

重力波検出器で使う制御用回路の検査機構の開発とその応用

東京工業大学 理学部物理学科 宗宮研究室
11B06479 片岡 優

平成 27 年 2 月 15 日

目次

第 1 章	はじめに	3
第 2 章	重力波	4
2.1	Einstein 方程式と各テンソルの定義	4
2.2	計量に摂動を加えた際の各種テンソルの表式	5
2.2.1	Christoffel 記号	5
2.2.2	Riemann 曲率テンソル	6
2.2.3	Ricci テンソル	8
2.2.4	Ricci スカラー	9
2.3	Einstein 方程式の線形化	9
2.4	重力波の導出	11
2.4.1	重力波の自由度	11
2.4.2	重力波の発生	13
2.5	重力波の四重極公式	15
2.5.1	回転する物体からの重力波	18
2.5.2	重力波の間接観測	20
第 3 章	光干渉計型重力波検出器	21
3.1	Michelson 干渉計の重力波に対する応答	21
3.2	Fabry-Perot 共振器	23
3.3	光干渉計型重力波検出器における雑音	24
3.3.1	ショット雑音	25
3.3.2	熱雑音	25
3.3.3	地面振動	26
3.3.4	レーザー自身の雑音	27
第 4 章	Whitening Filter	29
4.1	Whitening Filter の役割	29
4.2	Whitening Filter の構成	30
4.2.1	Whitening Filter のゲインステージ	31
4.2.2	ゼロポールステージ	32
第 5 章	Whitening Filter の検査機構の開発	34
5.1	伝達関数の自動測定機構	34
5.1.1	伝達関数とは	34
5.1.2	伝達関数の自動測定機構	34
5.1.3	測定結果と問題点および考察	36
5.2	ノイズスペクトルの自動測定	37
5.2.1	測定方法	37
5.2.2	測定結果	38

5.3	ノイズスペクトル測定における問題点の原因と考察	39
5.3.1	Whitening Fiter のノイズスペクトル測定における問題点	39
5.3.2	入力ノイズの測定	39
5.3.3	チャンネル間ノイズの伝搬	40
5.3.4	チャンネル間信号の伝搬	42
5.3.5	電源へのノイズピークの伝搬	43
第 6 章	結論	47
6.1	自動測定の問題点 1	47
6.2	自動測定の問題点 2	47
6.3	Whitening Filter の問題点 1	47
6.4	Whitening Filter の問題点 2	48
付録 A	Issacson の公式	49
付録 B	Whitening Filter に用いられた回路について	52
B.1	ゲインステージ回路	52
B.2	ゼロポールステージ回路	52
B.2.1	ポールにおける伝達関数の絶対値および位相	53
B.2.2	ゼロにおける伝達関数の絶対値および位相	54

第1章 はじめに

1916年に Einstein が一般相対性理論を発表してから間もなく 100 年となる。一般相対論はそれまでの物理学とは異なり、時空の幾何学という考え方を導入することで重力という物理量に対する数学的な説明を与えた。また一般相対論は恒星の近くでは光路が曲がること、重力赤方偏移、水星の近日点移動、ブラックホールの存在といった大質量物体が引き起こす物理現象を予言した。これらは一般相対性理論以前の物理では導出できない、あるいは長い間解けなかったような問題ばかりであった。さらに時空の幾何学という考え方を導入したことで、宇宙の構造を理論的に考えることを可能にした。これは私たちのすむ宇宙がいかにして誕生したかという哲学的な問いに対する物理学的なアプローチを与えた。

さて、一般相対性理論によると時空は物体のもつ質量によって歪められる。それは柔らかいゴム板(時空)の上に重い鉄球(物体)を置いた場合と同じである。ここで仮に時空を歪ませている物体が運動していたとしよう。すると時空が振動しその歪みが伝搬していく。この伝搬する時空の歪みが重力波である。重力波を直接検出しようという試みは J.Weber によって世界で最初になされた。ところが重力の物質との相互作用は電磁気力などに比べ遥かに小さく、これは重力波も同様である。このため重力波は未だに直接観測されていない。

現在、欧米と日本中心に重力波の直接検出に向けた研究が進んでおり、重力波検出器が建設段階にある。最も主流となっている重力波検出器は光干渉計型と呼ばれる Michelson 干渉計からなる。日本では岐阜県飛騨市の地下(神岡鉱山跡地)に KAGRA という片腕が 3km ある Michelson 干渉計からなる重力波検出器が建設されている。論文中で述べるが KAGRA には感度を上昇させるための様々な工夫がなされている。予定通り建設されその感度を発揮すると、中性子星連星からくる重力波を年間 10 回程度観測することができる。重力波の直接検出にむけて世界中で熾烈な競争がおこなわれており、早ければ 2016 年に初検出がなされるのではないかとされている。

前述の通り重力波は物質との相互作用がほとんどないため、重力波検出器には高い感度が要求される。高い感度の検出器を実現するためには各部品を規定の場所に「置く」こと、そしてそれらを「維持する」ことが必要だ。そしてこのために精密な制御が必要となる。ところが KAGRA のような大型の検出装置で制御系を組むとなると大量の電子回路が必要となる。そしてそれらの回路の中で一つでも動作不良のものが混ざると重力波検出器が動作しないうえに、原因を特定するまでに長い時間がかかってしまう。また動作不良とまではいかななくても、予期せぬ雑音が混入していると検出器の感度を下げてしまう。このため KAGRA においては作成した全ての回路の動作を確認し、各基板の測定結果をデータベース化する試みがなされている。ただ人の手で全ての電子回路を検査することは時間的に不可能で、このために KAGRA の回路が本格的に必要な前に回路の検査機構を開発する必要があった。

そこで今回、私は Whitening Filter という回路に対する検査機構の開発をおこなった¹。Whitening Filter は後述の通りアナログ/デジタル変換に欠かせない重要な回路である。本論文ではこの検査機構の原理や実際に検査した結果を述べるとともに、検査の過程で発見した Whitening Filter 回路の問題点を議論する。

¹論文中で後述するが、検査機構自体を一から作ったわけではない。

第2章 重力波

Einstein 方程式は重力を時空の歪みとして表す方程式である。このため時空の各点どうしの関係を幾何学的にとらえており単純な線形方程式ではなく、複雑な非線方程式となる。これを近似的に線形方程式化し、さらに解に対してゲージ条件を課すことで重力波を解に持つ波動方程式が現れる。本章ではまず重力波の方程式を導出し、そのあとで重力波の諸公式の導出を行う¹。

2.1 Einstein 方程式と各テンソルの定義

Einstein 方程式は以下のように表現されるテンソル方程式である。

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

ここで c は真空中での光速、 G は万有引力定数、 $G^{\mu\nu}$ は Einstein テンソル、 $T^{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。なお以下では Einstein の規約を用い、テンソルの足で上下同じ文字が使われていた場合、その文字について足し上げることをとする：

$$A^{\mu}_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu}_{\mu\nu} . \quad (2.2)$$

さらに添字についてギリシャ文字の場合は 0 ~ 3 まではしり、ローマ字の場合は 1 ~ 3 まではしることとする。また、上付きのみの文字をもつテンソルを反変テンソル (e.g. $A^{\mu\nu}$)、下付きのみの文字をもつテンソルを共変テンソル (e.g. $A_{\mu\nu}$)、どちらも持つものを混合テンソル (e.g. A^{μ}_{ν}) と呼ぶ。Einstein テンソルはさらに次の二つのテンソルの和で表される：

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R . \quad (2.3)$$

ここで $R^{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 $g^{\mu\nu}$ は時空の計量テンソル、 R は Ricci スカラーである。Ricci テンソルと Ricci スカラーは Riemann 曲率テンソルを縮約することで得られる：

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} , \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (2.4)$$

なお Riemann 曲率テンソルの定義は次式で与えられる：

$$R^{\epsilon}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\epsilon}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\epsilon}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\delta}_{\sigma\nu}\Gamma^{\epsilon}_{\delta\mu} - \Gamma^{\delta}_{\sigma\mu}\Gamma^{\epsilon}_{\delta\nu} . \quad (2.5)$$

$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ は Christoffel 記号と呼ばれ時空上の点どうしの関係を表す。Christoffel 記号の定義は計量テンソルを用い次式で与えられる：

$$\Gamma^{\epsilon}_{\mu\nu} = \frac{g^{\epsilon\sigma}}{2} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) . \quad (2.6)$$

ここで表記を簡単にするために微分を次のように略記している：

$$A_{\mu,\sigma} := \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} A_{\mu} . \quad (2.7)$$

¹本章は文献 [1] の導出過程を参考にした。

2.2 計量に摂動を加えた際の各種テンソルの表式

本節での計算方法は文献 [2] を参考にした。

2.2.1 Christoffel 記号

次に Einstein 方程式の線形化を行う。そのために計量テンソルを次のように背景時空 $\bar{g}_{\mu\nu}$ とそこからの摂動 $h_{\mu\nu}$ という形に書き直さなおす：

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \tau \cdot h_{\mu\nu}, \quad \tau \ll 1 \quad (2.8)$$

重力波を導出するにはとくに $\bar{g}_{\mu\nu}$ をミンコフスキー計量にする²。また重力波を導くだけであるのならば τ に関して1次までとればよいのだが、あとで重力波の輻射公式（四重極公式）を導出する際に2次の項も必要になる。このため2次の項まで含めた摂動計算を行うことにする。

計量テンソル $g^{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ は定義から互いに逆行列になっている。このことを τ の2次まで満たすようにすると、 $g^{\mu\nu}$ は次のように定義できる：

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - \tau \cdot h^{\mu\nu} + \tau^2 \cdot h^{\mu\rho} h_{\rho}^{\nu}. \quad (2.9)$$

なお、 $\bar{g}^{\mu\nu}$ と $\bar{g}_{\mu\nu}$ は互いに逆行列の関係にある。次にこの摂動を加えた計量テンソルを用いた際の Christoffel 記号を計算する。式 (2.6) の定義より

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{g}^{\rho\lambda} - \tau \cdot h^{\rho\lambda} + \tau^2 \cdot h^{\rho\kappa} h_{\kappa}^{\lambda}) [\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda} + \tau (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda})] \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\lambda} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) \\ &\quad + \tau \left[\frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) - \frac{1}{2} h^{\rho\lambda} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) \right] \\ &\quad + \tau^2 \left[\frac{1}{2} h^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) + \frac{1}{2} h^{\rho\kappa} h_{\kappa}^{\lambda} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) \right] \end{aligned}$$

となる。0次の項は背景時空における Christoffel 記号である。そこで背景時空の Christoffel 記号を $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}$ と書くことにする

$$\frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\lambda} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (2.10)$$

次に一次の項に注目する。式を整理するために共変微分を導入する。共変微分とは時空の曲がり方も含めた微分のことであり、通常の微分のより一般的な形である。一般のテンソルに対する共変微分は次式で定義される：

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} &= \partial_{\alpha} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{\alpha \rho_k}^{\mu_k} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1} \rho_k \mu_{k+1} \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} \\ &\quad - \sum_{l=1}^m \Gamma_{\alpha \nu_l}^{\sigma_l} \partial_{\alpha} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{l-1} \sigma_l \nu_{l+1} \dots \nu_m}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

定義によると、とくに二階の共変テンソルに対する共変微分は次のようになる：

$$\nabla_{\lambda} T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} T_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} T_{\mu\sigma}. \quad (2.12)$$

²ミンコフスキー計量とは平坦な時空を表す計量で特殊相対論に用いられる。

ここで次のような式を計算してみる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda}(\bar{\nabla}_\mu h_{\nu\lambda} + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} \left[h_{\nu\lambda,\mu} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} h_{\alpha\lambda} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} h_{\nu\alpha} + h_{\mu\lambda,\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\nu\mu} h_{\alpha\lambda} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\nu\lambda} h_{\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\lambda} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\nu} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\lambda\nu} h_{\mu\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) - \bar{g}^{\rho\lambda} \bar{\alpha}^\sigma_{\mu\nu} h_{\alpha\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) - \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} \bar{g}^{\alpha\sigma} \\
&= \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) - \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} \bar{g}^{\alpha\sigma} h_{\alpha\lambda} (\bar{g}_{\mu\sigma,\nu} + \bar{g}_{\nu\sigma,\mu} - \bar{g}_{\mu\nu,\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) - \frac{1}{2}h^{\rho\lambda} (\bar{g}_{\mu\lambda,\nu} + \bar{g}_{\nu\lambda,\mu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda})
\end{aligned}$$

最終式は整理したかった一次の項と一致している。よって、

$$\tau \left[\frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) - \frac{1}{2}h^{\rho\lambda} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) \right] = \frac{\tau}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} (\bar{\nabla}_\mu h_{\nu\lambda} + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu}) \quad (2.13)$$

と求まる。さらに式(2.13)右辺を見ると、これは背景時空の共変微分と摂動の一次のみによって書かれた Cristoffel 記号とみることもできる。そこで一次の項をさらに

$$\frac{\tau}{2}\bar{g}^{\rho\lambda} (\bar{\nabla}_\mu h_{\nu\lambda} + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu}) = \tau(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_L \quad (2.14)$$

とまとめることにする。

最後に2次の項を整理する。

$$\begin{aligned}
&- \tau^2 \left[\frac{1}{2}h^{\rho\lambda} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) + \frac{1}{2}h^{\rho\kappa} h^\lambda_{\kappa} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) \right] \\
&= -\tau^2 \left[\frac{1}{2}\bar{g}^{\lambda\kappa} h^\rho_{\kappa} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) + \frac{1}{2}h^\rho_{\kappa} h^{\kappa\lambda} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) \right] \\
&= -\frac{\tau^2}{2}h^\rho_{\kappa} [\bar{g}^{\lambda\kappa} (h_{\nu\lambda,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda}) - h^{\kappa\lambda} (\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\mu\lambda,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda})] \\
&= -\tau^2 h^\rho_{\kappa} (\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu})_L
\end{aligned}$$

以上をまとめると摂動を加えたあとの Kristoffel 記号は次のようになる：

$$\boxed{\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \tau(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_L - \tau^2 h^\rho_{\beta} (\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_L} \quad (2.15)$$

以下では便宜的に次のように書くこともある：

$$\boxed{\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}} \quad (2.16)$$

ここで、

$$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \tau(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_L - \tau^2 h^\rho_{\beta} (\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_L \quad (2.17)$$

である。

2.2.2 Riemann 曲率テンソル

次に摂動を加えた際の Riemann テンソルを計算する。Riemann テンソルは定義式(2.5)より、

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \quad (2.18)$$

であった。ここに式(2.15)を代入する。ただ、いきなり計算すると大変であるから次のように項を分けたあと代入することにする：

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - (\rho \leftrightarrow \sigma). \quad (2.19)$$

ここで $(\rho \rightarrow \sigma)$ は前の二項の添字 σ と ρ を入れ替えた項を略記したものである。

そして

$$\begin{aligned}\partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} &= \partial_\rho (\bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu} + \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}) + (\bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} + \delta\Gamma^\mu_{\rho\lambda}) (\bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} + \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}) \\ &= \partial_\rho \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu} + \partial_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} \delta\Gamma^\mu_{\rho\lambda} + \delta\bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \delta\bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}R^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \partial_\rho \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu} \\ &+ \underbrace{\partial_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu} \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}}_A - \underbrace{\partial_\sigma \delta\Gamma^\mu_{\rho\nu} - \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} \delta\Gamma^\mu_{\rho\lambda}}_B \\ &+ \delta\bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \delta\bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} - \delta\bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} \delta\bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu}\end{aligned}\quad (2.20)$$

となる。ここで (2.11) 式の定義に従って $\bar{\nabla}_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ を計算する。すると

$$\bar{\nabla}_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} = \underbrace{\partial_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\lambda\rho} \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu} \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}}_A - \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\sigma} \delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\quad (2.21)$$

を得る³。全く同様にして

$$\bar{\nabla}_\sigma \delta\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \underbrace{\partial_\sigma \delta\Gamma^\mu_{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\lambda\sigma} \delta\Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} \delta\Gamma^\mu_{\rho\lambda}}_B - \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\rho} \delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\quad (2.22)$$

を得る。よって

$$\bar{\nabla}_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \bar{\nabla}_\sigma \delta\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \underbrace{\partial_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\lambda\rho} \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu} \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}}_A - \underbrace{\partial_\sigma \delta\Gamma^\mu_{\rho\nu} - \bar{\Gamma}^\mu_{\lambda\sigma} \delta\Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} \delta\Gamma^\mu_{\rho\lambda}}_B\quad (2.23)$$

となり、この式を用いることで (2.20) 式は以下のように整理できる：

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} + \bar{\nabla}_\rho \delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \bar{\nabla}_\sigma \delta\Gamma^\mu_{\rho\nu} + \delta\bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \delta\bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} - \delta\bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} \delta\bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu} .\quad (2.24)$$

ここで $\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma}$ は背景時空における Riemann 曲率テンソルである：

$$\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu}\quad (2.25)$$

次に (2.17) で定義した $\delta\Gamma$ を (2.24) 式に代入する。するとまず、

$$\begin{aligned}R^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} + \bar{\nabla}_\rho \left\{ \tau (\Gamma^\mu_{\sigma\nu})_L - \tau^2 h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L \right\} \\ &+ \bar{\nabla}_\sigma \left\{ \tau (\Gamma^\mu_{\rho\nu})_L - \tau^2 h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L \right\} \\ &+ \left\{ \tau (\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L - \tau^2 h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\rho\lambda})_L \right\} \left\{ \tau (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu})_L - \tau^2 h^\lambda_\beta (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L \right\} \\ &- \left\{ \tau (\Gamma^\mu_{\sigma\lambda})_L - \tau^2 h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\sigma\lambda})_L \right\} \left\{ \tau (\Gamma^\lambda_{\rho\nu})_L - \tau^2 h^\lambda_\beta (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L \right\}\end{aligned}\quad (2.26)$$

を得る。 τ の次数べつに整理することで次式が得られる：

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} + \tau \left\{ \bar{\nabla}_\rho (\Gamma^\mu_{\sigma\nu})_L - \bar{\nabla}_\sigma (\Gamma^\mu_{\rho\nu})_L \right\} + \tau^2 \left\{ -\bar{\nabla}_\rho h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L + \bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L + (\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu})_L - (\Gamma^\mu_{\sigma\lambda})_L (\Gamma^\lambda_{\rho\nu})_L \right\}$$

0 次の項は整理するまでもなく $\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma}$ である。次に 1 次の項を整理しよう。そのために (2.14) 式で定義した $(\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L$ を代入する。すると

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\rho (\Gamma^\mu_{\sigma\nu})_L - \bar{\nabla}_\sigma (\Gamma^\mu_{\rho\nu})_L &= \bar{\nabla}_\rho \left\{ \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\lambda} (\bar{\nabla}_\sigma h_{\nu\lambda} + \bar{\nabla}_\nu h_{\sigma\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\sigma\nu}) \right\} - \bar{\nabla}_\sigma \left\{ \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\lambda} (\bar{\nabla}_\rho h_{\nu\lambda} + \bar{\nabla}_\nu h_{\rho\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\rho\nu}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\nu + \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}_\nu h^\mu_\sigma - \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}^\mu h_{\sigma\nu} - \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\rho h^\mu_\nu - \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\nu h^\mu_\rho + \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}^\mu h_{\rho\nu}) \\ &=: (R^\mu_{\nu\rho\sigma})_L\end{aligned}\quad (2.27)$$

³Kristoffel 記号は定義より $\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ であることに注意

となる。ここで $(R^\mu_{\nu\rho\sigma})_L$ は背景時空における共変微分と摂動の一次のみで書かれた Riemann 曲率テンソルである。2次の項を計算する。すると、

$$\begin{aligned}
& -\bar{\nabla}_\rho h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L + \bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\beta (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L + (\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu})_L - (\Gamma^\mu_{\sigma\lambda})_L (\Gamma^\lambda_{\rho\nu})_L \\
&= -\bar{\nabla}_\rho (h^\mu_\beta) (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L - h^\mu_\beta \bar{\nabla}_\rho (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L - \bar{\nabla}_\sigma (h^\mu_\beta) (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L + h^\mu_\beta \bar{\nabla}_\sigma (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L + (\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu})_L - (\Gamma^\mu_{\sigma\lambda})_L (\Gamma^\lambda_{\rho\nu})_L \\
&= -h^\mu_\beta \{ \bar{\nabla}_\rho (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L - \bar{\nabla}_\sigma (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L \} + (-\bar{\nabla}_\rho h^\mu_\lambda + (\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L) (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu})_L - (-\bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\lambda + (\Gamma^\mu_{\sigma\lambda})_L) (\Gamma^\lambda_{\rho\nu})_L \\
&= -h^\mu_\beta (R^\beta_{\nu\rho\sigma})_L + \underbrace{(-\bar{\nabla}_\rho h^\mu_\lambda + (\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L)}_{\text{}} (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu})_L - \underbrace{(-\bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\lambda + (\Gamma^\mu_{\sigma\lambda})_L)}_{\text{}} (\Gamma^\lambda_{\rho\nu})_L
\end{aligned}$$

となる。さらに下線部について計算をすすめると

$$\begin{aligned}
-\bar{\nabla}_\rho h^\mu_\lambda + (\Gamma^\mu_{\rho\lambda})_L &= -\bar{\nabla}_\rho h^\mu_\lambda + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\kappa} (\bar{\nabla}_\rho h_{\lambda\kappa} + \bar{\nabla}_\lambda h_{\rho\kappa} - \bar{\nabla}_\kappa h_{\rho\lambda}) \\
&= -\bar{\nabla}_\rho \bar{g}^{\mu\kappa} h_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\kappa} (\bar{\nabla}_\rho h_{\lambda\kappa} + \bar{\nabla}_\lambda h_{\rho\kappa} - \bar{\nabla}_\kappa h_{\rho\lambda}) \\
&= \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\kappa} (-2\bar{\nabla}_\rho h_{\kappa\lambda} + \bar{\nabla}_\rho h_{\lambda\kappa} + \bar{\nabla}_\lambda h_{\rho\kappa} - \bar{\nabla}_\kappa h_{\rho\lambda}) \\
&= -\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\kappa} (\bar{\nabla}_\rho h_{\kappa\lambda} + \bar{\nabla}_\kappa h_{\rho\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\rho\kappa}) \\
&= -\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\kappa} \bar{g}_{\beta\lambda} \bar{g}^{\beta\sigma} (\bar{\nabla}_\rho h_{\kappa\sigma} + \bar{\nabla}_\kappa h_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}_\sigma h_{\rho\kappa}) \\
&= -\bar{g}^{\mu\kappa} \bar{g}_{\beta\lambda} (\Gamma^\beta_{\rho\kappa})_L
\end{aligned}$$

