされる差動変化 $\delta\phi_{\text{GW}}$ は

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L}{c}} dt h_+(t) \quad (\text{B.12})$$

$h_+(t)$ をフーリエ変換すると周波数空間での Michelson 干涉計の重力波に対する応答が求まる (周波数応答関数または伝達関数)。

$$h_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega) e^{i\omega t} \quad (\text{B.13})$$

とすれば、式 (B.12) は

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L}{c}} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) e^{\frac{i\omega L}{c}} \cdot h(\omega) e^{i\omega t_0} \quad (\text{B.14})$$

実際には重力波を検出した時間を原点にとるので ($t_0 \rightarrow t_0 - 2L/c$)

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L}{c}} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) e^{-\frac{i\omega L}{c}} \cdot h(\omega) e^{i\omega t_0} \quad (\text{B.15})$$

と求まる。ゆえに Michelson 干涉計の周波数応答関数 $H_{\text{MI}}(\omega)$ は

$$H_{\text{MI}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) e^{-\frac{i\omega L}{c}} \quad (\text{B.16})$$

と求まる。

B.2 FP-Michelson 干涉計の応答

Michelson 干涉計のときと同様に、重力波が z 軸方向からやってきて、重力波の h_+ モードに合うように干涉計を置いたとする。

はじめに重力波に対する FP 共振器の応答を求める。フロント鏡の反射率を r_F 、エンド鏡の反射率を r_E とし、共振器長は L とする。このとき、共振器内を n 回往復するのにかかる時間 Δt_n は

$$\Delta t_n \approx \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2} \int_{t_0 - \frac{2L}{c}n}^{t_0} dt h(t) \quad (\text{B.17})$$

となる。ここで、 t は重力波を測定した時刻とした。式 (B.17) にフーリエ変換した重力波の表式を代入し整理すると次式を得る：

$$\Delta t_n \approx \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2} \int_{t_0 - \frac{2L}{c}n}^{t_0} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega h(\omega) e^{i\omega t} = \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1 - e^{2i\frac{L\omega}{c}n}}{i\omega} h(\omega) e^{i\omega t_0} \quad (\text{B.18})$$

ここで入射光 $E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$ と反射光 E_r の間には

$$E_r = E_0 e^{i\Omega t} \left(-r_F + t_F^2 r_E \sum_{n=1}^{\infty} (r_F r_E)^{n-1} e^{-i\Omega \Delta t_n} \right) \quad (\text{B.19})$$

これに式 (B.18) を代入し、さらに $|h(\omega)| \ll 1$ を用いると

$$\frac{E_r}{E_{\text{in}}} \approx \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2) r_E}{1 - r_F r_E} \left(1 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H_{\text{FP}} h(\omega) e^{i\omega t} \right) \quad (\text{B.20})$$

ここで $H_{\text{FP}}(\omega)$ は重力波に対する Fabry-Perot 共振器¹ の伝達関数である：

$$H_{\text{FP}}(\omega) = \frac{\Omega}{\omega} \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{-r_{\text{F}} + (r_{\text{F}}^2 + t_{\text{F}}^2) r_{\text{E}}} \frac{\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right)}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}} e^{-2i\frac{L\omega}{c}}} e^{-i\frac{L\omega}{c}} \quad (\text{B.21})$$

FP 干渉計ではこれが x 、 y 両方の腕に導入されており、重力波が差動の変化を引き起こすので

$$H_{\text{FPMI}} = 2H_{\text{FP}} = \frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{-r_{\text{F}} + (r_{\text{F}}^2 + t_{\text{F}}^2) r_{\text{E}}} \frac{1}{1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}} e^{-2i\frac{L\omega}{c}}} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \quad (\text{B.22})$$

となる。

¹FP 干渉計の伝達関数でないことに注意。

付録C 制御用回路の開発

本補足では実験に用いた回路の設計方法を説明する。はじめに回路の雑音を説明し、一次の非反転ローパスフィルタを例に特に雑音低減に注目した設計方法を示す。最後に、本修士論文研究で用いた回路図例と測定した雑音スペクトルを載せる。

C.1 電気回路の雑音

本修士論文研究ではオペアンプを用いたアナログ回路を主に使用した。本節ではこのような回路で問題となる雑音をまとめる。

C.1.1 熱雑音

熱雑音は回路に用いた抵抗器の内部で発生する雑音である。抵抗内の電子が熱振動するために発生する。熱振動する電子の運動が無相関だと仮定すると、抵抗で発生する熱雑音 $e_{n,th}$ は

$$e_{n,th} = \sqrt{4k_B RT} \text{ [V/}\sqrt{\text{Hz}}] \quad (\text{C.1})$$

である。ここで k_B はボルツマン定数、 R は抵抗の大きさ、 T は熱浴の絶対温度である。通常の実験系では温度 T を常温として計算する ($T := 300 \text{ K}$)。熱雑音は周波数によらず一定である。このような周波数応答をする雑音は白色雑音と呼ばれる。

C.1.2 オペアンプの入力換算雑音

オペアンプは差動増幅器である。すなわち反転入力側に印可した電圧を V_- 、非反転入力側に印可した電圧を V_+ とすると出力 V_{out} は

$$V_{out} = A(V_+ - V_-) \quad (\text{C.2})$$

ここで A はオペアンプのオープンループゲインで一般に周波数依存性がある ($A = A(f)$)。出力に現れる雑音値はオペアンプに接続した抵抗やコンデンサによって変わるため出力の雑音のままでは扱いにくい。このためデータシートにはオペアンプの入力値に換算した雑音 (= 入力換算雑音) が記載されている。入力換算雑音には電圧雑音と電流雑音がある。

入力換算電圧雑音

オペアンプ内部で発生した電圧雑音を全て入力換算したものである。出力に現れる雑音値を計算する際には、等価電圧源をオペアンプの反転又は非反転入力のうち一方に接続する。これは反転入力と非反転入力は計算上短絡したと考えてよいためである (バーチャル・ショート)。多くの場合、低周波数帯の電圧雑音は周波数 f に対して $1/f$ に比例して減少する。これを $1/f$ 雑音という。一方、高周波数帯では熱雑音のように白色雑音となる。一般に電圧性信号の感度は入力換算電圧雑音によって制限される。

入力換算電流雑音

オペアンプ内部で発生した電流雑音を全て入力換算したものである。出力に現れる雑音値を計算する際には、等価電流源をオペアンプの反転・非反転入力の方に接続する。一般に電流性信号の感度は入力換算電流雑音によって制限される。

C.2 ローパスフィルタの設計

非反転ローパスフィルタを例に出力に現れる雑音の計算方法を説明する。図 C.1 に非反転ローパスフィルタの回路図を示した。出力電圧は

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \frac{1}{1 + iCR_1\omega} V_{in} \quad (C.3)$$

となる。

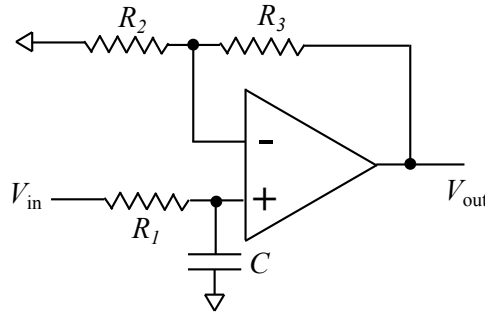


図 C.1: 非反転ローパスフィルタの回路図

はじめに入力換算電圧雑音 $e_{n,vol}$ が出力に与える影響を計算する。入力換算電圧雑音の大きさを $e_{n,vol}$ とする。雑音のゲインをノイズゲイン NG と呼ぶ。入力換算電圧雑音のノイズゲインは

$$NG_V = 1 + \frac{R_3}{R_2} \quad (C.4)$$

であるから、出力に現れる雑音は

$$V_{out,vol} = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) e_{n,vol} \quad (C.5)$$

となる。

次に入力換算電流雑音 i_n が出力に与える影響を計算する。入力換算電流雑音のノイズゲインは

$$NG_{cur,+} = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) R_1 \quad (C.6)$$

$$NG_{cur,-} = R_3 \quad (C.7)$$

であるから出力に現れる雑音は

$$V_{out,cur} = \sqrt{NG_{cur,+}^2 + NG_{cur,-}^2} i_n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)^2 R_1^2 + R_3^2} \right) i_n \quad (C.8)$$

となる。

最後に熱雑音 $e_{n,th}$ が出力に与える影響を計算する。各抵抗のノイズゲインは

$$NG_{R_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2}} \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \quad (C.9)$$

$$NG_{R_2} = \frac{R_3}{R_2} \quad (C.10)$$

$$NG_{R_3} = 1 \quad (C.11)$$

である。ゆえに熱雑音が出力に与える影響は

$$V_{out,th} = \sqrt{4k_B T \cdot (NG_{R_1}^2 R_1 + NG_{R_2}^2 R_2 + NG_{R_3}^2 R_3)} \quad (C.12)$$

と求まる。よって雑音の合計は

$$V_{tot} = \sqrt{V_{out,volt}^2 + V_{out,cur}^2 + V_{out,th}^2} \quad (C.13)$$

となる。図 C.2 で式 (C.13) で計算した雑音スペクトルと実際に測定された雑音スペクトルを図示した。測定には FFT アナライザを使用し測定周波数の上限を使用し、測定点が十分になるようにした¹。測定結果が計算結果に一致している様子がわかる。雑音が入力換算電圧雑音によって制限されているので、電圧性信号に対してはオペアンプを変更しない限り信号雑音比を改善できない。

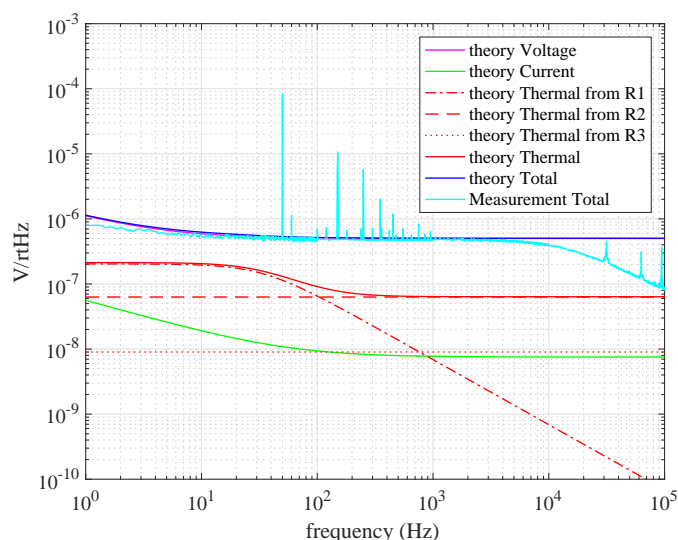


図 C.2: 非反転ローパスフィルタの雑音の測定結果

C.3 その他考慮すべき特性

C.3.1 同相除去比

オペアンプを動作させるためには直流電圧源が必要である。直流電圧源は電力会社から供給されている交流電圧を変換して作られる。このため変換方法²によっては直流電圧に高周波雑音³が加わってしまう。電源系にのった雑音 $e_{n,com}$ は相対的にグラウンドレベルを変化させるので同相雑音となる。すなわちオペアンプの反転入力と非反転入力に大きさ $e_{n,com}$ の電圧源を接続したのと同じ雑音を生む。