となる⁴。全く同様にして、

$$-\bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\lambda + (\Gamma^\mu_{\sigma\lambda})_L = -\bar{g}^{\mu\kappa} \bar{g}_{\beta\lambda} (\Gamma^\beta_{\sigma\kappa})_L$$

を得られる。以上をまとめると2次の項は

$$\begin{aligned}
(2 \text{ 次}) &= -h^\mu_\beta (R^\beta_{\nu\rho\sigma})_L - \bar{g}^{\mu\kappa} \bar{g}_{\beta\lambda} (\Gamma^\beta_{\rho\kappa})_L (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu})_L + \bar{g}^{\mu\kappa} \bar{g}_{\beta\lambda} (\Gamma^\beta_{\sigma\kappa})_L (\Gamma^\lambda_{\rho\nu})_L \\
&= -h^\mu_\beta (R^\beta_{\nu\rho\sigma})_L - \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma^\gamma_{\rho\alpha})_L (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L - (\Gamma^\beta_{\sigma\alpha})_L (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L]
\end{aligned}$$

となる。なお最後の行に行く際には和をとる変数を変えている⁵。

上の計算により摂動の2次までとった Riemann 曲率テンソルが求まった。結果は次の式で表される：

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} + \tau \cdot (R^\mu_{\nu\rho\sigma})_L - \tau^2 \cdot h^\mu_\beta (R^\beta_{\nu\rho\sigma})_L - \tau^2 \cdot \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma^\gamma_{\rho\alpha})_L (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L - (\Gamma^\beta_{\sigma\alpha})_L (\Gamma^\beta_{\rho\nu})_L] . \quad (2.28)$$

2.2.3 Ricci テンソル

Riemann の曲率テンソルが求まったので Ricci テンソルと Ricci スカラーについても縮約をとることで計算できる。Ricci テンソルの定義より以下のようになる：

$$R_{\nu\sigma} = \bar{R}_{\nu\sigma} + \tau \cdot (R_{\nu\sigma})_L - \tau^2 \cdot h^\mu_\beta (R^\beta_{\nu\mu\sigma})_L - \tau^2 \cdot \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma^\gamma_{\mu\alpha})_L (\Gamma^\beta_{\sigma\nu})_L - (\Gamma^\beta_{\sigma\alpha})_L (\Gamma^\beta_{\mu\nu})_L] . \quad (2.29)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
(R_{\nu\sigma})_L &= (R^\mu_{\nu\mu\sigma})_L \\
&= \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\nu + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h^\mu_\sigma - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\mu h_{\sigma\nu} - \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\mu h^\mu_\nu - \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}^\mu h_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\nu + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h^\mu_\sigma - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\mu h_{\sigma\nu} - \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\nu h)
\end{aligned}$$

である。ここで h は $h^{\mu\nu} e = h^\mu_\mu$ である。

⁴なお途中で計量テンソルが共変微分と可換であることを用いている。

⁵ダミー変数なので問題ない。

2.2.4 Ricci スカラー

同様に Ricci スカラーを計算する。定義より、

$$\begin{aligned}
R &= g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} \\
&= (\bar{g}^{\nu\sigma} - \tau \cdot h^{\nu\sigma} + \tau^2 \cdot h^{\nu\rho} h_\rho^\sigma) R_{\nu\sigma} \\
&= (\bar{g}^{\nu\sigma} - \tau \cdot h^{\nu\sigma} + \tau^2 \cdot h^{\nu\rho} h_\rho^\sigma) (\bar{R}_{\nu\sigma} + \tau \cdot (R_{\nu\sigma})_L - \tau^2 \cdot h_\beta^\mu (R_{\nu\mu\sigma}^\beta)_L - \tau^2 \cdot \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma)_L (\Gamma_{\sigma\nu}^\beta)_L - (\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta)_L (\Gamma_{\mu\nu}^\beta)_L]) \\
&= \bar{g}^{\nu\sigma} \bar{R}_{\nu\sigma} + \tau \cdot (\bar{g}^{\nu\sigma} (R_{\nu\sigma})_L - h^{\nu\sigma} \bar{R}_{\nu\sigma}) \\
&+ \tau^2 (-\bar{g}^{\nu\sigma} h_\beta^\mu (R_{\nu\mu\sigma}^\beta)_L - \bar{g}^{\nu\sigma} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma)_L (\Gamma_{\sigma\nu}^\beta)_L - (\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta)_L (\Gamma_{\mu\nu}^\beta)_L] - h^{\nu\sigma} (R_{\nu\sigma})_L + h^{\nu\rho} h_\rho^\sigma \bar{R}_{\nu\sigma})
\end{aligned}$$

となる。各次数に関して整理する。0次項は

$$(0 \text{ 次}) = \bar{g}^{\nu\sigma} \bar{R}_{\nu\sigma} = \bar{R}$$

であり、同様にして1次項は

$$\begin{aligned}
(1 \text{ 次}) &= \bar{g}^{\nu\sigma} (R_{\nu\sigma})_L - h^{\nu\sigma} \bar{R}_{\nu\sigma} \\
&= \bar{g}^{\nu\sigma} (R_{\nu\sigma})_L - h_{\nu\sigma} \bar{R}^{\nu\sigma} \\
&=: R_L
\end{aligned}$$

となる。最後に2次の項について計算する。すると、

$$\begin{aligned}
(2 \text{ 次}) &= -\bar{g}^{\nu\sigma} h_\beta^\mu (R_{\nu\mu\sigma}^\beta)_L - \bar{g}^{\nu\sigma} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma)_L (\Gamma_{\sigma\nu}^\beta)_L - (\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta)_L (\Gamma_{\mu\nu}^\beta)_L] - h^{\mu\sigma} (R_{\nu\sigma})_L + h^{\nu\rho} h_\rho^\sigma \bar{R}_{\nu\sigma} \\
&= \bar{R}^{\rho\lambda} h_\lambda^\alpha h_{\alpha\rho} - h^{\nu\sigma} (R_{\nu\sigma})_L - \bar{g}^{\nu\sigma} h_\beta^\mu (R_{\nu\mu\sigma}^\beta)_L - \bar{g}^{\nu\sigma} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma)_L (\Gamma_{\sigma\nu}^\beta)_L - (\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta)_L (\Gamma_{\mu\nu}^\beta)_L]
\end{aligned}$$

となる。以上から Ricci スカラーの表式が求まる：

$$R = \bar{R} + \tau \cdot R_L + \tau^2 \left\{ \bar{R}^{\rho\lambda} h_\lambda^\alpha h_{\alpha\rho} - h^{\nu\sigma} (R_{\nu\sigma})_L - \bar{g}^{\nu\sigma} h_\beta^\mu (R_{\nu\mu\sigma}^\beta)_L - \bar{g}^{\nu\sigma} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\beta\gamma} [(\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma)_L (\Gamma_{\sigma\nu}^\beta)_L - (\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta)_L (\Gamma_{\mu\nu}^\beta)_L] \right\}$$

2.3 Einstein 方程式の線形化

重力波の表式を求めるために Einstein 方程式を線形化する。重力波は1次の摂動の効果によって引き起こされる。また以下では真空中でかつ平坦な時空上を伝搬する重力波について考察する。このことからエネルギー運動量テンソルがゼロであることと、摂動における背景時空がミンコフスキー空間であること ($\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) を仮定する。なお

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

である。

Einstein 方程式を線形化するためにまず、Riemann テンソルの1次の摂動を計算する。Riemann テンソルが時空の曲がり方を示していることから分かるようにミンコフスキー空間においては $\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0$ となる。またミンコフスキー空間では Cristoffel 記号がゼロとなることから、共変微分は普通の微分となる。このことから Riemann テンソルのうち1次の摂動として効いてくる項は $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ のみであり、具体的に計算すると

$$R^\mu_{\nu\delta\lambda} = \tau \cdot \frac{\eta^{\delta\sigma}}{2} (h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \quad (2.31)$$

となる。同様に Ricci テンソルと Ricci スカラーは次式で与えられる：

$$R_{\nu\lambda} = \tau \cdot \frac{\eta^{\delta\sigma}}{2} (h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \quad (2.32)$$

$$R = \tau \cdot \frac{\eta^{\nu\lambda} \eta^{\delta\sigma}}{2} (h_{\sigma\lambda,\nu\delta} - h_{\nu\lambda,\sigma\delta} - h_{\sigma\delta,\nu\lambda} + h_{\nu\delta,\sigma\lambda}) \quad (2.33)$$

以下では摂動の次数は重要でなくなるので τ を省略する。Ricci テンソルと Ricci スカラーから摂動の 1 次までとったときの Einstein テンソルが次のようになることがわかる：

$$G_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \left[h^{\delta}_{\lambda,\nu\delta} + h^{\delta}_{\nu,\lambda\delta} - \square h_{\nu\lambda} - h_{,\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} (h^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma} - \square h) \right] \quad (2.34)$$

ここで \square はダランベルシアンであり $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ である。また $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ である。ここで摂動項を新たに

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h \quad (2.35)$$

と定義し直す。すると、

$$\tilde{h} = \eta^{\mu\nu} \tilde{h}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \left(h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h \right) = h - 2 \cdot h = -h \quad (2.36)$$

となり、さらに Einstein テンソルは

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\tilde{h}^{\delta}_{\lambda,\nu\delta} + \tilde{h}^{\delta}_{\nu,\lambda\delta} - \square \tilde{h}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} \tilde{h}^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma} \right) \quad (2.37)$$

となる。ここで次のようなゲージ変換を考える：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \quad (2.38)$$

この変換により計量テンソルは、

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \\ &= \left(\delta^{\alpha}_{\mu} - \xi^{\alpha}_{,\mu} \right) \left(\delta^{\beta}_{\nu} - \xi^{\beta}_{,\nu} \right) \left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \right) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \end{aligned}$$

となる。さらにゲージ変換にともない摂動項は

$$h'_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (2.39)$$

$$h' = \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} = h - 2\xi^{\sigma}_{,\sigma} \quad (2.40)$$

となる。なお Riemann 曲率テンソルはこのゲージ変換に対して不変である。すなわち計量の変換に伴って時空の性質が変わっていない。このことから先に定義した変換がまさにゲージ変換であることが分かる。さて、(2.35) で定義した摂動項をゲージ変換すると、

$$\tilde{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h' = \tilde{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^{\sigma}_{,\sigma} \quad (2.41)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \tilde{h}'^{\mu}_{\nu,\mu} &= \left(\tilde{h}^{\mu}_{\nu} - \xi^{\mu}_{,\nu} - \xi_{\nu}^{\mu} + \eta^{\mu}_{\nu} \xi^{\sigma}_{,\sigma} \right)_{,\mu} \\ &= \tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \xi^{\mu}_{,\nu\mu} - \square \xi_{\nu} + \eta^{\mu}_{\nu} \xi^{\sigma}_{,\sigma\mu} \\ &= \tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \xi^{\mu}_{,\nu\mu} - \square \xi_{\nu} + \eta_{\mu\nu} \xi^{\sigma}_{,\sigma}{}^{\mu} \\ &= \tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \xi^{\mu}_{,\nu\mu} - \square \xi_{\nu} + \xi^{\sigma}_{,\sigma\nu} \\ &= \tilde{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \square \xi_{\nu} \end{aligned}$$

となるので、 ξ^μ を上手に選ぶことで常に

$$\tilde{h}'_{\nu,\mu} = 0 \quad (\square \xi_\sigma = 0) \quad (2.42)$$

とできる。上の関係式は調和条件と呼ばれる。この調和条件下において Einstein テンソルは

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\tilde{h}_{\mu\nu} \quad (2.43)$$

と表される。なお、摂動の1次の範囲のみを考えている場合では Riemann 曲率テンソルなどに対するゲージ変換の係数は1であると考えてよい。これは摂動のより高次の項は考えなくてよいからだ。従って線形化された Einstein 方程式は

$$\square\tilde{h}^{\mu\nu} = -2 * \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \text{ かつ、 } \tilde{h}^{\mu\nu}_{, \nu} = 0 \quad (2.44)$$

となり、特に真空中では波動方程式になる：

$$\square\tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \text{ かつ、 } \tilde{h}^{\mu\nu}_{, \nu} = 0 \quad (2.45)$$

2.4 重力波の導出

2.4.1 重力波の自由度

前節で線形化した Einstein 方程式に対し適当なゲージ変換を行うと波動方程式が現れることが分かった。以下ではこの波動方程式の解 (=重力波) を求めることにする。真空中における線形化した Einstein 方程式は以下の通りであった：

$$\square\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.46)$$

また、調和条件を満たす必要がある ($\tilde{h}^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$)。これとは別に

$$\square h = \square(-\eta^{\mu\nu}\tilde{h}_{\mu\nu}) = -\eta^{\mu\nu}\square\tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.47)$$

を満たす。この方程式を解くことで真空中を伝搬する重力波を求めることができる。

波動方程式の解としてまず、単色平面波がある。以下では線形化した Einstein 方程式の解のうちとくに単色平面波解を導出する。単色平面波解として

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.48)$$

を仮定する ($a_{\mu\nu}$ は定数)。これを式 (2.46) に代入すると

$$\begin{aligned} \square a_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) &= a_{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \partial_\sigma \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= \eta^{\lambda\sigma} k_\lambda k_\sigma a_{\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

から、

$$\eta^{\lambda\sigma} k_\lambda k_\sigma a_{\mu\nu} = 0 \quad (2.49)$$

となる。よって

$$\eta^{\lambda\sigma} k_\lambda k_\sigma = 0 \quad (2.50)$$

でないといけない。これは重力波の4次元波数ベクトルがヌルベクトル⁶であることを表している。また、調和条件に代入すると同様の計算により

$$\eta^{\lambda\nu} k_\nu a_{\mu\lambda} = 0 \quad (2.51)$$

⁶電磁波と同じである。

となる。さらに式(2.38)で定義されたゲージ変換を行う。このとき調和条件を満たすためには式(2.42)より $\square \xi_\mu = 0$ でなければならない。そこで定数 b_μ を用い、

$$\xi_\mu = b_\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.52)$$

とおく。なお4次元波数ベクトルは式(2.48)で定義したものと同一であり、ヌルベクトルである。よって $\square \xi_\mu = 0$ が常に成り立つので解は調和条件を満足する。式(2.39)に従って計算すると、ゲージ変換後の解は

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - i(b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.53)$$

となる。また

$$\begin{aligned} h' &= h - i\eta^{\mu\nu} (b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -\tilde{h} - i\eta^{\mu\nu} (b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \\ &= -(\eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} + i\eta^{\mu\nu} (b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu)) \exp(ik_\lambda x^\lambda) \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$\eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} + 2i\eta^{\mu\nu} b_\mu k_\nu = 0 \quad (2.54)$$

を満たすように b_μ を決めることで常に $h' = 0$ とできる。一般に $h = 0$ をトレースレス条件という。またトレースレス条件下では式(2.35)の定義式から分かるように $h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu}$ となる。以上で本節で用いる文字やゲージ変換の定義を終える。

ここから実際に解を求めることにする。以下では重力波が z 方向に伝搬する場合を考える。このとき $-k_0 = k_3 = k, k_1 = k_2 = 0$ である。解が調和条件とトレースレス条件を常に満たすように出来ることを上で確かめた。解を式(2.48)とし伝搬方向を z 方向だとすると、調和条件(2.51)は

$$\eta^{\lambda\nu} k_\nu a_{\mu\lambda} = k(a_{\mu 0} + a_{\mu 3}) = 0 \quad (2.55)$$

であり、トレースレス条件 ($h = \tilde{h} = 0$) は

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \quad (2.56)$$

となる。この条件を保ちながら式(2.52)のゲージ変換を考える。ゲージ変換でトレースレス条件を保つには式(2.54)より

$$\eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu} + 2i\eta^{\mu\nu} b_\mu k_\nu = 0 \implies b_0 + b_3 = 0 \quad (2.57)$$

であればよい。この条件の下で、 $h'_{0\mu} = 0$ とできる。つまり $h'_{\mu\nu} = 0 = a'_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda)$ として式(2.53)に代入すると

$$a'_{00} = a_{00} + 2ib_0 k, \quad (2.58)$$

$$a'_{01} = a_{01} + ib_1 k, \quad (2.59)$$

$$a'_{02} = a_{02} + ib_2 k, \quad (2.60)$$

$$a'_{03} = a_{03} - i(b_0 k - b_3 k) = a_{03} - 2ib_0 k, \quad (2.61)$$

$$(2.62)$$

を得るので、 $a'_{0\mu} = 0$ となるように b_μ を決めれば良い。なお $a'_{00} = 0$ と $a'_{03} = 0$ はともに b_0 に対する条件である。しかし調和条件 $a_{00} + a_{03} = 0$ より矛盾がない。まとめると解 $h_{\mu\nu}$ の係数は以下の条件を満たすように設定できる：

- $-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ (トレースレス条件)
- $a_{\mu 0} + a_{\mu 3} = 0$ (調和条件)
- $a_{\mu 0} = 0$

- $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ (対称条件⁷。)

以上の条件から具体的に定数を決めていこう。まず $a_{0\mu} = 0$ からより

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz)$$

となる。つぎに調和条件と $a_{0\mu} = 0$ 、解の対称条件より

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz)$$

を得る。最後にトレースレス条件と解の対称条件から、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz)$$

となりこれが解である。通常、重力波を議論する際には次のように係数を表現する：

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i(-\omega t + kz) . \quad (2.63)$$

この h_+ と h_\times は重力波の自由度を表す量である。また重力波の進行方向に対して振動方向が垂直であることから、重力波が横波であることが分かる。このように適当なゲージをとることで、横波でかつトレースレス条件を満たすようにできる。このようなゲージ条件をトランスバース・トレースレスゲージ (Transverse Traceless Gauge=TT Gauge) という。

2.4.2 重力波の発生

前節で重力波の自由度について考察した。以下ではソース ($T^{\mu\nu}$) がある場合を考え、重力波の発生について考察する。

ソースがある場合の Einstein 方程式は以下の通りであった

$$\begin{cases} \square \tilde{h}^{\mu\nu} = -2\kappa(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \\ \tilde{h}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 . \end{cases}$$

ここで $t^{\mu\nu}$ は Einstein テンソルのうち 2 次以上の項を全て集めたものである。また

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

である。右辺において

$$(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (2.64)$$

⁷計量 $g_{\mu\nu}$ は対称である： $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ 。これは一般の計量テンソルを、ミンコフスキー計量を一般座標変換したものと定義すれば自明である。一般相対論では局所慣性系を仮定する。なのである点での計量を、局所慣性系での計量 (=ミンコフスキー計量) を座標変換したものと定義するのは自然なことであろう。ただこれは物理的な考え方であり数学的なものではない気がする。

が成り立つことが知られている⁸。ソースがある場合の Einstein 方程式の解は、遅延グリーン関数を用いることで次のように書ける⁹：

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\pi r} \int dV' \left\{ T^{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) + t^{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) \right\} \quad (2.65)$$

ここで r は原点 (ソース) から観測点までの距離とし、十分遠いことを仮定している。式 (2.64) より

$$(T^{00} + t^{00})_{,00} = (T^{ml} + t^{ml})_{,ml} \quad (2.66)$$

が示される。証明：

$$(T^{0\mu} + t^{0\mu})_{,\mu} = 0 \Rightarrow (T^{0l} + t^{0l})_{,l} = -(T^{00} + t^{00})_{,0}$$

より

$$(T^{00} + t^{00})_{,00} = - \left[(T^{0l} + t^{0l})_{,l} \right]_{,0} = - \left[(T^{l0} + t^{l0})_{,0} \right]_{,l} = \left[(T^{ml} + t^{ml})_{,m} \right]_{,l} = (T^{ml} + t^{ml})_{,ml}$$

式 (2.66) を用いると

$$\begin{aligned} \underline{\left[(T^{lm} + t^{lm}) x^j x^k \right]_{,ml}} &= (T^{lm} + t^{lm})_{,ml} x^j x^k + (T^{lm} + t^{lm})_{,m} (\delta_l^j x^k + \delta_l^k x^j) \\ &+ (T^{lm} + t^{lm})_{,l} (\delta_m^j x^k + \delta_m^k x^j) + (T^{lm} + t^{lm}) (\delta_m^j \delta_l^k + \delta_{jl} \delta_m^k) \\ &= \left[(T^{00} + t^{00}) x^j x^k \right]_{,00} \\ &+ (T^{jm} + t^{jm})_{,m} x^k + (T^{km} + t^{km})_{,m} x^j + (T^{lj} + t^{lj})_{,l} x^k + (T^{lk} + t^{lk})_{,l} x^j \\ &+ T^{kj} + T^{jk} + t^{kj} + t^{jk} \\ &= \left[(T^{00} + t^{00}) x^j x^k \right]_{,00} \\ &+ 2(T^{jm} + t^{jm})_{,m} x^k + (T^{km} + t^{km})_{,m} x^j + 2(T^{kj} + t^{kj}) \\ &= \left[(T^{00} + t^{00}) x^j x^k \right]_{,00} \\ &+ 2 \left[(T^{jm} + t^{jm})_{,m} x^k + (T^{km} + t^{km})_{,m} x^j + (T^{jm} + t^{jm}) \delta_m^k + (T^{km} + t^{km}) \delta_m^j \right] \\ &- 2(T^{kj} + t^{kj}) \\ &= \left[(T^{00} + t^{00}) x^j x^k \right]_{,00} \\ &+ \underline{2 \left[(T^{jl} + t^{jl})_{,m} x^k + (T^{kl} + t^{kl}) x^j \right]_{,l}} \\ &- 2(T^{jk} + t^{jk}) \end{aligned}$$