オペアンプの性能を表す指標の 1 つに同相除去比 CMMR(=Common Mode Rejection Ratio) がある。これはオペアンプの差動ゲイン A_d (=オープンループゲイン) と同相ゲイン A_c の比で定義される：

$$CMMR := \frac{A_d}{A_c} \quad (C.14)$$

¹なお本測定は FFT アナライザの校正の意味合いもあった。

²例えば本実験室では 50 Hz の交流電圧から直流電圧に変換しているため 50 Hz の倍波 (=50、100、150、… Hz) が直流成分にのってしまう。この他にも PC 電源に使用されるスイッチング回路はスイッチング周波数の倍波の雑音を発生させる。

³ここで言う高周波とは数 kHz 程度である。

ただし回路全体の同相除去は回路構成に大きく依存する⁴。図 C.3 に非反転アンプの回路図を示した。回路の同相除去比を考えるため、仮想電圧源 V_+ と V_- を接続する。このとき出力 V_{out} は

$$V_{out} = \frac{R_2 R_3 + R_4}{R_3 R_1 + R_2} (V_+ - V_-) + \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_3 (R_1 + R_2)} V_- \quad (C.15)$$

となる。右辺第一項目が差動信号に対するゲインあり、右辺第二項目が同相信号に対するゲインである⁵。よって同相雑音のゲインは $R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0$ で最小となる。このような回路を対称性の良い回路と呼ぶ。

ただし同じ抵抗器にも 1% 程度⁶ の誤差が生じる。これにより同相雑音の大きさが変化する。抵抗に誤差が存在する際の出力に現れる同相雑音のゲインは

$$G_{out,c} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2 R_3} \sqrt{R_2^2 (R_3 + R_4)^2 \left(\frac{\delta R_1^2}{R_1^2} + \frac{\delta R_2^2}{R_2^2} \right) + R_4^2 (R_1 + R_2)^2 \left(\frac{\delta R_3^2}{R_3^2} + \frac{\delta R_4^2}{R_4^2} \right)} \quad (C.16)$$

通常、非反転アンプを設計する際には 0 次近似の範囲で $R_1 = R_3$ 、 $R_2 = R_4$ とし回路の差動ゲイン $G_{out,c}$ を R_2/R_3 とし、同相除去も考慮にいれ 0 次近似の範囲で $R_1 R_4 = R_2 R_3$ が成り立つように設計したとする。このとき、回路全体の同相除去比は

$$CMMR_{tot} = \frac{G_{out,d}}{G_{out,c}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) \frac{1}{2\epsilon} = \frac{1 + G_{out,d}}{2\epsilon} \quad (C.17)$$

となる。ここで $\epsilon := \delta R/R$ とした。すなわち同相除去比を良くするためには回路全体の差動ゲインを大きくするか、抵抗を選別⁷ し誤差を小さくするしかない。このように実験をおこなう場所によっては回路の対称性などを考慮し同相雑音を小さくする必要がある。

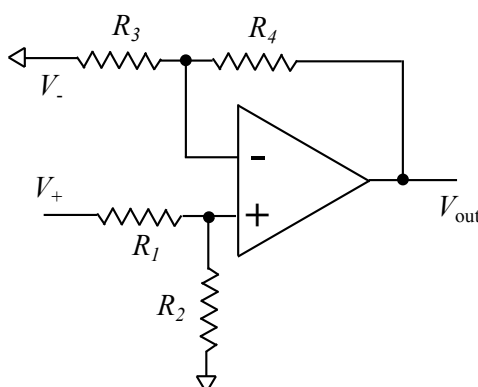


図 C.3: 非反転アンプの回路図

C.4 実際に使用した回路

以下で実際に使用した回路の回路図、伝達関数、雑音スペクトルを載せる。

C.5 RF フォトディテクタの開発

干渉計や共振器を制御するためにレーザーに含まれる信号をフォトディテクタで取得しなければならない。フォトディテクタ上で電圧が電流に変換されるので、その電流を効率よく取得すればよい。しかしそのためには EOM でおこなった変調周波数と同じ周波数で振動する電流を効率よく電圧に変換する必要がある。