が求まる。体積積分によって下線部の項は落ちるので

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{jk} &= \frac{\kappa}{2\pi r} \int dV' (T^{jk} + t^{jk}) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi r} \int dV' \left[(T^{00} + t^{00}) x'^j x'^k \right]_{,00} \\ &= \frac{\kappa}{4\pi c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int dV' T^{00} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) x'^j x'^k \\ &= \frac{\kappa}{4\pi c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} I^{jk} \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$I^{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \int dV' T^{00} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) x'^i x'^j$$

⁸これは大局的な保存量が存在することを意味している。

⁹解き方は電磁波の輻射公式等を求める場合と全く同じである

である。さて TT ゲージ条件を満たす解を $\tilde{h}^{\text{TT}}(t, \vec{x})$ を求めよう。TT ゲージ条件を満たす解を

$$\tilde{h}_{jk}^{\text{TT}} = h_{jk}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{\kappa}{4\pi c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} I_{jk}^{\text{TT}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

と書くことにする。 I_{jk} の定義は

$$\begin{aligned} I_{jk} &= I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I \\ &= \int dV' T^{00} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) x'^j x'^k - \frac{1}{3} \int dV' T^{00} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) r'^2 \delta_{jk} \\ &= \int dV' T^{00} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) \left(x'^j x'^k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r'^2 \right) \end{aligned}$$

でありトレースレスになっていることが分かる。球対称である場合、TT ゲージ成分は 0 となる。上の定義のうち右辺二項目は球対称であるから TT ゲージの成分には寄与しない。よって

$$I_{jk}^{\text{TT}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = I_{jk}^{\text{TT}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

となる。

この I_{jk} を用いて \tilde{h}_{jk} を書き、さらに TT ゲージ条件をとることで

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{\kappa}{4\pi c^2 r} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}}$$

となる。TT ゲージを満たす解を構成するには、以下で定義される射影演算子 P_{lm} を作用させれば良い：

$$P_{lm} = \delta_{lm} - \hat{x}_l \hat{x}_m .$$

ただし、 $\hat{x}_i = x_i/r$ である。これを用いることで

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{\kappa}{4\pi c^2 r} \left(P_i^k P_j^l \ddot{I}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \ddot{I}_{kl} \right)$$

を得ることができる。

2.5 重力波の四重極公式

重力波の輻射公式を導出する。重力波の持つエネルギーの公式として Isaacson の公式がある：

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{1}{4\kappa} \langle h_{\alpha\beta,\mu} h^{\alpha\beta}_{,\nu} \rangle .$$

この公式を使い重力波の輻射公式を導出する。前節で求めた h_{ij}^{TT} を代入すると¹⁰

$$\begin{aligned} \langle t^{00} \rangle &= \frac{1}{4\kappa} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT},0} \dot{h}^{\text{TT}}{}_{ij,0} \rangle \\ &= \frac{1}{4\kappa c^2} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}^{\text{TT}}{}_{ij} \rangle \\ &= \frac{\kappa}{64\pi c^6 r^2} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}^{\text{TT}}{}_{ij} \rangle \end{aligned} \tag{2.67}$$

¹⁰ $h_{\mu 0}$ を考えなくてよいのは $h_{\mu 0} = 0$ であるからだ。これは TT ゲージをとっているために成り立つ。このことの直感的な議論は付録 A に少し書いた。

となる。右辺の〈…〉を計算する。このとき射影演算子が以下の等式を満たすことを用いる：

$$\begin{aligned}
P_l^m P_{mn} &= (\delta_l^m - \hat{x}_l \hat{x}^m)(\delta_{mn} - \hat{x}_n \hat{x}_m) \\
&= \delta_{ln} - \hat{x}_n \hat{x}_l - \hat{x}_l \hat{x}_n + \hat{x}_l \hat{x}_n \underbrace{\hat{x}^m \hat{x}_m}_{=1} \\
&= \delta_{ln} - \hat{x}_n \hat{x}_l \\
&= P_{ln} \\
\hat{x}^l P_m^l &= \hat{x}^l (\delta_n^m - \hat{x}^m \hat{x}_l) \\
&= \hat{x}^m - \hat{x}^m \underbrace{\hat{x}^l \hat{x}_l}_{=1} \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned}
\ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}^{\text{TT}} ij &= \left(P_i^k P_j^l \ddot{I}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \ddot{I}_{kl} \right) \left(P^{ik'} P^{j'l'} \ddot{I}_{k'l'} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{k'l'} \ddot{I}_{k'l'} \right) \\
&= P^{kk'} P^{ll'} \ddot{I}_{kl} \ddot{I}_{k'l'} - \frac{1}{2} P^{kl} \ddot{I}_{kl} I - \frac{1}{2} P^{k'l'} \ddot{I}_{k'l'} I + \frac{1}{4} P_{ij} P^{ij} I^2 \\
&= P^{kk'} P^{ll'} \ddot{I}_{kl} \ddot{I}_{k'l'} - \ddot{I}^2 + \frac{1}{4} P_{ij} P^{ij} I^2
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$I = P^{kl} \ddot{I}_{kl}$$

である。また

$$\begin{aligned}
P_{ij} P^{ij} &= (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j)(\delta^{ij} - \hat{x}^i \hat{x}^j) \\
&= P_i^i \\
&= (\delta_i^i - \hat{x}_i \hat{x}^i) \\
&= 2
\end{aligned}$$

より、

$$\ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}^{\text{TT}} ij = P^{kk'} P^{ll'} \ddot{I}_{kl} \ddot{I}_{k'l'} - \frac{1}{2} I^2$$

を得る。さらに式変形を続ける。 \ddot{I} は

$$\begin{aligned}
I &= P^{kl} \ddot{I}_{kl} \\
&= (\delta^{kl} - \hat{x}^k \hat{x}^l) \ddot{I}_{kl} \\
&= -\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{kl}
\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
P^{kk'} P^{ll'} \ddot{I}_{kl} \ddot{I}_{k'l'} &= (\delta^{kk'} - \hat{x}^k \hat{x}^{k'}) (\delta^{ll'} - \hat{x}^l \hat{x}^{l'}) \ddot{I}_{kl} \ddot{I}_{k'l'} \\
&= \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - \hat{x}^l \hat{x}^{l'} \ddot{I}_{k'l'} \ddot{I}_{kl} - \hat{x}^k \hat{x}^{k'} \ddot{I}_{kl} \ddot{I}_{k'l'} + (\hat{x}^k \hat{x}^{k'} \ddot{I}_{kl})^2 \\
&= \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - 2 \hat{x}^k \hat{x}^{k'} \ddot{I}_{kl} \ddot{I}_{k'l'} + I^2
\end{aligned}$$

となる。なお、式変形の際に

$$\hat{x}^l \hat{x}^{l'} \ddot{I}_{k'l'} \ddot{I}_{kl} = \hat{x}^{l'} \ddot{I}_{l'k} \hat{x}^k \ddot{I}_{kl} = \hat{x}^{k'} \ddot{I}_{k'l'} \hat{x}^k \ddot{I}_{lk} = \hat{x}^k \hat{x}^{k'} \ddot{I}_{lk} \ddot{I}_{k'l'}$$

を用いた (和をとる変数を適当に付け替えている¹¹)。このことから

$$\begin{aligned}\ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}^{\text{TT}}{}^{ij} &= \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - 2\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{kl} \ddot{I}^l + \mathcal{I}^2 - \frac{1}{2} \mathcal{I}^2 \\ &= \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - 2\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{km} \ddot{I}^m_l + \frac{1}{2} (\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{kl})^2\end{aligned}$$

と求まるので

$$\langle t^{00} \rangle = \frac{\kappa}{64\pi c^6 r^2} \left\langle \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - 2\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{km} \ddot{I}^m_l + \frac{1}{2} (\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{kl})^2 \right\rangle \quad (2.68)$$

である。

一方、動径方向のエネルギーのフラックスを考える。

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x^1}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.69)$$

となり、極座標を用いると

$$x^1 = r \cos \phi \sin \theta, \quad x^2 = r \sin \phi \sin \theta, \quad x^3 = r \cos \theta$$

と書けるので

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^3} = \hat{x}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (2.70)$$

となることを用いると、Isaacson の公式から動径方向のエネルギーのフラックスは

$$\langle t^{0r} \rangle = \frac{\kappa}{64\pi c^5 r^2} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}^{\text{TT}}{}^{ijk} \hat{x}_k \rangle \quad (2.71)$$

となる。さらに I_{ij} が $t - r/c$ の関数であることから

$$\begin{aligned}\ddot{I}_{ij}^{\text{TT},k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT},k} \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= \frac{\partial r}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial r} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= \frac{x^k}{cr} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \right) \\ &= -\frac{\hat{x}^k}{c} \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}}\end{aligned}$$

を得る。ゆえに

$$\begin{aligned}\langle t^{0r} \rangle &= -\frac{\kappa}{64\pi c^6 r^2} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}^{\text{TT}}{}^{ij} \hat{x}_k \hat{x}^k \rangle \\ &= -\frac{\kappa}{64\pi c^6 r^2} \langle \ddot{I}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{I}^{\text{TT}}{}^{ij} \rangle \\ &= \langle t^{00} \rangle\end{aligned}$$

となる (最後の等号は式 (2.67) を用いた)。以上から重力波のエネルギー輻射率は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E_{\text{GW}} &= -\int d\Omega r^2 c \langle t^{0r} \rangle \\ &= \int d\Omega r^2 c \langle t^{00} \rangle \\ &= \frac{\kappa}{64\pi c^5} \int d\Omega \left\langle \ddot{I}^{kl} \ddot{I}_{kl} - 2\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{km} \ddot{I}^m_l + \frac{1}{2} (\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{I}_{kl})^2 \right\rangle\end{aligned}$$

となる。さらに積分公式¹²

$$\begin{aligned}\int d\Omega \hat{x}^k \hat{x}^l &= \frac{4\pi}{3} \delta^{kl} \\ \int d\Omega \hat{x}^i \hat{x}^j \hat{x}^k \hat{x}^l &= \frac{4\pi}{15} (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk})\end{aligned}$$

¹¹ $k \rightarrow l, l' \rightarrow k', l \rightarrow k$

¹² 対称性に注意すれば簡単に示せる

を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{\text{GW}} &= \frac{\kappa}{64\pi c^5} \cdot 4\pi \cdot \langle \ddot{\ddot{I}}^{kl} \ddot{\ddot{I}}_{kl} \rangle - 2 \cdot \frac{\kappa}{64\pi c^5} \cdot \frac{4\pi}{3} \delta^{kl} \langle \ddot{\ddot{I}}_{km} \ddot{\ddot{I}}_l^m \rangle + \frac{\kappa}{64\pi c^5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{15} (\delta^{kl} \delta^{k'l'} + \delta^{kk'} \delta^{ll'} + \delta^{kl'} \delta^{lk'}) \langle \ddot{\ddot{I}}_{kl} \ddot{\ddot{I}}_{k'l'} \rangle \\
&= \frac{\kappa}{8c^5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle \ddot{\ddot{I}}^{kl} \ddot{\ddot{I}}_{kl} \rangle - \frac{\kappa}{8\pi c^5} \cdot \frac{1}{3} \langle \ddot{\ddot{I}}_{kl} \ddot{\ddot{I}}^{kl} \rangle + \frac{\kappa}{8\pi c^5} \cdot \frac{1}{60} (\langle \ddot{\ddot{I}}_{kl} \ddot{\ddot{I}}^{kl} \rangle + \langle \ddot{\ddot{I}}_{kl} \ddot{\ddot{I}}^{lk} \rangle) \\
&= \frac{\kappa}{8c^5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \right) \langle \ddot{\ddot{I}}^{kl} \ddot{\ddot{I}}_{kl} \rangle
\end{aligned}$$

となる。 $\kappa = 8\pi G/c^4$ であったことを思い出すと重力波の輻射率は

$$\boxed{\frac{d}{dt}E_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^9} \langle \ddot{\ddot{I}}^{kl} \ddot{\ddot{I}}_{kl} \rangle} \quad (2.72)$$

と求まる。これが重力波の四重極公式である。特に $T^{00} = \rho c^2$ とすると

$$I^{ij} = \int dV' T^{00} \left(x'^i x'^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} r'^2 \right) = c^2 \int dV' \left(x'^i x'^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} r'^2 \right) \rho$$

より

$$\boxed{\frac{d}{dt}E_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{\ddot{Q}}^{kl} \ddot{\ddot{Q}}_{kl} \rangle, \quad Q_{kl} = \int dV' \left(x'_k x'_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} r'^2 \right) \rho} \quad (2.73)$$

となる。これを重力波の四重極公式という場合がよくある。

2.5.1 回転する物体からの重力波

前節で四重極公式を導出した。この公式を用いて回転する物体から放出される重力波を計算しよう。本節では式(2.73)を用いることにする。定義より Q_{ij} は実対称行列であり、任意の実対称行列は適当なユニタリ行列を用いることで対角化可能である。このことから適当な座標系を選ぶことで Q_{ij} を対角化できる。たとえばダンベルのような物体を考える。両端には質量 m の質点がついているとする。このとき座標系として二つの質点を結ぶ直線を x 軸に選んだとする。また質点は $x = \pm a$ にあるとする。すると、

$$Q_{11} = \int dV' \left[\left(x^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) m (\delta(x-a)\delta(y)\delta(z) + \delta(x+a)\delta(y)\delta(z)) \right] = \frac{4}{3} m a^2$$

$$Q_{22} = \int dV' \left[\left(y^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) m (\delta(x-a)\delta(y)\delta(z) + \delta(x+a)\delta(y)\delta(z)) \right] = -\frac{2}{3} m a^2$$

$$Q_{33} = \int dV' \left[\left(z^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) m (\delta(x-a)\delta(y)\delta(z) + \delta(x+a)\delta(y)\delta(z)) \right] = -\frac{2}{3} m a^2$$

となり、その他の成分は例えば

$$Q_{12} = \int dV' \left[\left(xy - \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot r^2 \right) m (\delta(x-a)\delta(y)\delta(z) + \delta(x+a)\delta(y)\delta(z)) \right] = 0$$

のようにゼロとなる。すなわち対角化されている。簡単のために以下ではこの対角化された四重極モーメントを

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

と略記することにする。

この物体を z 軸の回りに角速度 Ω で回転させるとする。このとき、物体に固定した座標系を (x', y', z') とし空間に固定された座標系を (x, y, z) とすれば、

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t \quad (2.75)$$

$$y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t \quad (2.76)$$

$$z = z' \quad (2.77)$$

である。この座標変換によって Q_{ij} はテンソルの変換を受ける。このため空間に固定された座標における四重極モーメントは

$$Q_{ij} = R_i^l R_j^m Q'_{lm} \quad (2.78)$$

となる¹³。ここで R_i^j は回転を表す変換行列であり

$$R_i^j = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

となる。四重極モーメントが物体に固定された座標系で対角化されていたことに注意し式 (2.78) を具体的に計算すると

$$Q_{ij} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{Q_1 - Q_2}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって、

$$\ddot{Q}_{ij} = -2(Q_1 - Q_2)\Omega^2 \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

となる。これより

$$\langle \ddot{Q}_{ab} \ddot{Q}^{ab} \rangle = 32\Omega^6 (Q_1 - Q_2)^2 \quad (2.81)$$

と求まる¹⁴。よって重力波の四重極公式 (2.73) から

$$W = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ab} \ddot{Q}^{ab} \rangle = \frac{32G}{5c^5} \Omega^6 (Q_1 - Q_2)^2 \quad (2.82)$$

と求まる。式 (2.74) より $Q_1 - Q_2 = 2ma^2$ であった。以上をまとめると、ダンベル状の物体から単位時間当たり放出される重力波のエネルギーは次式でまとめられる：

$$W = \frac{128G}{5c^5} \Omega^6 m^2 a^4 \quad (2.83)$$

例えば $m = 100\text{kg}, a = 1\text{m}$ のダンベルを 100Hz でまわすと単位時間当たり放出されるエネルギーは

$$W = 4.3 \times 10^{-31} \text{ W}$$

となりこれは重力が量子化された場合の基底エネルギーよりもはるかに小さい¹⁵。このことから重力波が与える影響が小さいことが分かる。また人工的に重力波を発生させることが不可能なことも分かる。

¹³ Q_{ij} が空間に固定された座標系における四重極モーメントであり、 Q'_{ij} が物体に固定された座標系における四重極モーメントである。

¹⁴ 計算は定義に従ってやればできる。

¹⁵ $\hbar \cdot 2\Omega = 10^{-31}\text{J}$ である。

2.5.2 重力波の間接観測

現在までの間、重力波は直接観測されていない。しかしながら間接的にはあるが重力波の引き起こす影響を観測した例もある。本節では連星系を使った重力波の間接観測について説明する。

前節で見た通り重力波を人工物を用いて発生させることは不可能である。しかしながら式 (2.83) をみると角速度が大きく、かつ質量の大きな物体であれば十分大きなエネルギーを放出すると考えられる。宇宙には星と星とがお互いに引き合いながら高速で回転している連星と呼ばれるものがある。そこで重力波が連星系にどのような影響を与えるかを見てみることにする。ただし簡単化のために、連星系を質量の等しい二つの星が重力によって束縛され円運動しているとし、ニュートン力学に従っているとす。

星の質量を M 、重心からの距離を a 、回転の角速度を Ω とする。運動方程式から

$$a\Omega^2 = \frac{GM}{(2a)^2} \quad (2.84)$$

が成り立つ。よって重力波の放出エネルギーは式 (2.83) より

$$W = \frac{128G}{5c^5} (a\Omega^2)^3 aM^2 = \frac{2G^4 M^5}{5c^5 a^5} \quad (2.85)$$

となる。重力波の放出しエネルギーを失うことで連星系は軌道を変化させる。連星系のエネルギー E は

$$E = 2 \times \frac{1}{2} M(a\Omega)^2 - G \frac{M^2}{2a} = -G \frac{M^2}{4a} \quad (2.86)$$

である。このエネルギーを単位時間当たり式 (2.85) 分だけ失うので

$$\frac{dE}{dt} = -G \frac{M^2}{4a^2} \frac{da}{dt} = -\frac{2G^4 M^5}{5c^5} \frac{1}{a^5} \quad (2.87)$$

となる。ここから軌道の大きさ a の変化は

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\Lambda}{4a^3}, \quad \Lambda = \frac{32G^3 M^3}{5c^5} \quad (2.88)$$

となる。連星系が $t = t_0$ で合体するとすると

$$a(t) = [\Lambda(t_0 - t)]^{\frac{1}{4}} \quad (2.89)$$

で与えられ、時間とともに軌道が小さくなることが分かる。また角速度は式 (2.84) より

$$\Omega(t) = \frac{\sqrt{GM}}{2} [\Lambda(t_0 - t)]^{-\frac{3}{8}} \quad (2.90)$$

となる。つまり重力波の放出に伴って連星系の半径が小さくなる。これにより角速度が大きくなり結果、回転周期が短くなる。同様の議論を中性子星からなる連星 (= 中性子星連星) に適用し、観測結果から重力波が放出されていることが実証された。観測対象となったのは PSR 1913+16 と呼ばれる中性子星連星で、この中性子星連星を発見したハルス (R.A.Hulse) とテイラー (J.H.Taylor) は 1993 年度のノーベル物理学賞受賞者となった。

第3章 光干渉計型重力波検出器

21世紀に入り重力波を直接検出しようとする動きが活発になっている。現在主流となっている観測方法の一つに光干渉計を用いるものがある。本節では光干渉計を用いた観測の原理を説明する。光干渉計型重力波検出器は Michelson 干渉計が基本となる。そこでまずはじめに Michelson 干渉計における重力波の応答を考察する。

3.1 Michelson 干渉計の重力波に対する応答

重力波によって空間に歪みが生じる。重力波の場合、この空間の歪みは直行する二方向で収縮が逆になる(差動となる)。これを Michelson 干渉計を用いて観測しようというのが光干渉計型重力波検出器の原理である。今、 h_+ の重力波が検出器に入射したとする。ビームスプリッタ (BS) を座標原点とする。また図 3.1 に示すように干渉計の二光路がそれぞれ x 軸と y 軸に一致しているとし、原点から x 方向の鏡までの距離を L_x 、 y 方向の鏡までの距離を L_y とする。

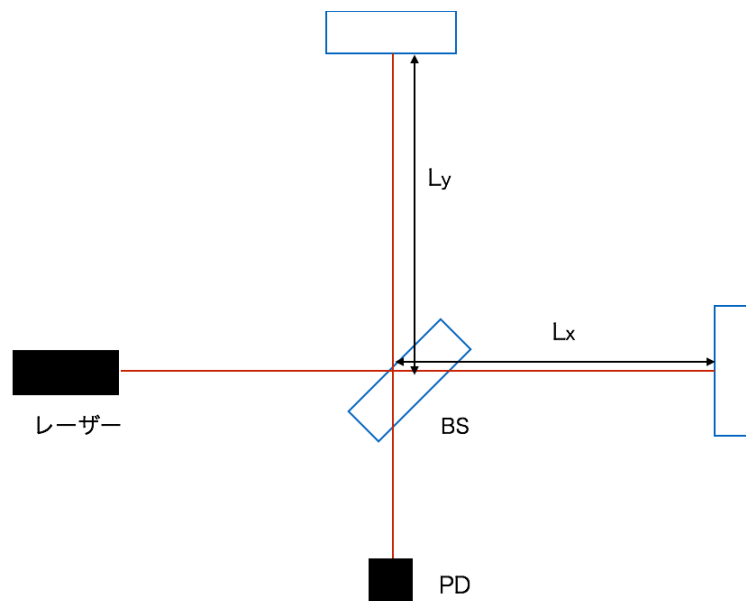


図 3.1: Michelson 干渉計の図

重力波が存在しなければ、 x 方向の光路を往復して来た光は $t_1 = 2L_x/c$ だけ、 y 方向の光路を往復してきた光は $t_2 = 2L_y/c$ だけの時間を要するので

$$\phi_1 - \phi_2 = 4\pi\nu \frac{(L_x - L_y)}{c} \quad (3.1)$$

の位相差が現れる。この式からも分かるように干渉計の明暗によって基線長差¹が分かる。

次に重力波が存在する場合を考える。 h を h_+ モードの振幅とする。また前述の通り h_+ モードのみを考え背景時空はミンコフスキー時空であるとする。このとき、

$$ds = -c^2 dt^2 + [1 + h(t)] dx^2 + [1 - h(t)] dy^2 + dz^2 \quad (3.2)$$

¹Michelson 干渉計の BS から一番遠くにあるミラーまでの距離のことである。腕の長さともいう。

となる²。なお、鏡やビームスプリッタは自由質点であるから座標値が一定となる。光の場合、局所慣性系において $ds = 0$ が成り立つ。このことから光線の方程式は

$$0 = -c^2 dt^2 + [1 + h(t)] dx^2 + [1 - h(t)] dy^2 + dz^2 \quad (3.3)$$

で表される。いま、光が x 軸方向に伝搬しているとする。このとき光線の方程式は

$$0 = -c^2 dt^2 + [1 + h(t)] dx^2 \quad (3.4)$$

となるので

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + h(t)}} \quad (3.5)$$

となり、見かけの光速が変化していることが分かる。なお符号は光が x 軸方向のどの向きに伝搬しているかを表している。 x 方向の光路を往復するのに必要な時間 t_1 は

$$\int_{t-t_1}^t dt' \frac{1}{\sqrt{1 + h(t')}} = \frac{1}{c} \left(\int_0^{L_x} dx - \int_{L_x}^0 dx \right) = \frac{2L_x}{c} \quad (3.6)$$

で与えられる³。さらに $|h| \ll 1$ として一次近似をすると

$$\int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t dt' \left[1 - \frac{h(t')}{2} \right] = \frac{2L_x}{c} \quad (3.7)$$

となる。ここで $h = 0$ のとき $t_1 = 2L_x/c$ であることを用いた。結局、

$$t_1 = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_x}{c}}^t dt' h(t') \quad (3.8)$$

となる。上式において右辺二項目が重力波の効果を表している。 y 軸方向についても全く同じであるが、重力波が引き起こす空間の歪みが x 軸とは反対になることに注意すると

$$t_2 = \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_y}{c}}^t dt' h(t') \quad (3.9)$$

となる。ゆえに位相差 $\phi_1 - \phi_2$ は

$$\phi_1 - \phi_2 = 4\pi\nu \frac{L_x - L_y}{c} + \phi_{\text{GW}}(t) \quad (3.10)$$

$$\phi_{\text{GW}}(t) = 2\pi\nu \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt' h(t') \quad (3.11)$$

である。なお、 ν はレーザーの周波数であり $L_x \sim L_y \approx L$ を仮定している。

特に重力波が

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega h(\omega) e^{-i\omega t} \quad (3.12)$$

であるとする、

$$\begin{aligned} \phi_{\text{GW}}(t) &= 2\pi\nu \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega h(\omega) e^{-i\omega t'} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} h(\omega) e^{i\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega H_{\text{MI}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} \\ H_{\text{MI}} &= \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

² $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ であった。

³微分方程式を解いているだけである

となる。 $H_{\text{MI}}(\omega)$ が角周波数 ω の重力波に対する Michelson 干渉計の周波数応答関数である。ここで Ω はレーザーの各振動数である。ある周波数に注目すると $h(t) = h_0 \exp(-i\omega t)$ と書けるが、このとき

$$\phi_{\text{GW}} = \frac{4\pi\nu h_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{L}{c}\right)\right] \quad (3.14)$$

となる。このとき $\omega L/c \ll 1$ が成り立つのであれば

$$\phi_{\text{GW}} = \frac{4\pi\nu L h(t)}{c} \quad (3.15)$$

となる。式から $\omega L/c = \pi/2$ のとき位相変化が最大になる。100Hzの重力波に対しては $L = 750\text{km}$ とすると位相変化が最大になる。このとき $h_0 = 10^{-22}$ であるとし、レーザーの波長が $1\mu\text{m}$ とすると

$$|\phi_{\text{GW}}| = \frac{4\pi\nu h_0}{\omega} = 6 \times 10^{-10} \quad (3.16)$$

となりきわめて小さな量となる。そもそも基線長が750kmもある Michelson 干渉計を地球上でつくることは不可能である⁴。それにも関わらず位相変化がこれほど小さい量であることから重力波の直接検出が大変であると分かる。地上で重力波を観測するためには重力波に対する応答を大きくする必要がある。そのためにいくつかの工夫がある。以下ではその工夫について説明する。

3.2 Fabry-Perot 共振器

重力波からの信号を増幅する工夫の一つに Michelson 干渉計に共振器を組み込むというものがある。共振器とは図3.2で示されるように二枚の合わせ鏡によって、共振器内の光を増幅させる装置である。

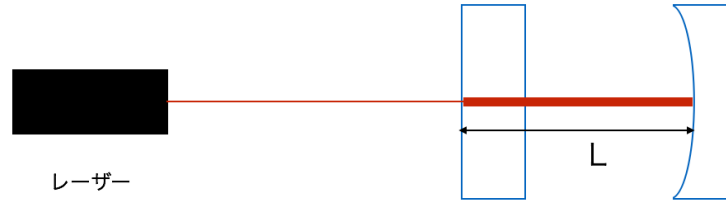


図 3.2: Fabry-Perot 共振器の図

本節では重力波に対する共振器の応答を考える。重力波が存在しているとき共振器内を光が往復するのにかかる時間は式(3.8)より

$$t = \frac{2L}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt' h(t') \quad (3.17)$$

である。よって光が共振器内を n 回往復するのにかかる時間を t_n とすると、 x 軸方向に横たわる Fabry-Perot 共振器に+モードの重力波が入射したときには

$$t_n = \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L}{c}n}^t dt' h(t') \quad (3.18)$$

とできる。さらにここで式(3.12)を代入することで

$$t_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega h(\omega) \frac{1 - e^{-2i\frac{\omega L}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

となる。このとき入射光を $E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$ とすると、Fabry-Perot 共振器からの反射光 E_r は、

$$E_r = E_0 e^{i\Omega t} \left\{ -r_{\text{F}} + t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}} \sum_{n=1}^{\infty} (r_{\text{F}} r_{\text{E}})^{n-1} e^{-i\Omega t_n} \right\} \quad (3.20)$$

⁴宇宙空間で Michelson 干渉計を作り重力波を検出しようという試みもある。

と表すことができる。なお重力波は十分長い時間、到来し続けているとする。この式に式 (3.19) を代入し、 $|h| \ll 1$ として計算すると

$$\frac{E_r}{E_{in}} \approx -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} - \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\Omega}{2\omega} h(\omega) \frac{1 - e^{-2i\gamma}}{1 - r_E r_F e^{-i\Phi} e^{-2i\gamma}} \quad (3.21)$$

となる。ただし、

$$\Phi = 2 \cdot \frac{L\Omega}{c} \quad \gamma = \frac{L\omega}{c} \quad (3.22)$$

である。さらに入射レーザーと共振器が共振している場合を考えると、 $\Phi = 2\pi n$ とできるので

$$\frac{E_r}{E_{in}} = \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2) r_E}{1 - r_F r_E} \left[1 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H_{FP}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} \right] \quad (3.23)$$

となる。ここで $H_{FP}(\omega)$ は重力波に対する Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数である：

$$H_{FP}(\omega) = \frac{\alpha\Omega}{\omega} \frac{\sin \gamma}{1 - r_F r_E e^{-2i\gamma}} e^{-i\gamma} \quad (3.24)$$

また、

$$\alpha = \frac{t_F^2 r_E}{-r_F + (r_F^2 + t_F^2) r_E} \quad (3.25)$$

である。

このように共振器は重力波に対して決まった応答をする。共振器を Michelson 干渉計に組み込むことで重力波に対する感度が上昇する。現在主流になっている光干渉計型重力波検出器には計 4 つの共振器が組み込まれており、そのうち日本で建設中である KAGRA の理論感度曲線は次の図 3.3 のようになっている。

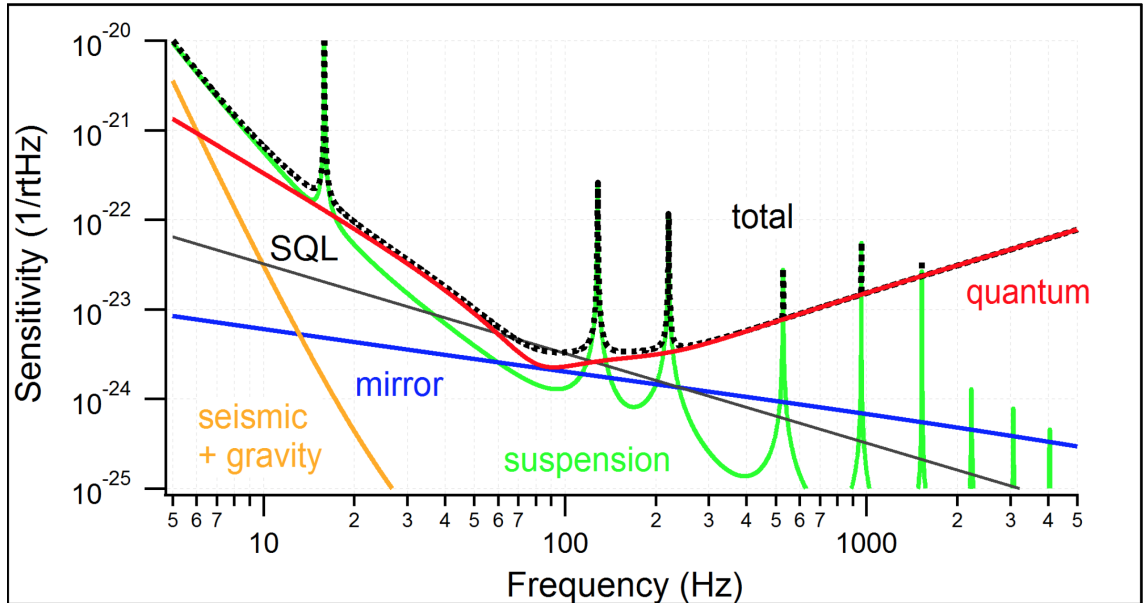


図 3.3: KAGRA の目標感度曲線

高感度の重力波検出器にはそれ自身の感度を上げるだけでなく、雑音対策も重要になる。一口に雑音と言っても様々な種類がありそれぞれ対策方法が異なる。次章において重力波検出器で重要となる雑音について説明する。

3.3 光干渉計型重力波検出器における雑音

重力波の信号は非常に微弱であるために様々な雑音を取り除く、または少なくする試みがなされている。本節では干渉計の感度を制限する主要な雑音について述べる⁵。

⁵なお本節は文献 [3] を参考にした。

3.3.1 ショット雑音

ショット雑音は光が量子であることに起因する雑音である。量子的な雑音は原理的に取り除くことが不可能でありレーザー干渉計の感度を根本的に制限してしまう。いま光検出器 (photo detector) に強度一定の光が入射して光電流が i_{dc} [A] だけ流れているとしよう。このときショット雑音は

$$i_{shot} = \sqrt{2ei_{dc}} \text{ [A/}\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.26)$$

となる。ここで e は素電荷⁶ である。ショット雑音による Michelson 干渉計の位相検出限界は、位相変化の信号の大きさとショット雑音の大きさが等しくなるときである。別の言い方をすると S/N が 1 になるときである。Michelson 干渉計におけるショット雑音の位相検出限界は

$$\delta\phi_{shot} = \sqrt{\frac{2e}{i_{dc}}} \text{ [rad/}\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.27)$$

で与えられることが知られている。仮に信号の取り出し方法や Michelson 干渉計の動作点を変えてもこの値を超えることは出来ない。このため式 (3.27) はショット雑音限界と呼ばれている。photo detector に流れる光電流 i_{dc} は photo detector に入射する光のエネルギーを P_{in} , プランク定数を h ⁷, レーザーの周波数を ν , photo detector の量子効率を η とすると、

$$i_{dc} = \frac{e\eta}{h\nu} P_{in} \quad (3.28)$$

となる。よって式 (3.26) は

$$\delta\phi_{shot} = \sqrt{\frac{2h\nu}{\eta P_{in}}} \text{ [rad/}\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.29)$$

となる。

この式からショット雑音限界がレーザーパワーの平方根に反比例し、レーザーパワーが増すごとに小さくなることが分かる。このことは高感度の重力波検出器にはハイパワーレーザーが必要であることを示している。レーザーパワーを増大させる以外のショット雑音の影響を小さくする方法として、パワーリサイクリングがある。これは干渉計から戻るレーザー光を鏡によって再び干渉計に戻すことで、干渉計内部のパワーを上げる方法である。

またレーザーパワーを大きくするとレーザーの輻射圧によって鏡が揺らされ、それがノイズとなる (=輻射圧雑音)。レーザーパワーが小さいとショット雑音の影響が大きくなり、反対にレーザーパワーを上げると輻射圧雑音の影響が大きくなる。このトレードオフの関係は標準量子限界 (SQL: Standard Quantum Limit) とよばれ、現在主要な研究対象となっている。

3.3.2 熱雑音

干渉計は外界と接しており、これはある温度の熱浴中にあることと同じである。このため、干渉計を構成する部品は熱振動をする。その中でも、鏡を吊る振り子の熱振動と、鏡自身の熱振動は干渉計の光路長を変化させてしまう。干渉計の重力波に対する応答は光路長を変化させることと等価であるから、光路長を直接変化させてしまう上記二つの熱雑音は大きな問題となりうる。

一般に熱振動をモデル化する方法には以下の二つがある：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Viscous Damping Model} \\ \text{Structure Damping Model} \end{array} \right. .$$

⁶ $e = 1.602 \times 10^{-19}$ [C]

⁷ $h = 6.626 \times 10^{-34}$ [J · s]

Viscous Damping Model は減衰力が速度に比例するとするモデルである。このモデルで変位スペクトル $\delta x[\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$ を計算すると、

$$\delta x(\omega) \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{4k_B T}{m\omega_0^3 Q}} (\omega \ll \omega_0) \\ \sqrt{\frac{4k_B T \omega_0}{m\omega^3 Q}} (\omega \gg \omega_0) \end{cases}$$

ここで k_B はボルツマン定数⁸ である。またその他の変数については、 ω を角振動数、 ω_0 を共振周波数、 m を質量、 Q を Q 値、 T を温度としている。

一方、Structure Damping Model は Viscous Damping Model では損失が外的要因によって起こるとしたのに対し、物質内部で起こるとする考え方である。このモデルで変位スペクトルを計算すると

$$\delta x(\omega) \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{4k_B T \phi_k(\omega)}{m\omega_0^2 \omega}} (\omega \ll \omega_0) \\ \sqrt{\frac{4k_B T \omega_0^2 \phi_k(\omega)}{m\omega^3}} (\omega \gg \omega_0) \end{cases}$$

となる。ここで $\phi_k(\omega)$ はほぼ一定の複素バネ定数である。 $\phi_k(\omega)$ は共振の Q 値との間に $\phi_k(\omega_0) = 1/Q$ という関係がある。また、様々な実験結果から $\phi_k(\omega)$ の周波数依存性は小さいと考えられている。

実際の干渉計の構成では、振り子の共振周波数は数 Hz であり、鏡の弾性振動の共振周波数は数十 kHz、重力波の観測帯域は数百 Hz である。よって

$$\text{振り子の共振周波数} \ll \text{重力波の観測帯域} \ll \text{鏡の弾性振動の共振周波数}$$

が成り立つ。ゆえにいずれのモデルに対しても上の式が鏡自身の熱振動がもたらす雑音の変位スペクトル、下の式が鏡を吊る振り子がもたらす雑音の変位スペクトルとなる。いずれの場合も温度を低くするか Q を大きくするかによって熱振動がもたらす影響を小さくできる。現在建設中の重力波検出器 KAGRA では、鏡に Q 値の大きいサファイアを用い、さらに鏡自身を 20K にまで冷やすことで熱雑音の影響を小さくする予定である。

3.3.3 地面振動

地面は仮に地震などが無かったとしても常に微小振動している。特に低周波ではこの振動が鏡を揺らすことで雑音となる。

地面の常時微動スペクトルは、場所によっても差があるが、おおよそ

$$\delta x(f) \sim 10^{-7} \times \left(\frac{1[\text{Hz}]}{f} \right)^2 [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.30)$$

となることが知られている。

重力波に対する干渉計の応答でも見たが(3.1節)、鏡を振り子の吊ることで自由質点にしていた。これにより重力波が干渉計にどのような影響を与えるかを簡単に計算できた。ただ振り子は鏡を自由質点にするだけでなく、地面雑音に対する防振の役割もある。ここで干渉計の鏡が共振周波数 ω_0 、 Q 値 Q の単振り子 (= 1 段の振り子) によって吊られているとする。このとき振り子の支点に対する鏡の変位の伝達関数 $H(\omega)$ は

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q} - \omega^2} \quad (3.31)$$

となる。

振り子の共振周波数は重力波の感度帯域にくらべ十分小さい ($\omega_0 \ll \omega$)。また Q に対して $Q \gg \omega/\omega_0$ という条件を課すと、 $\omega_0^2 \gg \frac{\omega\omega_0}{Q}$ より

$$H(\omega) \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \quad (3.32)$$

⁸ $k_B = 1.381 \times 10^{-23} [\text{J/K}]$ である。

となる。よって地面振動による鏡の変位スペクトルは

$$\delta x(\omega) \sim \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \times \frac{10^{-7} (2\pi)^2}{\omega^2} \text{ [m/}\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.33)$$

となり振動が低減されていることが分かる。振り子を多段にすることで、さらに防振比をかせぐことが出来る。また、光学台をスタックに載せるなどすれば防振効果を高めることができる。実際の重力波検出装置ではこのような防振の工夫がたくさんなされており、地面振動による雑音を押さええている。

次に振り子の共振周波数付近に注目することにする。共振周波数付近をみるので $\omega \approx \omega_0, Q \gg 1$ として式 (3.31) を近似する。すると、

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q} - \omega^2} \approx \frac{\omega_0^2}{i\frac{\omega_0^2}{Q}} = -iQ \quad (3.34)$$

となる。これは鏡が共振周波数付近で大きく揺れることを表している。低周波で大きく揺れると干渉計の感度が低下するだけでなく、動作すらしなくなる。このようなことが起きないようにするために振り子によって吊らされた鏡は低周波での振動を抑えるように制御する必要がある。例えば永久磁石を用いたダンピング (磁石を用いて揺れを抑えること) などがその一例である。

3.3.4 レーザー自身の雑音

完璧なレーザーを作ることは不可能であり、レーザー自身にも種々の雑音が存在する。レーザー光源が起因となる雑音としては、主に周波数雑音と強度雑音がある。

周波数雑音はレーザー光源の周波数が揺らぐことによって発生する雑音である。このため、この雑音は信号の位相に影響を与えてしまう。3.1節で確認した通り、重力波がきたという信号は位相成分によってやってくる。このため、位相に影響を与えるレーザーの周波数雑音は特に問題となる。Michelson 干渉計における2つの腕の光路差を L とし、さらにレーザー光源の周波数に $\delta\nu$ の周波数雑音が存在するとする。このとき反射光の位相差に含まれる周波数雑音の影響 $\delta\nu_{\text{MI}}$ は、

$$\phi_x - \phi_y = 2\pi \frac{\nu + \delta\nu}{c} \cdot L_x - 2\pi \frac{\nu + \delta\nu}{c} \cdot L_y = 2\pi \frac{\nu + \delta\nu}{c} \cdot L \quad (3.35)$$

より、

$$\delta\nu_{\text{MI}} = 2\pi \frac{\delta\nu(\omega)L}{c} \text{ [rad/}\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.36)$$

となる。ゆえに干渉計の光路差を少なくすることで周波数雑音を減らせることが分かる。

次に干渉計の両腕に Fabry-Perot 共振器を組み込んだ場合を考える。Fabry-Perot 共振器に入射したレーザーに周波数雑音がある場合、反射光に対する雑音の影響は応答関数の式 (3.24) を用いて

$$\delta\nu_{\text{FP}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega H_{\text{FP}}(\omega) \delta(\omega) e^{i\omega t} \quad (3.37)$$

とかける。2つの Fabry-Perot 共振器からの反射光が干渉するとき、

$$\delta\nu_{\text{FPMI}} = \epsilon_{\text{CMRR}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega H_{\text{FP}}(\omega) \delta\nu(\omega) \quad (3.38)$$

とかける。

ここで、 ϵ_{CMRR} は同相除去比であり、差同信号に対する同相信号の割合として定義される。周波数雑音は同相信号として現れるので、この量が小さいほど周波数雑音が減少すること示している。Fabry-Perot 共振器のエンドミラーの反射率 r_E が仮に 1 に近いとし、 $\omega \ll \omega_c$ ⁹ の帯域を考えると次式のように近似できる:

$$\epsilon_{\text{CMRR}} \sim \frac{\delta L}{L} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \quad (3.39)$$

⁹ ω_c は共振器内の光の平均滞在時間を τ としたときに、 $\omega_c = 1/\tau$ で定義される

ここで、 \mathcal{F} はフィネスと呼ばれる量であり共振の鋭さを表す¹⁰。

周波数雑音の影響を抑えるためにレーザー自身の周波数を安定化させる研究も進んでいる。周波数の安定化には周波数の基準器を用いる必要がある。KAGRA のインプットビームの場合、光ファイバーを用いた共振器を基準としてレーザーの周波数を安定化させる。また周波数雑音に対して最も感度が高いのは干渉計自身である。そこで干渉計からの信号をレーザーなどにフィードバックしレーザー周波数を安定化させようとしている。

また、レーザーの強度雑音はレーザーからの光に位相変調をかけ、信号周波数帯を RF 帯に持ち上げることで、避けることが出来る。しかし、位相変調と同時に強度変調がかけられてしまったり、干渉計が最適な動作点からずれることによる影響で強度雑音が発生してしまう。強度変調がかかった場合、光源がもつ強度雑音を $\delta P/P [1/\sqrt{\text{Hz}}]$ 、強度変調度を m_{AM} とすると、復調された信号における強度雑音の影響 $\delta\phi_{\text{int}}$ は

$$\delta\phi_{\text{int}} = m_{\text{AM}} \frac{\delta P}{P} [1/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.40)$$

となる。

Fabry-Perot 型干渉計の場合、ビームスプリッタが最適な動作点から δl_{rms} だけずれているとき、ビームスプリッタの位置が

$$\delta x_{\text{int}} = \frac{\delta P}{P} \delta l_{\text{rms}} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (3.41)$$