⁴むしる回路構成によって決まるのでオペアンプの同相除去比を意味の無い定数と考える人もいる。

⁵ $V_+ = V_- = V_c$ とした際に残る項だから。

⁶金属皮膜抵抗を使用した場合は誤差は 1% 程度であり、炭素皮膜抵抗を使用した場合は誤差は 5% 程度となるのが一般的である。

⁷例えば同一スロットの抵抗を使用すれば誤差を抑えられる。

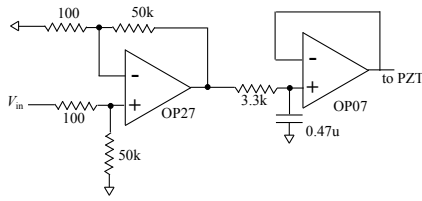


図 C.4: SHG 制御用回路の回路図

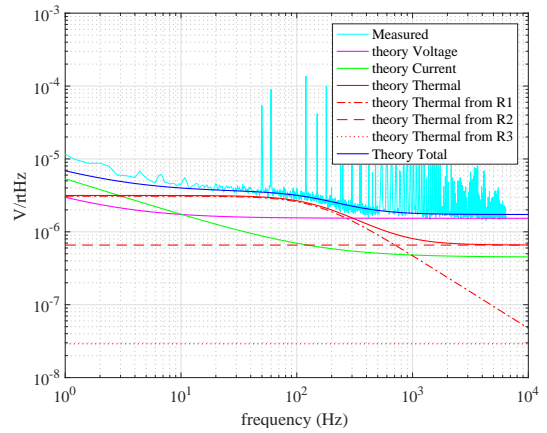


図 C.5: SHG 制御用回路の回路図の雑音スペクトル

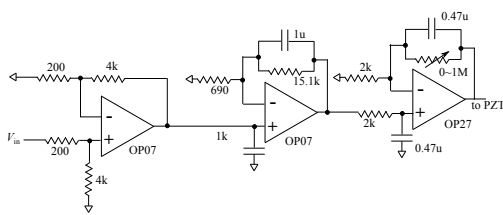


図 C.6: MI 制御用回路の回路図

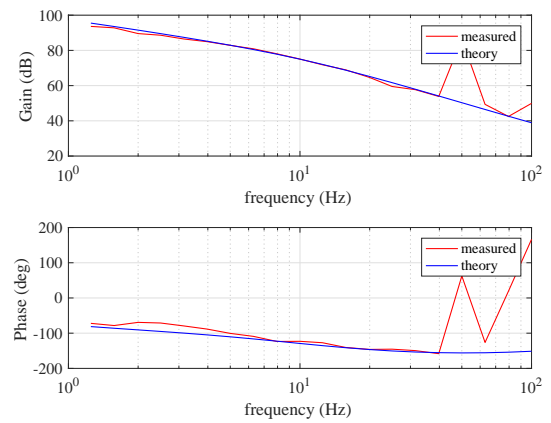


図 C.7: MI 制御用回路の伝達関数

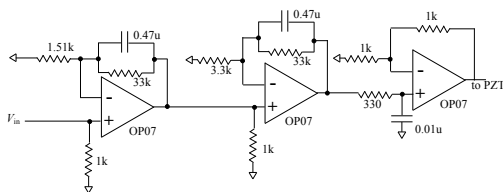


図 C.8: SR 共振器制御用回路の回路図

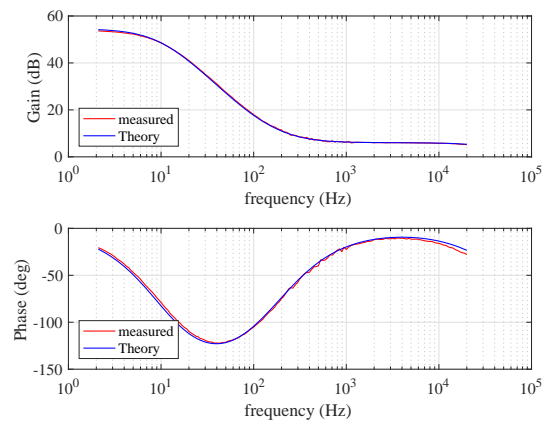


図 C.9: SR 共振器制御用回路の伝達関数

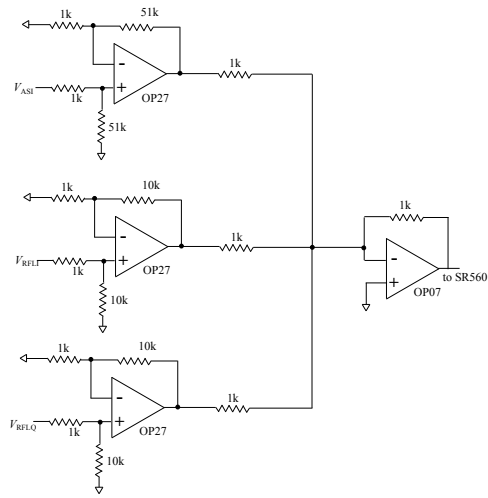


図 C.10: SR 干渉計制御用回路の回路図

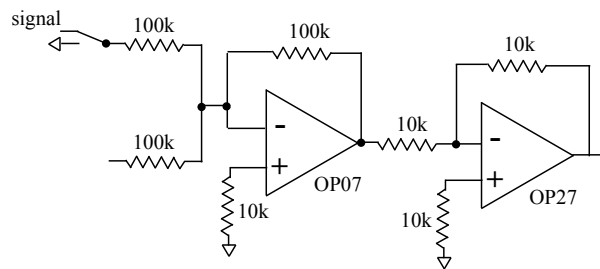


図 C.11: 非反転加算アンプ

効率よく信号を取得するにはフォトディテクタの直後に変調周波数と同じ周波数に共振をもつ共振回路を接続すると良い。共振回路は共振周波数でインピーダンスが大きくなるので欲しい周波数の信号を選択的に取得できる。これにより雑音を抑えられる。このように共振回路を組み込んだフォトディテクタを共振型フォトディテクタと呼ぶ。本節では共振型フォトディテクタの設計について説明する。

C.5.1 共振回路の選択

図 C.12 に示すとおり、共振回路は並列共振回路と直列共振回路の二種類がある。並列共振回路では入力電流

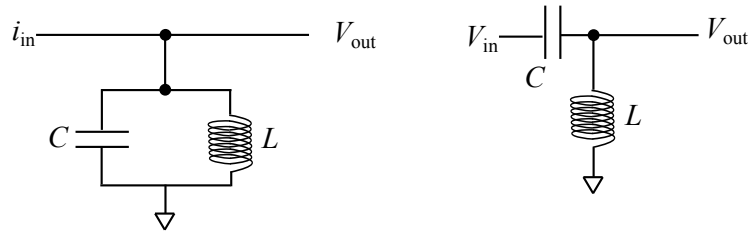


図 C.12: 共振回路の例

$i_{in}(\omega)$ に対し出力電圧 $V_{out}(\omega)$ は

$$V_{out}(\omega) = \frac{iL\omega}{1 - CL\omega^2} i_{in}(\omega) \quad (C.18)$$

となる。実際に使用する回路にはインピーダンスを調整するため、並列共振回路に並列に抵抗を接続する。抵抗接続後のインピーダンスは

$$V_{out}(\omega) = \frac{iLR\omega}{R(1 - CL\omega^2) + iL\omega} i_{in}(\omega) \quad (C.19)$$

となり共振周波数 $\omega_{res} = 1/\sqrt{CL}$ では

$$V_{out}(\omega) = Ri_{in}(\omega) \quad (C.20)$$

となりインピーダンスは抵抗値 R となる。

一方、電圧性信号に対しては直列共振回路⁸を使用できる。

$$V_{out}(\omega) = -\frac{CL\omega^2}{1 - CL\omega^2} V_{in}(\omega) \quad (C.21)$$