だけ変動しているのと同様の雑音となる。なお δl_{rms} は制御のゲインを上げることで抑えることが出来る。

強度雑音の影響を抑えるにはまず、性能の良い位相変調素子 (= 強度変調が少ない位相変調素子) を用いることが上げられる。また制御のゲインを上げ適切な動作点に干渉計を制御すること、レーザー光源自身のもつ強度雑音が小さいことも重要となる。

光源に起因する雑音としては他に、光源が高次の空間モードをもつことによるコントラストの低下や、光源が傾いたり平行移動したりすることで発生するビームジッター雑音がある。これらの影響はレーザー光源と主干渉計の間にモードクリーナーと呼ばれる装置を入れることで抑えることが出来る。

¹⁰定義としては $\mathcal{F} = \nu_{\text{FSR}}/\nu_{\text{FWHM}}$ である。用語の詳しい定義は参考文献 [3] を参照のこと。

第4章 Whitening Filter

4.1 Whitening Filter の役割

前章で述べた通り、重力波を直接検出するには高感度な検出器を用意する必要がある(図 3.3)。またこのような高感度検出器を実現するためには検出器を構成する各装置を制御する必要がある。このため、取得された制御信号を各装置に送る必要がある。KAGRA の場合はこの制御信号は主にビームスプリッター近くにあるセンタールームで取得される。ところが KAGRA は主干渉計の腕の長さが 3km あり、制御信号をセンタールームから一番遠くの鏡に送ろうと考えた場合、長距離の信号伝送が必要となる。

信号の伝送をケーブルと電気信号を用いておこなうとセンタールームのグラウンドと各装置のグラウンドが異なるという問題や、巨大なグラウンドループが出来てしまうといった問題が発生する。これらの問題を回避するために KAGRA では、センタールームで取得された制御信号をいったん光信号(デジタル信号)に変換してから各装置まで送ることが計画されている。このことによりセンタールームと各装置とが電氣的に分離されるのみならず、デジタル制御が可能になり干渉計の制御が遥かに簡単になる。

しかしアナログ信号は干渉計の感度程度のノイズを発生させるのに対し、デジタル信号はアナログデジタル変換(=ADC)やデジタルアナログ変換(=DAC)の過程において干渉計の感度以上のノイズを発生させてしまう。このため、ADC/DAC ノイズによって干渉計の感度が大きく制限されるという問題がある。

さらに KAGRA で使用するデジタル信号は 16bit でありせいぜい 4 桁程度のレンジしか無い。3.3 節で説明した通り検出器には種々の雑音に影響する。このことによって全帯域において高感度な干渉計を実現することはできず、周波数によって感度の良さが変わってしまう。実際に干渉計の予想感度曲線図 3.3 をみると、低周波側の感度と最高感度では 3 桁程度の幅がある。図には載っていないがさらに低周波($\sim 0.1\text{Hz}$)の感度まで考えると感度の幅は 4 桁を優に超えてしまう。このままでは信号のサチレーションを起こしてしまい、干渉計を制御できなくなってしまう。

こうした問題を解決するために用いられるのが Whitening Filter と呼ばれる回路である。以下で詳しく説明するが Whitening Filter によって制御帯域の信号を増幅することができる。このことにより、ADC/DAC¹を行った場合に発生するノイズと信号の S/N 比を改善することが出来るのみならず、低周波での信号と制御帯域の信号の幅をデジタル信号のレンジ内に収めることができるようになる。下の図 4.1 は CLIO と呼ばれる低温干渉計実験施設で取得された感度曲線であり、Whitening Filter を ON にすることで感度が良くなっていることが分かる。

¹DAC の場合には Whitening Filter と全く反対の構成をした Dewhitening Filter を用いる。

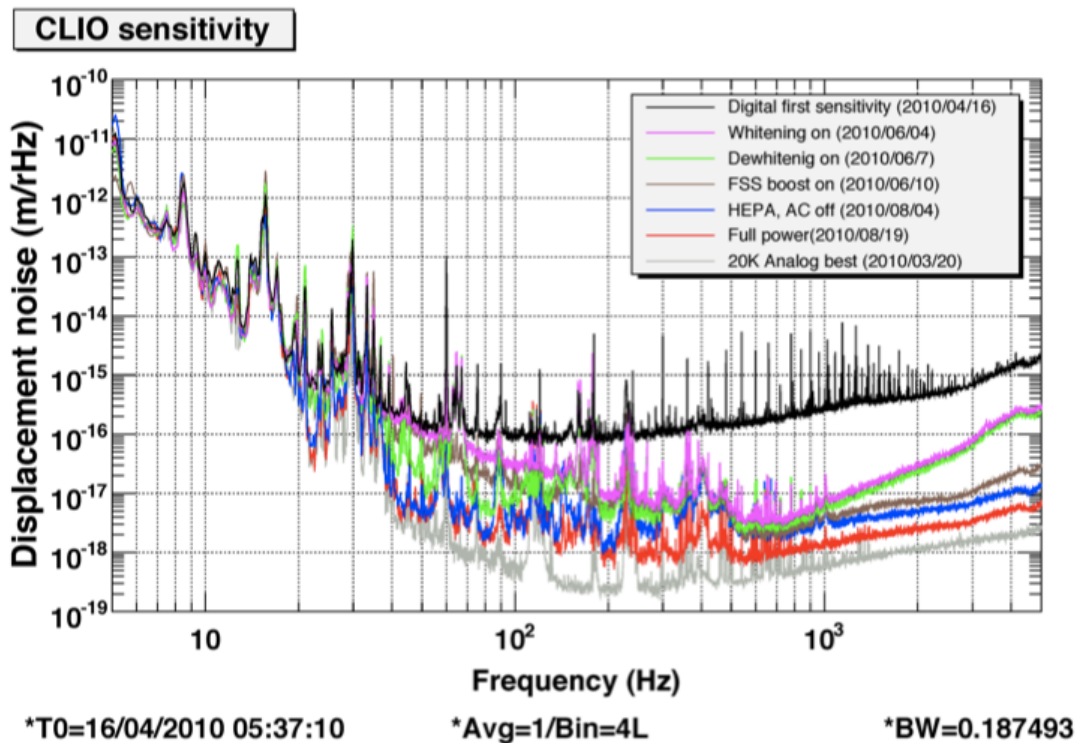


図 4.1: Whitenig Filter 回路による干渉計の感度の改善例 [4]

4.2 Whitenig Filter の構成

前節で述べた通り ADC/DAC ノイズの緩和と低周波での信号のサチレーション防止のために Whitenig Filter が用いられる。本節では KAGRA で実際に使用される Whitenig Filter の構成について述べよう。KAGRA で用いられる Whitenig Filter は一つのシャーシ²の中に二枚の基板が入っており、各々の基板にきチャンネルが4つある。すなわちシャーシ一台につき Whitenig Filtern 回路が8つある構成になっている。各々の回路は独立であるが、回路自体は全く同じものを使っている。また電源は 18V の DC 電源をレギュレータ回路³で 15V にしたものを用いている。

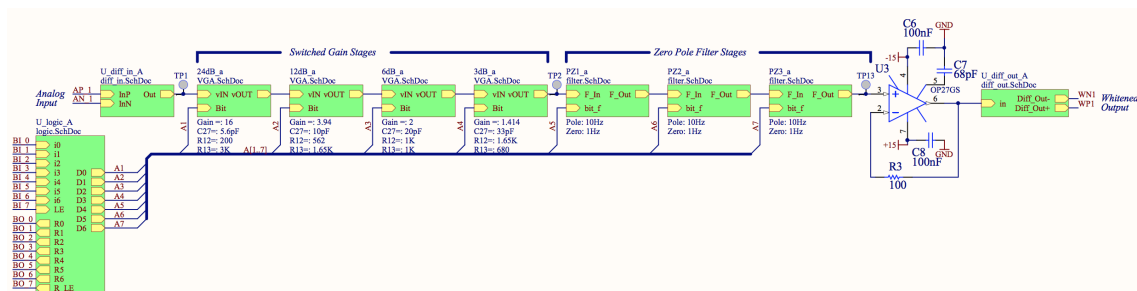


図 4.2: Whitenig Filter の構成の模式図 [5]

²筐体、基板を収納しておく箱のこと。

³Whitenig Filter に使った分ではないがいくつか私も組み立てた。

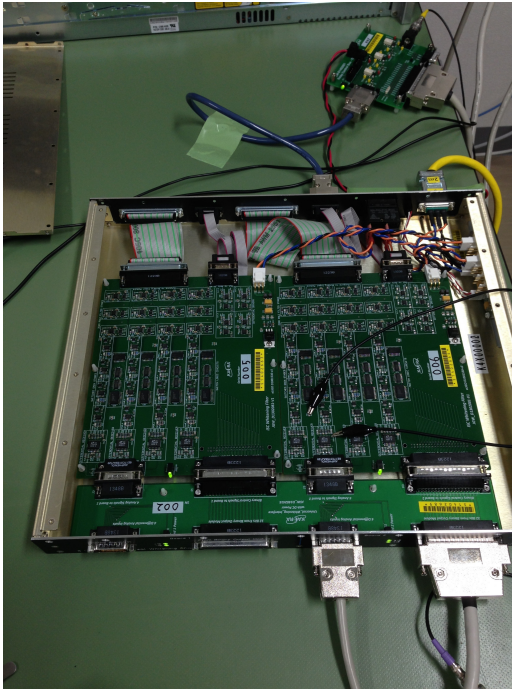


図 4.3: Whitening Filter の全体写真

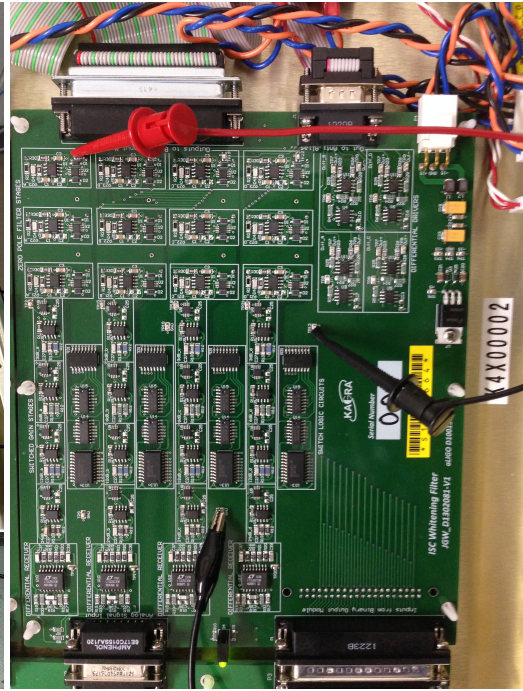


図 4.4: Whitening Filter の各基板の写真

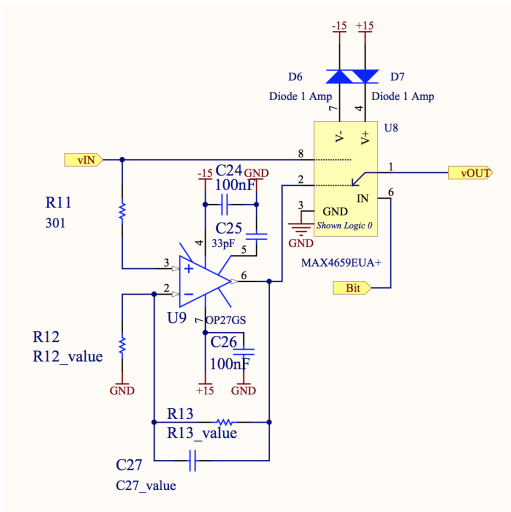
Whitening Filter のインプット側は差動信号として入りアウトプット側は差同信号として出力される。Whitening Filter には全部で 4 つ (3dB⁴,6dB,12dB,24dB) のゲインステージと 3 つ (全部で三段) のゼロポールステージとに分かれている。これらのステージをスイッチング回路によって ON/OFF することで離散的ではあるがゲインが可変のフィルター回路となる。以下ではゲインステージとゼロポールステージについて回路構成を説明する。

4.2.1 Whitening Filter のゲインステージ

前節で述べた通り Whitening Filter のゲインステージは全部で 4 種類ありそれぞれを組み合わせることで全体として 3dB ごとに 45dB までゲインを変化させることが出来る⁵。ゲインステージは次の図 4.5 で表されるオペアンプ回路からなる。

⁴dB = $20 \times \log_{10} (V_{out}/V_{in})$

⁵例えばゲインを 3dB にしたいときは 3dB を ON、その他を OFF にする。15dB にしたいときは 12dB と 3dB を ON にし、その他を OFF にする。



ゲイン	R ₁₂ [Ω]	R ₁₃ [Ω]	C ₂₇ [pF]
24dB	200	3k	5.6
12dB	562	1.65k	10
6db	1k	1k	20
3dB	1.65k	680	33

表 4.1: コンデンサと抵抗の組み合わせ

図 4.5: ゲインステージ回路 [5]

各オペアンプ回路のアウトプットにはスイッチング回路がある。このスイッチング回路を用いることでアウトプットをオペアンプを通ったあとの信号にするか、オペアンプを通らなかった信号にするかを切り替えられるようになっている。なおスイッチング回路は計算機によって切り替えられるようになっている。

4.2.2 ゼロポールステージ

ゼロポール回路の回路図は次の図 4.6 のようにになっている。ゼロポールステージは全部で 3 段あり各段を ON にすると入力信号を一桁分だけ大きくすることができる。ゼロポール回路は、1Hz にゼロが 10Hz にポールがくる設計になっている⁶。

ゲインステージの回路と同様にゼロポールステージのアウトプットにもスイッチング回路が入っており、アウトプットをオペアンプを通ったあとの信号にするか、オペアンプを通らなかった信号にするかを切り替えられるようになっている。

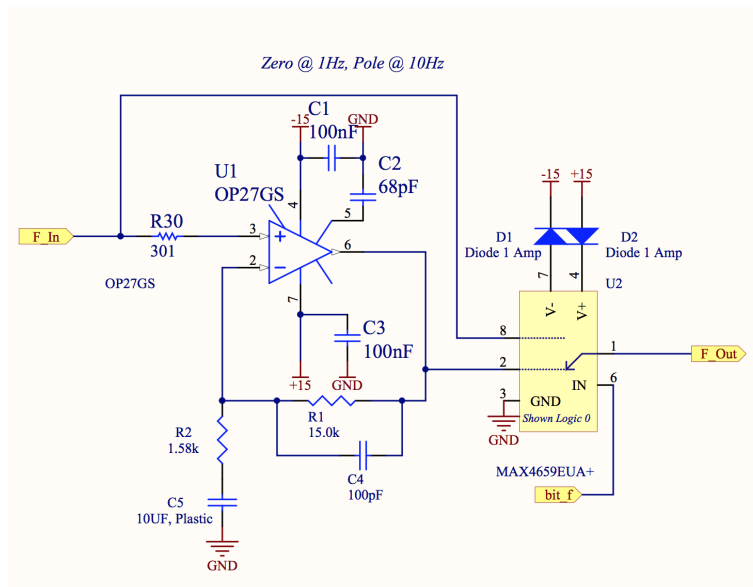


図 4.6: ゼロポールステージ [5]

⁶用語の詳しい定義については付録 B を参照のこと

以上が Whitening Filter の主な構成である。以下ではこの Whitening Filter 回路の検査機構について説明する。

第5章 Whitening Filterの検査機構の開発

電気回路には全く同じ設計で全く同じ部品を使って作ったのものに関わらず、基板によって性能が異なる場合がよくある。このような個体差をあらかじめ検査しておくことは、のちの検出器のデバック作業において重要となるのみならず、回路を通じて想定外の雑音が入り込んでいないかのチェックにもなる。KAGRAではあらゆる回路について基板をシリアル番号で管理し、各基板の特性を調べたものをデータベース化する試みがなされている。Whitening Filterも全ての基板にシリアル番号(S番号)が振られており、データベースに登録されている。

現在KAGRAの建設は着々と進んでおり、近いうちにWhitening Filterが必要になる。このためWhitening Filterの各基板の特性を早急に検査する必要がある。ところがWhitening Filterは100台近く必要になるのみならず、各シャーシに二枚の基板がありそれぞれ4chあるため、検査時間が膨大になり人の手ですべてを行うことは不可能であった。そこで以前から自動でWhitening Filter回路を検査する機構の開発が以前から行われており、私もその機構の開発に携わり検査機構を完成させることができた。以下では開発したWhitening Filter回路の自動検査機構について説明する。

今回私たちが開発した機構によって、回路の伝達関数とノイズスペクトルを自動測定できるようになった。この二つの物理量の測定機構と結果について説明する。

5.1 伝達関数の自動測定機構

5.1.1 伝達関数とは

ある回路に入った入力信号 X が回路を通ることで Y となったとする。この X と Y の関係を周波数空間で表すと

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot X(\omega)$$

となる。このときの $G(\omega)$ を伝達関数 (Transfer Function) と呼んだり、応答関数と呼んだりする¹。回路が正常に動作していることを確認するには伝達関数を測定しそれが設計通りになっているかを確認すればよい。

5.1.2 伝達関数の自動測定機構

伝達関数の自動測定機構を次の図 5.1 で表すように作成した。

¹正確には伝達関数とはフーリエ変換ではなくラプラス変換した空間での応答関数のことをいう。しかしながらラプラス変換とフーリエ変換の間にはそれほど変わりがないので、周波数空間での応答関数を便宜的に伝達関数という人が多い。

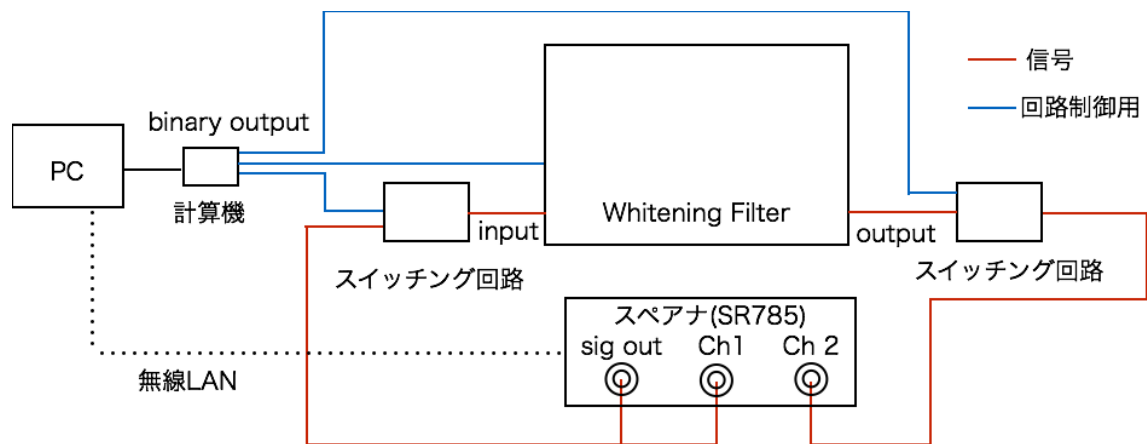


図 5.1: 伝達関数測定の様式図

スペクトラムアナライザーとスイッチング回路を結ぶ信号線は全てリモケーブルで結ばれており、スイッチング回路と Whitening Filter とは 9pin ケーブルで結ばれていた。ただし Whitening Filter のインプット側は使用目的上 9pin のものと 15pin のものがあり、スイッチング回路は 9pin 専用であったために 15pin→9pin 変換基板を用いることにした。

自動測定は以下の手順を自動化したものである。

1. PC 画面において既存のシェルスクリプト²を走らせる。すると測定した基板の番号、基板が収納されているシャーシの番号、測定者を手動で入力できる。それらの情報はログとして残る。上記の記録が終わり次に進むとプログラムが走る³。
2. PC は無線 LAN によってスペクトラムアナライザー (SR785) に接続されており、スペクトラムアナライザーの測定条件をプログラムによって変化させることができる。また、プログラムのコードに従って SR785 から入力信号が発生する。本自動測定においては振幅 1mV の sin 波が発生する。
3. 発生した入力信号は信号線を伝ってスイッチング回路に到達する。
4. スイッチング回路は PC に接続された計算機の binary output とつながっており、起動したプログラムによって Whitening Filter のどのチャンネルに信号を入力するかが切り替わる。
5. スイッチング回路によって測定したいチャンネルに信号が入力される。
6. 同様にアウトプット側にもスイッチング回路があり、どのチャンネルを出力するかを切り替わる。
7. Whitening Filter の出力信号を入力で割ることである周波数における伝達関数が測定される。これを一つの周波数に対して 20 回おこない平均値を求める。
8. 入力信号の周波数を 0.1Hz~ 10⁵Hz の範囲でスイープさせることでこの周波数帯での伝達関数が測定される。
9. スペクトラムアナライザーのデータを無線 LAN を経由して PC に保存する。測定が適切かどうかチェックするためにデータのプロットもおこなわれる。
10. 測定が終わったら回路のゲインとポールを変化させ同様の測定をおこなう。今回の自動測定は、ゲインは 0dB,3dB,6dB,12dB,24dB の 5 種類、ゼロポールは各ゲインごとに 0 段,1 段,2 段,3 段の 4 種類をそれぞれ入れておこなった。

²大阪市立大の神田さんによって作成された。

³コードは python で書かれており大阪市立大の横澤さんによって作成されたものである。

11. ひとチャンネルの測定が終わったら次のチャンネルに対しても同様の測定をおこなう。

なおこの自動測定機構において手動で行わなければならないことは次の二点である。

- Whitening Filter 回路のインプットとアウトプットにケーブルを接続すること
- Whitening Filter 回路にゲイン等を変更する信号を送るケーブルを接続すること

この方法を用いると一つのボードにつき3時間半程度で伝達関数の測定をおこなうことができた。神岡滞在中に全部で7台の Whitening Filter を測定することが出来た。