インダクタに並列に抵抗を挿入しインピーダンスを調整すると

$$V_{out}(\omega) = -\frac{CLR\omega^2}{R + iL\omega - CLR\omega^2} V_{in}(\omega) \quad (C.22)$$

となるので、共振周波数 $\omega_{res} = 1/\sqrt{CL}$ では

$$V_{out}(\omega) = iR\sqrt{\frac{C}{L}} V_{in}(\omega) = iRC\omega_{res} \cdot V_{in}(\omega) \quad (C.23)$$

となる。ゆえにインピーダンスをできるだけ大きくするには、インダクタンス L をできるだけ小さくしキャパシタンス C を大きくすればよい。ただしキャパシタンスを大きくするとそれに応じて物理的な大きさも増大する。よって小型でハイインピーダンスな回路を作る上では並列共振回路の方が有利となる。

⁸キャパシタとインダクタを入れ替えても共振回路になるが低周波数成分をカットする目的のためにこの構成とした。

C.5.2 共振周波数の調整

共振周波数の調整は共振回路に使用したコンデンサの容量を変更するかインダクタのインダクタンスを変更しおこなう。本修士論文研究で作成した RF フォトディテクタには調整の簡便さから、可変容量コンデンサを使用した。このコンデンサの容量の範囲内で共振周波数を変更できる：

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{C_{\max}L}} \leq f_{\text{res}} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{C_{\min}L}} \quad (\text{C.24})$$

共振周波数調整範囲を考える際にはフォトダイオードの寄生容量も考慮にいれなければならない。フォトダイオードとグランドの間には寄生容量 C_{PD} が存在する。この寄生容量によって並列共振回路のゲイン G_{par} と直列共振回路のゲイン G_{ser} はそれぞれ

$$G_{\text{par}} = \frac{iL\omega}{1 - (C + C_{\text{PD}})L\omega^2} \quad (\text{C.25})$$

$$G_{\text{ser}} = -\frac{CL\omega^2}{1 - CL\omega^2} \quad (\text{C.26})$$

となる。直列共振回路の場合は電圧性信号を仮定しているため共振周波数に直接影響を与えない。フォトダイオードの寄生容量は個体差があり予想するのが難しい。このため共振周波数が寄生容量によって変化しない直列共振回路は設計しやすい。また電流性信号に対してはノッチフィルタとなるので、電流雑音をカットできる。

C.5.3 オペアンプの選択

簡単のためにボルテージフォロア回路を考える。オペアンプのオープンループゲインを $A(\omega)$ とすると

$$V_{\text{out}} = A(\omega)(V_+ - V_-) \quad (\text{C.27})$$

であり負帰還をかけているので $V_- = V_{\text{out}}$

$$V_{\text{out}} = \frac{A(\omega)}{1 + A(\omega)} V_+ \quad (\text{C.28})$$

となる。ここで $|A(\omega)| \gg 1$ では

$$V_{\text{out}} = V_+ \quad (\text{C.29})$$

となりボルテージフォロア回路が動作する。

一般にオペアンプ回路はオープンループゲインが十分大きい範囲までしか動作しない。共振型フォトディテクタに接続した共振回路を動作させるためには共振周波数付近で高いゲインが必要であり、このようなオペアンプ(高速オペアンプ⁹⁾を選択する必要がある。ただし中には特定の回路構成¹⁰で使用できないオペアンプもあるので注意が必要である。

C.5.4 基板設計

高周波回路において抵抗やコンデンサ、インダクタの足は余計な寄生容量や寄生インピーダンスの原因となるため極力短したい。この目的のために素子の足を取り除いた回路部品を表面実装部品と呼び、それらをハンダ付けする基板を表面実装基板という。本修士論文研究で使用した RF フォトディテクタではこの表面実装基板を自作した。以下では表面実装基板設計の流れを示す。

⁹本修士論文研究では 50 MHz 程度までゲインがあればよかった。

¹⁰電流帰還型オペアンプは負帰還抵抗が発散するので帰還部分に抵抗を挿入しないボルテージフォロア回路は作れない。

LT Spice を用いたシミュレーション

RF フォトディテクタの基本設計のあとで LT Spice¹¹ というシミュレーションソフトを使用し共振周波数を目的の周波数に調整できるか、雑音レベルがどれくらいかを確認した。LT Spice では企業や個人が公開しているライブラリを使用することで実際に販売されているオペアンプを用いたシミュレーションができる。このとき発振がないかなども確認した。

基板図 CAD を用いた基板レイアウト

LT Spice でシミュレーションしたのち基板図 CAD を用いて基板図を作成した。基板図 CAD には無料のソフトウェアである Design Spark PCB¹² を使用した。Design Spark で基板図を作成したのち、ものづくりセンターの基板切削機を使用し試作品を作成した。試作品の動作を確認したのち外注¹³ し、実際に両面基板にした。

組み立て

部品の実装には細かい表面実装部品を必要以上に温めないようにするため温度コントローラーが内蔵された半田ごてを使用した。実装後は高周波用 FFT アナライザ¹⁴ を使用し、測定された雑音ピークから共振周波数を見積もった。RF フォトディテクタ回路には可変容量コンデンサを用いており、その容量を変更することで共振周波数を調整した。

C.5.5 RF フォトディテクタの回路図

実際に設計した RF フォトディテクタの回路図と作成した基板の写真を示す。

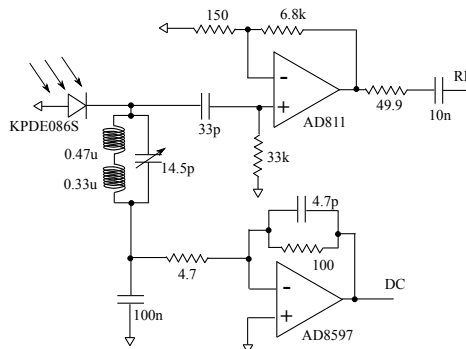


図 C.13: RF フォトディテクタの回路図

高周波成分を取り出す RF ポートと直流成分を取り出す DC ポートがある。共振周波数は並列共振回路にある可変容量コンデンサの容量を変化させて調整する。共振周波数に応じて抵抗値を調整しゲインを最適化している。

¹¹<http://www.linear-tech.co.jp/designtools/software/>

¹²<https://www.rs-online.com/designspark/home-jp>

¹³P 板.com に外注した。

¹⁴INSTEK 社の GSP-810。測定範囲は $150 \text{ kHz} \leq f \leq 1 \text{ GHz}$ 。

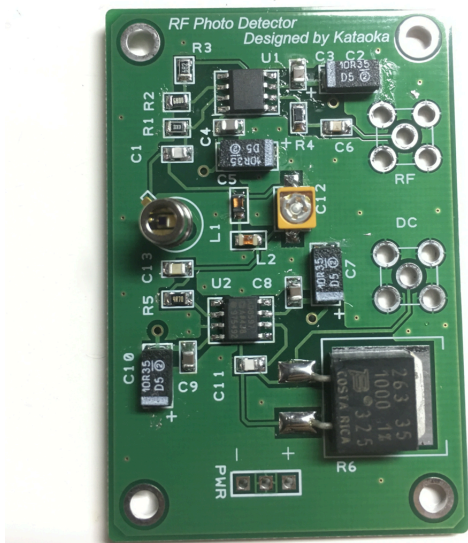


図 C.14: RF フォトディテクタの表面実装基板

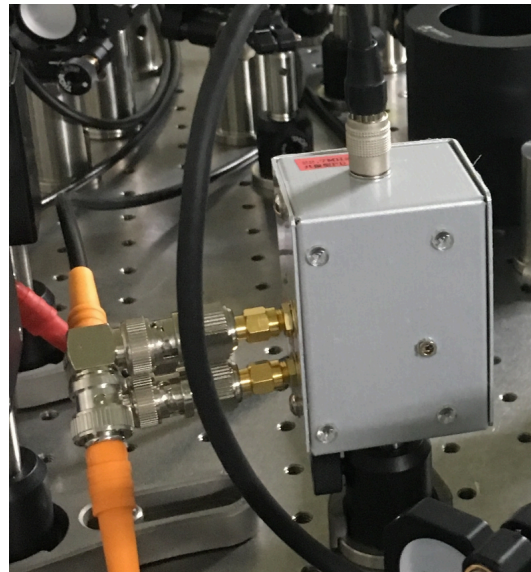


図 C.15: RF フォトディテクタの全体写真

付録D ファイバーアンプを用いたレーザーの増幅

D.1 レーザー強度増幅の実験面での利点

本修士論文では最大 600mW の出力をもつレーザーを基本ビームとして実験した。基本ビームのレーザー強度 P を上げられれば、さらに別の実験が可能になる。たとえば第二高調波の変換効率は基本波の自乗に比例して上昇する：

$$P_{532\text{nm}} \propto P_{1064\text{nm}}^2 \quad (\text{D.1})$$

このため基本波の強度を 2 倍にできれば第二高調波の強度は 4 倍となる。

また、Opto-Mechanical な効果である光バネの共振周波数¹は \sqrt{P} に比例する：

$$f_{\text{os}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20\Omega P}{mc^2}} \sqrt{\frac{\sin 2\phi}{(r_s + 1/r_s) - 2 \cos 2\phi}} \quad (\text{D.2})$$

このためレーザー強度を 10 倍にできれば光バネの共振周波数は 3 倍強となる。光バネの共振周波数が高ければ振り子の設計自由度が増すので実験的に実現が簡単になる。

このため本修士論文研究でははじめのうち、ファイバーアンプを用いてレーザー強度を増幅させていた²。そこで途中まで得られた結果として補足 D では特にファイバーアンプを用いるためにおこなったファイバーカップリングについて説明する。

D.2 ファイバーカップリング

本実験で用いたファイバーアンプは入出力がファイバーであったためレーザー光を自由空間からファイバーへ入射させなければならなかった。光ファイバーを伝搬するレーザーの空間モードはファイバーの形状で一意に決まる。光ファイバーの伝搬モードにレーザー光を合わせることを「ファイバーカップリング」という。

ファイバーを伝搬するレーザーのファイバー端でのビーム径 w_0 は

$$w_0 = d \left(0.65 + \frac{1.619}{V^{1.5}} + \frac{2.879}{V^6} \right) \quad (\text{D.3})$$

ここで d はファイバーコアの直径であり、 V はファイバーの Numerical Aperture(NA) を用いて

$$V = \frac{\pi d}{\lambda} NA \quad (\text{D.4})$$

で与えられる。なお λ はレーザーの波長である。すなわちファイバー端でレーザーをコア径程度まで絞らなければならない。

実験で用いた光ファイバーの端面は、別のファイバーと接続した際の光軸ずれによる損失を減らすため、ある角度でカットされている。よって通常の凸レンズを使用してファイバーカップリングをおこなうのはほぼ不可能である。このためファイバーカップル用のコリメータレンズを用いた。

¹下では SR 干渉計で光バネを作成した際の共振周波数を掲載した。SR 干渉計でなくても光バネの共振周波数は \sqrt{P} に比例する。これは光バネの復元力が光の輻射圧であり輻射圧は光の強度に比例するためだ。

²本文でも述べたが使用方法が悪く途中で故障してしまった。なお使用したファイバーアンプは KEOPSSYS 社の CYFA-PB-BW1-PM40-NL1-OM-B203-FA-FA である。増幅効率は 40dBm(10W) であった。

コリメータレンズに入射するビームが平行光線だったとする。すなわちビーム径が場所によってそれほど変化しなかったとする。このときコリメータレンズの焦点距離 f と絞られる前後のビーム径 $w_{\text{before/after}}$ の間には次式が成り立つ：

$$w_{\text{after}} = \frac{4f\lambda}{\pi w_{\text{before}}} \quad (\text{D.5})$$