5.1.3 測定結果と問題点および考察

前節の方法で次のような伝達関数を自動測定できた。

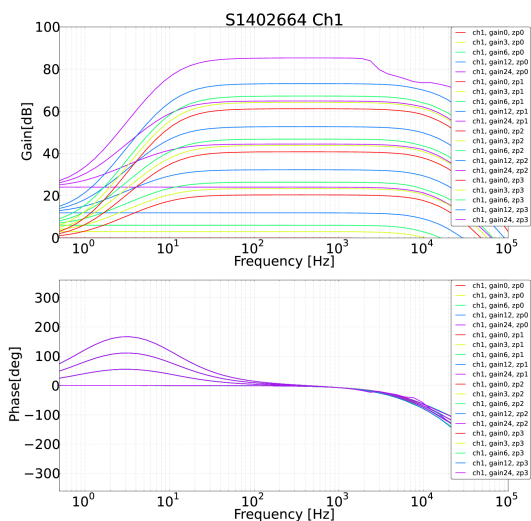


図 5.2: S1402664 の ch1 の伝達関数

同色のグラフに関してはノイズフロアの低い順にゼロポールが0,1,2,3段とあがっている。

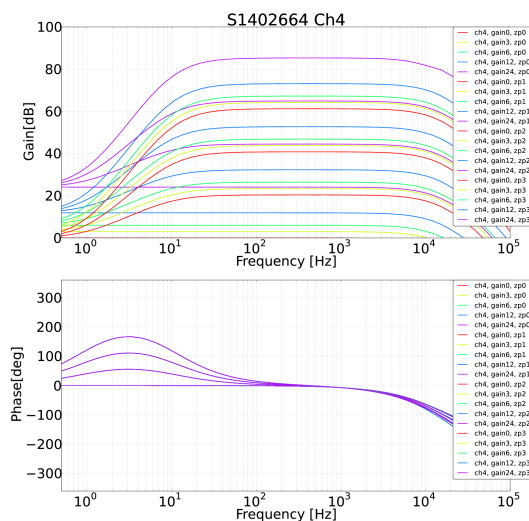


図 5.3: S1402664 の ch4 の伝達関数

同色のグラフに関してはノイズフロアの低い順にゼロポールが0,1,2,3段とあがっている。

S1402664 とは測定した基板のシリアル番号である。グラフはゲイン毎に色を変えている。

測定結果は概ね回路の設計通りであり、回路が問題なく動作していることを確認できた。特にチャンネル4に関しては動作不良の場所も無く完璧な結果となっていた。しかしながら ch1 の高周波 (10^4 Hz 付近) ではゲインが 24dB、ゼロポール三段において動作が不安定になっている部分があった。これは 24dB (16 倍)、ポール三段 (1000 倍) では入力信号 1mV であるために、出力信号が 15V 近く⁴なるためオペアンプのゲイン低下してしまうからだと考えた。この問題を解消するには入力側にアッテネータを用いる必要があるが、自動測定に組み込む時間がなくまだ試せていない。

その他の基板についても概ね同様の結果を得られた。これらの結果は KAGRA のデータベースに既に登録しており、今後使われる予定である。

⁴基板に供給している電源は 15V である。

5.2 ノイズスペクトルの自動測定

検査項目の二つ目としてノイズスペクトルの測定をおこなった。ノイズは検出器の感度をデザイン通りにする上でも重要である。

5.2.1 測定方法

ノイズスペクトルの自動測定機構を次の図 5.4 で表すように作成した。

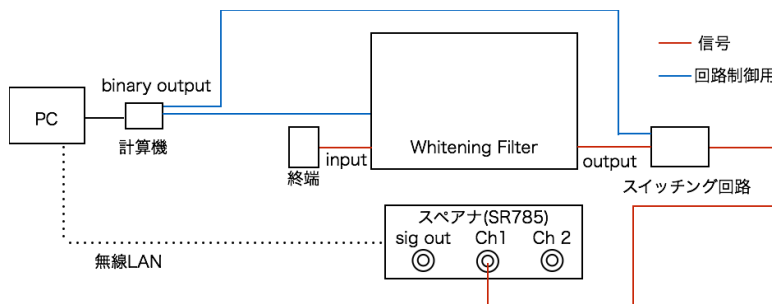


図 5.4: ノイズスペクトル測定の概略図

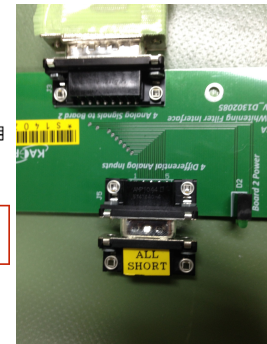


図 5.5: 短絡回路
各端子はハンダで短絡
されている

Whitening Filter の伝達関数測定の場合とほぼ同じ構成である。伝達関数測定のと異なるとは、Whitening Filter の入力側に短絡回路を用いたことである (図 5.5)。これは Whitening Filter の入力は差動信号が入るのであるが、この端子を短絡するような回路を接続することで入力をグラウンドに短絡したことになるためだ。実際、入力をグラウンドに短絡したときと測定結果は同じになった。

作成した検査機構は次の測定を自動的に行う。

1. PC 画面において既存のシェルスクリプト⁵を走らせる。すると伝達関数のときと同様に測定した基板の番号、基板が収納されているシャーシの番号、測定者を手動で入力できる。それらの情報はログとして残る。上記の記録が終わり次に進むとプログラムが走る⁶。
2. PC は無線 LAN によってスペクトラムアナライザ (SR785) に接続されている。このためスペクトラムアナライザの測定条件をプログラムによって変化させることができる。
3. アウトプット側のスイッチング回路によって、どのチャンネルのノイズスペクトルを測定するかを切り替えることができる。
4. 測定は同じバンド幅、ゲイン、ゼロポールにつき 20 回おこなわれその平均値のデータが記録される。
5. スペクトラムアナライザのデータを無線 LAN を経由して PC に保存する。測定が適切かどうかチェックするためにデータのプロットもおこなわれる。
6. 一つのバンド幅で測定が終わったら、バンド幅のみを変化させ次の測定をおこなう。今回おこなった測定ではバンド幅を $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ Hz の 4 種類変化させた。

⁵大阪市立大の神田さんによって作成された。

⁶コードは python で書かれており大阪市立大の横澤さんによって作成されたものを片岡が改良したもの。具体的には測定の Band 幅を 4 分割することで精度よくかつ短い時間で測定できるようにした。

7. 測定が終わったら回路のゲインとポールを変化させ同様の測定をおこなう。今回の自動測定は、ゲインは 0dB,3dB,6dB,12dB,24dB の 5 種類、ゼロポールは各ゲインごとに 0 段,1 段,2 段,3 段の 4 種類をそれぞれ入れておこなった。

8. ひとチャンネルの測定が終わったら次のチャンネルに対しても同様の測定をおこなう。

この方法を用いることで一つの基板につき約 4 時間半程度で全チャンネルの測定ができるようになった。伝達関数測定と同様に神岡滞在中に全部で 7 台の Whitening Filter に対してノイズスペクトル測定をおこなうことができた。

5.2.2 測定結果

前節の方法で次のようなノイズスペクトルを自動測定できた。

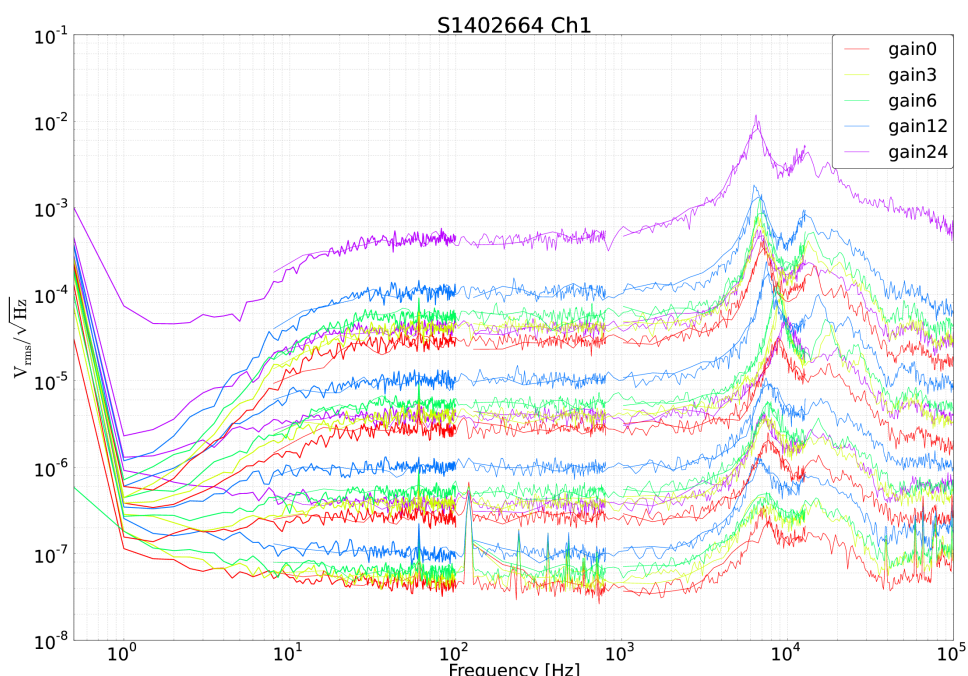


図 5.6: S1402664 の ch1 のノイズスペクトル

同色のグラフに関してはノイズフロアの低い順にゼロポールが 0,1,2,3 段とあがっている。

伝達関数のときと同様にゲインごとに色分けされている。ノイズフロアレベルがゲインやゼロポールの変化に応じてあがっている。これは、流入したノイズが回路によってゲイン倍されたことを表している。60Hz 付近と 120Hz 付近に現れるピークは電源によるものである。結局、使用する周波数帯域 (1kHz 付近まで) ではノイズフロアは要求値 [8] を満たすことが分かった。この結果は他の基板についても同様であった。

一方で 10^4 Hz 付近でノイズピークがたつという問題点が発見された。このノイズピークは他のチャンネルにおいても、また他の基板においても発生していた。ノイズピークの周波数は Whitening Filter を使用する周波数帯域より十分高いので、このノイズピーク自体が重力波検出器に直接影響を与えないだろうと推測した。しかしノイズピークが立つことは回路の動作不良の証拠であり、できることなら原因を発見し取り除きたかった。そこでこのノイズピークの原因を突き止めるためにいくつか測定をおこなった。以下ではこの測定について説明し、原因や対処法について考察する。

5.3 ノイズスペクトル測定における問題点の原因と考察

5.3.1 Whitening Filter のノイズスペクトル測定における問題点

始めに Whitening Filter のノイズスペクトル測定の問題点を整理する。以下では S1402663 と S1402664 という二つの基板を対象にする。そのほかの基板も、問題点は同じである。

S1402663 と S1402664 という二つの基板を比べると測定方法が同じであるのにも関わらず、ノイズピークの周波数や大きさが異なっていた (図 5.6 および図 5.7 参照)。つまり、ノイズピークは基板によって異なることが分かった。

また同じ測定をおこなっているのにも関わらず、ノイズピークが出たり出なかったりすることも分かった (図 5.8 および 5.9 参照)。

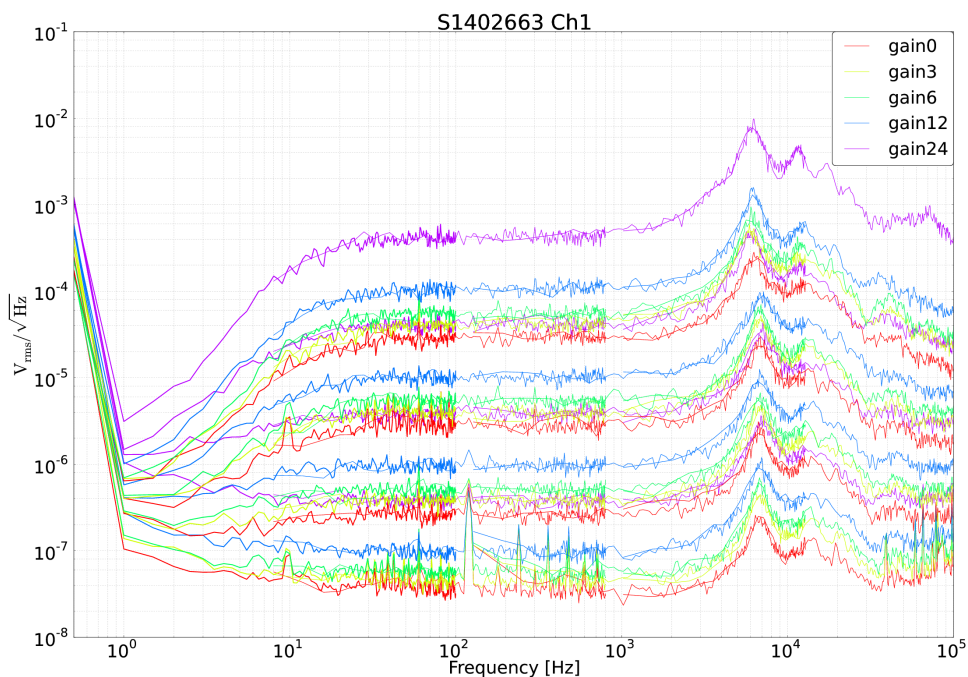


図 5.7: S1402663, ch1 のノイズスペクトル

同色のグラフに関してはノイズフロアの低い順にゼロポールが0,1,2,3段とあがっている。

ノイズピークの発生が測定によるとすると開発した測定機構を見直す必要がある可能性がある。また、そもそもノイズピークを発生させるような回路を使用しているのかという問題もある。以下ではこのノイズピークの原因を考察するためにおこなったいくつかの測定について方法と結果を説明する。

5.3.2 入力ノイズの測定

5.2 節で説明した通り、ノイズスペクトル測定では Whitening Filter のインプットに短絡回路を付けた。この短絡回路がノイズ発生源でないことを示すために、短絡回路自身のノイズスペクトルを測定した。なお、SR560 を用いてスペクトラムアナライザーに信号を入れる前に 10^3 倍のゲインを与えた場合と、ゲインを何も与えない場合という異なる条件で測定をおこなった。これは短絡回路でノイズピークが発生したとしても、スペクトラムアナライザーのノイズフロア以下になることを懸念したためだ。またノイズピークが発生した 10^4 Hz 付近のみを測定した。結果は次の図 5.10 のようになった。

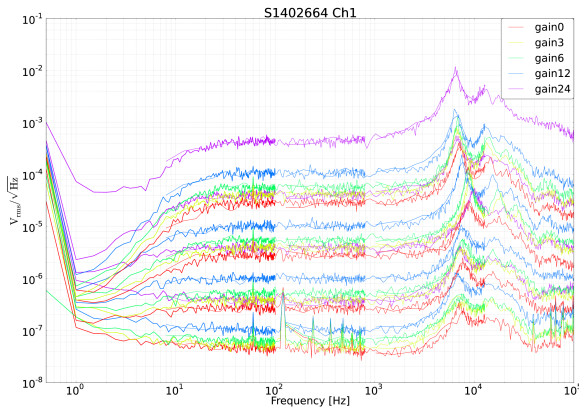


図 5.8: S1402664 の ch1 のノイズスペクトル

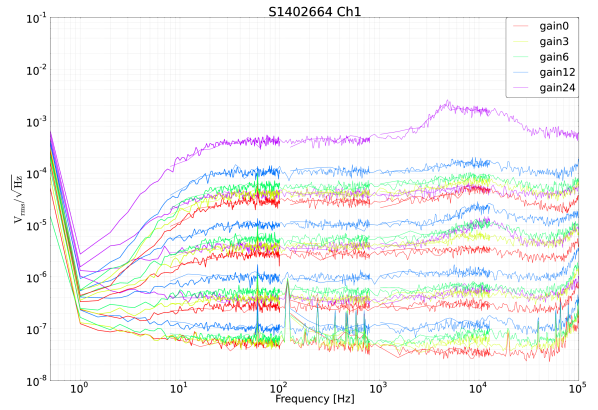


図 5.9: S1402664 の ch1 のノイズスペクトル
 顕著なノイズピークが発生していないことが分かる。

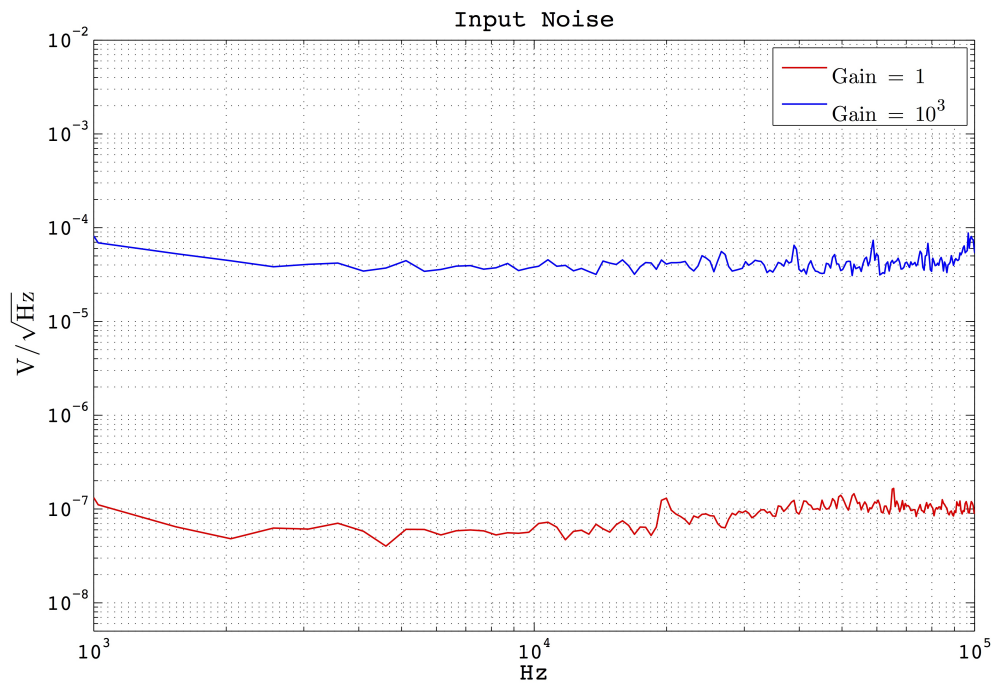


図 5.10: 短絡回路のノイズスペクトラム

ノイズのフロアレベルは図 5.6 や図 5.7 のゲイン 0、ゼロポール 0 段の場合と一致している。このことから本測定と自動測定がきちんと対応していることが確認できた。また、Whitening Filter を測定したときのようなノイズピークは存在しなかった。以上の結果から短絡回路がノイズピークの発生源ではないと結論できた。

5.3.3 チャンネル間ノイズの伝搬

発生したノイズピークが短絡回路由来でないことが分かったので、今度はノイズピークが測定によって現れたり現れなかったりする原因を調べることにした。

自動測定用のプログラムを見直したところノイズスペクトルを測定する際に、測り終わったチャンネルをオフにしていないことを発見した。具体的には1chを測定し終わった状態(ゲイン24dB, ゼロポール三段)で2chの測定を始めてしまっていた⁷。これにより24dB、ゲイン三段でノイズピークを発生させるチャンネルがあったとき、そのチャンネルは測定が終わったあともノイズピークを発生させ続けてたことになる。仮にチャンネル間でノイズの伝搬があるとすると、実際には測定しているチャンネルはノイズピークを発生させないにも関わらず、測定すると別チャンネルから伝搬してきたノイズピークが現れる。私がおこなっていた自動測定では測定の前に、PCや計算機の電源を落としプログラムをリセット(ONのチャンネルが全てOFFになっている)していたこともあった⁸。このような測定をおこなったために伝搬してくるノイズピークの量が変わってしまい測定によってノイズピークが発生したりしなかったりしたのではないかと考えた。

そこで他チャンネルがONになっていることが測定にどのような影響があるかを確認するため、測定が終わったチャンネルはOFFするようプログラムを書き直し、ノイズスペクトルの測定をおこなった。なおプログラムを変更し測定した範囲をノイズピークが発生した 10^4 Hz付近に限定したこと以外は何も変えておらず、図5.4に従ってケーブル等を接続した。

測定した結果は次のようになった。

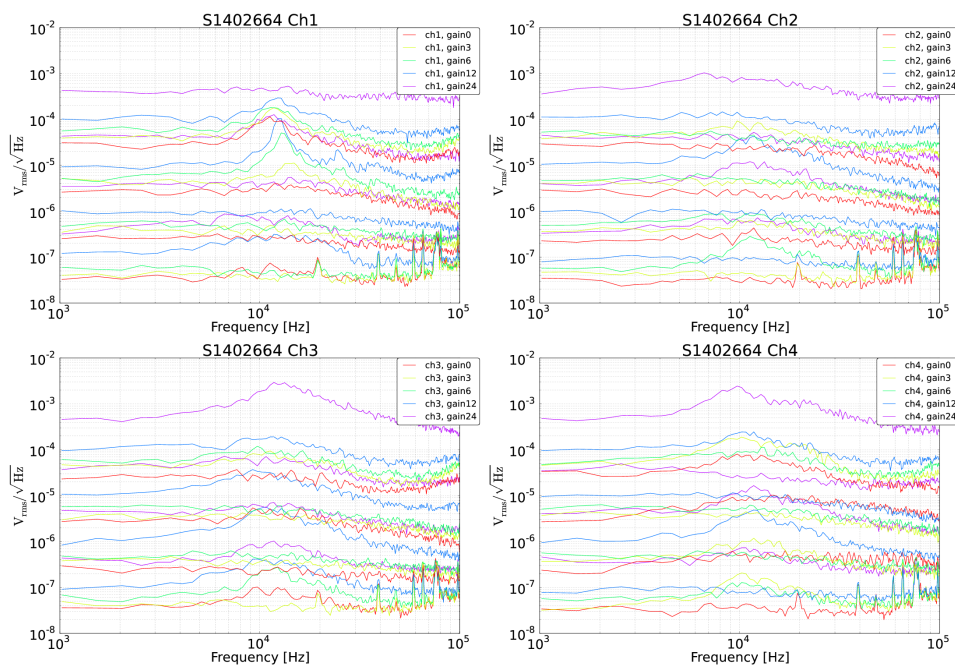


図 5.11: S1402664 のノイズスペクトル(チャンネルを独立にして測定)

同色のグラフに関してはノイズフロアの低い順にゼロポールが0,1,2,3段とあがっている。

測定結果から、以前の測定で全チャンネルに発生したノイズピークが一部では消えたことが分かる。

ノイズの伝搬を確認するために、あるチャンネルで発生したノイズピークが別のチャンネルに伝搬していることを確認した。確認は以下の方法でおこなった：

1. ch 4 をゲイン 24dB、ゼロポール三段にしノイズピークを発生させた。
2. この状態で比較的ノイズピークが少ない ch2 の出力をとり、それと ch4 の出力との間のコヒーレンスをとった。なおこのときの ch2 のゲインとゼロポールは 0dB で 0 段とした。

⁷これは伝達関数測定の時も同じであった。

⁸Whitening Filter 以外にも仕事があり、必ずしも毎日継続して測定したわけではなかった。測定を離れる際は電源を落としたりしていた。

3. なお ch4 はゲインステージの最後で信号を取り出した。

結果は図 5.12 のようになった。

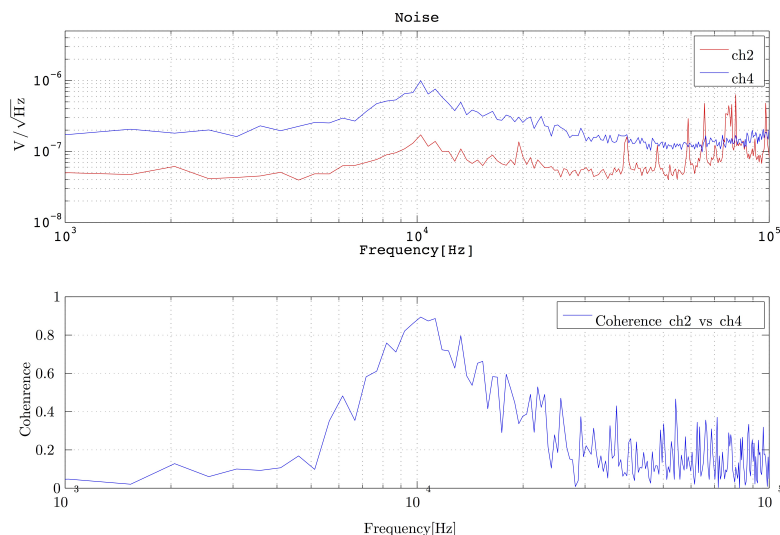


図 5.12: S1402664 におけるノイズスペクトルとチャンネル間ノイズの相関

ノイズピーク付近でコヒーレンスが 1 に近くなっていることから両者には相関があることが分かる。以上から全チャンネルに現れたノイズピークはあるチャンネルで発生していたノイズピークが伝搬したものであると結論できた。

5.3.4 チャンネル間信号の伝搬

前節で説明した測定の結果からノイズピークに伝搬が確認された。そこで、ノイズピークが伝搬しているのであれば同様に信号も伝搬しているのではないかと考えた。信号の伝搬があると、別のチャンネルの信号が使用しているチャンネルに流れ込むことを意味しており、信号のカップリングが起きてしまう。これは制御において雑音になりうる。

信号の伝搬量を確認するために、次の方法で測定をおこなった。なお、基板は S1402664 を用いることにした。

1. ch1 にスペクトラムアナライザーから実効値で 100mV の Whitening Noise を入れた。
2. ch1 のゲインを 0dB, ゼロポールを 1 段にした。
3. ch2 の出力をスペクトラムアナライザーで FFT 測定した。それをスペクトラムアナライザーの入力信号で割ることでどれくらいの信号が伝搬しているかを測定した。なお 20 回測定しその平均値を計測するという方法をとった。また 10^4 Hz 付近を測定した。また入力信号との相関を確認するためにコヒーレンスをとった。
4. 同様のことを ch1 のゲインを 24dB, ゼロポールを 1 段にしておこなった。

結果は次の図 5.13 のようになった。

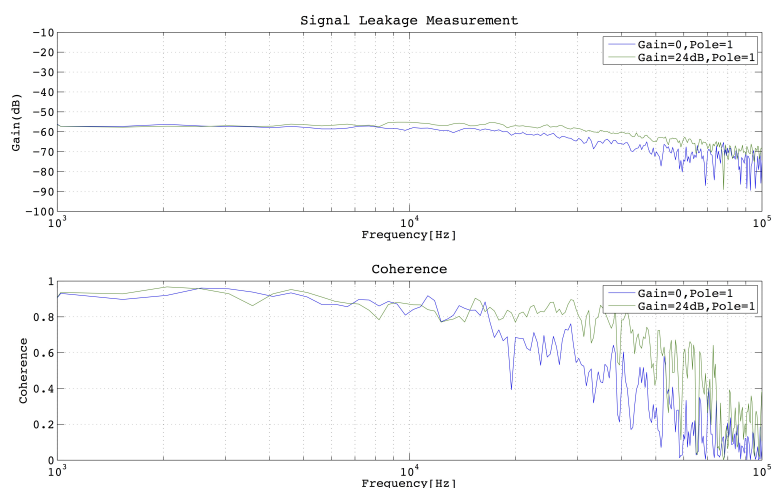


図 5.13: チャンネル間の信号伝搬の測定

結果をみると ch1 に入れた信号と ch2 から取り出した信号には相関があることが確認できた。このことからチャンネル間の信号伝搬が起こっていることを確かめることができた。また信号の伝搬の大きさは、入力信号に対して -60dB 程度 (ch1 の信号の $1/1000$ 程度の大きさ) であることがわかった。さらに信号の伝搬は ch1 のゲインに関係なく発生することが分かった。

以上からチャンネル間で信号が伝搬していること、そしてそれはチャンネルのゲインによらないことが確認できた。この結果からあるチャンネルに大きな信号が入ると、同じ基板の別のチャンネルの信号を汚してしまうことが推測できる。KAGRA にはまだ、基板にどれだけの信号を入れていいかという規則がない⁹。本測定はチャンネル間での信号の伝搬と、伝搬の量を確認したものであり今後このような規則を作る上で役に立つものとなった。

5.3.5 電源へのノイズピークの伝搬

チャンネル間のノイズピークの伝搬と信号の伝搬が確認できたので、次にこの伝搬がどこを經由して発生するかを調べた。ノイズピークの伝搬は図 5.6 と図 5.11 の比較から全チャンネルに共通して発生していると推測できた。また Whitening Filter の設計において全チャンネルに共通する部分としては電源が上げられる。そこでノイズピークが電源にどれくらい伝搬しているのか測定することにした。

Whitening Filter の電源は 4.2 節で説明した通り $\pm 18\text{V}$ の DC 電源をレギュレータ回路によって $\pm 15\text{V}$ にしている。さらにレギュレータ回路から $\pm 15\text{V}$ の DC 電源を基板に供給するさいに、図のような回路を通る。この回路はローパスフィルタになっており DC 電源に含まれるノイズを減衰させる目的がある。

⁹ オペアンプの出力限界を超えてはならないといった常識的な規則はある。

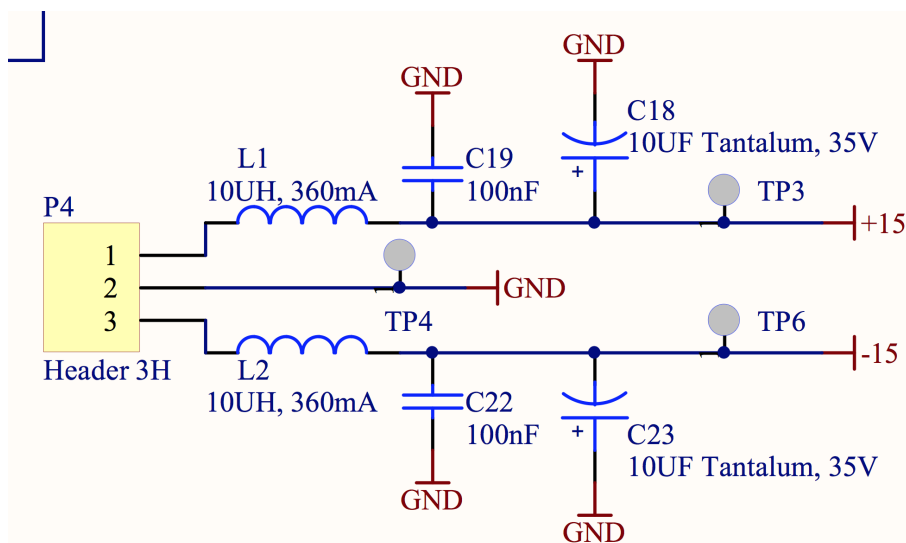


図 5.14: Whitening Filter に供給する電源回路

回路構成について簡単に説明する。なお信号はこの回路の左から右に流れる。またこの回路は Whitening Filter の基板に直接組み込まれている。P₄ と名前がついているコネクタにはレギュレータ回路の出力 ±15V が流入する。次にこの ±15V の電源電圧はコンデンサとコイルで構成されたローパスフィルタを通る。これにより基板に供給する電源のノイズを少なくすることができる。

以下の手順で電源へのノイズピークの伝搬を確認した。なお、測定した基板は S1402664 であった。

1. ch1 のゲインを 12dB, ゼロポールを 2 段としノイズピークを発生させた。
2. 図 5.14 の電源コネクタ (Header 3H の 3pin¹⁰) に直接プローブを装着し ch1 のアウトプット信号との間のコヒーレンスをとった。ただしそのままではコヒーレンスがとれなかったので、電源コネクタの信号を SR560 をもちいて 2000 倍した。なお +15V についてもほとんど同様の結果であった。
3. 同様に図 5.14 の TP6 と ch1 のアウトプット信号を測定し、コヒーレンスをとった。ただし TP6 に関しては SR560 でゲインを与えていない。

なお、スペアナの設定は平均回数 20 回とし 10⁴Hz 付近を測定した。

測定結果は図 5.15 と図 5.16 のようになった。

¹⁰1pin から順に +15V,GND,-15V に接続されている。

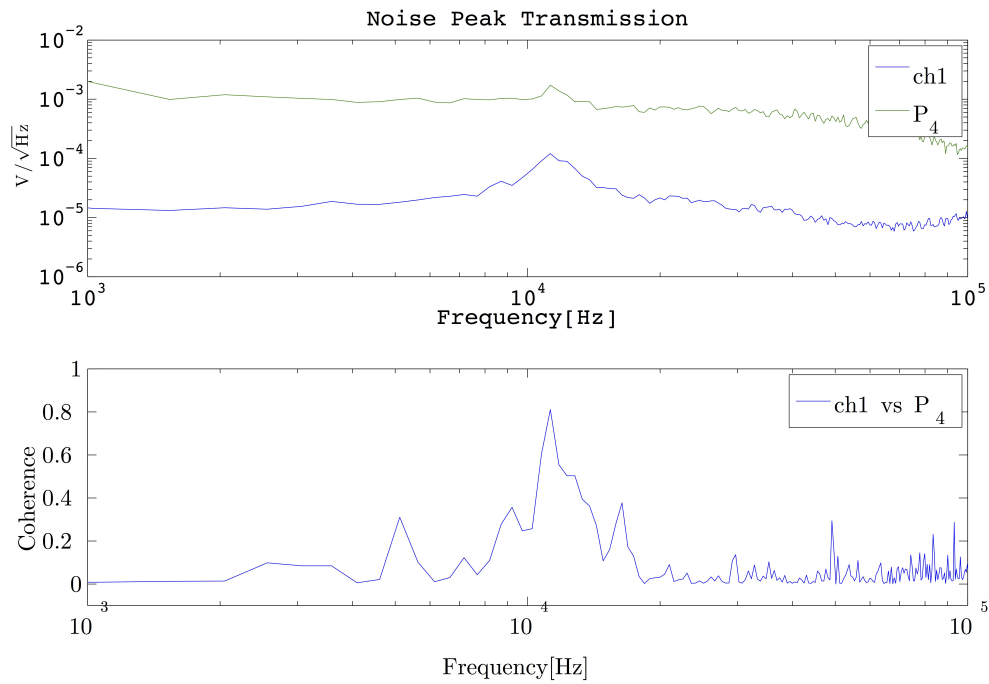


図 5.15: ch1 から P₄ へのノイズピークの伝搬

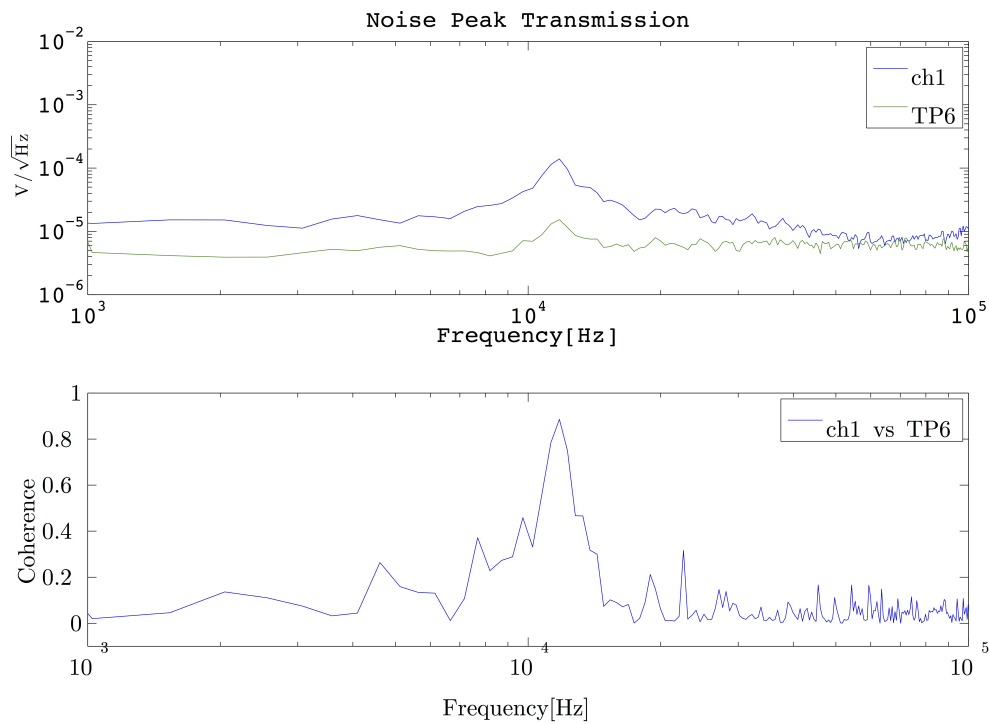


図 5.16: ch1 から TP₆ へのノイズピークの伝搬

結果をみると電源と回路のアウトプット信号の両方でノイズピークが発生していたことが分かった。またコヒーレンスがピーク付近で 1 近くになっていることから、両者に現れたノイズピークには相関があったことが分かった。つまりチャンネル 1 で発生したノイズピークが電源にまで伝搬していることがわかった。

また、測定方法のところでも述べたが、P₄での測定ではSR560でゲインを与えてないとアウトプットとの間にコヒーレンスがとれなかった。一方、TP6ではゲインを与えなくてもコヒーレンスがとれた。このことからTP6に伝搬したノイズピークの量はP₄に比べ大きいことがわかった。

この理由について以下のように考えた。図5.14に注目するとTP6とP₄との間にインダクタとコンデンサが入っておりそれがLC共振回路になっている。実際に電源コネクタ側をV_{in}TP6側をV_{out}とすると

$$V_{out} = \frac{1}{1 - LC\omega^2} V_{in} \quad (5.1)$$

となる。ここで共振周波数は

$$f = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = 15.9[\text{kHz}] \quad (5.2)$$

となる。

ノイズピークは10⁴Hzでありこのピークに対するLC共振回路のインピーダンスZ_{LC}は大きい。TP6側で発生したノイズピークがP₄に伝わったとすると、TP6側のノイズピークがZ_{LC}によってP₄側に伝わりにくくなるのでP₄側で測定されるノイズピークは小さくなる。これは測定結果を説明している。

一方で電源に共振回路が組み込まれているために、これがバンドパスフィルタの役割を果たしていた可能性もある。すなわちコネクタ側にのった雑音のうちLC共振回路の共振周波数付近の周波数をもつ成分のみがオペアンプの電源に供給されたということだ。式(5.1)からわかるようにLC共振回路はゲインをもつ。このため、ノイズ自体が小さくてもそれが増幅された可能性がある。

しかしながら測定結果(図5.11)を見る限りにおいては、同一基板(同じ電源部分をもつ)でもチャンネルごとにノイズピークの周波数が若干異なっていた。これはノイズピークが一つの原因から発生することに矛盾する。当然ながら回路の個体差が影響した可能性があるが、たとえば個体差としてカインピーダンスが異なる場合、ノイズピークがダンピングされることはあっても周波数が変わることはない。つまり前述の矛盾を説明できない。以上から、必ずしもLC共振回路がノイズピーク発生の原因だとは言いきれなかった。

いずれにしてもこの電源部分を改善する必要があると結論できた。

これとは別に基板間のノイズ伝搬についても測定した。測定方法は電源へのノイズ伝搬を測定するときと同じようにしておこなったが、基板間のノイズ伝搬は測定できなかった。このことからノイズピークはノイズピークは基板側の電源で伝搬し、コネクタ側へはほとんど伝搬していないことが分かった。

第6章 結論

今回私たちが作成した Whitening Filter の自動測定機構により、Whitening Filter の伝達関数とノイズスペクトルを自動で測定できるようになった。各測定の所要時間は伝達関数測定が約3時間半、約5時間であった。この機構は今後、KAGRA の建設が進みより多くの Whitening Filter が必要になるさいに、Whitening Filter の各基板の性能をチェックするとき用いられる。一方で測定によって自動測定機構の問題点と Whitening Filter 自身のもつ問題点が発見された。

自動測定機構の問題点

1. 伝達関数を測定するさいに Whitening Filter 回路のゲインが高過ぎると信号が飽和してしまい正しい測定ができない。
2. ノイズスペクトル測定のとときに他チャンネルのノイズピークが測定に現れてしまう。

Whitening Filter 自身の問題点

1. 10^4 Hz 付近でノイズピークを発生させてしまう。
2. 同一基板においてあるチャンネルの信号が 1/1000 程度別のチャンネルに伝搬してしまう。

それぞれの問題点に対して次のような解決法、提案が結論された。

6.1 自動測定の問題点 1

信号が飽和してしまうようなゲインで測定するさいにアッテネータを用いて信号を小さくする必要がある。ただしアッテネータの付け外しを手動でおこなっては自動測定の意義がなくなるので、スイッチング回路をもちいて入力信号の伝達経路を切り替えるようにしなければならない。これらは今後、KAGRA で仕事をするさいに更新していく予定である。

6.2 自動測定の問題点 2

プログラムを書き換え測定チャンネル以外を OFF にすることで解決できた。しかしながら通常の使用方法では使用しているチャンネル以外を OFF にするようなことは無い。このため使用時と同じ条件で測定する場合には他のチャンネルを ON にして測定する必要がある。いずれにしてもプログラムを変更することで対処できる。

6.3 Whitening Filter の問題点 1

ノイズピークの原因を見つけ出すために Whitening Filter におこなった測定によって、ノイズピークはチャンネルや基板によって発生条件が異なるうえに、ノイズピークは基板側の電源を介して伝搬することがわかった。これにより回路のどの部分がノイズピークの原因であるか何を直せば良いのかを特定することが困難になった。これは回路に用いられているオペアンプは全て同じ電源に接続されているため、電源を通して伝搬する以上、各オペアンプを独立に検査することができないからだ。さらに、電源部分に挿入された LC 共振回路によってノイズピークが発生している可能性が捨てきれないことも分かった。

一方でノイズピークはレギュレータ電源側(図 5.14 における Header 3H 側)までは伝搬しにくいことがわかった。このことからより詳細な原因を発見するためには、電源を同一基板で共通にせず各チャンネルとコネクタを繋ぐなどしてノイズピークを伝搬しないようにし、各チャンネルの電源を独立にしてから測定をする必要があると結論できた。

6.4 Whitening Filter の問題点 2

今回の測定結果をもとに KAGRA 内で同一基板にどれくらいの信号を入れてよいかといった規則を作り直す必要があると結論できた。規則に関しては、今回の測定結果などを参考に決定される予定である。

いずれの問題点も重力波検出器の測定帯域では問題にならないレベルであった。すなわち今回の測定によって Whitening Filter は測定帯域で正常に動作することが確認できた。

付録A Issacsonの公式

文献 [6] を参考にした。なお明示していないが摂動 $h_{\mu\nu}$ は重力波の効果であり、TT ゲージを満たしているとする。Einstein テンソルを摂動の次数ごとに展開すると

$$G_{\mu\nu}(\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) = G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + G_{\mu\nu}^{(3)} + \mathcal{O}(|h_{\alpha\beta}|^4) \quad (\text{A.1})$$

となる。また真空中ではエネルギー運動量テンソルはゼロとなる。次に重力波の波長よりも長く、時空の曲率半径よりも短い長さで平均を取る。すると平均するスケールよりも十分短いスケールで変化する量は平均の過程でゼロとなる。結局、残る項のうち最高次だけ考えると

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = -\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \quad (\text{A.2})$$

となる (等号は真空中の Einstein 方程式より)。そこで重力波の有効ストレス・エネルギーテンソルを

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{\text{GW}}, \quad T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} \quad (\text{A.3})$$

と定義する。上の式から重力波のエネルギーを知るためには Einstein テンソルのうち摂動の二次の項が必要だと分かる。Einstein テンソルの定義より

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(2)} &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} R) \\ &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \{ (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) R \}^{(2)} \\ &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} R^{(1)} \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} R^{(2)} &= (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta})^{(2)} \\ &= \{ (\bar{g}^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\mu} h_{\mu}^{\beta}) R_{\alpha\beta} \}^{(2)} \\ &= \bar{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(2)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} + h^{\alpha\sigma} h_{\sigma}^{\beta} R_{\alpha\beta}^{(0)} \\ R^{(1)} &= (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta})^{(1)} \\ &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(0)} \end{aligned}$$

となる。真空中の重力波の方程式は h に対して一次で与えられる。そして Einstein 方程式から

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(1)} = 0$$

より $R^{(1)} = 0$ となり、 ${}^1 R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ となる。よって

$$\begin{aligned} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle &= \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \langle h_{\mu\nu} R^{(1)} \rangle \\ &= \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(2)} - \bar{g}_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} + \bar{g}_{\mu\nu} h^{\alpha\sigma} h_{\sigma}^{\beta} R_{\alpha\beta}^{(0)} \rangle \\ &= \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \langle h^{\alpha\sigma} h_{\sigma}^{\beta} R_{\alpha\beta}^{(0)} \rangle \\ &\approx \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle \end{aligned}$$