ゆえにコリメータレンズの手前のビーム径 w を

$$w = \frac{4f\lambda}{\pi d \left(0.65 + \frac{1.619}{\sqrt{1.3}} + \frac{2.879}{\sqrt{6}} \right)} \quad (\text{D.6})$$

とすればよい。本実験では光ファイバーに Thorlabs 社製の PM980-XP を使用した。それによると $d = 5.5 \times 10^{-6} \text{m}$ 、 $NA = 0.12$ であった。またコリメータレンズの焦点距離 f は $f = 11.17 \text{mm}$ であった。これらの値を式 (D.6) に代入し必要なビーム径を求めると

$$w = 2120 \mu\text{m} \quad (\text{D.7})$$

となる。実験ではコリメータレンズの位置でのビーム径がこの値を満たすようにレンズを用いて調整した。

次にコリメータレンズ手前のビーム径を調整したあとにおこなったアライメント方法を説明する。弱い可視レーザーを用い図 D.1 のようにセットアップした。ファイバークップリング用レンズの後ろに二枚の折り返し鏡 M_1 、 M_2 を設置し、光を反射させたのちファイバーに入射させている³。ファイバーの出力端から可視レーザーを逆向きに入射させた。

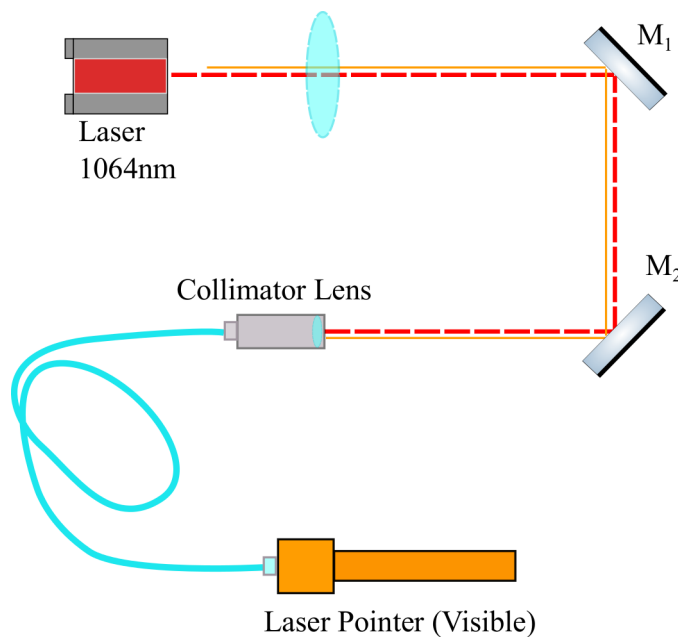


図 D.1: アライメント作業のセットアップ図

具体的な手順は次の通りである：

1. 鏡 M_1 を動かしコリメータレンズの位置でファイバーにカップルさせたい 1064nm 光と逆から入射させた可視レーザー光を重ねる
2. 鏡 M_1 で 1064nm 光と可視レーザー光の位置を見比べる
3. 位置がズれていた場合、鏡 M_2 を動かし可視レーザー光の位置を変え 1064nm 光に重ねる

³ファイバークップリングレンズ前に鏡を置くとレンズに入射する光のアライメントが崩れビームが楕円となる。これを避けるために図のようなセットアップにした

4. 再びコリメータレンズの位置で 1064nm 光と可視レーザー光の位置を見比べる
5. 位置がズレていた場合、鏡 M_1 を動かし 1064nm 光の位置を変え可視レーザー光に重ねる
6. これを繰り返し 1064nm 光と可視レーザー光を完全に重ねる

1064nm 光と可視レーザー光がおおよそ重なったら出力端子からレーザーポインタを外し、別のコリメータレンズを装着する。そこからレーザー光が出ていたらその強度をパワーメータで測定しつつ鏡 M_1 、 M_2 の角度を微調整する。レーザー光が出てきなかった場合は再び疎調作業を繰り返す。

微調整後のファイバー透過率は 80%以上であった。またファイバー手前の HWP の角度を調整することで偏光方向を変化させずに透過させられた。しかしファイバーに微妙な力が加わるだけでファイバーの屈折率が変化し、その結果ファイバー内で偏光が回転してしまう問題が発生した。このため実際に用いるときにはファイバーが光学定盤から垂れ下がったり、何かに引っかかったりしないよう注意しつつテープを使い柔らかく固定した。

関連図書

- [1] Abbott, Benjamin P., et al. "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger." *Physical review letters* 116.6 (2016): 061102.
- [2] Aso, Yoichi, et al. "Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector." *Physical Review D* 88.4 (2013): 043007.
- [3] Kawamura, Seiji, et al. "The Japanese space gravitational wave antenna DECIGO." *Classical and Quantum Gravity* 23.8 (2006): S125.
- [4] Armano, Michele, et al. "Sub-femto-g free fall for space-based gravitational wave observatories: LISA pathfinder results." *Physical Review Letters* 116.23 (2016): 231101.
- [5] A. Einstein, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1, 688(1916).
- [6] Kimble, H. Jeff, et al. "Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics." *Physical Review D* 65.2 (2001): 022002.
- [7] Somiya, K., et al. "Parametric signal amplification to create a stiff optical bar." *Physics Letters A* 380.4 (2016): 521-524.
- [8] 三尾典克. 相対性理論 基礎から実験的検証まで (サイエンス社)
- [9] Buonanno, Alessandra, and Yanbei Chen. "Quantum noise in second generation, signal-recycled laser interferometric gravitational-wave detectors." *Physical Review D* 64.4 (2001): 042006.
- [10] 安東正樹. Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波の制御 (修士論文)
- [11] 古澤明著. 量子光学と量子情報科学 (数理工学社)
- [12] 内山龍雄. 一般相対性理論 (裳華房)
- [13] 服部利明. 量子光学 講義テキスト
- [14] Shunhua Wang. Fabrication and haracterization of periodically-poled KTP and Rb-doped KTP or applications in the visible and UV
- [15] Vahlbruch, Henning, et al. "Detection of 15 dB squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency." *Physical Review Letters* 117.11 (2016): 110801.
- [16] 矢野和城. 神岡における環境雑音の測定および非線型光学素子を用いた信号増幅 (2014 年度の卒業論文)
- [17] 斎藤那菜. 非線形光学素子を用いた重力波信号の増幅 (20144 年度の修士論文)
- [18] <http://www.shinmei-oet.jp/KTP.pdf>
- [19] Masada, Genta. "Efficient generation of second harmonic wave with periodically poled KTiOPO crystal at 473 nm." *Tamagawa Univ. Quantum ICT Res. Inst. Bull.* 4.1 (2014): 19-22.