¹両辺の trace をとればよい。

となる。ここで $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ に比例する項は他の項に比べ十分小さいので無視している。以下では $R_{\mu\nu}^{(2)}$ を計算する。そのためには (2.29) 式を用いる。背景時空がミンコフスキーのとき

$$\begin{aligned} (R^{\mu}_{\nu\rho\sigma})_L &= \frac{1}{2} (h^{\mu}_{\nu,\rho\sigma} + h^{\mu}_{\sigma,\rho\nu} - h_{\sigma\nu,\rho}{}^{\mu} - h^{\mu}_{\nu,\sigma\rho} - h^{\mu}_{\rho,\sigma\nu} + h_{\rho\nu,\sigma}{}^{\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (h^{\mu}_{\sigma,\rho\nu} - h_{\sigma\nu,\rho}{}^{\mu} - h^{\mu}_{\rho,\sigma\nu} + h_{\rho\nu,\sigma}{}^{\mu}) \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} (\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_L &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\nu} (h^{\mu}_{\sigma,\rho\nu} - h_{\sigma\nu,\rho}{}^{\mu} - h^{\mu}_{\rho,\sigma\nu} + h_{\rho\nu,\sigma}{}^{\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\nu}{}^{\rho}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\nu} - h_{\mu\nu}{}^{\rho}) \end{aligned}$$

となる。次に必要になる部分を計算していく。

$$h^{\mu}_{\beta} (R^{\beta}_{\nu\mu\sigma})_L = \frac{1}{2} h^{\mu}_{\beta} = \frac{1}{2} h^{\mu}_{\beta} (\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\beta}_{\sigma} - \partial_{\mu}\partial^{\beta}h_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\beta}_{\mu} + \partial^{\beta}\partial_{\sigma}h_{\mu\nu})$$

であるが、平均をとる操作によって部分積分でき

$$h^{\mu}_{\beta} (R^{\beta}_{\nu\mu\sigma})_L = -\frac{1}{2} [(\partial_{\mu}h^{\mu}_{\beta})(\partial_{\nu}h^{\beta}_{\sigma}) + (\partial_{\mu}h^{\mu}_{\beta})(\partial^{\beta}h_{\sigma\nu}) - (\partial^{\beta}h^{\mu}_{\beta})(\partial_{\sigma}h_{\mu\nu})] = 0$$

となる。なお最後のゼロは解の調和条件より導いた。また、

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}_{\beta\gamma}(\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha})_L(\Gamma^{\beta}_{\sigma\nu})_L &= \eta^{\mu\alpha}\eta_{\beta\gamma}\frac{1}{2}(\partial_{\mu}h^{\gamma}_{\alpha} + \partial_{\alpha}h^{\gamma}_{\mu} - \partial^{\gamma}h_{\mu\alpha}) \cdot \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}h^{\beta}_{\nu} + \partial_{\nu}h^{\beta}_{\sigma} - \partial^{\beta}h_{\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{4}(\partial_{\mu}h^{\gamma\mu} + \partial^{\mu}h^{\gamma}_{\mu} - \partial^{\gamma}h)(\partial_{\sigma}h_{\nu\gamma} + \partial_{\nu}h_{\gamma\sigma} - \partial_{\gamma}h_{\sigma\nu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり (調和条件より)、

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}_{\beta\gamma}(\Gamma^{\gamma}_{\sigma\alpha})_L(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_L &= \eta^{\mu\alpha}\eta_{\beta\gamma}\frac{1}{2}(\partial_{\sigma}h^{\gamma}_{\alpha} + \partial_{\alpha}h^{\gamma}_{\sigma} - \partial^{\gamma}h_{\sigma\alpha}) \cdot \frac{1}{2}(\partial_{\mu}h^{\beta}_{\nu} + \partial_{\nu}h^{\beta}_{\mu} - \partial^{\beta}h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4}(\partial_{\sigma}h^{\mu\gamma} + \partial^{\mu}h^{\gamma}_{\sigma} - \partial^{\gamma}h^{\mu}_{\sigma})(\partial_{\mu}h_{\gamma\nu} + \partial_{\nu}h_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma}h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4}[(\partial_{\sigma}h^{\mu\gamma})(\partial_{\mu}h_{\gamma\nu}) + (\partial_{\sigma}h^{\mu\gamma})(\partial_{\nu}h_{\gamma\mu}) - (\partial_{\sigma}h^{\mu\gamma})(\partial_{\gamma}h_{\mu\nu})] \\ &\quad + \frac{1}{4}[(\partial^{\mu}h^{\gamma}_{\sigma})(\partial_{\mu}h_{\gamma\nu}) + (\partial^{\mu}h^{\gamma}_{\sigma})(\partial_{\nu}h_{\gamma\mu}) - (\partial^{\mu}h^{\gamma}_{\sigma})(\partial_{\gamma}h_{\mu\nu})] \\ &\quad - \frac{1}{4}[(\partial^{\gamma}h^{\mu}_{\sigma})(\partial_{\mu}h_{\gamma\nu}) + (\partial^{\gamma}h^{\mu}_{\sigma})(\partial_{\nu}h_{\gamma\mu}) - (\partial^{\gamma}h^{\mu}_{\sigma})(\partial_{\gamma}h_{\mu\nu})] \end{aligned}$$

であるが、下線部は調和条件か $\square h = 0$ によってゼロとなる²。ゆえに

$$\bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}_{\beta\gamma}(\Gamma^{\gamma}_{\sigma\alpha})_L(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_L = \frac{1}{4}(\partial_{\nu}h_{\alpha\beta})(\partial_{\sigma}h^{\alpha\beta})$$

と求まる。結局 $\langle R^{(2)}_{\beta\sigma} \rangle$ は

$$\langle R^{(2)}_{\beta\sigma} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_{\nu}h_{\alpha\beta}\partial_{\sigma}h^{\alpha\beta} \rangle \quad (\text{A.4})$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\langle R^{(2)}_{\alpha\beta} \rangle &= \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \langle \partial_{\alpha}h_{\kappa\lambda}\partial_{\beta}h^{\kappa\lambda} \rangle \\ &= -\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} \langle \partial^{\beta}h_{\kappa\lambda}\partial_{\beta}h^{\kappa\lambda} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

²なお、適当に部分積分している。

となる (部分積分と $\square h_{\mu\nu} = 0$ より)。ゆえに、

$$\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \underbrace{\bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta}}_{=0} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\nu h_{\alpha\beta} \partial_\sigma h^{\alpha\beta} \rangle \quad (\text{A.5})$$

から、

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = -\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{1}{4} \langle \partial_\nu h_{\alpha\beta} \partial_\sigma h^{\alpha\beta} \rangle \quad (\text{A.6})$$

となり、これと式 (A.3) より Isaacson の公式が求まる。

$$\boxed{T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle} \quad (\text{A.7})$$

なお、本卒業論文においてはソースから十分遠方であるという仮定のもとこの公式を用いる。この仮定が成り立つとき、摂動 $h_{\mu\nu}$ の時間 - 時間成分、時間 - 空間成分はともに時間変化しない。これは仮に質量分布等が変化しても十分遠方からはその効果が見られないことと直感的には一致する。

ところで重力波解は一般的に TT ゲージ下で表現される。TT ゲージ条件下では 2.4 節でも見たとおり $h_{\mu 0} = 0$ であるから、いずれにしても時間 - 時間成分と時間 - 空間成分はゼロとなる。これは先ほどの直感的な説明に合致する。

前者の議論の詳しい内容については文献 [1] の p120 を参考とする³。詳細な議論は時間の関係で割愛するが、とにかく重力波の効果は空間 - 空間成分に現れることを忘れないで欲しい。

³とは言ってもそれほど厳密な議論をしているわけではない。

付録B Whitening Filter に用いられた回路について

Whitening Filter に用いられている回路の周波数特性について説明する。これは回路の理論的な伝達関数であり、このことから理論式と測定結果とを比較することで回路が正常に動作していることが確認できる。ここでは特にゲインステージとゼロポールステージに使った回路について説明する。

B.1 ゲインステージ回路

ゲインステージに用いられた回路図は図 4.5 の通りである。この回路の周波数特性を求める。いま出力がオペアンプの出力に接続されていたとする（つまり V_{out} がオペアンプの 6pin に接続されていたとする）。このとき、 V_{in} から R_{11} へは電流が流れないのでオペアンプの 3pin にかかる電圧は V_{in} のままである。次にオペアンプにおいて負帰還側と正帰還側が仮想短絡していると仮定すると、オペアンプの 3pin の電圧は V_{in} となる。また R_{12} から GND に流れる電流と、抵抗 - コンデンサ並列回路から R_{12} へ流れる電流が等しいことから

$$\frac{V_{in}}{R_{12}} = \frac{V_{out} - V_{in}}{Z_p}, \quad Z_p = \frac{R_{13}}{1 + j\omega R_{13}C_{27}} \quad (B.1)$$

が成り立つ¹。これから

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_{13}}{R_{12}} \times \frac{1}{1 + j\omega R_{13}C_{27}}\right) V_{in} \quad (B.2)$$

が成り立つ。低周波領域 $\omega \ll 1/(R_{13}C_{27})$ すなわち $f \ll 1/(2\pi R_{13}C_{27})$ においては

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_{13}}{R_{12}}\right) V_{in} \quad (B.3)$$

となる。ここで表 4.1 を参照すると抵抗の組み合わせによってゲインは次のようになる：

ゲイン	$R_{12}[\Omega]$	$R_{13}[\Omega]$	$C_{27}[\text{pF}]$	式 B.3 より計算したゲイン	$1/(2\pi R_{13}C_{27})[\text{Hz}]$
24dB	200	3k	5.6	24.1dB	9.5×10^6
12dB	562	1.65k	10	11.9dB	9.7×10^6
6db	1k	1k	20	6.0dB	8.0×10^6
3dB	1.65k	680	33	3.0dB	7.1×10^6

表 B.1: 抵抗の組み合わせとゲインの理論値

式 (B.3) が成り立つ条件が今回開発した自動検査機構の測定帯域においては常に成立している。このことからゲインは周波数によってほとんど変化しない。また、ゲインの値も希望の値を実現できている。

B.2 ゼロポールステージ回路

ゼロポールステージに用いられた回路について説明する。ゼロポールステージに用いられている回路は図 4.6 である。まず、この回路周波数応答を求める。計算方法はゲインステージと全く同じであるが、 R_{12} を抵抗 - コンデ

¹Z は抵抗 - コンデンサ並列回路のインピーダンスである。また電気回路理論の通例にのっとり、複素数を j で表して

ンサ直列回路のインピーダンス Z_L に変更する必要がある。このことから、ゼロポールステージの周波数応答は

$$V_{\text{out}} = \left(1 + \frac{Z_P}{Z_L}\right) V_{\text{in}}, \quad Z_L = \frac{1 + jR_2C_5\omega}{j\omega C_5} \quad (\text{B.4})$$

となる。よって

$$V_{\text{out}} = \left\{1 + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_4} \times \frac{j\omega C_5}{1 + j\omega R_2 C_5}\right\} V_{\text{in}} \quad (\text{B.5})$$

を得る。以下、式を簡単にするために次のような定数を導入する：

$$\begin{aligned} a &= R_1 C_5 \\ b &= R_2 C_5 \\ c &= R_1 C_4 . \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= 10 \times 10^{-6} \times 15.0 \times 10^3 = 1.5 \times 10^{-1} \\ b &= 10 \times 10^{-6} \times 1.58 \times 10^3 = 1.58 \times 10^{-2} \\ c &= 100 \times 10^{-12} \times 15.0 \times 10^3 = 1.5 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

である。また重力波検出器の測定帯域を 100Hz 程度までとすると、 $\omega = 2\pi f$ より $1/\omega \sim 1.5 \times 10^{-3}$ となる。よってこれらの定数の大小関係は

$$a \gg b \gg 1/\omega \gg c \quad (\text{B.6})$$

となる。

以上の定数を用いると式 (B.5) は

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = 1 + \frac{aj\omega}{(1 + bj\omega)(1 + cj\omega)} = \frac{1 - bc\omega^2 + (a + b + c)j\omega}{(1 + bj\omega)(1 + cj\omega)} \quad (\text{B.7})$$

となる。なお左辺は伝達関数を意識して出力を入力で割った形にしている。さて、実際に測定できる物理量はこの式の絶対値と位相である。そこでこの式の絶対値をとると

$$\left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right| = \sqrt{\frac{(1 - bc\omega^2)^2 + (a + b + c)^2 \omega^2}{(1 + b^2 \omega^2)(1 + c^2 \omega^2)}} \quad (\text{B.8})$$

を得る。以下ではゼロポールにおいて、この値がどのようなようになるかを考察する。

そもそもゼロポールという言葉は周波数応答を表す用語として適切ではない。これは「ゼロ」と「ポール」という二つの用語からなる造語である。一般的にゼロとポールは次のように定義される：

- ゼロ：伝達関数のうち分子がゼロとなる複素(角)周波数。
- ポール：伝達関数のうち分母がゼロとなる複素(角)周波数。

ただし実際に測定する場合には複素周波数ではなく、実周波数を用いることになる。このため実際にはゼロにおいて出力がゼロになるようなことや、ポールにおいて出力が無限大になるようなことはない。

以上の定義に従って本回路のゼロおよびポールでの伝達関数の絶対値と位相を求める。

B.2.1 ポールにおける伝達関数の絶対値および位相

はじめにポールにおける伝達関数の表式を求める。式 (B.6) で表した不等式から測定帯域で (B.7) 式の分母がゼロになる角周波数は $\omega = j/b$ である。しかしながら前述の通り実際に測定する周波数は実数であるため、ポールに当たる角周波数は $\omega = 1/b$ である。これを周波数 f に直すと $f = \omega/2\pi \sim 10\text{Hz}$ となる。

式 (B.6) で示した大小関係に注意しつつ式 (B.8) 式に $\omega = 1/b$ を代入するとポールにおけるゲインが求まる。これは

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right|_{\omega=1/b} &= \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{c}{b}\right)^2 + (a+b+c)^2 \frac{1}{b^2}}{(1+1)\left(1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right)}} \\ &\approx \sqrt{\frac{1 + \frac{a^2}{b^2}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{a}{b} \end{aligned}$$

となる。ここで $a/b \sim 10$ から

$$20 \log \left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right|_{\omega=1/b} = 20 - 3 = 17[\text{dB}] \quad (\text{B.9})$$

となる。つまりポールをゲインから見積もるとすると 17dB となる場所を探せばよいことになる。

一方位相については式 (B.7) にゲインと同様の角周波数を代入することで

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} &= \frac{1 - \frac{c}{b} + (a+b+c)\frac{j}{b}}{(1+j)\left(1 + j\frac{c}{b}\right)} \\ &\approx \frac{1 - 0 + (1+10)j}{(1+j)(1+j \cdot 0)} \\ &= \frac{1 - 11j}{1+j} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\arg\left(\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}\right) \approx -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2n\pi = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n = \text{整数} \quad (\text{B.10})$$

となる。

B.2.2 ゼロにおける伝達関数の絶対値および位相

次にゼロに対しても同様の計算をおこなってみる。式 (B.7) よりゼロとなる周波数は次の二次方程式の解である：

$$-bc\omega^2 + (a+b+c)j\omega + 1 = 0. \quad (\text{B.11})$$

これを解くと

$$\omega = \frac{(a+b+c)j \pm \sqrt{-(a+b+c)^2 + 4bc}}{2bc} \quad (\text{B.12})$$

となる。ここで $(a+b+c)^2 \gg 4bc$ であることから式 (B.12) で与えられる ω は純虚数となる。また

$$\omega = j \frac{a+b+c}{2bc} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4bc}{(a+b+c)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.13})$$

より近時解として

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx j \times \frac{a+b+c}{bc} \approx j \times 10^9 \\ \omega_2 &\approx j \times \frac{1}{a+b+c} \end{aligned}$$

となる。一つ目の解 ω_1 は重力波検出器の測定帯域外であることから考えないこととする。そこでもう一方の解 ω_2 に関して考察することにする。

まずポールのときと同様に実際の測定に合わせゼロを

$$\omega = \frac{1}{a+b+c} \quad (\text{B.14})$$

と実数にする。ちなみにこれを周波数に直すと

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi \times (1.5 \times 10^{-1} + 1.58 \times 10^{-2})} \approx 9.59 \times 10^{-1} \sim 1 \text{ [Hz]} \quad (\text{B.15})$$

である。計算を続ける。式 (B.14) を式 (B.8) に代入することを考える。式 (B.6) で示した大小関係に注意すると式 (B.7) の各要素は次のように近似できる：

$$\begin{aligned} 1 - bc\omega_1^2 &= 1 - \frac{bc}{(a+b+c)^2} \approx 1 \\ (a+b+c)^2\omega^2 &= 1 \\ 1 + b^2\omega^2 &= 1 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2 \approx 1 \\ 1 + c^2\omega^2 &= 1 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2 \approx 1 . \end{aligned}$$

ゆえに

$$\left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right| = \sqrt{\frac{1+1}{1 \times 1}} = \sqrt{2} \quad (\text{B.16})$$

となる。このことからゼロにおけるゲインは

$$20 \log \left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right|_{\omega=1/(a+b+c)} = 20 \times \log \sqrt{2} = 3 \text{ [dB]} \quad (\text{B.17})$$

となる。このことからゼロをゲインから見積もるためには 3dB となる周波数を探せばよいことが分かる。

続いて位相について試してみる。これもポールのときと全く同様に計算すれば良い。 $\omega = 1/(a+b+c)$ を式 (B.7) に代入すると各要素は次のようになる：

$$\begin{aligned} 1 - bc\omega_1^2 &= 1 - \frac{bc}{(a+b+c)^2} \approx 1 \\ (a+b+c)j\omega &= j \\ 1 + bj\omega &= 1 + \frac{b}{a+b+c}j \approx 1 + \frac{b}{a}j \\ 1 + cj\omega &= 1 + \frac{c}{a+b+c} \approx 1 . \end{aligned}$$

よって

$$\arg\left(\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}\right) = \arg(1+j) - \arg\left(1 + \frac{b}{a}j\right) + 2n\pi \approx \frac{\pi}{4} - \pi + 2n\pi = -\frac{3}{4}\pi + 2n\pi, n = \text{整数} \quad (\text{B.18})$$

となる。

関連図書

- [1] 三尾典克. 相対性理論 基礎から実験的検証まで (サイエンス社)
- [2] İbrahim Güllü et.al. Unitarity analysis of general Born-Infeld gravity theories (arXiv:1010.2411v2[hep-th] 8 Dec2010)
- [3] 安東正樹. Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波の制御 (修士論文)
- [4] 宮川治. 神岡地下からの重力波検出 KAGRA の制御 (2015 年 1 月 14 日富山大での講義スライド)
- [5] 上泉眞裕. JGW-D1302081-v1 : Universal Whitening Filter Board
- [6] 平松尚志. 宇宙論的起源の背景重力波による余剰次元の探求 (修士論文)
- [7] 内山龍雄. 一般相対性理論 (裳華房)
- [8] R. Abbot, P. Fritschel, S. Waldman. T1100291_v1 : aLIGO ISC Whitening Chassis Tesit Outline

謝辞

本卒業論文を書くにあたってたくさんの方に手助けをして頂きました。本卒業論文のテーマである Whitening Filter の自動検査機構の構築は KAGRA の仕事です。KAGRA という大プロジェクトに学部4年生である私が参加するチャンスを頂けたこと、それに伴って下宿等の準備をしてくださった宗宮健太郎先生にはとても感謝しています。また本論文の執筆にあたって、電子回路に不慣れな私にアドバイスを頂いたのみならず、執筆内容についても適切な助言をして頂きました。グラフや図といった基本的なことまで面倒を見て頂きとても助かりました。

また、宇宙線研究所の宮川治助教と上泉眞裕さんには KAGRA で仕事をしていた際に大変お世話になりました。宮川さんには Whitening Filter に関する知識のみならず、精密測定をする際の心得やフィルター回路の設計方法といったことまで教えて頂きました。これにより本研究内容に対する理解がより深まったのみならず、今後研究をしていく上で大きな指針になったと思います。上泉さんには回路設計および作成において重要になることや、設計において使うソフトウェアの使い方などを教えて頂きました。

大阪市立大学の神田展行教授、横澤孝章さん、鳥谷仁人さんには私が参加する以前に Whitening Filter の自動測定機構の構築をおこなっており、その時に書かれたプログラム等を使用させて頂きました。特に神田さんが書かれたスクリプトは測定時の詳細がログとして残るもので、そのまま使用させて頂きました。また横澤さんの書かれたプログラムは大変素晴らしいものであり、重要な部分はほとんど変更すること無く使用させて頂きました。鳥谷さんは以前、Whitening Filter の測定をやられており、その結果は測定をおこなう上でも本論文を書くうえでも大いに参考になりました。

その他にも宇宙線研究所の苔山圭以子助教には自動測定システムの結果をグラフにするプログラムの土台を作ってくださいました。このプログラムのおかげで膨大な測定結果を整理しやすくなったのみならず、python というプログラム言語を理解する教科書にもなりました。また宇宙線研究所の土井康平さんには以前アナログ回路設計の一線で活躍なさっていたということで、本測定における様々な助言を頂きました。これは正しい測定機構を作る上で大変有用なものでした。

さらに宇宙線研究所の中野雅之さん、宗宮研究室の先輩である加藤準平さん、矢野和城さん、糸田綾香さんには神岡滞在中に、研究以外でもたくさん手助けをして頂きました。先輩方のおかげで初めての一人暮らしを事故や怪我なく終えることができました。また同期の熱田将くんはよき研究室メンバーであり、約二ヶ月の間富山生活を支えてくれました。先輩不在の中、ともにバスで神岡まで通った日々はよい思い出です。皆さんのおかげで神岡滞在が大学生活の中で最も楽しい時間になり、一生の思い出にもなりました。

ここに書かせて頂いた方々以外にも、神岡分室の事務の皆様や KAGRA メンバーの皆様には大変お世話になりました。経験も知識も無い私を暖かく迎え入れて頂いたことに感謝いたします。

最後に東京工業大学で学ばせてくれ、さらに突然の一人暮らしの準備等を手伝ってくれた家族に感謝を伝えたいと思います。