- [20] 加藤準平. 重力波望遠鏡における光ばねと非線形結晶を用いた信号増幅器のデザインとその検証 (2015 年度の修士論文)
- [21] 矢野和城. KAGRA 用アウトプットモードクリーナーのデザイン研究およびプロトタイプ制御実験 (2016 年度の修士論文)
- [22] <http://www.optoscience.com/maker/brim/pdf/brimrose2.pdf>

謝辞

本修士論文研究にあたり多くの方から助言や手助けを頂きました。特に指導教官の宗宮健太郎准教授からは研究面での的確な助言だけでなく色々な場所で研究をおこなうチャンスを頂きました。KAGRAでの作業は大学でおこなう実験とはひと味違い良い経験となっただけでなく、そこで出会えた研究仲間との議論により、物理の理解が深まりました。修士1年の夏休みに行ったサマースクールでは世界有数の大学院に通う若者と一緒に物理を学びました。そこでの経験が物理を理解するとは何かにつながり、本修士論文においては理論面の議論を進める基礎体力となりました。

研究室の仲間に至っては同期の熱田将さんには学部の頃から大変お世話になりました。学部時代は数ヶ月の神岡出張を経験し、毎日一緒に仕事場まで通うという小学校以来の体験をしました。大学院に入ってから直接は関係のない仕事も手伝って頂きました。熱田くんと一緒に仕事をしていたから悪夢のようなIFIのインストールを乗り切られたのだと思います。修士1年の粕谷順子さんには実験技術の助言から実験室の改善まで大変お世話になりました。よく分からない理論を熱田くんを交えた三人で夜遅くまで議論したのは大変楽しかったです。同じく修士1年の柳沼拓哉君には主に理論面でお世話になりました。忙しい中修論提出の直前で気づいた理論の不備と一緒に議論して頂き、自信を持って修論を書けました。4年生の下井建生君と久富正博君は本修士論文実験を手伝って頂きました。また一緒におこなった輪講では二人からの適切な質問、明快な説明で自分の不理解に気づかされました。

卒業された先輩に至っては特に加藤準平さんにお世話になりました。学部時代に加藤さんから教わった技術が基礎になっているだけでなく、その修士論文があったために研究を進められました。本修士論文提出直前に気づいた理論の不備を相談したときも、社会人という忙しい立場ながらお時間を頂きました。他にも桑田綾香さん矢野和城さん崎濱幸秀さん須佐友紀さんと斎藤那菜さん上田慎一郎さんは研究室を巣立ったあともバーベキューなどの時にお会いし、たくさん助言を頂きました。すばらしい先輩に恵まれたなと感謝しています。また藤本眞克氏にはゼミのときや特に一般相対論の理論で困っている際に多くの助言を頂きました。ゼミが発表の場ではなく、さらなり勉強の場になったのも藤本先生のおかげだと感じています。4年生の時から三年間、本当にお世話になりました。

東工大外でもたくさんの研究仲間にも恵まれました。KAGRAでは宇宙線研究所、東京大学、富山大学、天文台、KEKの方々と一緒に仕事をしました。特に宇宙線研究所に所属されている博士3年の中野雅之さんには同じサブシステムグループに属していたこともあり、KAGRAでの作業の際に大変お世話になりました。中野さんから頂いた知見やお叱りの言葉によって何とか作業を終えることができました。また、学会でお会いする機会も多く一緒に観光に行った際にはとても良い息抜きとなりました。宗宮研のイベントにもお忙しい中参加して頂き、時にはドライバー役にもなって頂きました。

東大の安東研究室に所属されている博士1年の小森健太郎さんもたくさん助言をいただきました。輪講で小森さんが書かれた修士論文を用いたために輪講にも参加して頂き、その知識の豊富さや理路整然とした理論の展開の仕方はとても参考になりました。それだけではなく、人に教える姿勢や相談にのる姿などは、私が先輩として研究室のメンバーに接する態度の良いお見本となりました。実験装置が動かなくてメールで相談した際にはアメリカ出張中にも関わらずすぐに返信して頂きました。大変感謝しております。同じく安東研究室の牛場崇文さんからは定量科学である物理に向き合う姿勢を学びました。KAGRAの試験運転の準備で一緒にした際に、何かする前に要求値や損傷閾値に注意する姿勢、またおかしなことに気がいたら一旦止まる大切さを学びました。本研究では定量的な考察を心がけましたが、これは牛場さんから学んだ姿勢でもあります。

天文台の阿久津智忠さんにはKAGRAで私のグループが担当していた作業に対し、たくさん助言を頂きました。阿久津さんの指摘には我々の見通しの甘さをいつも痛感させられるとともに、何かの作業をする前にきちんと考

える姿勢が身につけさせられました。また物怖じせずにきちんと指摘する姿勢は大変参考になりました。企業を経験している方はさすがだなと思いました。

最後になりますが学費や生活費のことを考えずに研究に打ち込める環境を提供してくれた家族に感謝を述べこの謝辞を閉じたいと思います。